Robotik

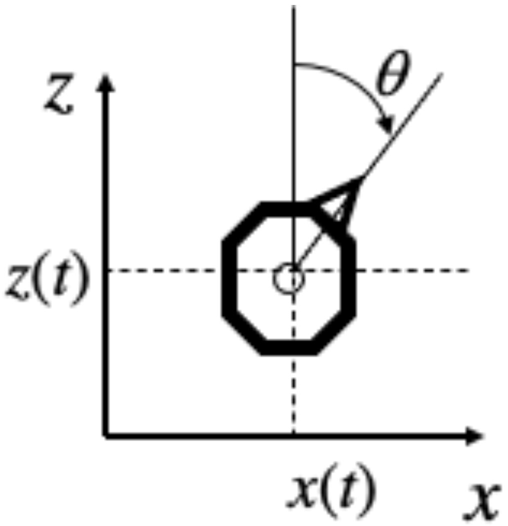
Priv.-Doz. Dr. Thomas Wiemann
Institut für Informatik
Autonome Robotik

SoSe 2021

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Wdh: Basisodometrie für Diff'antrieb



Aufsicht von oben

$$dx/dt = v\sin(\theta_t) = [(v_R + v_L)/2]\cdot\sin(\theta_t)$$
$$dz/dt = v\cos(\theta_t) = [(v_R + v_L)/2]\cdot\cos(\theta_t)$$

$$\theta_t = \theta_0 + \frac{(v_L - v_R)t}{b}$$

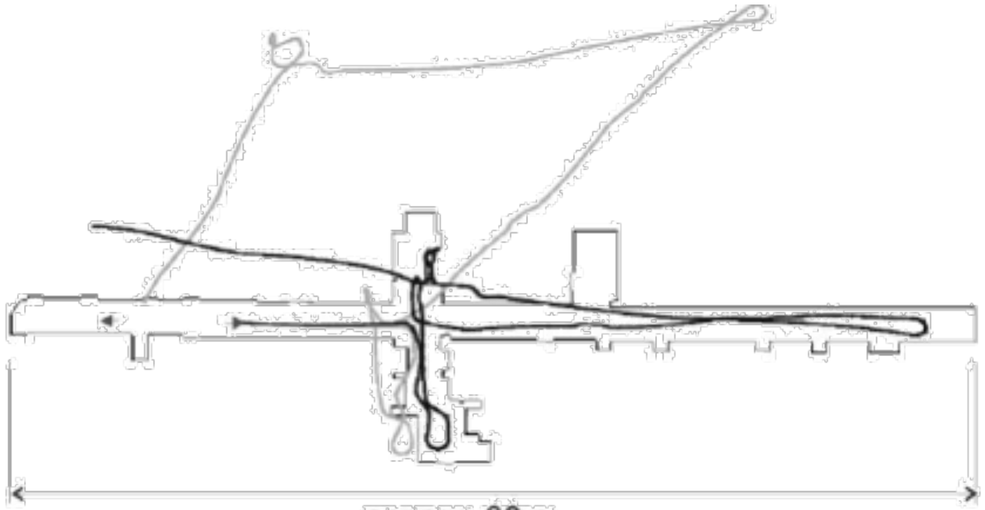
- Die Differenzmessung zwischen v_L, v_R ist fehlerbehaftet
- Bei kleiner Differenz $(v_L - v_R)$ numerisch instabil
- Approximiere Pose über die Zeit Δt
- Während Δt seien:

$$v = (v_R + v_L)/2$$
$$\Delta\theta = (v_L - v_R)/b$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ z_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ z_{n-1} \\ \theta_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v\cdot\Delta t\cdot\sin\left(\theta_{n-1} + \frac{\Delta\theta}{2}\Delta t\right) \\ v\cdot\Delta t\cdot\cos\left(\theta_{n-1} + \frac{\Delta\theta}{2}\Delta t\right) \\ \Delta\theta\cdot\Delta t \end{bmatrix}$$

- Alternativen:
  - vereinfacht nur $v\cdot\Delta t\cdot\sin\theta$ bzw. $v\cdot\Delta t\cdot\cos\theta$
  - Kalibrierbares Fehlermodell für x, z (z.B. für Ceres)

Wdh.: Ergebnisse Qualitativ



Beispiel:

- Flurfahrt ca. 200m mit KURT2

Für kurze, besonders gerade Strecken ist sie okay!
Fusioniert mit anderen Sensordaten ist sie hilfreich!

