ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Εισαγωγή

Το Κεφάλαιο 3 της Άλγεβρας Β Λυκείου ασχολείται με τα πολυώνυμα. Γίνεται μελέτη των χαρακτηριστικών τους και παρουσιάζονται θεωρήματα τα οποία καλύπτουν έννοιες όπως η διαίρεση των πολυωνύμων, η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων κ.α.. Προκύπτει όμως το ερώτημα:

"Γιατί η μελέτη των πολυωνύμων είναι σημαντική;".

Πέρα από τη χρησιμοθηρική προσέγγιση που αφορά τη συχνή τους χρήση στην επίλυση προβλημάτων στα πλαίσια του σχολείου και των Πανελλαδικών Εξετάσεων, θα παρουσιάσουμε μία εφαρμογή χρήσης των πολυωνύμων για την προσέγγιση άλλων περισσότερο "δύσκολων συναρτήσεων."

Προσέγγιση του συνημιτόνου

Στο Κεφάλαιο 2 της Άλγεβρας συναντήσαμε την τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = συνx$, την οποία μελετήσαμε ως προς την περίοδό της, τη μονοτονία της και τελικά με τη γραφική της παράσταση. Όποτε χρειάστηκε ο υπολογισμός της τιμής του συνημιτόνου μίας γωνίας, χρησιμοποιήθηκε είτε ο διαθέσιμος πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών, ο οποίος βέβαια αναφέρεται στους τριγωνομετρικούς αριθμούς συγκεκριμένων γνωστών γωνιών, είτε χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες για το υπολογισμό ενός τριγωνομετρικού αριθμού εφόσον γνωρίζαμε κάποιον άλλο. Για παράδειγμα ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας $\frac{\pi}{16}$ από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γνωστής γωνίας $\frac{\pi}{4}$ και τη χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων των ημ2α,συν2α.

Παρόλα αυτά υπάρχει τρόπος χρησιμοποιώντας γνωστό θεώρημα να προσδιορίσουμε τους συντελεστές ενός πολυωνύμου, οι τιμές του οποίου θα βρίσκονται πολύ κοντά στην τιμή του αντίστοιχου τριγωνομετρικού αριθμού. Όπως φαίνεται και στην εικόνα που ακολουθεί, όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου, τόσο πιο ”κοντά” στη συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε. Με τον τρόπο αυτό ο υπολογισμός της τιμής του συνημιτόνου μιας γωνίας για παράδειγμα ανάγεται στον πολύ ευκολότερο υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου.

Παρακάτω φαίνεται η προσέγγιση της συνάρτησης συνx με το πολυώνυμο

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

όπου $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \nu$

Ασκήσεις

Ορισμός-Ισότητα πολυωνύμων

1. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ να ισχύει:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}$$

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\alpha^2 - 1)x^3 + (|\alpha| - 1)x^2 + \alpha^3 - 1$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές του α, $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες $P(x)$:

α. Είναι το μηδενικό πολυώνυμο

β. Έχει βαθμό μηδέν.

3. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(2x+5) \cdot P(x) = 6x^3 + x^2 - 33x + 5$$

, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^2 - 4)x^4 + x^3 - 5x^2 + 6x + 4\lambda + 6$$

Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1, τότε να βρείτε το βαθμό του καθώς και την αριθμητική τιμή του για $x = 2$.

Διαίρεση πολυωνύμων

5. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο, όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $2x - 1$ και υπόλοιπο x+2.

6. Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύουν οι σχέσεις $P(1) = 0$ και $P(0) = 1$. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - x)$.

7. Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$P(1) = 3 \text{ και } P(2) = 4$$

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 3x + 2$.

β. Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού και ισχύουν οι σχέσεις:

$$P(0) = 8 \text{ και } P(3) = 17$$

i. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ καθώς και το πολυώνυμο $P(x)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(\eta\mu x) = \eta\mu x + 2$.

γ. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^{2018} + \alpha x + \beta$ για το οποίο είναι γνωστό ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 2x))$ είναι το $x + 2$.

i. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $P(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρήματα

8. Με χρήση του σχήματος Horner, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

α. $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ έχει παράγοντα $(x-1)(x-2)$.

β. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4$ έχει παράγοντα $(x-2)^2$.

9. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x-3)$ έχει παράγοντα $x-4$.

10. Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι γνωστό ότι $P(1) = 2$ και $P(3) - 1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x-3)$.

11. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει:

$$2P(x) + P(2-x) = -x^2 - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές $P(0)$ και $P(2)$.

