به نام خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی برق

Statistical learning

Assignment 2

Mohammad hasan shammakhi

محمد حسن شماخی

۹۳۱۲۳۰۵۳

‹The Elements of Statistical Learning›

Chapter4 Exercise2:

a)

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma_k|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)}$$

$$\pi_2 f_2 > \pi_1 f_1 \rightarrow \frac{\pi_2}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma_k^{-1}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T|\Sigma_k^{-1}|(x-\mu_2)} > \frac{\pi_1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma_k^{-1}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T|\Sigma_k^{-1}|(x-\mu_1)} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{ln} ln(\pi_2) - \frac{1}{2}(x-\hat{\mu}_2)^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| (x-\hat{\mu}_2) > ln(\pi_1) - \frac{1}{2}(x-\hat{\mu}_1)^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| (x-\hat{\mu}_1) \text{ (I)}$$

$$(x-\mu_i)^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| (x-\mu_i) = x^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| x - x^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| \mu_i - {\mu_i}^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| x + {\mu_i}^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| \mu_i \text{ (II)}$$

$$\pi_1 = \frac{N_1}{N}, \pi_2 = \frac{N_2}{N}, \sum\nolimits_k^{-1} = \sum\nolimits^{-1}$$

$$x^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_i = \left(x^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_i\right)^T = {\mu_i}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right|^T (x^T)^T = {\mu_i}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| x \text{ (III)}$$

$$\text{(IV)} \begin{cases} (\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1)^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| (\hat{\mu}_2-\hat{\mu}_1) = {\mu_2}^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| \mu_2 - {\mu_2}^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| \mu_1 + {\mu_1}^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| \mu_2 - {\mu_1}^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| \mu_1 = \\ \underbrace{{\mu_2}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_2 - {\mu_1}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_1}_{A} - {\mu_2}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_1 + {\mu_1}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_2 = A - {\mu_2}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_1 + \left({\mu_2}^T \left|\sum\nolimits^{-1}\right| \mu_1\right)^T = A \end{cases}$$

$$\text{I, II, III, IV} \rightarrow +2x^T|\Sigma^{-1}|\hat{\mu}_2 - {\hat{\mu}_2}^T|\Sigma^{-1}|\hat{\mu}_2 > 2ln(\tfrac{\pi_1}{\pi_2}) + 2x^T|\Sigma^{-1}|\hat{\mu}_1 - {\hat{\mu}_1}^T|\Sigma^{-1}|\hat{\mu}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| (\hat{\mu}_2-\hat{\mu}_1) > -ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right) + \frac{1}{2}(\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1)^T \left|\sum\nolimits_k^{-1}\right| (\hat{\mu}_2-\hat{\mu}_1)$$

اون معادله با اسم معادله ۳ از این جا میاد که اگر A ماتریسی ۱*۱ باشه یعنی عدد باشه پس مطمئنا ترانهاده آن با خودش برابر هست.

b)

با توجه به حجم بالای فرمول های این قسمت بجای تایپ کردن عکس انداختم.

Subject: 1
Year: Month: Date:

می‌دانیم:

$$Y_i = B_0 + \sum B_i x_{i1}$$

که x_{i1} متغیر پیش‌بینی کننده iام در شاخصه اول یا همان دیتای شماره ۱ است

خوب پس می‌توان گفت

$$Y_1 = B^T X_1^T = X_1 B$$

که $X_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B \end{bmatrix}$ است

حال می‌خواهیم همهٔ دیتا را با هم بنویسیم:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم N_1 دیتا در کلاس ۱ و N_2 دیتا در کلاس ۲ بودند پس برای کد کردن آنها از $-\frac{N}{N_1}$ و $+\frac{N}{N_2}$ استفاده می‌کنیم تا $\sum Y_i = 0$ شود.

$$XB = Y \rightarrow X^T X B = X^T Y \quad (\mathrm{III})$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1^T \\ 1 & x_2^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_1^N x_i^T \\ \sum_1^N x_i & \sum_1^N x_i x_i^T \end{bmatrix} \quad (\mathrm{I})$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{N}{N_1} \\ \vdots \\ -\frac{N}{N_1} \\ +\frac{N}{N_2} \\ \vdots \\ +\frac{N}{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N\mu_1 + N\mu_2 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{II})$$

Subject: ۲

Year: Month: Date:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N-2}\left[\sum_{i=g_i=1}(x_i-\mu_1)(x_i-\mu_1)^T + \sum_{i=g_i=2}(x_i-\mu_2)(x_i-\mu_2)^T\right]$$

$$= \frac{1}{N-2}\left[\sum_{g_i=1} x_i x_i^T - N_1\mu_1\mu_1^T + \sum_{g_i=2} x_i x_i^T - N_2\mu_2\mu_2^T\right]$$

$$\Rightarrow (N-2)\hat{\Sigma} = \sum_{g_i=1} x_i x_i^T - N_1\mu_1\mu_1^T - N_2\mu_2\mu_2^T \rightarrow \sum x_i x_i^T = (N-2)\hat{\Sigma} + N_1\mu_1\mu_1^T + N_2\mu_2\mu_2^T \quad \mathrm{V}$$

$$\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III} \rightarrow \begin{bmatrix} N & N_1\mu_1^T + N_2\mu_2^T \\ N_1\mu_1 + N_2\mu_2 & \sum_{g_i=1} x_i x_i^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N\mu_1 + N\mu_2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{IV}$$

