Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Curitiba
Elementos de Máquinas 2

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CURITIBA

FREIOS E EMBREAGENS

MÓDULO 1

Prof. Marcos Takahama
marcostakahama@alunos.utfpr.edu.br

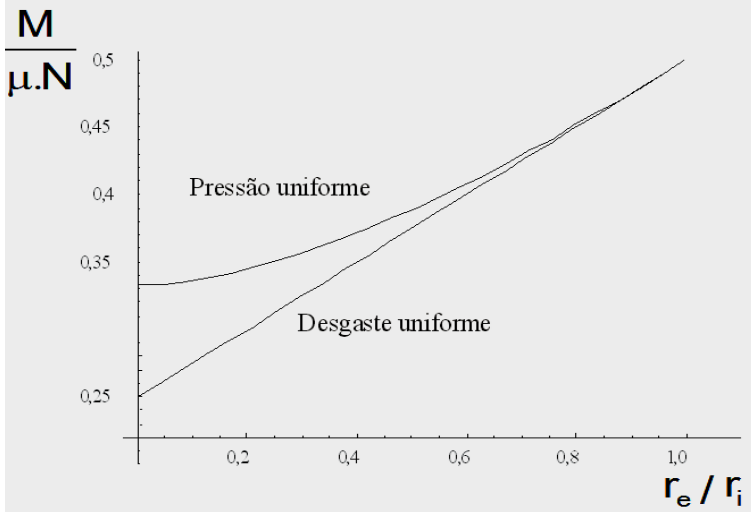
REVISÃO E RECADOS

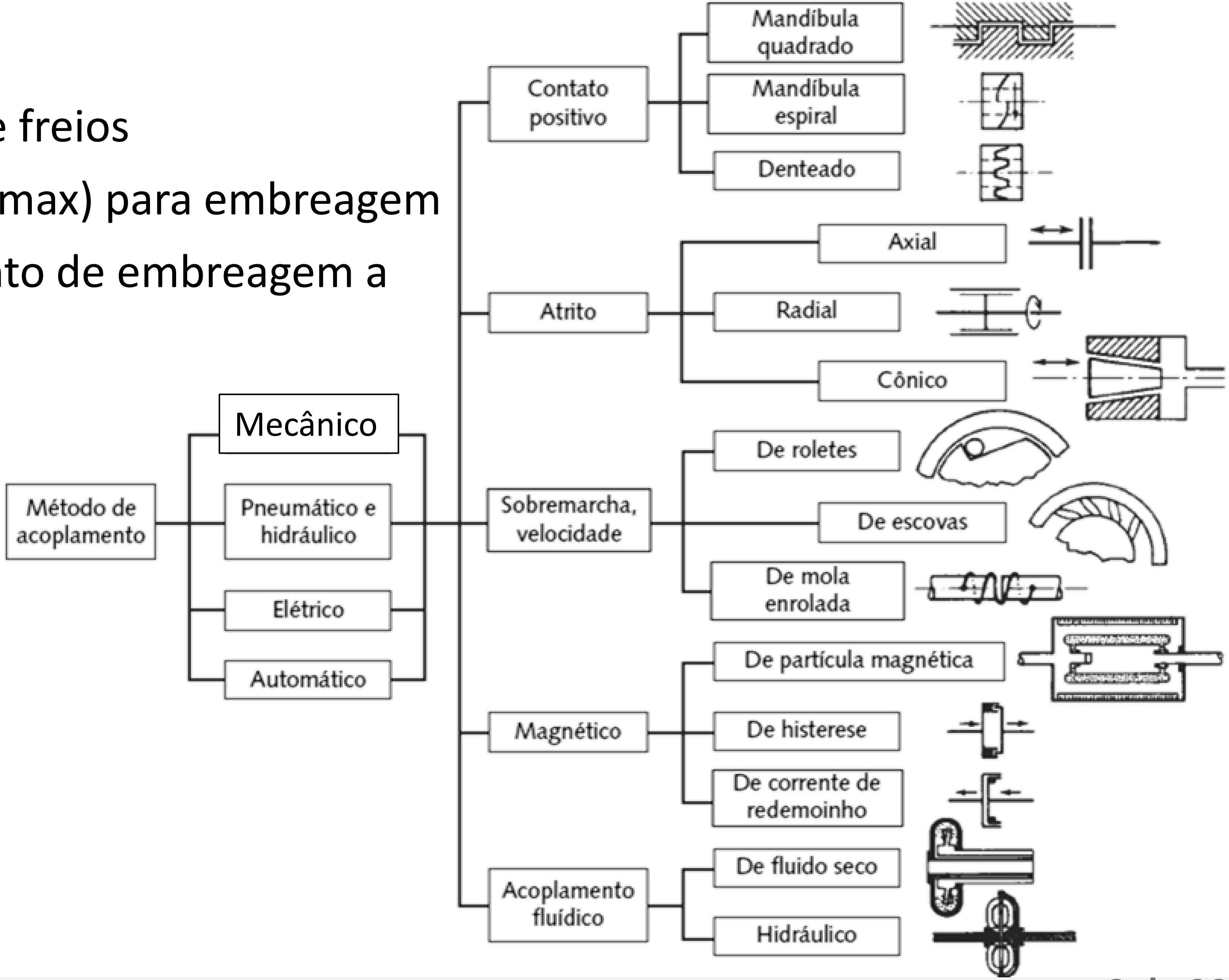
Prova

Lista de exercício

REVISÃO

- Classificação de embreagens e freios
- Materiais utilizados (Tab µ e Pmax) para embreagem
- Critérios para dimensionamento de embreagem a disco:
    - Pressão Uniforme
    - Desgaste uniforme





Formulário:

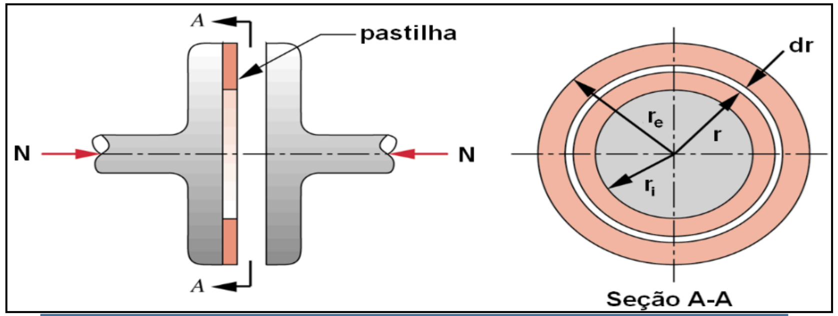


Tabela 17-1 Propriedades de materiais comuns de forração para embreagens/freios

Material de atrito contra aço ou CI	Coeficiente de atrito dinâmico		Pressão máxima		Temperatura máxima	
	Seco	Em óleo	psi	kPa	°F	°C
Moldado	0,25–0,45	0,06–0,09	150–300	1030–2070	400–500	204–260
Tecido	0,25–0,45	0,08–0,10	50–100	345–690	400–500	204–260
Metal sinterizado	0,15–0,45	0,05–0,08	150–300	1030–2070	450–1250	232–677
Ferro fundido ou aço endurecido	0,15–0,25	0,03–0,06	100–250	690–720	500	260

$P.K = T.\omega$

P - Potência

K – Fator de Serviço

T - Torque ou Momento

ω - Velocidade angular

Pressão uniforme x *Desgaste uniforme*

Pressão uniforme

$p = cte$ - Pressão

$F_n = p.(\alpha_2 - \alpha_1).\frac{(r_e{}^2 - r_i{}^2)}{2}$ - Força Axial

$F_f = \mu.p.(\alpha_2 - \alpha_1).\frac{(r_e{}^2 - r_i{}^2)}{2}$ - Força de atrito (tangencial)

$M = z.\mu.p.(\alpha_2 - \alpha_1).\frac{(r_e{}^3 - r_i{}^3)}{3}$ - Torque

$M = z.F_n.\mu.\frac{2}{3}\frac{(r_e{}^3 - r_i{}^3)}{(r_e{}^2 - r_i{}^2)}$ - Torque

Desgaste uniforme

$p(r) = p_{máx}.(\frac{r_i}{r})$ - Pressão

$F_n = p_{máx}.r_i.(\alpha_2 - \alpha_1).(r_e - r_i)$ - Força Axial

$F_f = \mu.p_{máx}.(\alpha_2 - \alpha_1).r_i.(r_e - r_i)$ - Força de atrito (tangencial)