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 2x$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$ είναι ίσο με 3.

β. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$ είναι ίσο με 6.

γ. Αν τα υπόπολοιπα των διαιρέσεων $P(x) : (x+1)$ και $P(x) : (x-2)$ είναι -1 και 4 αντίστοιχα..

δ. Αν η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = 1$ είναι ίση με 5 και το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ε. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - x - 2$.

Εξισώσεις- Ανισώσεις

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$

β. $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

γ. $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

δ. $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x) + 2 = 0$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$

β. $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$

γ. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

δ. $6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$

15. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 6x + 9)(x^2 - x + 2)$$

16. Να λύσετε την ανίσωση

$$x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 \leq 0$$

17. Να λύσετε την ανίσωση $x^5 - 3x^4 - 6x^2 + 8 \geq 0$

18. Να λύσετε την εξίσωση

$$(x^2 + 2x - 2)^3 - (2x^2 + 4x - 6)^2 - 23x^2 - 46x + 68 = 0$$

19. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$

Να βρείτε:

α. τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$,

β. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

20. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = 3x^3 - 14x^2 + \alpha x + \beta$$

Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x^2 - 4x - 2$ αφήνει υπόλοιπο $(\beta - 8)x + 14 - \alpha$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$ και $\beta = 12$

β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 4x + 8$.

21. Έστω $P(x)$ 3ου Βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε $P(1) = 0$ και $P(2) = 8$.

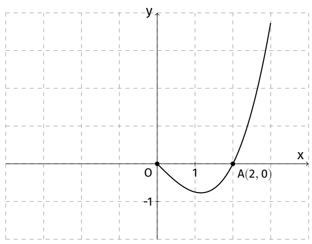
α. Να αποδείξετε ότι $P(x)x^3 + x^2 - 2x$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 8$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 2$.

Συνδιαστικές με συναρτήσεις

22. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \gamma x + \delta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.



α. Με βάση τη γραφική παράσταση να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$, $\delta = 0$.

β. Θεωρώντας δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$

i. Να αποδείξετε ότι:
$f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

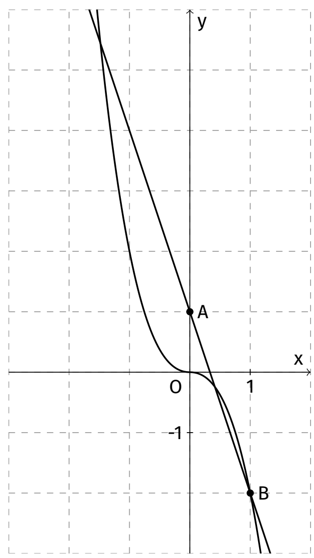
iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και στη συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις:
$f(x) = -\frac{3}{4}$ και $f(x)\frac{3}{4}$

23. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, -2)$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας

β. Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$ να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f

γ. Να λύσετε την ανίσωση



$$-x^3 - x^2 < -3x + 1$$

Εξισώσεις-Ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

24. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} = 2x - \frac{x-3}{x-2}$$

25. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{3x+11}{x^2-x-20} + 2 = \frac{2x-2}{x+4}$$

26. Να λυθεί η εξίσωση

$$(x-1)^2 + \frac{1}{x^2-2x} = 3$$

27. Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$$

28. Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{x^3+6x-5}{x^2-9} + \frac{3x}{x+3} + \frac{5}{x-3} + 2 \geq 0$$

29. Να λυθεί εξίσωση

$$\sqrt{x+1} + 1 = x$$

30. Να λυθεί εξίσωση

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$$

31. Να λυθεί εξίσωση

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{4x-4} - 5x + 13 = 0$$

Επαναληπτικές - Θέματα εξετάσεων

32. Δίνεται πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda \text{ , με } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα $x+2$.

β. Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ. Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$$

33. Αν το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 4)x^4 + \frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{4}x^3 + 3x^2 + 2\lambda x - \lambda$$

είναι 3ου βαθμού.

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda = -2$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 14$.

γ. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $\upsilon(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 1)$, να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{\pi(x)} = \upsilon(x)$.

34. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$$

το οποίο έχει παράγοντα $x^2 - 2x + 1$.