$$\left(\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_{x_1} \rightarrow \text{پیشگویی کننده اول} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_p} \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathrm{IV} \Rightarrow B_0 = \left(-\frac{N_1}{N}\mu_1^T - \frac{N_2}{N}\mu_2^T\right)B \rightarrow \sum x_i x_i^T B + (\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2)B_0 = \underbrace{-N\mu_1 + \mu_2 N}_{A}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV},\mathrm{V}} (N-2)\hat{\Sigma} + N_1\mu_1\mu_1^T + N_2\mu_2\mu_2^T + (\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2)\left(-\frac{N_1}{N}\mu_1^T - \frac{N_2}{N}\mu_2^T\right) = A$$

$$\rightarrow (N-2)\hat{\Sigma} + \frac{N_1 N_2}{N}\left(\mu_1\mu_1^T + \mu_2\mu_2^T - \mu_1\mu_2^T - \mu_2\mu_1^T\right) = A = N(\mu_2 - \mu_1)$$

$$\rightarrow (N-2)\hat{\Sigma} + \frac{N_1 N_2}{N}\hat{\Sigma}_B = N(\mu_2 - \mu_1)$$

C) با توجه به اینکه داریم:

$$\hat{\sum} B\,\boldsymbol{\beta} = \frac{N_1N_2}{N^2}(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)^T\boldsymbol{\beta}$$

و اینکه $(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)^T$ ماتریسی 1*n و $\boldsymbol{\beta}$ ماتریسی n*1 است پس $(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)^T\boldsymbol{\beta}$ عدد می باشد

لذا $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\beta}\ \hat{\sum}$ هم جهت با $(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)$ بوده و ضریبی از آن می باشد.

بنابراین: $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \propto \sum^{-1}(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)$

d)

code: U , V در این حالت تفاوت چندانی ایجاد نمی‌شود جز در:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} UN_1 + VN_2 \\ UN_1\mu_1 + VN_2\mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N & N_1\mu_1^T + N_2\mu_2^T \\ N_1\mu_1 + N_2\mu_2 & (N-2)\hat{\Sigma} + N_1\mu_1\mu_1^T + N_2\mu_2\mu_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1U + N_2V \\ U\mu_1N_1 + V\mu_2N_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[(N-2)\Sigma + \frac{N_1N_2}{N}\Sigma_B\right] B = \frac{N_1N_2}{N}(\mu_2-\mu_1)(V-U)$$

* دقیقا به همان دلایلی که برای بخش c آوردم اینجا هم $B \propto \Sigma^{-1}(\mu_2-\mu_1)$

Chapter4 Question 4:

برای یک پیش بینی کننده فضا در دسترس به این صورت خواهد بود که دقیقا هر میزان از فضای موجود را انتخاب کنیم همان میزان از داده ها در دسترس خواهد بود یعنی مثلا وقتی از بازه ۰.۵ از داده ها یعنی (۰.۵۵-۰.۴۵) را به عنوان تست انتخاب کنیم دقیقا بر ۱۰ ٪ از داده ها تست صورت می‌گیرد. اما در فضای با دو پیش بینی کننده با انتخاب بازه ۰.۳۵ و ۰.۸۵ برای دو پیش بینی کننده در واقع ۱ ٪ از داده ها مورد استفاده قرار می گیرد. پس:

a) با بکارگیری بازه ۱۰ ٪ بدیهی است ۱۰ ٪ از دیتا به عنوان تست انتخاب می شود

b) با بکارگیری بازه ۱۰ ٪ از هر پیش بینی کننده ۱ ٪ از دیتا به عنوان تست انتخاب می شود.

c) با بکارگیری بازه ۱۰ ٪ از هر پیش بینی کننده ۱۰ به توان منفی ۹۸٪ از دیتا به عنوان تست انتخاب می شود. که عملا هیچ دیتایی را با احتمال بالا شامل نمی شود.

e) برای بکارگیری داده به عنوان تست ۱۰٪ آن ها مناسب می باشد که معادل ۱۰ ٪ از مقادیر ممکن برای عوامل پیش بینی کننده است

حال اگر دو پیش بینی کننده داشته باشیم و بخواهیم ۱۰ ٪ از دیتا را به عنوان تست استفاده کنیم پس می توان گفت $R^2 = 0.1$ بنابراین $R = 0.32$ پس ازهر پیش بینی کننده ۳۲ ٪ از آنها را انتخاب کرده و به عنوان داده تست در نظر می گیریم.

حال اگر ۱۰۰ پیش بینی کننده داشته باشیم و بخواهیم ۱۰ ٪ از دیتا را به عنوان تست استفاده کنیم پس می توان گفت $R^{100} = 0.1$ بنابراین $R = 0.98$ پس ازهر پیش بینی کننده ۹۸ ٪ از آنها یعنی عملا کل دیتا را باید به عنوان تست انتخاب کنیم که کارامد نمی باشد.

Chapter4 Question 5:

a) با اینکه سیستم مدل خطی دارد اما بخاطر انعطاف بیشتر QDA ممکن است خودش رو بر داده ها تا حدی fit کند لذا بر روی داده های آموزشی ممکن است جواب بهتری بدهد لذا نمی توان برروی داده های آموزشی را با یقین گفت اما بر روی دیتای تست LDA پاسخ بهتری خواهد داد.(فرض: تعداد دیتا به اندازه کافی باشد)