$M = z.F_n.\mu.(r_e + r_i)$ - Torque

$M = z.\mu.p_{máx}.(\alpha_2 - \alpha_1).r_i.\frac{(r_e{}^2 - r_i{}^2)}{2}$ - Torque

$r_i = \sqrt{\frac{1}{3}}r_e = 0{,}577.r_e$ - Relação de raios (Máximo Torque)

Formulário:

Sapata Curta

$p = cte$ - Pressão

$F_n = p_{máx}.r.\theta.w$ - Força Normal (Radial)

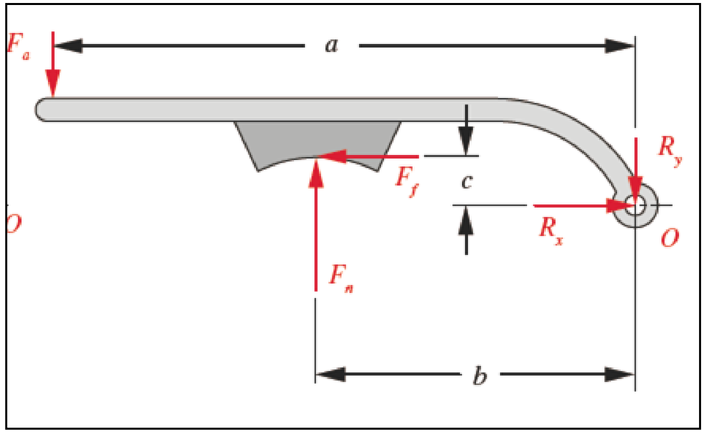
$F_f = \mu.F_n$ - Força Tangencial

$M = \mu.F_n.r$ - Torque de frenagem

$F_a = F_n \frac{b \pm c\mu}{a}$ - Força de frenagem

$F_a = \frac{M}{\mu R}\frac{b \pm c\mu}{a}$ - Força de frenagem

(Menor solicitação de frenagem = autoenergizante)



Sapata Curta (Simplex)

$F_{1,a} = F_{2,a} = F_a$

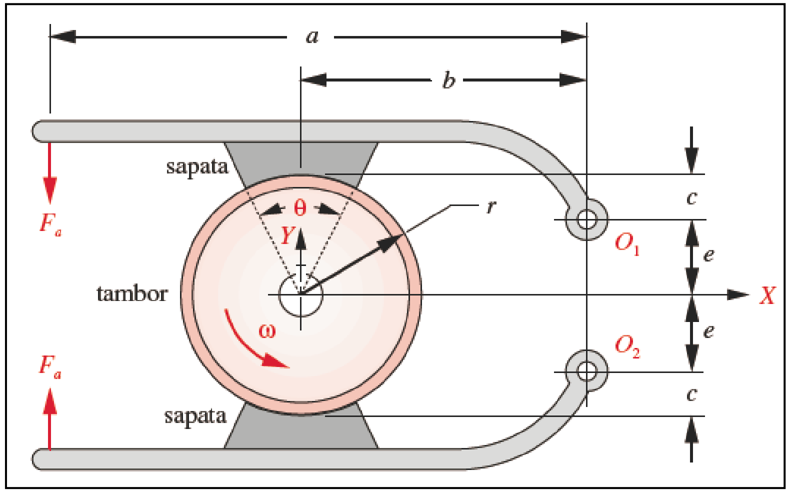
$M = M_1 + M_2$ - Torque frenagem

$M_1 = F_{1,a}\,\mu R \frac{a}{b \pm c\mu}$

$M_2 = F_{2a}\,\mu R \frac{a}{b \mp c\mu}$

$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$

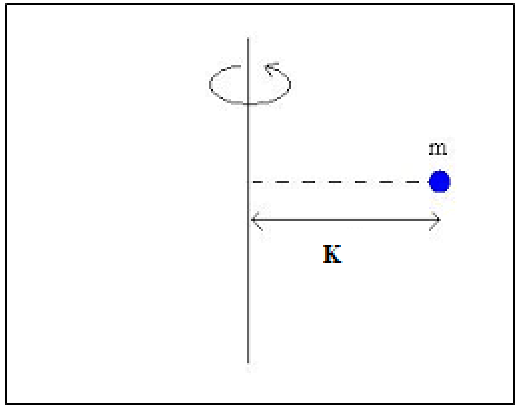
$\sum \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$



Formulário:

Inercia

$$T = I_m . \alpha = mk^2 \frac{\Delta\omega}{t}$$ - Torque



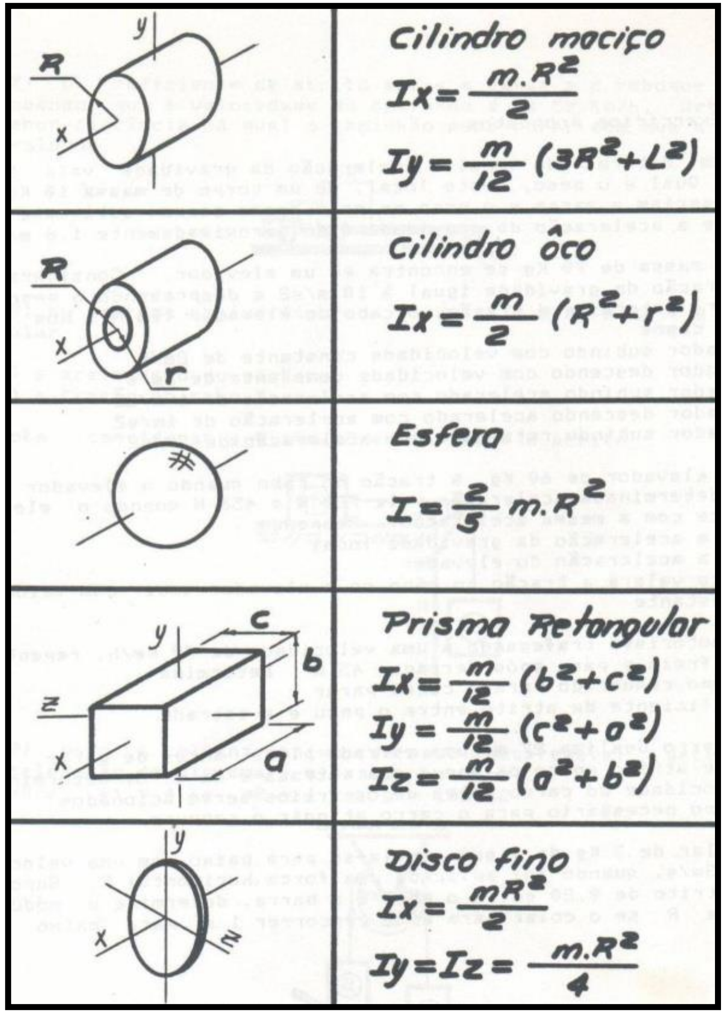
$$I_m = mk^2$$ - Momento de inércia

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t}$$ - Aceleração angular

$$k^2 = \frac{I_m}{m}$$ - Raio equivalente

$$\mathrm{m}K_e^2 = mK^2 \left(\frac{n}{n_c}\right)^2$$ -Momento de inércia equivalente (rotação diferente)

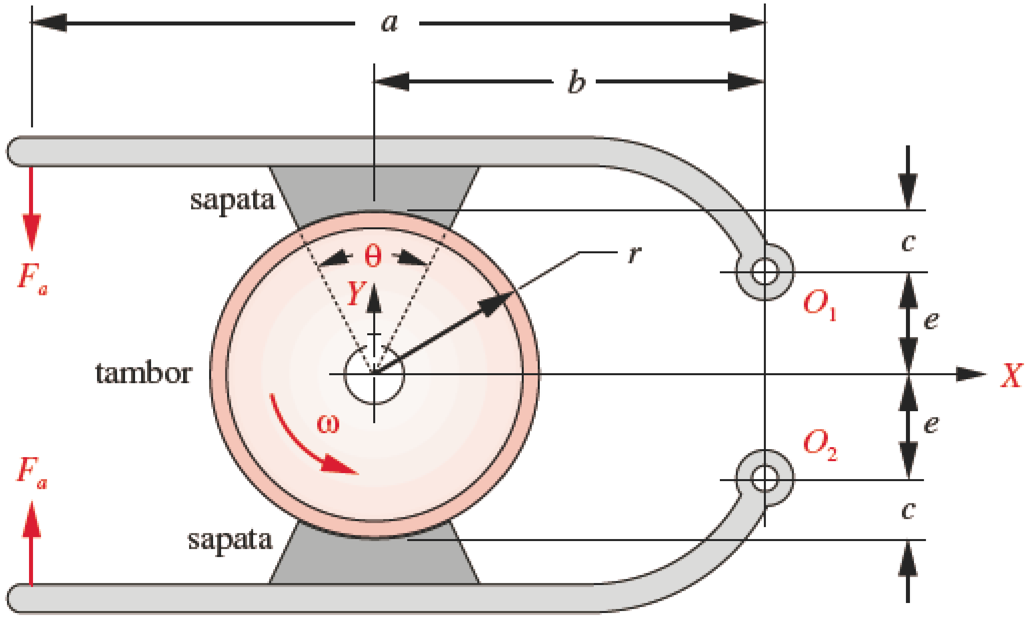
$$mK_e^2 = m\left(\frac{V}{2\pi . f_m}\right)^2$$ - Momento de inércia equivalente (Translação)



FREIOS DE TAMBOR COM *DUAS* SAPATAS EXTERNAS CURTAS:

EXERCÍCIO: Encontre a capacidade de torque e a força atuante requerida do freio de tambor com duas sapatas curtas mostrados abaixo. Considere a = 375, b = 200, e = 75, r= 120 mm e θ = 25°. Que valor de c o tornará autotravante? Pressuponha $p_{max} = p_{sapata\ superior}$ = 10MPa, w = 50mm e μ=0,28.

