

# ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

## Εισαγωγή 0

Το Κεφάλαιο 3 της  $\mathbb{R}[x]$  Άλγεβρας Β Λυκείου ασχολείται με τα πολυώνυμα. Γίνεται μελέτη των χαρακτηριστικών τους και παρουσιάζονται θεωρήματα τα οποία καλύπτουν έννοιες όπως η διαίρεση των πολυωνύμων, η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων κ.α.. Προκύπτει όμως το ερώτημα:

**“Γιατί η μελέτη των πολυωνύμων είναι σημαντική;”**

Πέρα από τη χρησιμοθηρική προσέγγιση που αφορά τη συχνή τους χρήση στην επίλυση προβλημάτων στα πλαίσια του σχολείου και των Πανελλαδικών Εξετάσεων, θα παρουσιάσουμε μία εφαρμογή χρήσης των πολυωνύμων για την προσέγγιση άλλων *texhjkfh fhj kt* περισσότερο “δύσκολων συναρτήσεων.” ———

## Προσέγγιση του συνημιτόνου

Στο Κεφάλαιο 2 της άλγεβρας συναντήσαμε την τριγωνομετρική συνάρτηση  $f(x) = \sin x$ , την οποία μελετήσαμε ως προς την περίοδό της, τη μονοτονία της και τελικά με τη γραφική της παράσταση. Όποτε χρειάστηκε ο υπολογισμός της τιμής του συνημιτόνου μίας γωνίας, χρησιμοποιήθηκε είτε ο διαθέσιμος πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών, ο οποίος βέβαια αναφέρεται στους τριγωνομετρικούς αριθμούς συγκεκριμένων γνωστών γωνιών, είτε χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες για το υπολογισμό ενός τριγωνομετρικού αριθμού εφόσον γνωρίζαμε κάποιον άλλο. Για παράδειγμα ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας  $\frac{\pi}{16}$  από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γνωστής γωνίας  $\frac{\pi}{4}$  και τη χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

των ημ2α, συν2α.

1	2	5
3	4	

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ,  $x \neq 1$ .

i. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 5**

ii. Αν  $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln \left( \frac{x}{1-x} \right)$ ,  $x \in (0, 1) \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η  $h(x)$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

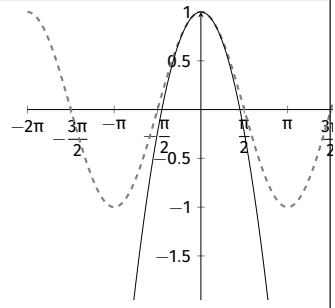
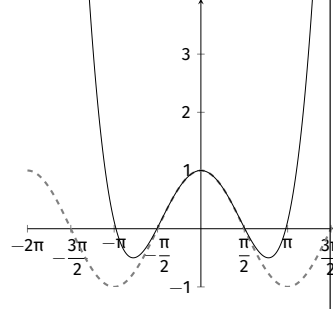
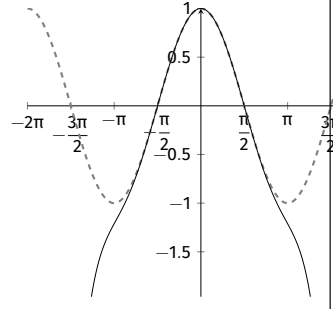
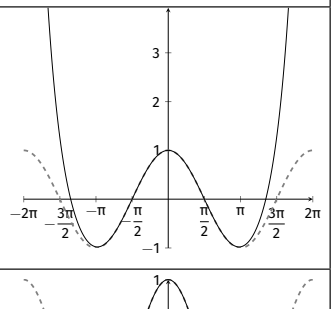
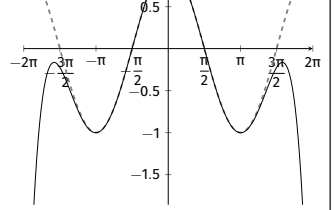
**Μονάδες 7**

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

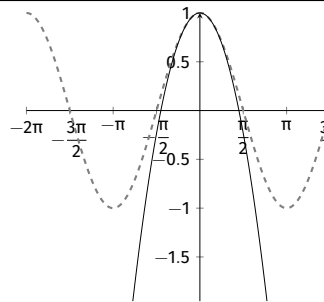
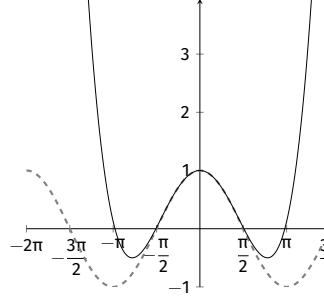
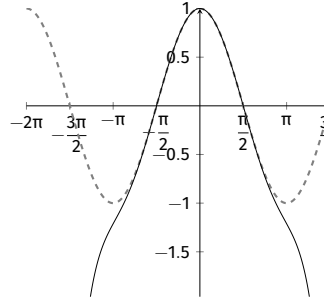
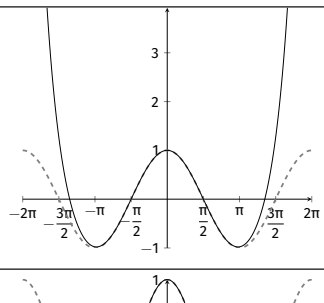
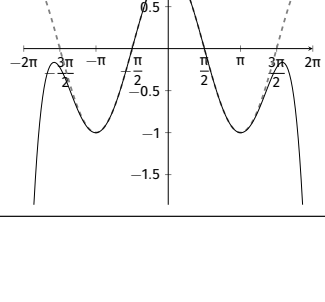
**Μονάδες 6**

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_h$  στο σημείο τομής της με τον οριζόντιο άξονα.