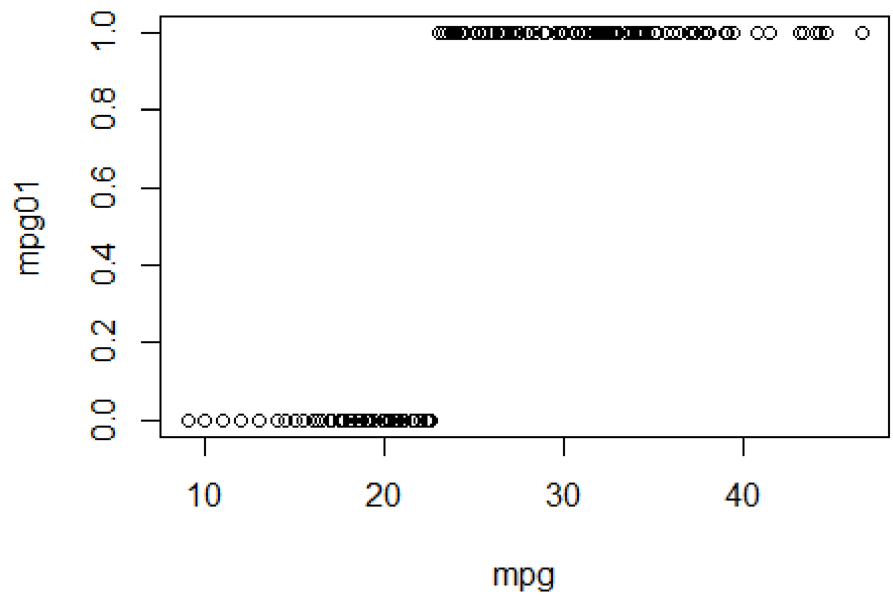
b)برای سیستم های غیر خطی با توجه به دیتا ممکن است LDA یا QDA کارآمد شود .

c) در سیستم های غیر خطی به نظر می آید با افزایش تعداد نمونه ها سیستم واقعی خود را بیشتر نشان دهد و از تصادفی بودن کارآمدی مدل پیشنهاد خارج شود لذا احتمالا پاسخ QDA بهبود خواهد یافت.

d)برای داده های با تعداد کم می تواند درست باشد اما بتدریج با افزایش تعداد نمونه ها این امکان برای QDA وجود نخواهد داشت

Chapter4 Question 11:

```
rm(list=ls())
library(ISLR)

## Warning: package 'ISLR' was built under R version 3.1.3

attach(Auto)
#a
mpg01=ifelse(mpg<median(mpg),0,1)
plot(mpg,mpg01)
```



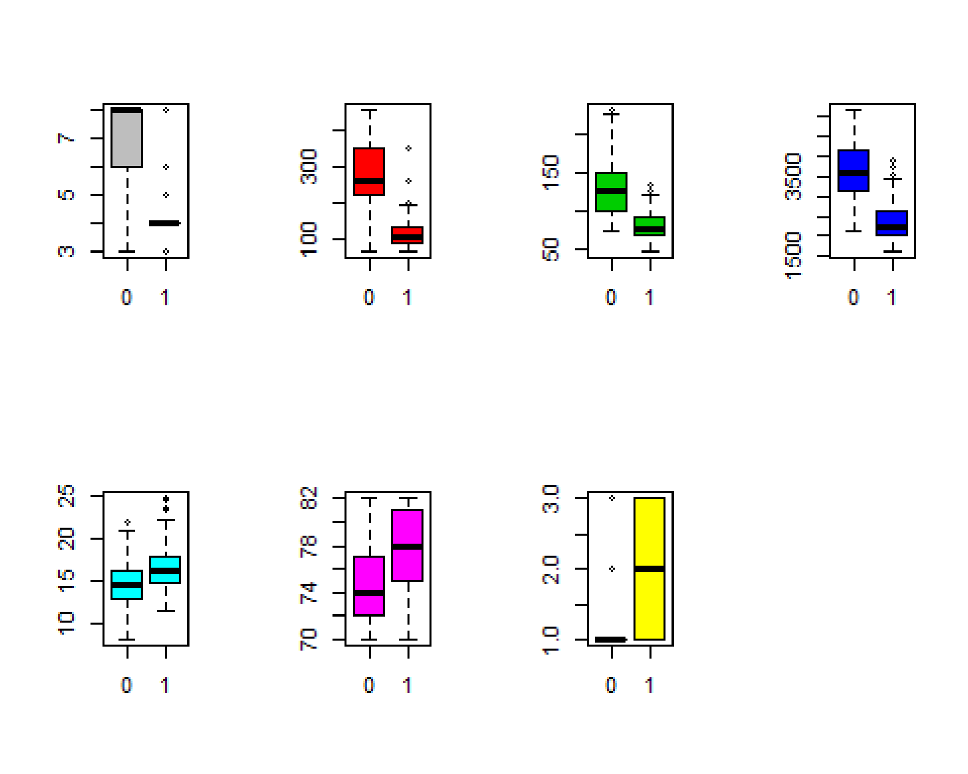
در اینجا می توان دید که آن برش مورد نظر نسبت به میانه زده شده است.

```
nAuto=data.frame(mpg01,Auto[-1])
```

حال دیتای جدیدی می سازیم که بجای mpg متغیر mpg01 گذاشته شده است.

```
#b
par(mfrow=c(2,4))
boxplot(cylinders~mpg01, col=8)
boxplot(displacement~mpg01, col=2)
boxplot(horsepower~mpg01, col=3)
boxplot(weight~mpg01, col=4)
boxplot(acceleration~mpg01, col=5)
boxplot(year~mpg01, col=6)
boxplot(origin~mpg01, col=7)
```

پس از رسم plotbox ها می توان دید که mpg01 بیشتر از بقیه به cylinders و displacement و horsepower و weight و year وابسته می باشد.