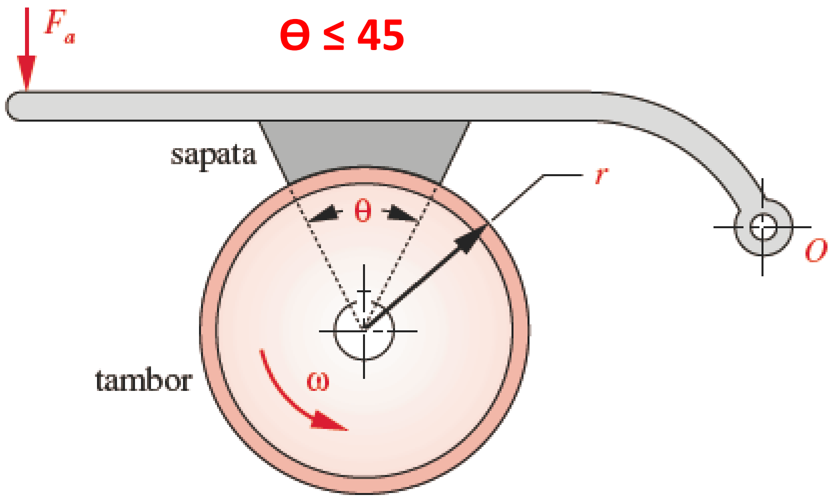
Dica:Calcule o efeito de cada uma das sapatas separadamente e depois suporponha-os.

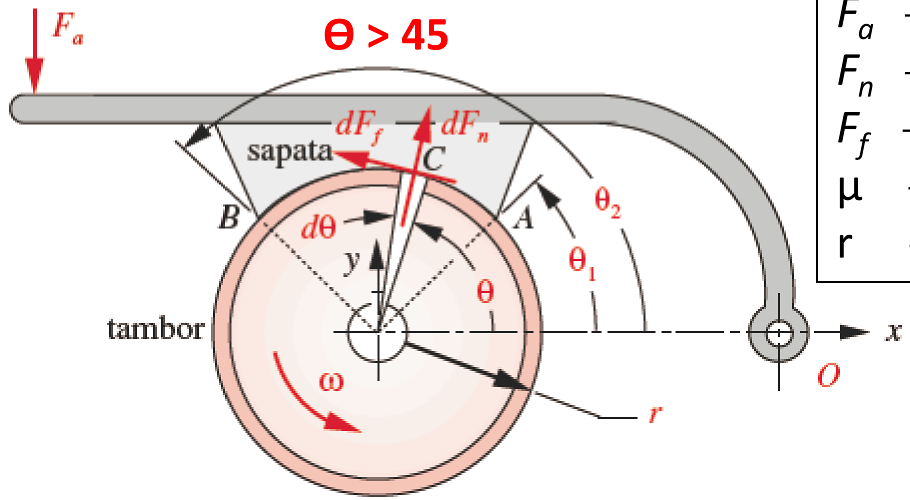


FREIOS TIPO TAMBOR
DIMENSIONAMENTO SAPATA LONGA

FREIOS DE TAMBOR

Se a sapata contata apenas uma pequena porção angular do tambor, o arranjo é conhecido como um freio de sapata curto. Caso contrário, é um freio de sapata longo.





F_a → Força de frenagem
F_n → Força Normal
F_f → Força de atrito ($\mu.F_n$)
μ → Coeficiente de Atrito
r → Raio do Tambor

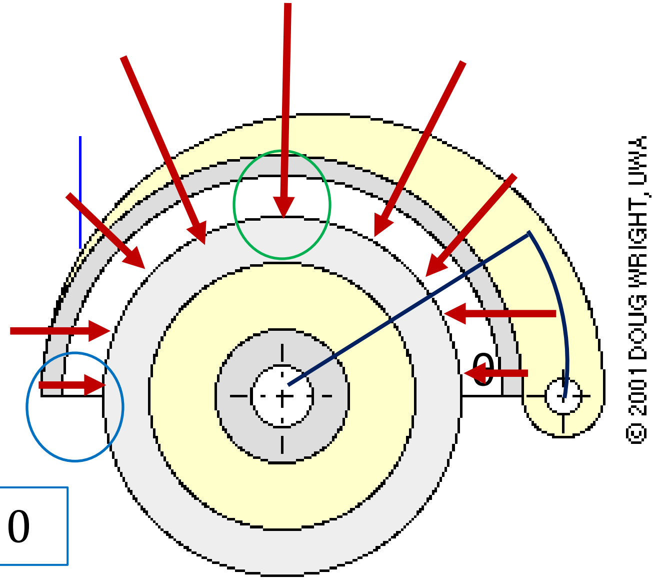
A maior parte dos freios de sapata possuem um ângulo de contato de 90º ou mais, de maneira que a distribuição de esforços no contato da sapata não pode ser considerada pontual.

$$\boxed{p \propto b sen\theta \propto sen\theta}$$

FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

Porém, para dimensionar um tambor de sapatas longas devemos considerar a distribuição de pressão conforme:

$$\boxed{\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}}$$



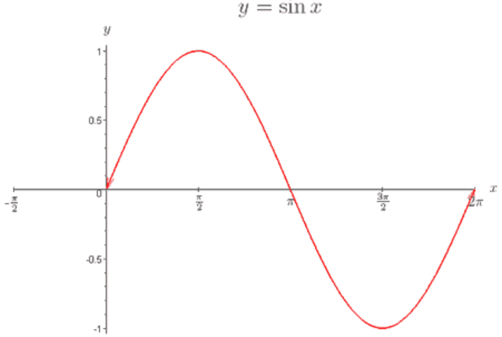
$$\boxed{p = 0}$$

Para θ = 0 e θ = 180 → Pressão de Contato = 0

Sapatas pouco eficientes para 10 < θ < 170

Para θ = 90 → Pressão de Contato = máxima

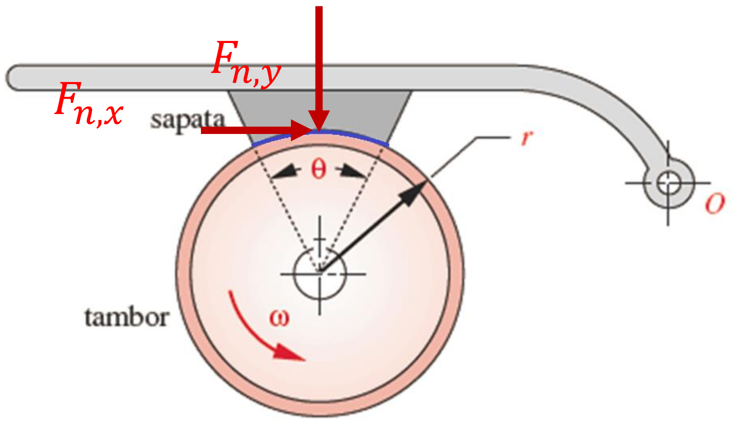
$$p = \frac{p_{\max}}{\sin\theta_{\max}}\sin\theta; \qquad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

