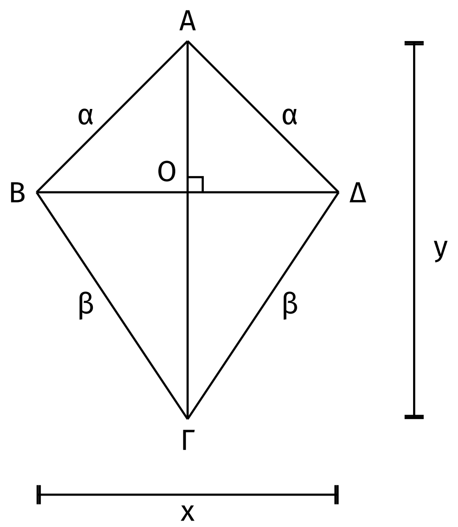
ΧΑΡΤΑΕΤΟΣ

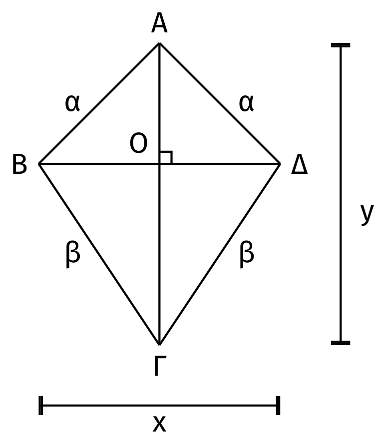
Εισαγωγή

Μέρες που είναι ασδφ



Διατύπωση του προβλήματος

Έστω ένας χαρταετός και x και y τα μήκη των διαγωνίων του. Αν είναι γνωστή η περίμετρος του χαρταετού, ποια είναι τα μήκη των διαγωνίων ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο;



Λύση

Το εμβαδον του χαρταετού δίνεται από το γνωστό τύπο

$$E = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Η ΑΓ είναι μεσοκάθετος της ΒΔ οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$AO^2 + BO^2 = AB^2 \implies AO^2 = AB^2 - BO^2 \implies AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Όμοια στο τρίγωνο ΒΟΓ

$$O\Gamma = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η δεύτερη διαγώνιος είναι

$$y = AO + O\Gamma = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Το εμβαδόν του χαρταετού μπορεί να εκφραστεί πλέον ως συνάρτηση του μήκους x της διαγωνίου ΒΔ:

$$E(x) = \frac{1}{2}x\left(\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

με $x < \min(2\alpha, 2\beta)$, λόγω τριγωνικής ανισότητας.

Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned}
E'(x) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)+\frac{1}{2}x\left(\frac{-x}{2\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}+\frac{-x}{2\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)-\frac{1}{2}x^2\frac{\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{2\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-x^2}{4\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Από την παραπάνω

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}>0$$

και για $0<x<\min(2\alpha,2\beta)$

$$\begin{aligned}
E'(x)=0 \iff \sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2=0 &\iff\\
\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\left(\frac{x}{2}\right)^2 &\iff\\
\left(\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\left(\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{x}{2}\right)^4 &\iff\\
\left(\frac{x}{2}\right)^4-(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{x}{2}\right)^2+\alpha^2\beta^2=\left(\frac{x}{2}\right)^4 &\iff\\
(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{x}{2}\right)^2=\alpha^2\beta^2 &\iff\\
\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} &\overset{x>0}{\iff}\\
x=2\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}=\frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} &
\end{aligned}$$

Η λύση είναι δεκτή[1].

Όμοια $E'(x) > 0 \iff 0 < x < \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

x	0 $\quad \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad$ $\min(2\alpha, 2\beta)$	
$E'(x)$	+	0 −
$E(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

max

$$y = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{\frac{\beta^4+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$
$$= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Οπότε οι διαγώνιοι πρέπει να έχουν μήκη:

- $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{2\alpha\beta}}{\sqrt{\mathbf{\alpha^2+\beta^2}}}$
- $\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{\alpha^2+\beta^2}}$

[1] Αν $\alpha < \beta$ ισχύει: $\beta^2 < \alpha^2 + \beta^2 \iff \beta < \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \iff \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < 1 \iff \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < 2\alpha$, ομοίως αν $\beta < \alpha$