حال داده ها را به دو دسته train و تست تقسیم می کنیم که در این مثال داده های آموزشی را ماشین های تولید قبل سال ۸۰ در نظر گرفته ایم.

```
#c
ind=(year<80);
train=nAuto[ind,]
test=nAuto[!ind,]
################
#d
library(MASS)
mod=lda(mpg01~cylinders+displacement+horsepower+weight+year,data = train)
summary(mod)
```

```
##         Length Class  Mode
## prior    2     -none- numeric
## counts   2     -none- numeric
## means   10     -none- numeric
## scaling  5     -none- numeric
## lev      2     -none- character
## svd      1     -none- numeric
## N        1     -none- numeric
## call     3     -none- call
## terms    3     terms  call
## xlevels  0     -none- list
```

ابتدا داده های اموزشی را ترین کردیم و می خواهیم بر روی داده های تست حاصل کار خود را ببینیم

```
pred=predict(mod,test,type = "response")
head(pred$class)
```

```
## [1] 1 1 1 1 1 1
## Levels: 0 1
```

حال داده ها را با تقریب به ۰ و ۱ که معرف کلاس ها هست تقسیم می کنیم؛ پس از آن جدولی تشکیل می دهیم تا ببینیم چقدر به اشتباه ۰ ها را ۱ و چقدر از ۱ ها را ۰ تشخیص داده است.

```
class_pred=pred$class
table(class_pred,mpg01[!ind])
```

```
##
## class_pred  0  1
##          0  4  4
##          1  1 76
```

```
mean(class_pred!=mpg01[!ind])
```

مشاهده می شود که ۶ درصد خطا خواهیم داشت.

```
## [1] 0.05882353
```

```
################
#e
```

حال به روش QDA می خواهیم عمل کنیم وببینیم چقدر تفاوت ایجاد خواهد شد و آیا از LDA بهتر خواهد بود.

```
mod=qda(mpg01~cylinders+displacement+horsepower+weight+year,data = train)
summary(mod)
```

```
##         Length Class  Mode
## prior    2     -none- numeric
## counts   2     -none- numeric
## means   10     -none- numeric
## scaling 50     -none- numeric
## ldet     2     -none- numeric
## lev      2     -none- character
## N        1     -none- numeric
## call     3     -none- call
## terms    3     terms  call
## xlevels  0     -none- list
```

```
pred=predict(mod,test,type = "response")
head(pred$class)
```

```
## [1] 1 1 1 1 1 1
## Levels: 0 1
```

```
class_pred=pred$class
table(class_pred,mpg01[!ind])
```

```
##
## class_pred  0  1
##          0  5 11
##          1  0 69
```

```
mean(class_pred!=mpg01[!ind])
```

```
## [1] 0.1294118
```

مشاهده می شود که ۱۳ درصد خطا خواهیم داشت. که یکی از دلایل آن ارتباط خطی موجود بین برخی پیش بینی کننده و mpg01 است که در حالت QDA بخاطر انعطاف بیشتر منحنی را تا حدی بر دیتا fit کرده ایم.

```
################
#f
```

حال تین بار می خواهیم به روش logistic regression عمل کنیم و ببینیم چقدر تفاوت ایجاد خواهد شد و آیا از روش های قبلی بهتر خواهد بود.

```
mod=glm(mpg01~cylinders+displacement+horsepower+weight+year,data = train)
summary(mod)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = mpg01 ~ cylinders + displacement + horsepower +
##     weight + year, data = train)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.8963  -0.2213   0.1045   0.2156   0.9935
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   6.024e-01  5.177e-01   1.164  0.24546
## cylinders    -9.744e-02  3.405e-02  -2.862  0.00451 **
## displacement -6.038e-05  7.310e-04  -0.083  0.93423
## horsepower    2.155e-03  1.065e-03   2.024  0.04381 *
## weight       -3.082e-04  5.858e-05  -5.262 2.71e-07 ***
## year          1.440e-02  6.841e-03   2.105  0.03614 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for gaussian family taken to be 0.09939563)
##
##     Null deviance: 72.169  on 306  degrees of freedom
## Residual deviance: 29.918  on 301  degrees of freedom
## AIC: 170.41
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

هر چند این تخمین نشان می‌دهد برخی پارامترهای انتخابی ما خیلی هم مناسب نبوده اما با همین پارامترها ادامه خواهیم داد تا بتوان مقایسه ای بین روش های مختلف پیش بینی داشته باشیم.

```
pred=predict(mod,test,type = "response")
pred[pred<=0.5]=0
pred[pred>0.5]=1
```

با توجه به اینکه عملگر $class بر روی پیش بینی به روش glm تعریف نشده به روش بالا خودمان تقریب زده ایم.

```r
table(pred,mpg01[!ind])
```

```
##
## pred  0  1
##    0  4  5
##    1  1 75
```

```r
mean(pred!=mpg01[!ind])
```

```
## [1] 0.07058824
```

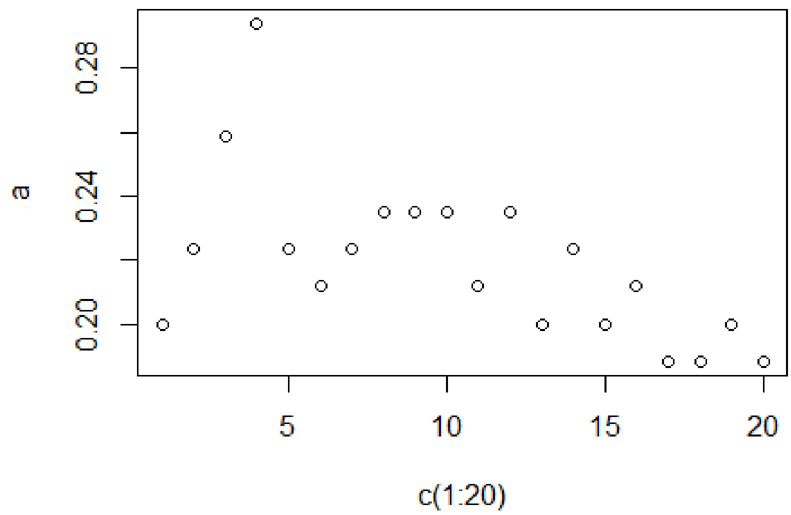
مشاهده می شود که ۷ درصد خطا داریم که بیان کننده این است که هرچند از روش QDA بهتر است اما از روش LDA بهتر نمی باشد.