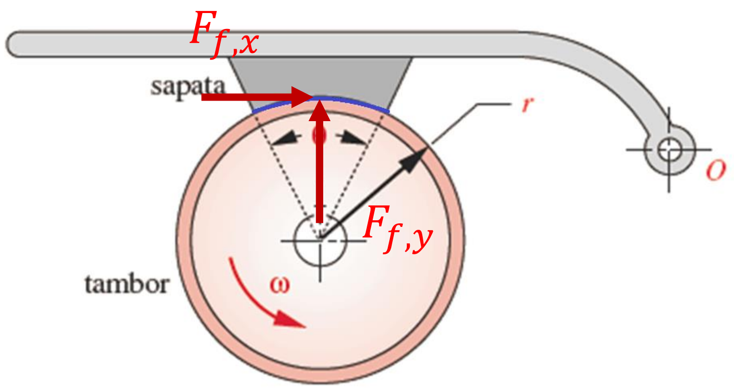


Função distribuição de pressão

FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

Força normal x Força de atrito





FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

$dF_{n,y} = p_{\perp}(\theta).dA$ (Pastilha) – Força infinitesimal, desde que $p(\theta) \rightarrow \perp$ eixo x

$\int dF_{n,y} = \int p(\theta).sen(\theta).dA$ – Somatório das Forças infinitesimais

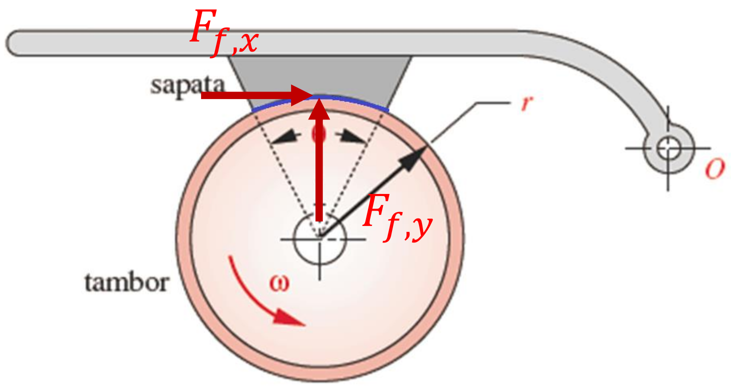
$F_{n,y} = \int p(\theta).sen(\theta).dA$ – Força equivalente

$$F_{n,y} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).sen(\theta).w.r.d\theta$$

$$F_{n,y} = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} sen^2(\theta).d\theta$$

$$F_{n,y} = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\right)\right]$$

Hipótese: Pressão variável (ϴ > 45)



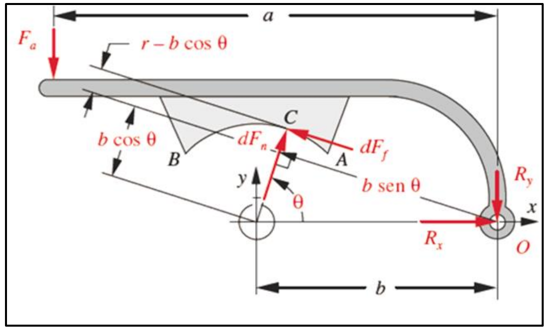
$dF_{f,y} = \mu.dF_{n,x}$ (Pastilha) – Força infinitesimal

$dF_{f,y} = \mu.p_{\parallel}(\theta).dA$ – Força infinitesimal, desde que $p(\theta) \rightarrow \parallel$ eixo x

$F_{f,y} = \int \mu.p(\theta).cos(\theta).dA$ – Somatório das Forças infinitesimais

$$F_{f,y} = \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} sen(\theta).cos(\theta).d\theta$$

$$F_{f,y} = \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-\left(\frac{sen^2(\theta_2)}{2} - \frac{sen^2(\theta_1)}{2}\right)\right]$$



FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

$dF_{n,x} = p_{\parallel}(\theta).dA$ (Pastilha) – Força infinitesimal, desde que $p(\theta) \rightarrow \parallel$ eixo x

$\int dF_{n,x} = \int p(\theta).cos(\theta).dA$ – Somatório das Forças infinitesimais

$F_{n,x} = \int p(\theta).cos(\theta).dA$ – Força equivalente

$$F_{n,x} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).cos(\theta).w.r.d\theta$$

$$F_{n,x} = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}.sen(\theta).cos(\theta).d\theta$$

$$F_{n,x} = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-\left(\frac{sen^2(\theta_2)}{2} - \frac{sen^2(\theta_1)}{2}\right)\right]$$

$dF_{f,x} = \mu.dF_{n,y}$ (Pastilha) – Força infinitesimal

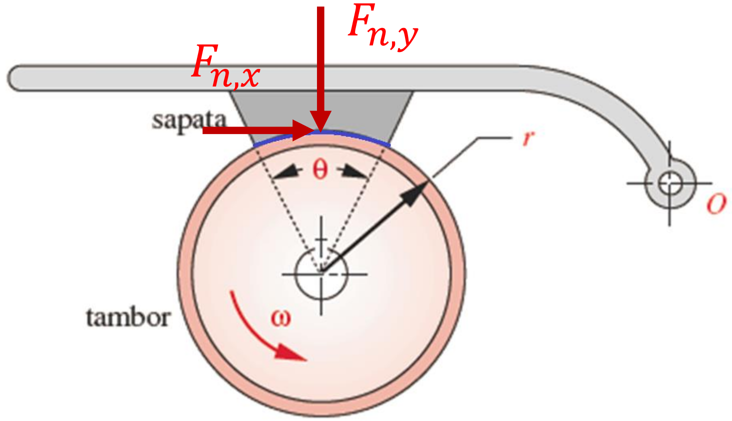
$dF_{f,x} = \mu.p_{\perp}(\theta).dA$ – Força infinitesimal, desde que $p(\theta) \rightarrow \perp$ eixo x

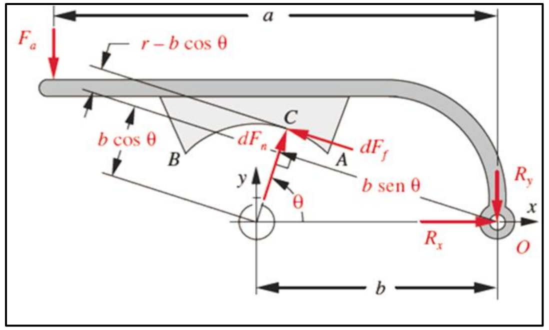
$F_{f,x} = \int \mu.p(\theta).sen(\theta).dA$

$$F_{f,x} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).sen(\theta).w.r.d\theta$$

$$F_{f,x} = \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\right)\right]$$

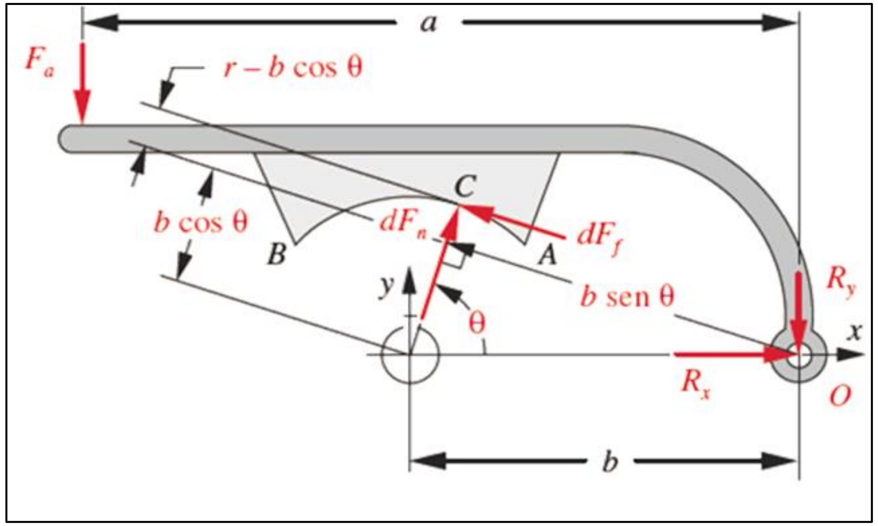
Hipótese: Pressão variável (ϴ > 45)





<u>FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:</u>

As forças reativas Rx e Ry são encontradas a partir da soma das forças nas direções x e y:



$\sum \boldsymbol{F_x} = \mathbf{0}$ **(Alavanca)**

$F_{n,x} + F_{f,x} - R_x = 0$

$R_x = F_{n,x} + F_{f,x}$

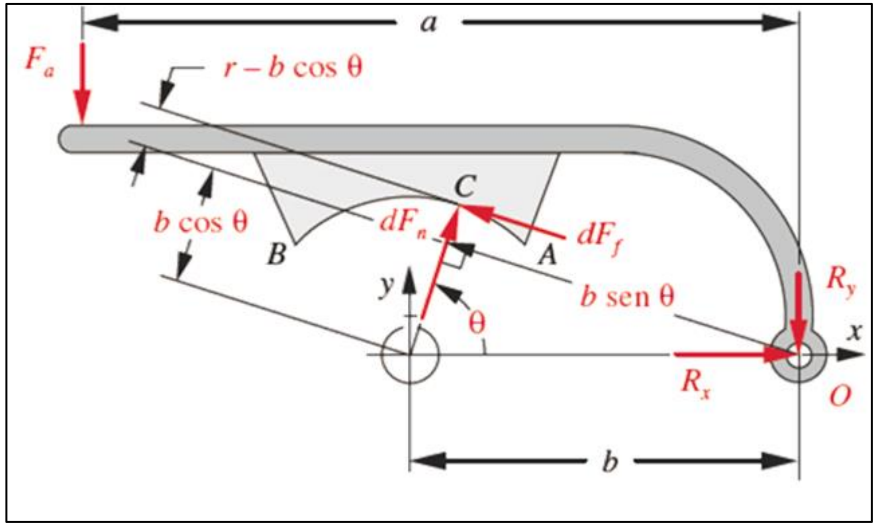
$R_x = \int p(\theta).\cos(\theta).dA + \int \mu.p(\theta).sen(\theta).dA$

$R_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).cos(\theta).w.r.d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).sen(\theta).w.r.d\theta$

$$\boxed{R_x = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-\left(\frac{sen^2(\theta_2)}{2} - \frac{sen^2(\theta_2)}{2}\right)\right] + \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\right)\right]}$$

FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

As forças reativas Rx e Ry são encontradas a partir da soma das forças nas direções x e y:



$\sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{0}$ **(Alavanca)**

$R_y - F_{n,y} - F_{f,y} + F_a = 0$

$R_y = F_{n,y} + F_{f,y} - F_a$

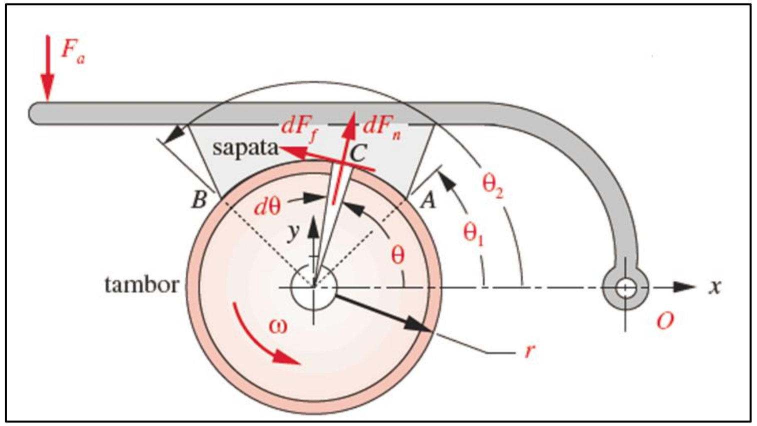
$R_y = \int p(\theta).sen(\theta).dA + \int \mu.p(\theta).cos(\theta).dA - F_a$

$R_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).sen(\theta).w.r.d\theta + \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} sen(\theta).cos(\theta).d\theta - F_a$

$$\boxed{R_y = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\right)\right] + \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-\left(\frac{sen^2(\theta_2)}{2} - \frac{sen^2(\theta_1)}{2}\right)\right] - F_a}$$

FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

O torque de frenagem aplicado ao disco é encontrado integrando a expressão para o produto da força de atrito F_f e raio r do tambor (**A partir do centro do disco**):

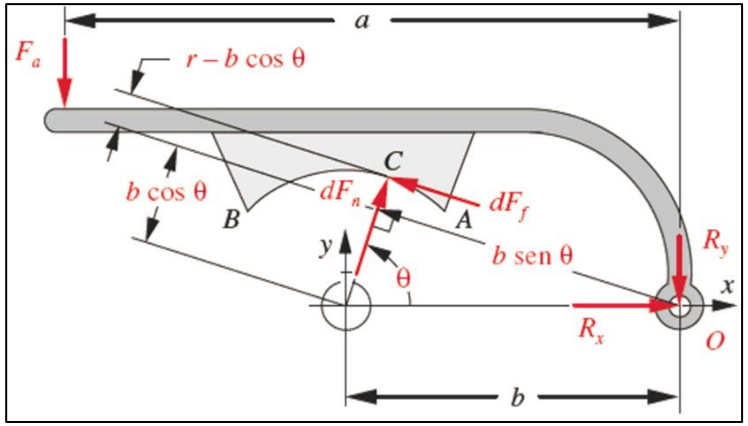


$$d(F_f.r) = \mu.p(\theta).r.dA \qquad \text{(Disco)}$$

.

$$\int dT = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).r.w.r.d\theta$$

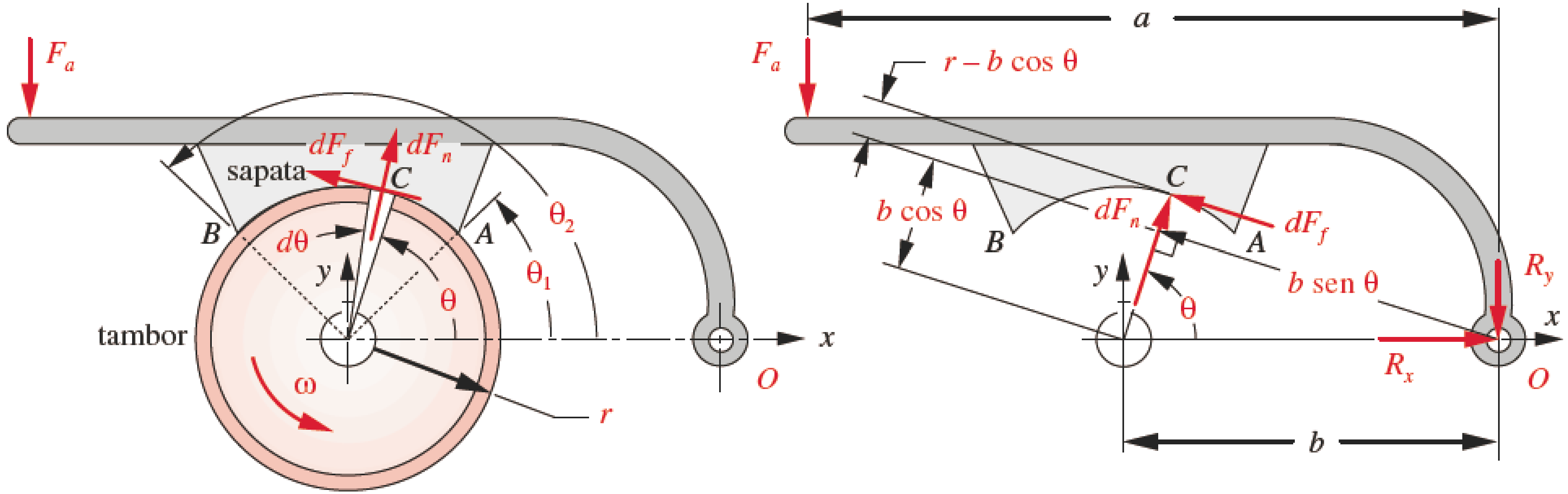
$$T = \mu.w.r^2\frac{p_{\max}}{\sin\theta_{\max}}.(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