**Μονάδες 7**

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2$	 A plot of the function $g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2$ on a coordinate system. The x-axis ranges from $-2\pi$ to $2\pi$ with labels at $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ . The y-axis ranges from -1.5 to 1 with labels at -1.5, -1, -0.5, 0.5, and 1. A solid curve represents the function, which is a downward-opening parabola with its vertex at (0, 1). A dashed curve represents the periodic extension of this function, showing a series of peaks and valleys.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4$	 A plot of the function $g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4$ on a coordinate system. The x-axis ranges from $-2\pi$ to $2\pi$ with labels at $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ . The y-axis ranges from -1 to 3 with labels at -1, 1, 2, and 3. A solid curve represents the function, which is a W-shaped curve with its local maxima at (0, 1) and $(\pm\pi, 1)$ , and its local minima at $(\pm\sqrt{12}, 0)$ . A dashed curve represents the periodic extension of this function.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$	 A plot of the function $g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$ on a coordinate system. The x-axis ranges from $-2\pi$ to $2\pi$ with labels at $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ . The y-axis ranges from -1.5 to 1 with labels at -1.5, -1, -0.5, 0.5, and 1. A solid curve represents the function, which is a W-shaped curve with its local maxima at (0, 1) and $(\pm\pi, 1)$ , and its local minima at $(\pm\sqrt{12}, 0)$ . A dashed curve represents the periodic extension of this function.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8$	 A plot of the function $g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8$ on a coordinate system. The x-axis ranges from $-2\pi$ to $2\pi$ with labels at $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ . The y-axis ranges from -1 to 3 with labels at -1, 1, 2, and 3. A solid curve represents the function, which is a W-shaped curve with its local maxima at (0, 1) and $(\pm\pi, 1)$ , and its local minima at $(\pm\sqrt{12}, 0)$ . A dashed curve represents the periodic extension of this function.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8 - \frac{1}{3628800} x^{10}$	 A plot of the function $g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8 - \frac{1}{3628800} x^{10}$ on a coordinate system. The x-axis ranges from $-2\pi$ to $2\pi$ with labels at $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ . The y-axis ranges from -1.5 to 1 with labels at -1.5, -1, -0.5, 0.5, and 1. A solid curve represents the function, which is a W-shaped curve with its local maxima at (0, 1) and $(\pm\pi, 1)$ , and its local minima at $(\pm\sqrt{12}, 0)$ . A dashed curve represents the periodic extension of this function.

Σχήμα 1: This is a picture

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2$	 The graph shows a solid parabola opening downwards with its vertex at (0, 1). It intersects the x-axis at x = ±√2. A dashed periodic curve is also plotted, with peaks at x = 0, ±2π, ±4π and troughs at x = ±π, ±3π.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4$	 The graph shows a solid curve that is flatter than the parabola, with a local maximum at (0, 1) and local minima at x = ±√12. It intersects the x-axis at x = ±√6. A dashed periodic curve is also plotted.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$	 The graph shows a solid curve that is even flatter, with a local maximum at (0, 1) and local minima at x = ±√18. It intersects the x-axis at x = ±√9. A dashed periodic curve is also plotted.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8$	 The graph shows a solid curve that is very flat near the origin, with a local maximum at (0, 1) and local minima at x = ±√24. It intersects the x-axis at x = ±√12. A dashed periodic curve is also plotted.
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8 - \frac{1}{3628800} x^{10}$	 The graph shows a solid curve that is extremely flat near the origin, with a local maximum at (0, 1) and local minima at x = ±√30. It intersects the x-axis at x = ±√15. A dashed periodic curve is also plotted.

Σχήμα 2: This is a picture

## Δημήτρης

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} + \alpha x + \beta, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α. Να βρεθεί το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να αντιστρέφεται.  
 β. Να αποδείξετε ότι για την ίδια τιμή του  $\alpha$  δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη.  
 γ. Για  $\alpha = -1$  να βρείτε τον  $\beta$  ώστε η οριζόντια αυτή ασύμπτωτη να τέμνει τον  $y'g$  στο  $\Lambda(0, 4)$ .  
 δ. Για  $\alpha = -1$  και  $\beta = -3$  να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $(0, f(0))$  και να δείξετε ότι για  $x > -1$  η  $f(x) + 2x \geq -2$ .  
 ε. Να υπολογίσετε εκ νέου τα  $\alpha, \beta$  ώστε η ευθεία  $y = -2x - 2$  να γίνει ασύμπτωτη της  $C_f$ .



$$\text{Δοκιμασία ντ } \frac{3}{sd f a} \text{ sd}$$

$$\eta \mu x^{2-1} d$$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{αν } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ .

1. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .  
 2. Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

Δοκιμή αν δοκιμάζει η  $\text{εικόνα}$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ \beta = -5 \\ \gamma = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ [0] \\ x^2 + 1 &= 0 \\ [1] \\ x^2 + 2 &= 0 \\ [2] \\ x^2 + 3 &= 0 \\ [3] \\ x^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Σχήμα 3: This is a picture

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2$	
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4$	
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$	
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8$	
$g(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8 - \frac{1}{3628800} x^{10}$	

Σχήμα 4: This is a picture