```r
################
#g
```

حال نوبت به روش KNN رسیده و می خواهیم ببینیم این روش نسبت به کدام روش ها بر روی این داده ها پاسخ بهتری می دهد.

```r
library(class)
train.Y=mpg01[ind]
test.Y=mpg01[!ind]
set.seed(10)
a={};K=1;
pred=knn(train[,-9],test[,-9],mpg01[ind],k=1)
a[1]=mean(test.Y!=pred)
for (i in 2:20)
{pred=knn(train[,-9],test[,-9],mpg01[ind],k=i)
a[i]=mean(test.Y!=pred)
K=ifelse(a[i]<min(a[-i]),i,K)
}
par(mfrow=c(1,1))
```

```r
plot(c(1:20),a)
```



```
K
## [1] 17
```

پس از محاسبه بهترین K که در اینجا ۱۷ بدست آمد خطای تخمین را به ازای K=17 محاسبه می کنیم.

```
pred=knn(train[,-9],test[,-9],mpg01[ind],k=K)
knn_er=mean(test.Y!=pred)
knn_er
## [1] 0.1882353
```

مشاهده می کنیم که ۱۹ درصد خطا داریم که یکی از دلایل اصلی آن زیاد بودن تعداد پیش بینی کننده ها و تاثیر منفی زیاد پارامترهایی است که ارتباط کمتری با mpg01 دارد.

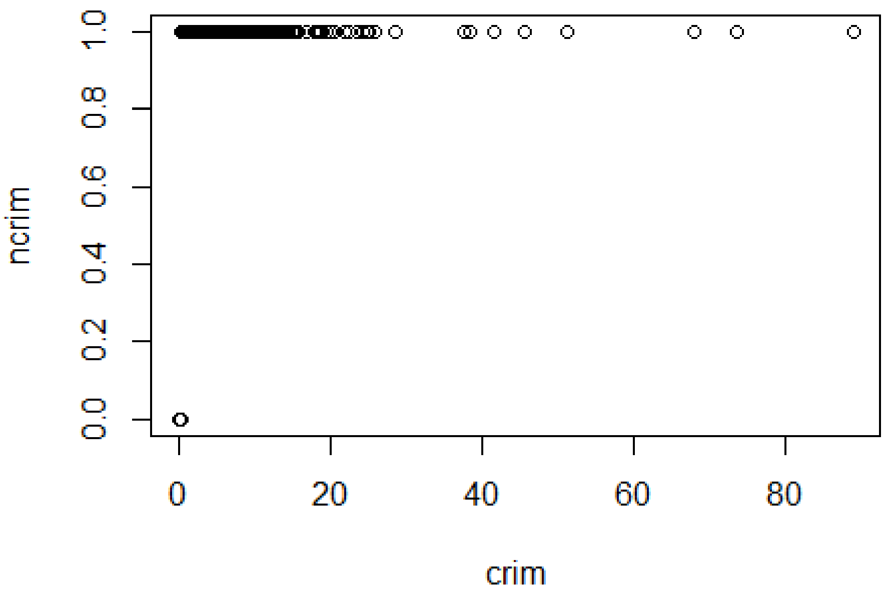
Chapter4 Question 13:

دقیقا همان کارهایی که در سوال قبل انجام دادیم را روی این دیتا انجام خواهیم داد. هرچند QDA را نخواسته است اما آن را نیز مقایسه خواهیم کرد.

```
rm(list=ls())
library(MASS)
attach(Boston)
names(Boston)
```

```
##  [1] "crim"    "zn"      "indus"   "chas"    "nox"     "rm"      "age"
##  [8] "dis"     "rad"     "tax"     "ptratio" "black"   "lstat"   "medv"
```

```
ncrim=ifelse(crim<median(crim),0,1)
plot(crim,ncrim)
```



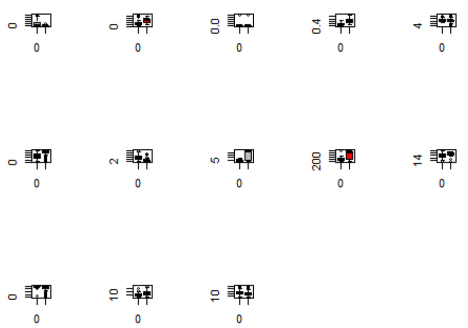
شکل بالا نشان می دهد مقادیر بزرگتر از میانه که عددی کوچک است پراکندگی بالایی دارند بطوری که تا ۱۰۰ برابر بزرگتر از مقدار میانه نیز نمونه داریم.