α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^3 x + 6\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 4 = 0$$

Απαντήσεις

1. $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 1\frac{1}{2}$

2. α. $\alpha = 1$, β. $\alpha = -1$

3. $P(x) = 3x^2 - 7x + 1$

4. $\lambda = -2$, $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$, $P(2) = -2$

5. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$

6. $\upsilon(x) - x + 1$

7. **α.** $\upsilon(x) = x + 2$

β. **α.** $P(x) = x^3 - 6x + 8$

β. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

8. **α.** $P(x) = (x-1)(x-2)(2x^2+1)$

β. $P(x) = (x-2)^2(x^2 - x + 1)$

10. $\upsilon(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

11. **α.** $P(0) = 1$ και $P(2) = -3$

β. $\upsilon(x) = -2x + 1$

12. **α.** $\alpha = -4, \beta = 8$

β. $\alpha = -7, \beta = 2$

γ. $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{8}{3}$

δ. $\alpha = -6, \beta = 12$

ε. $\alpha = -1, \beta = 2$

13. **α.** -2

β. $1, 2, 4$

γ. $-2, 2$

δ. $1 - \sqrt{10}, 1 + \sqrt{10}, -1, 3$

ε. $\alpha = -1, \beta = 2$

14. **α.** $1, -1, 2, \frac{1}{2}$

β. $1, -1, -2, -\frac{1}{2}$

γ. $-1, -2, -\frac{1}{2}$

δ. $-1, 2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

15.

x	$-\infty$		-3		-1		2		4		$+\infty$
$x-2$		-		-		-	0	+		+	
x^2-3x-4		+		+	0	-		-	0	+	
x^2+6x+9		+	0	+		+		+		+	
x^2-x+2		+		+		+		+		+	
P(x)		-		-	0	+	0	-	0	+	

16.

x	$-\infty$		-3		-1		2		5		$+\infty$
$x+1$		-		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+		+	
$x^2-2x-15$		+	0	-		-		-	0	+	
P(x)		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

$x \in [-3, -1] \cup [2, 5]$

17. Θέτουμε $\omega = x^2$. Τότε $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)]$

18. Θέτουμε $y = x^2 + 2x - 2$. Τελικά οι ρίζες :$-4, -3, -1, 1, 2$

19.

α. $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $\Gamma(-5, 0)$

β. $x \in (-5, -1) \cup (2, +\infty)$

20. $x \in \left(-\infty, 2 - \sqrt{6}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 2 + \sqrt{6}\right]$

21.

α. $\alpha = 1, \beta = -1$.

β. $x = 2$.

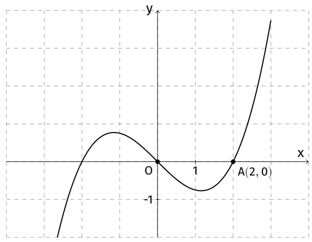
γ. $x \in \left(-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

22.

α. $f(0) = 0, f(2) = 0$

β. **i.**

ii.



iii. $-1, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

23.

α. $y = -3x + 1$

β. $B(1, 2)$,

$\Gamma\left(-1+\sqrt{2}, 4-3\sqrt{2}\right)$,

$\Delta(-1-\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2})$

γ. $x \in \left(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right) \cup (1, +\infty)$

24. $x = -1$, $x = -\dfrac{1}{2}$

25. $x = 3$

26. Θέτουμε $\omega = x^2 - 2x$ οπότε $x = 1 + \sqrt{2}$, $x = 1 - \sqrt{2}$

27.

x	$-\infty$	-3		-2		1		3	$+\infty$
$x+2$	-	‖	-	0	+	‖	+		+
x^2-9	+	0	-		-		-	0	+
$-x^2-2x+3$	-	0	+		+	0	-		-
ΠΗΛΙΚΟ	+	0	+	0	-	0	+	0	-

$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup (1, 3]$

28. $x \in [-4, -3) \cup [-2, 1] \cup (3, +\infty)$

29. $x = 3$

30. $x = 3$, $x = 1$

31. Θέτουμε $\omega = \sqrt{x-1}$, οπότε $x = 5$, $x = 17$

32.

α. $\kappa = -7$, $\lambda = 6$

β. $x = 1$ ή $x = -1$ ή $x = -2$ ή $x = 3$

γ. $x \in [-2, -1] \cup [1, 3] \cup (5, +\infty)$

33.

α. $\lambda^2 - 4 = 0$ και $\dfrac{\lambda^2 - \lambda - 2}{4} \neq 0$

β. $x \in (-\infty, -3] \cup [-2, 2]$

γ. $\pi(x) = x+3$ και $\upsilon(x) = -3x+5$, οπότε $x = 1$.

34.

α. $\alpha = -6$, $\beta = 1$

β. $x = 1$ ή $x = -2$ ή $x = -\dfrac{1}{2}$

γ. $\sigma\upsilon\nu x = 1$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{2} \iff x = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$