- Lokalisierung nach Odometrie (Koppelnavigation) ist kostenlos
- Sie unterliegt gravierenden systematischen Fehlern
- Variabler Schlupf (auch des Zahnriemens, KURT2), Kurvenmodell, …)
- Billige empirische Verbesserungen machen Sinn
- Fehler akkumulieren über die Zeit unbegrenzt

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Inhalt

Gliederung

5. Fortbewegung
   1. Einleitung
   2. Bewegungsschätzung
   3. **Bayes- und Kalmanfilter**
   4. Fusion von Odometriedaten

6. Lokalisierung
7. Mapping
8. Navigation
9. Ausblick

Wdh.: Ereignis, Variable

Ergebnisraum Ω: Mögliche Ergebnisse eines Zufallsexperiments

z.B.: {„1“, „2“, „3“, „4“, „5“, „6“} beim Würfeln

{[„1“,*sonnig*], [„1“,*regnet*], [„2“,*sonnig*], …, [„6“,*regnet*]}

Ereignis:

Teilmenge v. Ω. z.B.: {„2“, „4“, „6“} beim Würfeln („gerade“)

Elementarereignis:

$\omega \in \Omega$. (eigentlich: einelementiges Ereignis) z.B.: [„1“,*sonnig*]

Zufallsvariable: Funktion von Elementarereignissen $\omega \in \Omega$ in einen Wertebereich $\mathcal{D}$. (Notation: beginnt mit Großbuchstabe)

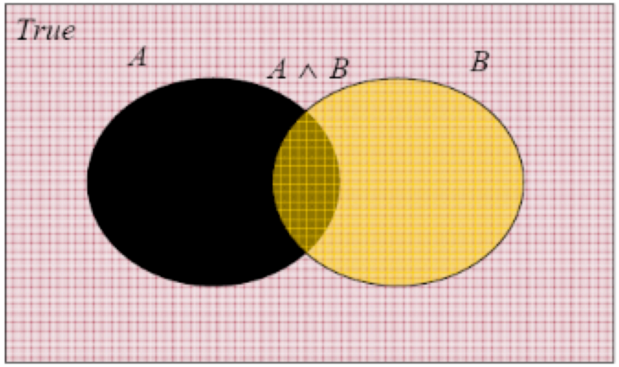
$\mathcal{D}$={true, false}: **Boolesche** Zufallsvariable, z.B.: *Zahnloch*

$\mathcal{D}$ diskret: **Diskrete** ZV, z.B.: *Augenzahl* (auf einem Würfel)

$\mathcal{D}$ stetig (hier: $\Re$): **kontinuierliche** ZV, z.B.: *Position* (Roboter im 2D)

Wdh.: Wahrscheinlichkeitsraum

Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P), $\Omega \neq \emptyset$: P ist eine so auf Ereignissen aus Ω definierte reellwertige Funktion („Wahrscheinlichkeit"), dass die **Kolmogorow-Axiome** gelten:



1. $0 \leq P(e) \leq 1$ für alle $e \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Für $d, e \subseteq \Omega$ gilt: $P(d \cup e) = P(d) + P(e) - P(d \cap e)$

z.B.: $P(\text{„}gerade\text{"}) = P(\text{„}2\text{"}) + P(\text{„}4\text{"}) + P(\text{„}6\text{"}) = 1/6+1/6+1/6=1/2$

(W'raum präziser (Ω,Σ,P) mit Ereignisraum Σ – hier verkürzt dargestellt)

Ereign. a,b sind **unabhängig** auf (Ω,P), gdw:

$$P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$$

Wdh: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

P induziert Funktionen auf den Zufallsvariablen über (Ω,P):

Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{P}$ einer diskreten Zufallsvariablen X: Liste aus W'keiten der möglichen Werte für X, wobei $\sum_{x\in \mathrm{Range}(X)\subseteq\Omega}\mathbf{P}(x)=1$

z.B.: $\mathbf{P}(Augenzahl) = \langle P(„1“), \dots, P(„6“)\rangle = \langle 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6 \rangle$

Notation: $\mathbf{P}(Augenzahl = „1“) = 1/6$

Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathbf{P}$ einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X: Fkt. vom Typ $\mathrm{Range}(X)\rightarrow[0,1]$, wobei

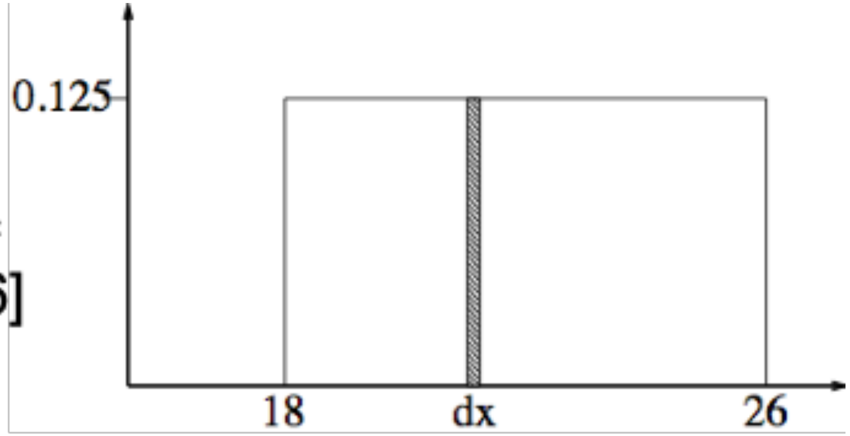
$$\int_{x\in \mathrm{Range}(X)\subseteq\Omega}\mathbf{P}(x)\mathrm{d}x = 1$$

und $\mathbf{P}(a \le x \le b) = \int_a^b \mathbf{P}(x)\,\mathrm{d}\,x$

z.B.: ...

Beispiel für Wahrscheinlichkeitsdichte

$\mathbf{P}(Temperatur) = U[18{,}26](x) =$
Gleichverteilung auf [18,26]



$$\int_{-\infty}^{\infty} U[18{,}26](x)\mathrm{d}x = \int_{18}^{26} U[18{,}26](x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\mathbf{P}(20 \leq Temperatur \leq 22) = \int_{20}^{22} U[18{,}26](x)dx = 0{,}25 = P(\ldots)$$

$$P(20{,}5) = 0$$

$$\mathbf{P}(Temperatur = 20{,}5) = \lim_{dx \to 0} \mathbf{P}(20{,}5 \leq X \leq 20{,}5 + \mathrm{d}x)/\mathrm{d}x = 0{,}125/^{\circ}\mathrm{C}$$

Unbedingte Wahrscheinlichkeiten

W'keit P „an sich", ohne weitere Information:

Unbedingte Wahrscheinlichkeit (**a priori** W'keit)

z.B.: $P(regnet) = 0{,}3$

Verteilung für unbedingte W'keiten wie beschrieben

z.B.: $\mathbf{P}(OSWetter) = \langle P(sonnig), P(wolkig), P(regnet), P(frostig) \rangle$
$= \langle 0{,}25, 0{,}4, 0{,}3, 0{,}05 \rangle$