```
nBoston=data.frame(ncrim,Boston[-1])
par(mfrow=c(3,5))
cor(ncrim,medv)
```

```
## [1] -0.2630167
```

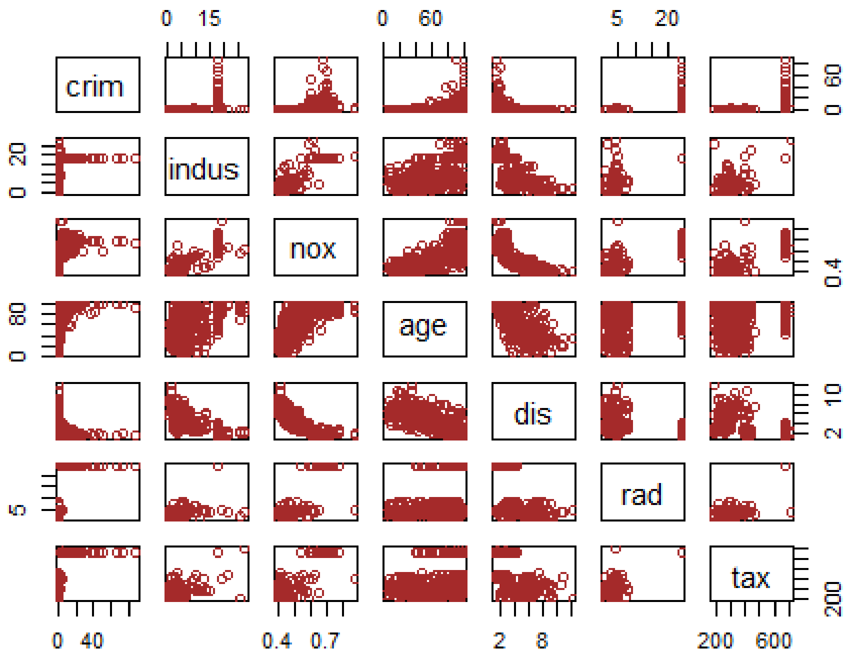
```
boxplot(zn~ncrim, col=8)
boxplot(indus~ncrim, col=2)
boxplot(chas~ncrim, col=3)
boxplot(nox~ncrim, col=4)
boxplot(rm~ncrim, col=5)
```

```r
boxplot(age~ncrim, col=6)
boxplot(dis~ncrim, col=7)
boxplot(rad~ncrim, col=8)
boxplot(tax~ncrim, col=2)
boxplot(ptratio~ncrim, col=3)
boxplot(black~ncrim, col=4)
boxplot(lstat~ncrim, col=5)
boxplot(medv~ncrim, col=6)
#indus-nox-age-dis-rad-tax
pairs(crim~indus-nox-age-dis-rad-tax,col="brown")
```



با توجه به اینکه از plotbox های بالا چیزی معلوم نیست و امکان زوم در این فایل وجود ندارد؛ فقط نتایج آن را شرح می دهم.

از شکل های بدست آمده می توان فهمید که Ncrim به پارامترهای indus و nox و age و dis و rad و tax مرتبط می باشد.



داده های train و test را بر اساس تعداد اتاق هر واحد جداکرده ام به طوری که با توجه به واحدهای با کمتر از ۷ اتاق عدد جرایم برای واحد های با تعداد اتاق بیش از ۷ را پیش بینی می کنیم

```
ind=(rm<7);
train=nBoston[ind,]
test=nBoston[!ind,]
##################
#predicting
mod=lda(ncrim~indus+nox+age+dis+rad+tax,data = train)
summary(mod)
```

```
##           Length Class  Mode
## prior      2     -none- numeric
## counts     2     -none- numeric
## means     12     -none- numeric
## scaling    6     -none- numeric
## lev        2     -none- character
## svd        1     -none- numeric
## N          1     -none- numeric
## call       3     -none- call
## terms      3     terms  call
## xlevels    0     -none- list
```

```
pred=predict(mod,test,type = "response")
head(pred$class)
```

```
## [1] 0 0 0 0 0 0
## Levels: 0 1
```

```
class_pred=pred$class
table(class_pred,ncrim[!ind])
```

```
##
## class_pred  0  1
##          0 35 12
##          1  0 17
```

```
mean(class_pred!=ncrim[!ind])
```

```
## [1] 0.1875
```

خطای LDA برابر ۱۸.۷۵ ٪ می باشد.

```
################
mod=qda(ncrim~indus+nox+age+dis+rad+tax,data = train)
summary(mod)
```

```
##           Length Class  Mode
## prior      2     -none- numeric
## counts     2     -none- numeric
## means     12     -none- numeric
## scaling   72     -none- numeric
## ldet       2     -none- numeric
## lev        2     -none- character
## N          1     -none- numeric
## call       3     -none- call
```