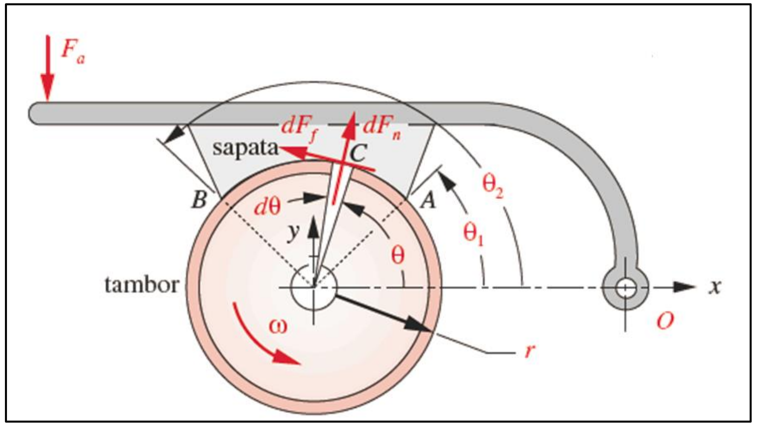
Para obter a força total na sapata, a função de pressão deve ser integrada sobre o intervalo angular da mesma considerando o elemento diferencial $d\theta$. Duas forças diferenciais agem neste elemento, dF_n e dF_f, como definido anteriormente. Elas possuem braços de momento com relação ao ponto *O* de:

$$b\sin\theta \qquad \& \qquad r - b\cos\theta$$



FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

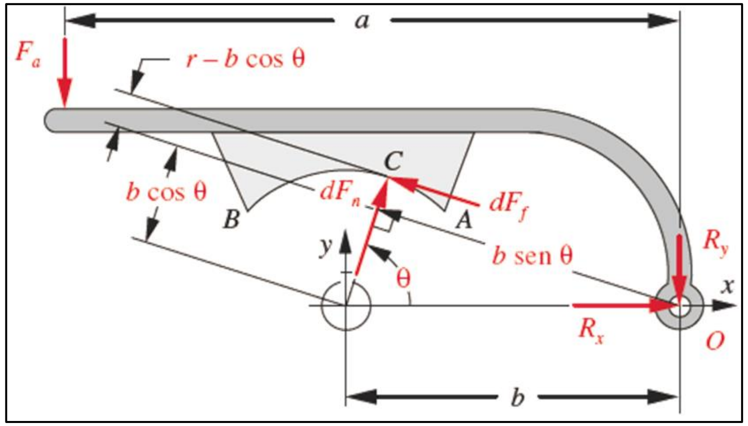
Ao integrar para obter os momentos referentes a toda a superfície com relação a O, tem-se para o momento devido à força normal:



$$dF_N(b.sen(\theta)) = p(\theta).(b.sen(\theta)).dA$$ (**Alavanca** ponto O)

$$\int dM_N = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).(b.sen(\theta)).r.w.d\theta$$

$$\boxed{M_N = b.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\right)\right]}$$

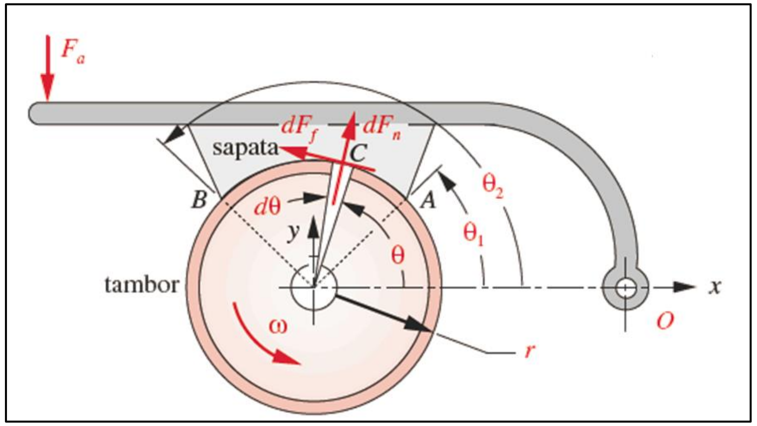


FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

Para o momento devido a força de atrito: $dF_f\big(r - b.cos(\theta)\big) = p(\theta).\big(r - b.cos(\theta)\big).dA$

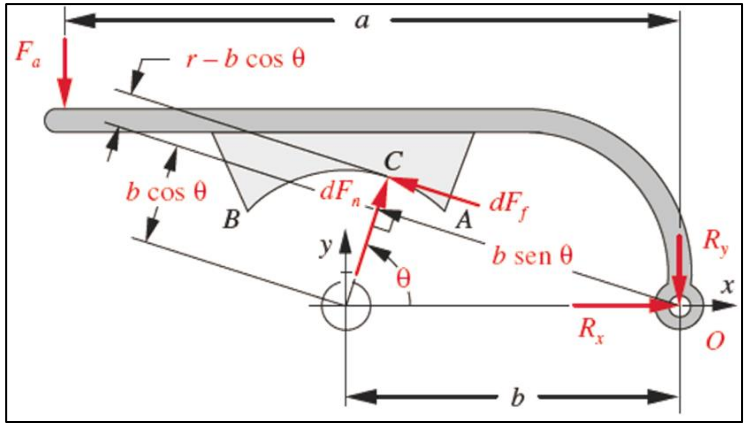
$$\int dM_F = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta).\big(r - b.cos(\theta)\big).r.w.d\theta$$

$$\boxed{M_f = \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - \frac{b}{2}\big(sen^2(\theta_2) - sen^2(\theta_1)\big)\right]}$$



O somatório dos momentos em relação ao ponto *O*

$$\boxed{F_a = \frac{M_N \mp M_f}{a}}$$



(+) horário

(-) anti-horário

Autodesenergizante

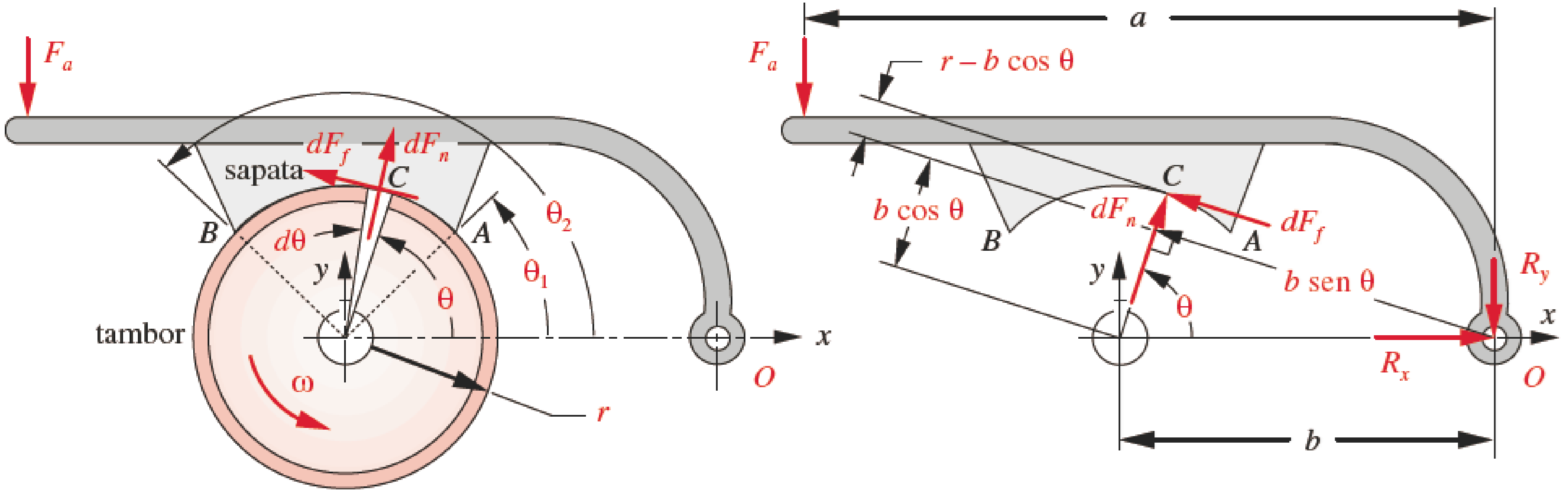
Autoenergizante

Se autoenergizante e $M_F \geq M_N$

Autotravante

FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

Exercício 5: para o arranjo de freio de tambor mostrado na figura, determine o torque de frenagem T, a força máxima aplicada F_a.
Dados: as dimensões são a = 180 mm, b = 90 mm, r = 100 mm, w = 30 mm, θ_1 = 30º, θ_2 = 120º.
hipóteses: coeficiente de atrito μ = 0,35, máxima pressão admissível na forração p_{max} = 1,5 MPa.

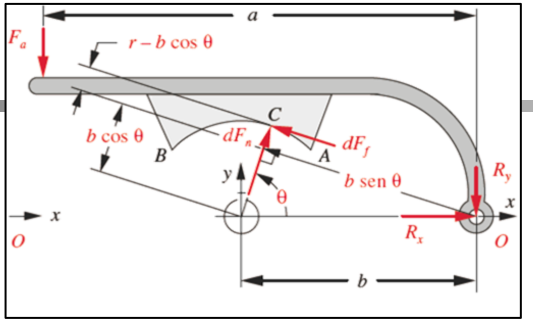


FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

Solução:

1) Converta os ângulos θ_1 e θ_2 em radianos;
2) Calcule o momento M_N com relação a O devido a força normal;
3) Calcule o momento M_f com relação a O devido a força de atrito;
4) Usando os momentos calculados, determine a força a ser aplica F_a;
5) Determine o torque de atrito;
6) Determine as força reativas.

FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS LONGAS:



Formulário:

Sapata Longa

$p = \frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}.sen(\theta)$ - Pressão

$F_{n,y} = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1)\right)\right]$ - Força Normal (direção →⊥ eixo x)

$F_{n,x} = w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-\left(\frac{sen^2(\theta_2)}{2}-\frac{sen^2(\theta_1)}{2}\right)\right]$ - Força Normal (direção →‖ eixo x)

$F_{f,y} = \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-\left(\frac{sen^2(\theta_2)}{2}-\frac{sen^2(\theta_1)}{2}\right)\right]$ - Força de atrito (direção →⊥ eixo x)

$F_{f,x} = \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1)\right)\right]$ - Força de atrito (direção →‖ eixo x)

$T = \mu.w.r^2.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}[\cos\theta_1-\cos\theta_2]$ - Torque de frenagem em relação ao centro do disco

$F_a = \frac{M_N \mp M_f}{a}$ (Menor solicitação de frenagem = autoenergizante) - Força de frenagem (Do somatório de momento em relação a ***O***)

$M_N = b.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[\left(\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1)\right)\right]$ - Momento da Força Normal em relação a ***O***

$M_f = \mu.w.r.\frac{p_{máx}}{\sin\theta_{máx}}\left[-r(\cos\theta_2-\cos\theta_1)-\frac{b}{2}\left(sen^2(\theta_2)-sen^2(\theta_1)\right)\right]$ - Momento da Força de Atrito em relação a ***O***

FREIOS DE TAMBOR COM *DUAS* SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

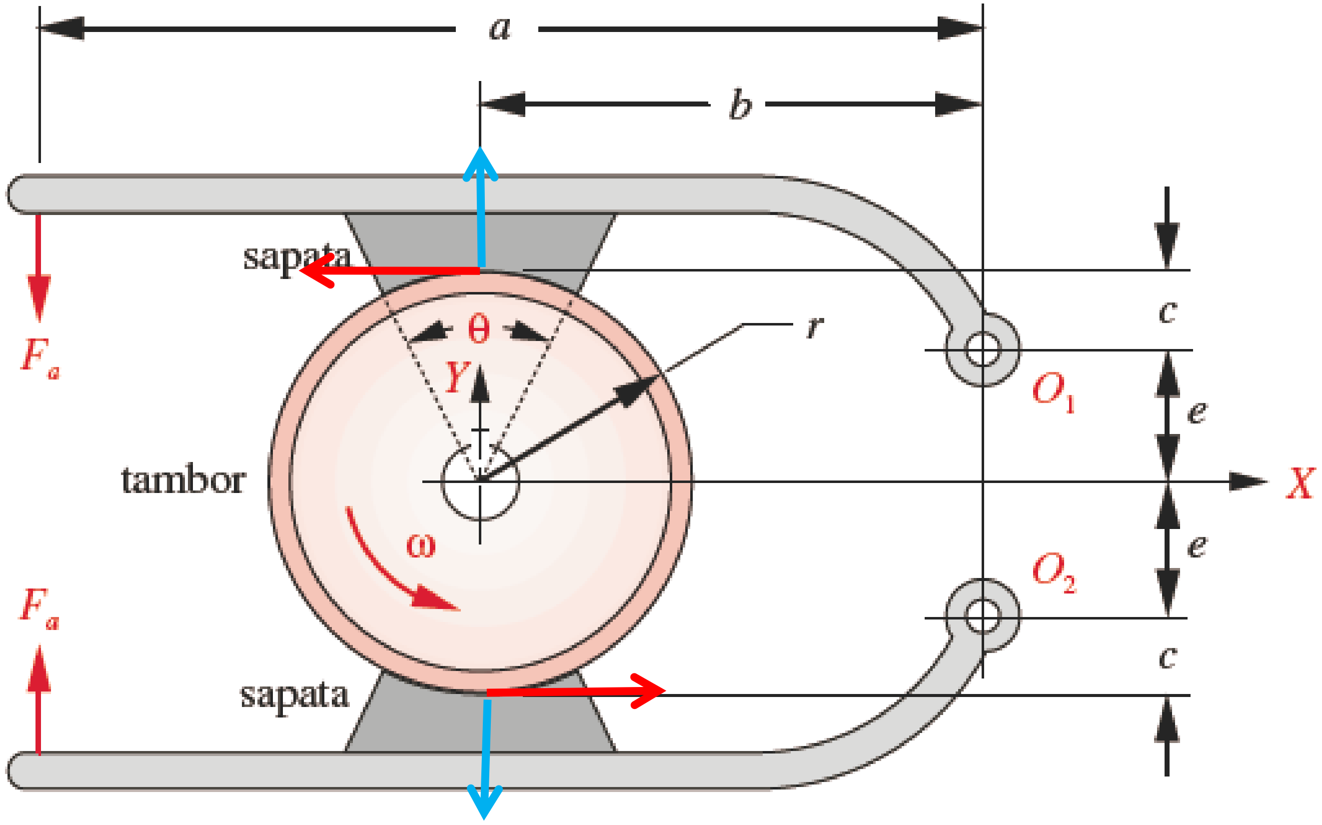
No freio com uma sapata é aplicada ao tambor e ao eixo uma força radial F_n que pode provocar:

✓ Tensões elevadas sobre o eixo (Aumento δ)

✓ Tensões elevadas nos mancais (Aumento de custo)

✓ Alterando sentido de rotação do tambor não altera o momento de frenagem.

Desta forma, muitas vezes se aplica o freio com duas sapatas para evitar estes inconvenientes.

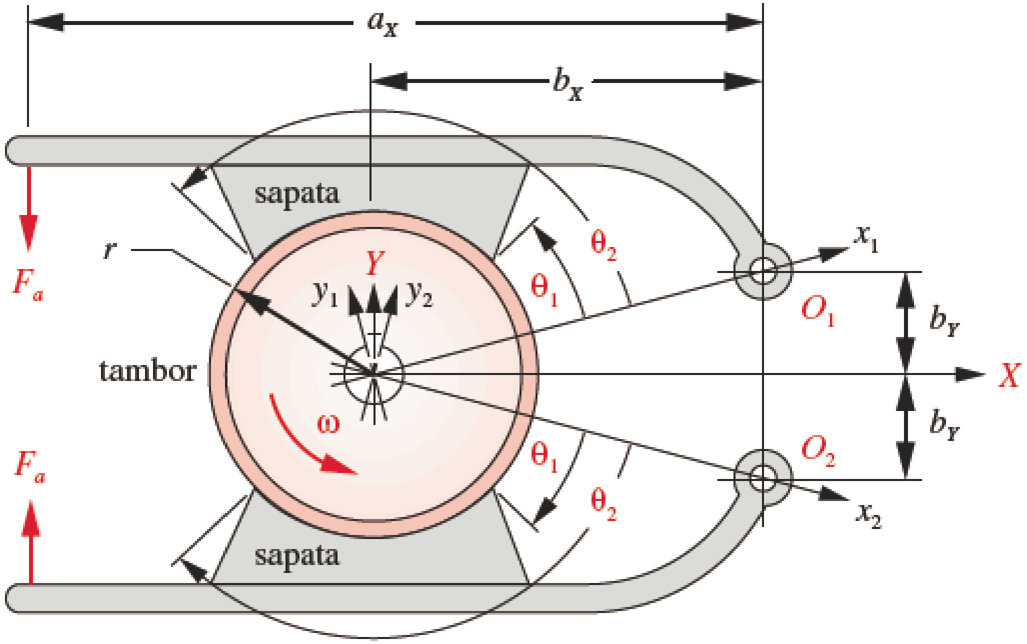


FREIOS DE TAMBOR COM SAPATAS EXTERNAS LONGAS:

Exercício 7: para o arranjo de freio de tambor mostrado na figura, determine o torque de frenagem T, a força máxima aplicada F_a.

Dados: as dimensões são a = 90 mm, bx = 80 mm, by=30, r = 40 mm, w = 30 mm, θ_1 = 35º, θ_2 = 155º.