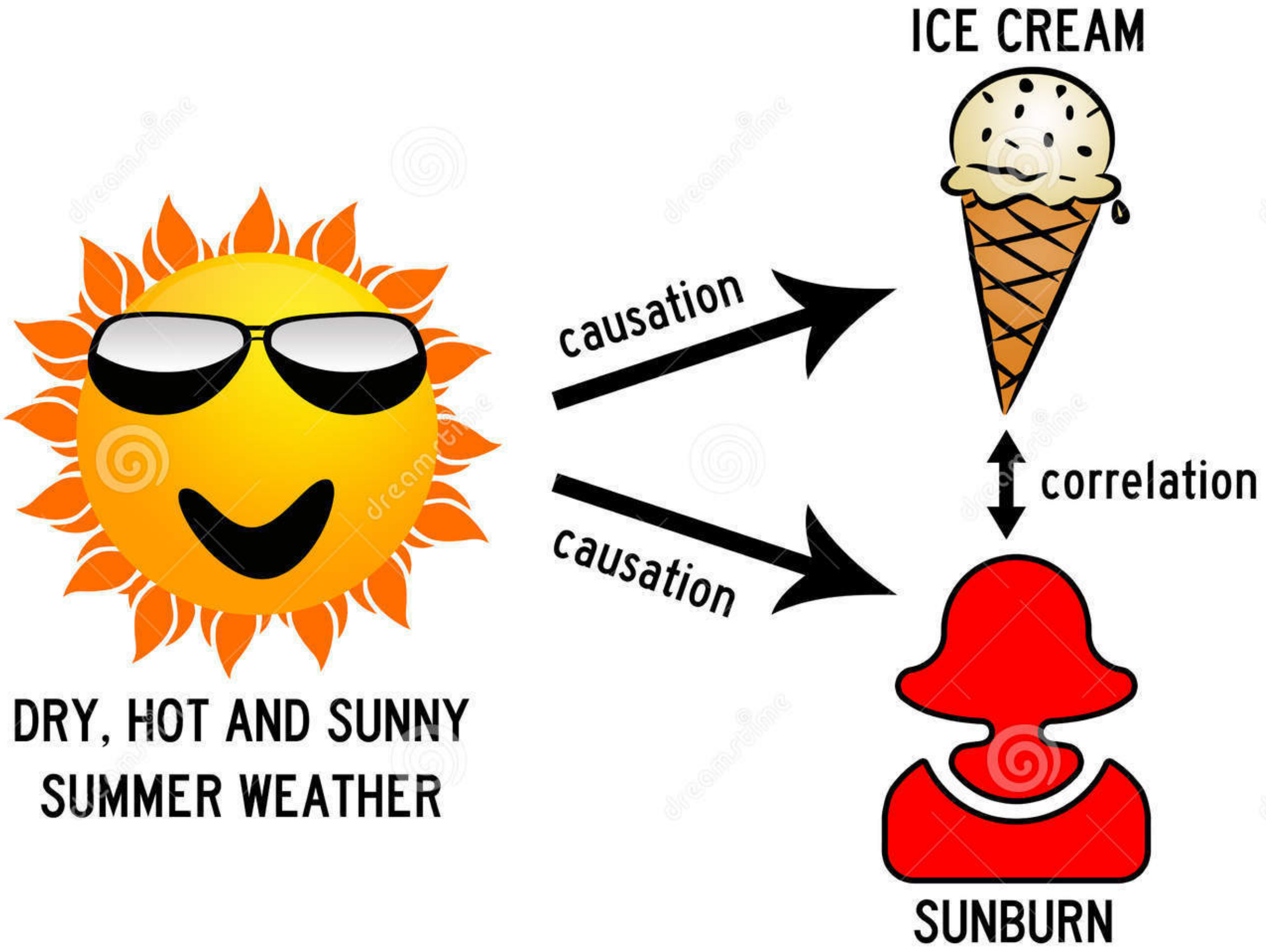
Gemeinsame Verteilung von n ZVen entspricht n-dim. Tabelle:

Notation: $\mathbf{P}(ZV_1 \cap ZV_2)$
oder $\mathbf{P}(ZV_1, ZV_2)$
Beispiel:
$\mathbf{P}(OSWetter, Zahnloch)$

OSWetter= / *Zahnloch=*	*sonnig*	*wolkig*	*regnet*	*frostig*
false	0,225	0,36	0,27	0,045
true	0,025	0,04	0,03	0,005

Vollständige gem. Verteilg.: W'keit aller Elementarereignisse
(hat $O(m^n)$ Einzelw'keiten für n ZVen mit max. m Werten)

Kausalität und Korrelation



Bedingte Wahrscheinlichkeiten

W'keit P bei gegebener Information:

Bedingte Wahrscheinlichkeit (**a posteriori** W'keit)

z.B.: $P(regnet \mid luftdruck\_hoch) = 0{,}1$

Definiert (falls $P(b)>0$) als
($P(a|b)=0$, falls $P(b)=0$)

$$\boxed{P(a \mid b)} := \frac{P(a \cap b)}{P(b)}$$

… oder als („Produktregel“): $P(a \cap b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$

z.B.: $P(sonnig|\neg zahnloch)=0{,}225/0{,}9=0{,}25$

entspricht $P(sonnig)$, weil unabhängig!