```
## terms    3     terms  call
## xlevels  0     -none- list
```

```r
pred=predict(mod,test,type = "response")
head(pred$class)
```

```
## [1] 0 0 0 0 0 0
## Levels: 0 1
```

```r
class_pred=pred$class
table(class_pred,ncrim[!ind])
```

```
##
## class_pred  0  1
##          0 35  6
##          1  0 23
```

```r
mean(class_pred!=ncrim[!ind])
```

```
## [1] 0.09375
```

خطای QDA برابر ۹.۳ ٪ می باشد.

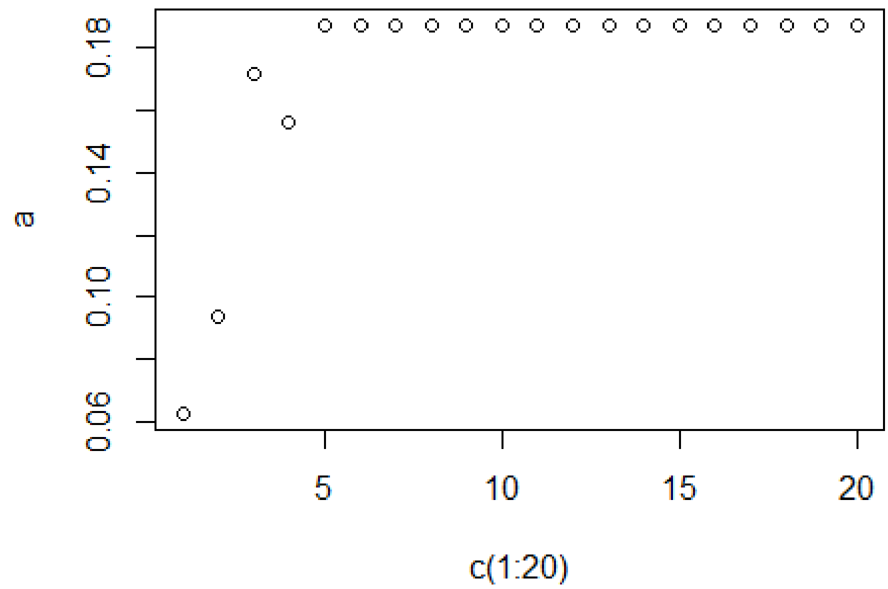
```r
################
mod=glm(ncrim~indus+nox+age+dis+rad+tax,data = train)
summary(mod)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = ncrim ~ indus + nox + age + dis + rad + tax, data = train
)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.6155  -0.1806  -0.0509   0.1027   0.8959
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.7068608  0.1585024  -4.460 1.05e-05 ***
## indus        0.0051373  0.0043130   1.191  0.23426
## nox          1.6035450  0.2486188   6.450 2.99e-10 ***
## age          0.0028177  0.0008612   3.272  0.00115 **
## dis         -0.0063852  0.0130372  -0.490  0.62455
## rad          0.0215304  0.0042866   5.023 7.45e-07 ***
## tax         -0.0003269  0.0002565  -1.275  0.20308
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for gaussian family taken to be 0.1014715)
##
##     Null deviance: 110.48  on 441  degrees of freedom
## Residual deviance:  44.14  on 435  degrees of freedom
## AIC: 252
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

```
pred=predict(mod,test,type = "response")
pred[pred<=0.5]=0
pred[pred>0.5]=1
table(class_pred,ncrim[!ind])

##
## class_pred  0  1
##          0 35  6
##          1  0 23

mean(class_pred!=ncrim[!ind])

## [1] 0.09375
```

خطای logistic regression برابر ۹.۳ ٪ می باشد.

```
################
library(class)
train.Y=ncrim[ind]
test.Y=ncrim[!ind]
set.seed(10)
a={};K=1;
pred=knn(train[,c(3,5,7,9,10)],test[,c(3,5,7,9,10)],ncrim[ind],k=1)
a[1]=mean(test.Y!=pred)
for (i in 2:20)
{pred=knn(train[,c(3,5,7,9,10)],test[,c(3,5,7,9,10)],ncrim[ind],k=i)
a[i]=mean(test.Y!=pred)
K=ifelse(a[i]<min(a[-i]),i,K)
}
par(mfrow=c(1,1))
plot(c(1:20),a)
```




```
K

## [1] 1
```

```
pred=knn(train[,c(3,5,7,9,10)],test[,c(3,5,7,9,10)],ncrim[ind],k=i)

knn_er=mean(test.Y!=pred)

knn_er
```

```
##[1] 0.0625
```

خطای KNN در بهترین شرایط یعنی برای K=1 برابر ۶ ٪ می باشد.

از مشاهدات انجام شده می توان فهمید KNN بهترین روش برای تخمین عدد جرم می باشد که می توان گفت یکی از مهمترین دلایل این برتری بدلیل اهمیت بالای پارامترهای انتخابی بوده است.

Chapter5 Question5:

```
rm(list=ls())
library(ISLR)

## Warning: package 'ISLR' was built under R version 3.1.3

attach(Default)
#a
set.seed(1)
ind=sample(1:10000,9000)
train=Default[ind,]
test=Default[-ind,]
mod=glm(default~income+balance,data = Default,family=binomial)
summary(mod)

##
## Call:
## glm(formula = default ~ income + balance, family = binomial,
##     data = Default)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.4725  -0.1444  -0.0574  -0.0211   3.7245
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -1.154e+01  4.348e-01 -26.545  < 2e-16 ***
## income       2.081e-05  4.985e-06   4.174 2.99e-05 ***
## balance      5.647e-03  2.274e-04  24.836  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 2920.6  on 9999  degrees of freedom
## Residual deviance: 1579.0  on 9997  degrees of freedom
## AIC: 1585
## Number of Fisher Scoring iterations: 8

pred=predict(mod,test,type = "response")
pred[pred<=0.5]="YES"
pred[pred>0.5]="No"
table(pred,default[-ind])

## pred  No Yes
##   No 971  29

mean(pred!=default[-ind])

## [1] 0.029
```

تا اینجا یک تخمین logistic regression ساده روی تمام ۱۰۰۰۰ داده موجود در دیتاست Default زده ایم و روی ۱۰۰۰ داده تست کرده ایم که میزان خطا ۲.۹ ٪ بدست آمده است.

```r
#b
mod=glm(default~income+balance,data = train,family=binomial)
summary(mod)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = default ~ income + balance, family = binomial,
##     data = train)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.4874  -0.1449  -0.0573  -0.0209   3.7210
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -1.153e+01  4.559e-01 -25.281  < 2e-16 ***
## income       2.028e-05  5.250e-06   3.862 0.000112 ***
## balance      5.668e-03  2.395e-04  23.663  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 2657.5  on 8999  degrees of freedom
## Residual deviance: 1433.7  on 8997  degrees of freedom
## AIC: 1439.7
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 8
```

```r
pred=predict(mod,test,type = "response")
pred[pred<=0.5]="YES"
pred[pred>0.5]="No"
table(pred,default[-ind])
```

```
##
## pred  No Yes
##   No 971  29
```

```r
mean(pred!=default[-ind])
```

```
## [1] 0.029
```