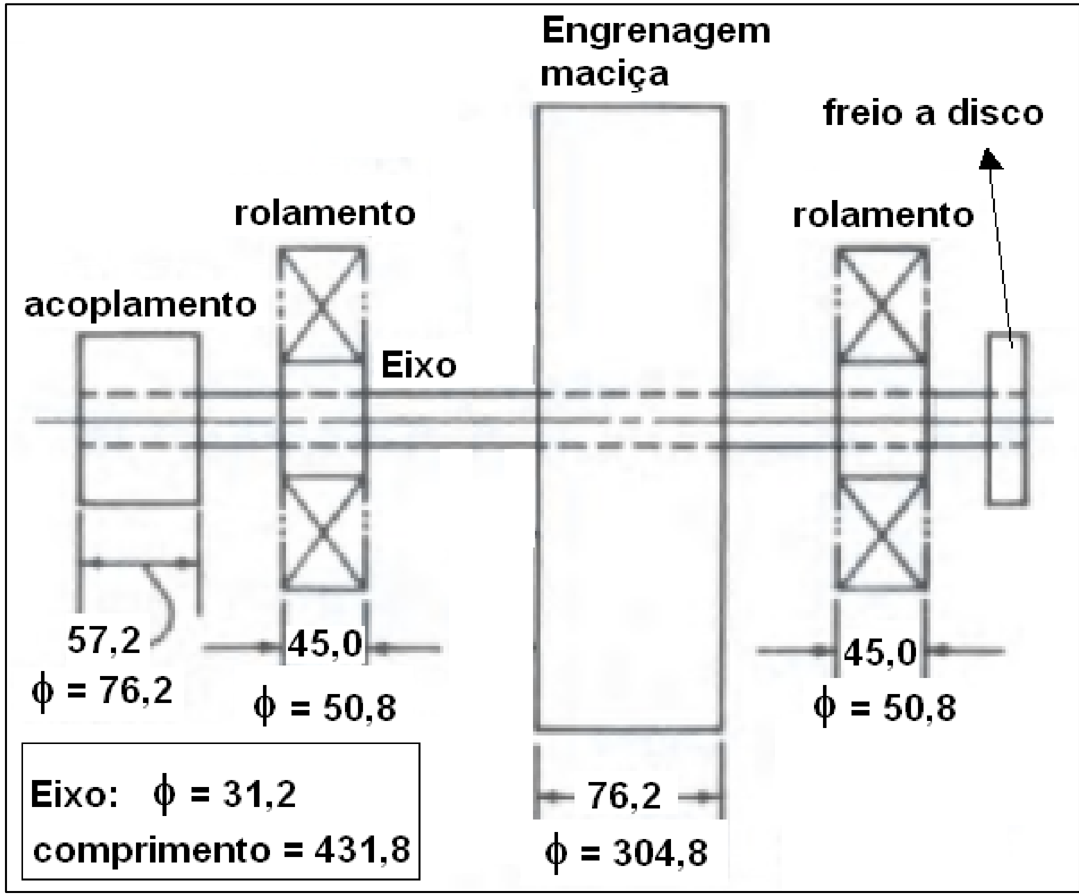
hipóteses: coeficiente de atrito μ = 0,25, máxima pressão admissível na forração superior $p_{max,superior}$ = 1,5 MPa.



EXERCÍCIOS

EXERCÍCIO 2

Exercício 10: O dispositivo da figura abaixo deve ser freado de 1000 rpm até zero em dois segundos. Determine a pressão atuante durante a frenagem e a potência dissipada em cada pastilha do freio a disco (pressão uniforme), admitindo que o motor elétrico acoplado ao eixo de entrada não desliga durante o processo de frenagem.



Dados:

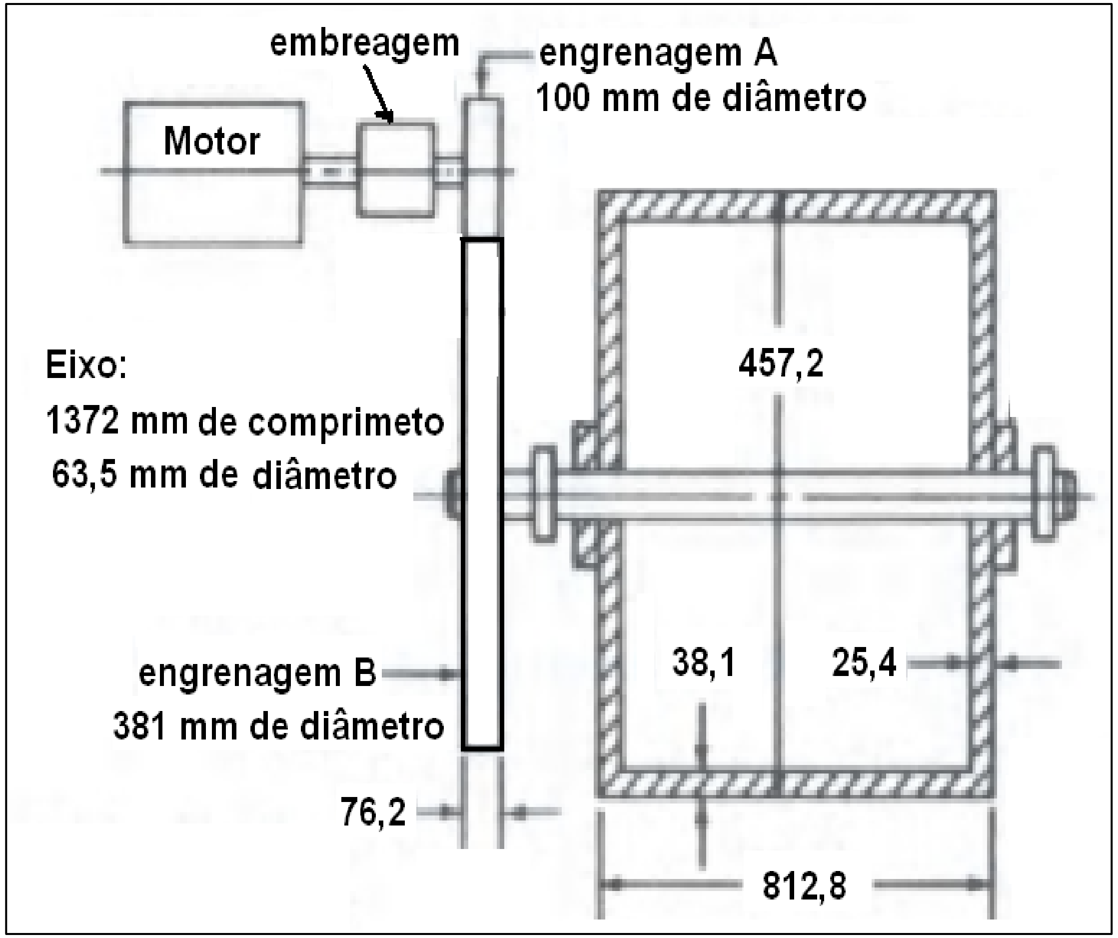
- Todos os elementos são de aço carbono;
- Todas as dimensões em mm;
- Somente o anel interno dos rolamentos gira;
- 3 jogos de pastilhas de metal sinterizado;
- Admitir que o contato é a seco;
- Rotação do eixo: 1000 rpm
- Raio interno da pastilha = 50 mm
- Raio externo da pastilha = 95 mm
- Ângulo de abertura das pastilhas = 60º
- Raio do disco de freio = 100 mm
- Espessura do disco de freio = 5 mm
- O momento torçor no eixo da engrenagem maciça é de 60 N.m
- A inércia do **restante** do equipamento (o qual gira a 200 rpm) é de 2,04 Kg.m2

EXERCÍCIO 2

Exercício 9: Calcular o torque requerido para acelerar somente o sistema (redutor – tambor) da figura ao lado, sabendo que a velocidade do motor é 1750 rpm e o tempo necessário para atingir esta velocidade é de 1,5 segundos.

- Desconsiderar a inércia do corpo da embreagem;
- Todos os componentes são fabricados em aço carbono;

Obs.: Todas as dimensões estão em mm



RESPOSTAS DAS LISTA DE EXERCÍCIOS

RESPOSTAS:	
1 - r_e = 106,8 mm r_i = 61, mm F_a = 6031,7 N	8 -Conceitual
2 - p = 931,3 kPa / pastilha	9 T = 138,5Nm T2=497 Nm
3 - Potência = 11.3 kW	10 - T = 91,6 N.m P = 397,7 kPa/pastilha N = 1,6 kW/pastilha Redução de ~65%
4 – Torque= 32,95 ; Potencia 34.5 W	11 - (a) T = 286 N.m ($T_{inércia}$ = 30,1 N.m - WKe^2_{total} = 29,98 N.m^2) (b) F = 1511,9 N.m (c) w = 62 mm
5 - M = 215,1 N.m F_a = 1743 N	12 – 10,08 Nm2
6 - Torque = 133N.m; Fa=2583 N	13 - ?
7 - F_a = 2140,89 N T = 54,01 Nm	