Entsprechend für W'verteilungen:

$$\mathbf{P}(OSWetter, Zahnloch) = \mathbf{P}(OSWetter|Zahnloch)\ \mathbf{P}(Zahnloch)$$

Bedingte Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse a, b sind **bedingt unabhängig**, gegeben c, gdw.:

$$P(a,b \mid c) = P(a \mid c)\, P(b \mid c)$$

Zwei Zufallsvariable A, B sind **bedingt unabhängig**, geg. C, gdw.:

$$\mathbf{P}(A, B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C)\, \mathbf{P}(B \mid C)$$

Damit äquivalent sind die Formulierungen

$\mathbf{P}(A \mid B,C) = \mathbf{P}(A \mid C)$ und $\mathbf{P}(B \mid A,C) = \mathbf{P}(B \mid C)$

↪ **kleinere Verteilungen ohne volle Unabhängigkeit!!**

Die Bayes'sche Regel

Erinnerung Produktregel: $P(a \cap b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$

„Satz“ von Bayes

$$P(b \mid a) = \frac{P(a \mid b)P(b)}{P(a)} = \alpha \cdot P(a \mid b)P(b)$$

… oder für Verteilungen:

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \frac{\mathbf{P}(X \mid Y)\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(X)} = \alpha \cdot \mathbf{P}(X \mid Y)\mathbf{P}(Y)$$

… oder bei vorhandener Evidenz $\mathbf{e}$ (Messungen oft $\mathbf{z}$ genannt!):

$$P(y \mid \mathbf{z}) = P(y \mid z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_n \mid y, z_1, \ldots, z_{n-1})P(y \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

Anwendung: Diagnoseregeln

$$P(ursache \mid wirkung) = \frac{P(wirkung \mid ursache) \cdot P(ursache)}{P(wirkung)}$$

Oft sind kausale Zusammenhänge besser bekannt
als diagnostische

Verwendung in der Robotik

$$\mathbf{P}(Zustand \mid Messung) = \frac{\mathbf{P}(Messung \mid Zustand) \cdot \mathbf{P}(Zustand)}{\mathbf{P}(Messung)}$$

Beispiel

$$P(Briefbox = voll \mid Fahne = hoch) = \frac{P(Fahne = hoch \mid Briefbox = voll) \cdot P(Briefbox = voll)}{P(Fahne = hoch)}$$

Totale Wahrscheinlichkeit, Marginalisierung

- Gegeben seien n paarweise disjunkte Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mit $P(B_i) > 0$ für alle i
- Wir kennen nur bedingte Wahrscheinlichkeiten und die a-priori-Wahrscheinlichkeiten der B_i
- Wir suchen: die totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A
- Es gilt:

$$P(A) = \sum_B P(A, B)$$

$$P(A) = \int P(A, B) db$$

$$P(A) = \sum_B P(A \mid B) \cdot P(B)$$

$$P(A) = \int P(A \mid B) \cdot P(B) db$$

Erwartungswert

Erwartungswert
(e. numerischen diskreten ZV)

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

- repräsentiert „erwartetes“ Ergebnis e. zufälligen Messung
- i.a. nicht dasselbe wie Mittelwert!