در این قسمت دقیقا همان کار را برروی داده ها انجام دادیم با این تفاوت که داده های آموزشی را از کل داده ها به ۹۰۰۰ داده کاهش داده ایم. اما چون تعداد داده های آموزشی همچنان زیاد است تفاوتی ایجاد نشده است. که در ادامه با تعداد داده آموزشی کمتر تفاوت آنها را خواهیم دید.

```r
#c
a={}
for (i in 1:3)
{ind=sample(1:10000,3000*i)
train=Default[ind,]
test=Default[-ind,]
mod=glm(default~income+balance,data = train,family=binomial)
summary(mod)
```

```
pred=predict(mod,test,type = "response")
pred[pred<=0.5]="YES"
pred[pred>0.5]="No"
table(pred,default[-ind])
a[i]=mean(pred!=default[-ind])
}
a
```

```
## [1] 0.03171429 0.03250000 0.04200000
```

در این قسمت آزمایش را به ترتیب با ۹۰۰۰ ، ۶۰۰۰ ، ۳۰۰۰ داده آموزشی و بقیه داده تست انجام داده ایم. مشاهده می کنیم که هرچه تعداد داده های آموزشی بیشتر بوده خطای ما نیز کمتر شده است.

```
#d
set.seed(1)
ind=sample(1:10000,9000)
train=Default[ind,]
test=Default[-ind,]
mod=glm(default~income+balance+student,data = Default,family=binomial)
summary(mod)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = default ~ income + balance + student, family = binomial,
##     data = Default)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.4691  -0.1418  -0.0557  -0.0203   3.7383
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -1.087e+01  4.923e-01 -22.080  < 2e-16 ***
## income       3.033e-06  8.203e-06   0.370  0.71152
## balance      5.737e-03  2.319e-04  24.738  < 2e-16 ***
## studentYes  -6.468e-01  2.363e-01  -2.738  0.00619 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 2920.6  on 9999  degrees of freedom
## Residual deviance: 1571.5  on 9996  degrees of freedom
## AIC: 1579.5
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 8
```

```
pred=predict(mod,test,type = "response")
pred[pred<=0.5]="YES"
pred[pred>0.5]="No"
table(pred,default[-ind])
```

```
##
## pred  No Yes
##   No 971  29
```

```
mean(pred!=default[-ind])

## [1] 0.029
```

در این قسمت یک پارامتر دیگر با وابستگی کمتر که نشان دهنده دانش آموز بودن یا نبودن را اضافه کردیم.

همانطور که مشاهده می شود برای داده های آموزشی بالا اثر منفی این عامل خنثی می شود ولی در حالت با داده آموزشی کم تاثیر منفی می گذارد.

Chapter5 Question9:

```
rm(list=ls())
st_er=function(data,index)
{
  len=length(index)
  miu=mean(data[index])
  a=mean((data[index]-miu)^2)
  se=(a/len)^0.5
}
library(MASS)
library(boot)
attach(Boston)
#a
miu=mean(medv)
miu
```

```
## [1] 22.53281
```

همانطور که خواسته شده بود میانگین مقدار پول با واحد ۱۰۰۰ دلار که مالک دریافت می کند را بدست آوردیم.

```
#b
se=st_er(medv,1:length(medv))
se
```

```
## [1] 0.4084569
```

خطای استاندارد به ازای تخمین میانگین medv به جای مقادیر آن برابر ۴۰ درصد می شود.

```
Rss=sum((medv-miu)^2)
#c
```

حال می خواهیم خطای استاندارد را و تخمین بازای میانگین را در حالتی انجام دهیم که میانگین به روش bootstrap بدست آورده باشیم.

```
alpha.fn=function(data,index){
  X=data$medv[index]
   }
alpha.fn(Boston,length(medv))
set.seed(1)
alpha.fn(Boston,sample(length(medv),length(medv),replace=T))
boot(medv,st_er,R=1000)
```

```
##
## ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP
##
##
## Call:
## boot(data = medv, statistic = st_er, R = 1000)
##
##
## Bootstrap Statistics :
```

```
##      original       bias    std. error
## t1* 0.4084569 -6.27049e-05  0.01654656
```

خطای استاندارد به ازای تخمین میانگین medv به روش bootstrap برابر ۱.۶ درصد می شود.

حال می توان اختلاف زیاد این روش با روش عادی را مشاهده کرد.

```
#d
se_medv=st_er(medv,1:length(medv))
miu=mean(medv)
con_int_medv=c(miu-2*se_medv,miu+2*se_medv)
s1=(min(con_int_medv)<medv)&(max(con_int_medv)>medv)
nData=Boston[s1,]
```

در این قسمت فقط داده هایی را جدا کردیم که در بازه ۹۵ ٪ فاصله اطمینان را شامل باشد و نام آن را nData گذاشتیم.

```
#e
mu=median(medv)
```

حال همان روند کاری قبلی را نسبت به میانه انجام می دهیم.

```
#f
len=length(medv)
aprim={}
set.seed(1)
for (i in 1:100)
{
ind=sample(len,len,replace=T)
train=Boston[ind,]
nmedv=train$medv
miu=median(nmedv)
a=mean((nmedv-miu)^2)
se=(a/len)^0.5
aprim[i]=se
}
ahat=mean(se)
set=sqrt(sum((aprim-ahat)^2)/(length(aprim)-1))
set
## [1] 0.01755158
```

می بینیم که خطای استاندارد بدست آمده برابر ۱.۷ ٪ یعنی اندکی بیشتر از حالت قبل خواهد بود.

در این سری از سوالات سعی شد تنوعی از مدل های برنامه نویسی برای رسیدن به هدفمان در برنامه R ارائه شود؛ نظیر تابع نویسی یا بدون تابع که نظیر آن در سوال آخر دیده می شود که هم تابع bootstrap بوسیله کتابخانه ها و هم بصورت پایه ای نوشته شده است. تا هم بر ریاضیات کار مسلط شوم و هم با نحوه به کارگیری این زبان برای کاربرد مورد نظر.

ممنون از توجهتان