ΧΑΡΤΑΕΤΟΙ

Μέρος πρώτο

Εισαγωγή

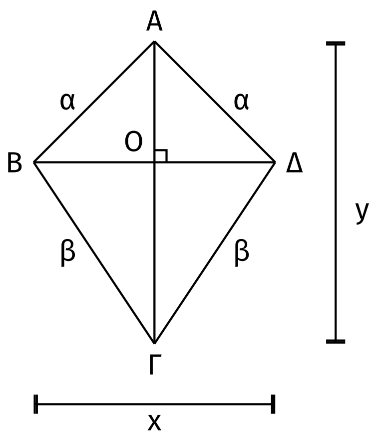
Ένα πρόβλημα που δημιουργήθηκε επάνω στο τραπέζι της Τσικνοπέμπτης.

"Ποιες είναι οι διαστάσεις που θα πρέπει να έχει ένας χαρταετός;"

Η περίπτωση του παραδοσιακού εξάγωνου χαρταετού δε δίνει και πολλές επιλογές. Το ερώτημα είναι τι γίνεται στην περίπτωση ενός τετράπλευρου χαρταετού. Η δύναμη της άνωσης είναι ανάλογη του εμβαδού του χαρταετού, οπότε όσο μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν τόσο ευκολότερη η πτήση του [1].

Διατύπωση του προβλήματος

Έστω ένας τετράπλευρος χαρταετός με πλευρές $AB = A\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$ και x και y τα μήκη των διαγωνίων του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν είναι γνωστή η περίμετρος του χαρταετού, ποια είναι τα μήκη των διαγωνίων ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο;



Λύση

Το εμβαδον του χαρταετού δίνεται από το γνωστό τύπο

$$E = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

[1] https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/kitelift.html

Η ΑΓ είναι μεσοκάθετος της ΒΔ οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$AO^2 + BO^2 = AB^2 \implies AO^2 = AB^2 - BO^2 \implies AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Όμοια στο τρίγωνο ΒΟΓ

$$O\Gamma = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η δεύτερη διαγώνιος είναι

$$y = AO + O\Gamma = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Το εμβαδόν του χαρταετού μπορεί να εκφραστεί πλέον ως συνάρτηση του μήκους x της διαγωνίου ΒΔ:

$$E(x) = \frac{1}{2}x\left(\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

με $x < \min(2\alpha, 2\beta)$, λόγω τριγωνικής ανισότητας.
Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned}
E'(x) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right) + \frac{1}{2}x\left(\frac{-x}{2\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} + \frac{-x}{2\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right) - \frac{1}{2}x^2\frac{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{4\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - x^2}{4\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Από την παραπάνω

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}>0$$

και για $0<x<\min(2\alpha,2\beta)$

$$\begin{aligned}
E'(x)=0 \iff \sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2&=0 \iff\\
\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}&=\left(\frac{x}{2}\right)^2 \iff\\
\left(\alpha^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\left(\beta^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)&=\left(\frac{x}{2}\right)^4 \iff\\
\left(\frac{x}{2}\right)^4-(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{x}{2}\right)^2+\alpha^2\beta^2&=\left(\frac{x}{2}\right)^4 \iff\\
(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{x}{2}\right)^2&=\alpha^2\beta^2 \iff\\
\left(\frac{x}{2}\right)^2&=\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \overset{x>0}{\iff}\\
x=2\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}&=\frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}
\end{aligned}$$

Η λύση είναι δεκτή[2].

Όμοια $E'(x)>0 \iff 0<x<\dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

x	0	$\frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$	$\min(2\alpha,2\beta)$
$E'(x)$	+	0	−
$E(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

[2]Αν $\alpha<\beta$ ισχύει: $\beta^2<\alpha^2+\beta^2 \iff \beta<\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \iff \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}<1 \iff \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}<2\alpha$, ομοίως αν $\beta<\alpha$

Το εμβαδόν είναι μέγιστο για $x = \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2} + \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{\frac{\beta^4+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} \\
&= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}
\end{aligned}
$$

Οπότε οι διαγώνιοι πρέπει να έχουν μήκη:

- $\mathbf{x = \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}$
- $\mathbf{y = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Βρήκαμε τις βέλτιστες διαστάσεις για τις διαγωνίους. Υπάρχει όμως βέλτιστη επιλογή για το μήκος των πλευρών; Θα το δούμε στο δεύτερο μέρος.

Συνεχίζεται...