Beispiele

- Würfel: $E(Augenzahl) = 1/6 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 3,5$
- Münze: $E(Münzwurf) = 1/2 \cdot (0+1) = 0,5$
- bei gleichverteilter ZV ist E-Wert gleich Mittelwert

(Ko)Varianz, Korrelation

Varianz ist „Streuung der Abweichung vom Erwartungswert“:

$$V(X) = \sigma_X^2 := E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Kovarianz ist „Zusammenhang“ zweier ZV:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = E\left(\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right)$$

- positiv bei gleichsinnigem Zusammenhang
- negativ bei gegensinnigem
- 0 bei fehlendem Zusammenhang
  (≠Unabhängigkeit! Aber: Wenn unabhängig, dann Kovarianz $= 0$)

Korrelation ist auf $[-1,1]$ normierte Kovarianz

Eine **Kovarianzmatrix** Σ listet d. Kovarianzen aller Paare einer Menge v. ZV $X_1, \ldots, X_n$.
(Symmetrisch, da $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$; ($\sigma_{ii} = \sigma_i^2$))

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

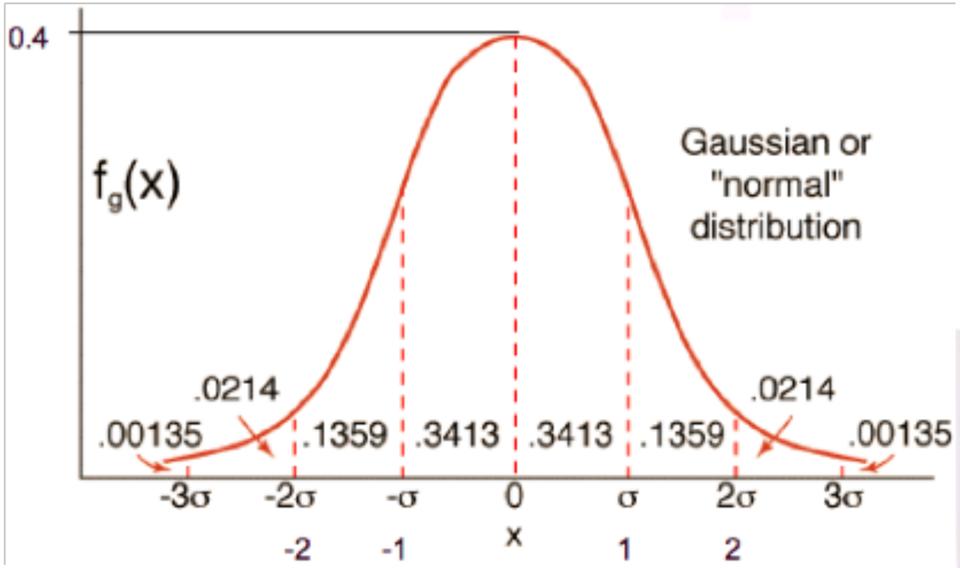
Gaußverteilung

Gaußverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ:

$$\mathbf{P}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standard-Normalverteilung (μ=0, σ=1): $\mathbf{P}(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$

$P(\mu-\sigma<X\leq \mu+\sigma) \approx 0.68$
$P(\mu-2\sigma<X\leq \mu+2\sigma) \approx 0.955$
$P(\mu-3\sigma<X\leq \mu+3\sigma) \approx 0.997$



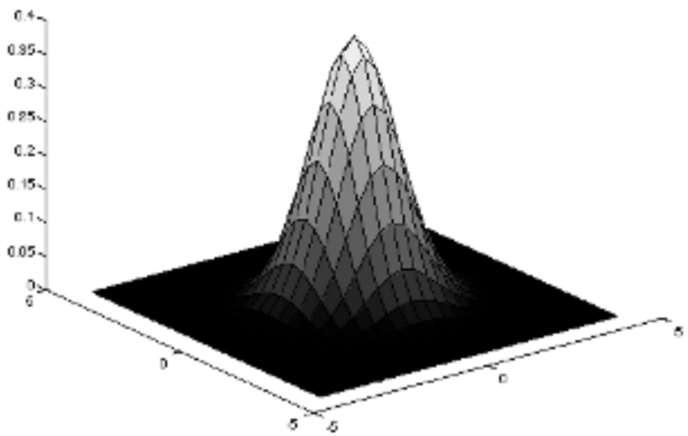
Standardabweichung σ ist die Wurzel der Varianz

Multivariate Gaußverteilungen

$$\mathbf{P}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

… sind direkte Verallgemeinerungen eindimensionaler Gaußverteilungen auf n-dim. Vektor $\mathbf{x}$ für eine n-dim. Kovarianzmatrix Σ, wobei für Skalar x (also $n=1$) gilt: $\Sigma=\sigma^2$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \mathrm{Det}(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}\left((\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\,\Sigma^{-1}\,(\mathbf{x}-\mu)\right)}$$



(Nach Konstruktion:
Σ invertierbar, $\mathrm{Det}(\Sigma)\neq 0$!
Erinnerung: $\mathrm{Det}(r)=r$)

Stichprobenziehen gemäß Verteilung

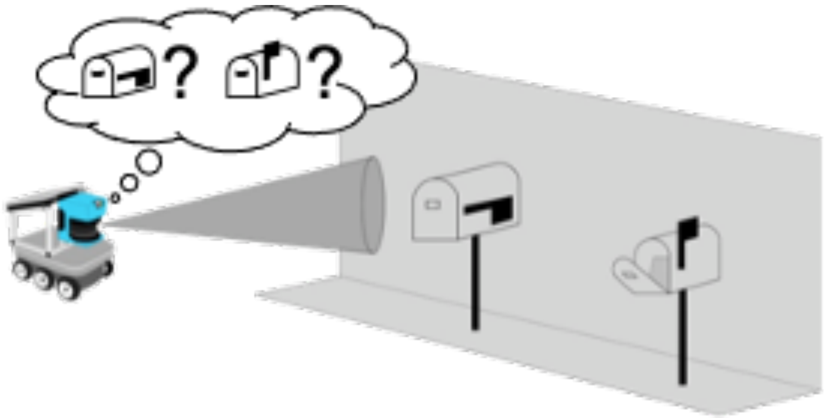
… werden wir immer mal wieder brauchen

… ist ein klassisches Problem in der Statistik
(„… Umfrage unter 1001 repräsentativ ausgewählten Dalmatinern“,
„… Sitzverteilung nach d‘Hondtschem Verfahren aus Wählerstimmen“,
…)

Grundidee theoretisch:

- Aufrufe `random` approximieren Gleichverteilung auf $[0,1]$
- Stichproben $S_{1,\ldots,N}$ gleichverteilt auf $[0,1]$ (bzw. $(0,1)$) lassen sich umrechnen auf beliebige Verteilung $\mathbf{P}$
  ➥ Wert nach $\mathbf{P}$ von S_i ist x_i für das gilt: $S_i = \int_{-\infty}^{x_i} \mathbf{P}(x)dx$

Probabilistische Robotik - Briefkastenbeispiel



Ist Post da?

oder:

$$\mathbf{P}(S|E) = \frac{\mathbf{P}(E|S)\mathbf{P}(S)}{\mathbf{P}(E)}$$

- Für Briefkasten betrachte die Zufallsverteilung S mit $\mathcal{D}(S) = \{l, v\}$ (leer bzw. voll)
- Evidenzen E mit $\mathcal{D}(E) = \{e_l, e_v\}$
- Gegeben (lange Erfahrung!) seien:

$$P(S) = < P(l), P(v) > = < 0.5,0.5 >$$

$$P(E|S) = < P(e_l|l), P(e_l|v), P(e_v|v), P(e_v|l) >$$

$$= < 0.7,0.2,0.8,0.3 >$$

- z.B.: $P(l|e_l) = \frac{P(e_l|l)P(l)}{P(e_l)} = \frac{0,7 \cdot 0,5}{P(e_l)}$
- Kennen wir $P(e_l)$?

Ja: $P(e_l) = P(e_l|l)P(l) + P(e_l|v)P(v) = 0,35 + 0,1$

(Marginalisierung)

$\Rightarrow P(l|e_l) = 0,7778$

Statistische Unabhängigkeit

- Löst "schärfer Hingucken" Unsicherheit auf?
- Extrembeispiel: Nutze die selbe Information mehrmals
  - Intuition sagt: "Das kann nichts bringen!"
  - Wahrscheinlichkeitstheorie sagt: "Stimmt!"

$$P(a|b,b) = P(a|b)P(b|b) = P(a|b)$$

Messungen müssen statistisch unabhängig sein:
$P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$ also $P(a|b)=P(a)$ und $P(b|a)=P(b)$

- Messungen „desselben" an derselben Stelle sind abhängig
- Modelliere alle Messungen eines Zustands als eine Messung
- Auch konsekutive Messungen auf Robotern
- (z.B. bei Lokalisierung) sind statistisch meist nicht unabhängig
- Praktisch kümmert man sich meist nicht darum!

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Bayes-Filter: Modell (1)

- Gesucht: evidenzbasierte Zustandsschätzung

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) = f(\mathbf{e}_{1:t+1}, \mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t}))$$

- Für irgendeine Funktion f und Evidenzen (Aktion oder Messung) e
- Unter der **Markov-Annahme**: Eine Evidenz ist unabhängig von allen anderen, gegeben der aktuelle Zustand
- Ansatz:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1}) \\ &= \eta \cdot \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{e}_{1:t}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) && \text{[Bayessche Regel]} \\ &= \eta \cdot \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})}_{\text{Filterung}} \cdot \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t})}_{\text{Prädiktion}} && \text{[Markow-Annahme]}\end{aligned}$$

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Bayes-Filter: Modell (2)

- Vereinfachung der Prädiktion:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) = \int_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t,\mathbf{e}_{1:t}) \cdot P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})\right]$$

Aktuelle Wahrscheinlichkeit für Zustand

$$= \int_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t) \cdot P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})\right]$$

[Markow-Annahme]

- Zusammengefasst:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) = \eta \cdot \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}) \cdot \int_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t) \cdot P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})\right]$$

- So nicht praktikabel:
  - kontinuierliche Verteilungen, Integration
- Unterschiedliche Vereinfachungen / Approximationen möglich

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Spezieller Bayes-Filter (Idee)

- Voraussetzung: Roboterhandeln + Umgebungsdynamik wird beschrieben als Folge von abwechselnd Aktion / Ereignis und Zustandsmessung, gegeben Start-Zustandsschätzung

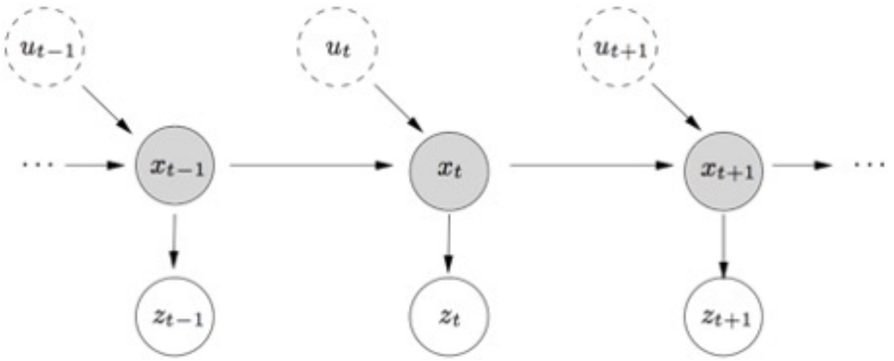
1.Prädiktion:

- Sage resultierenden Zustand für Aktion/Ereignis im aktuellen Zustand voraus (a-priori-Zustandsschätzung)
- (z.B. berechne erwartete Zielpose für Fahrbefehl);
- führe die Aktion aus (bzw. das unabhängige Ereignis geschieht)

2.Filterung:

- Miss resultierenden Zustand; ggf. mach mehrere unabhängige Messungen (die sich widersprechen dürfen)
- z.B. miss Pose durch Odometrie und durch IMU;
- berechne aktuelle Zustandsverteilung, die maximal gut zu allen Messungen und der Vorhersage passt (a-posteriori-Zustandsschätzung)
- weiter bei 1.

Handeln und Messen



- Erziele Unabhängigkeit durch Abwechseln von Messen-Handeln-Messen-Handeln-…
- **Konvention**: Sortiere Evidenzen in Aktionen u_i, Messungen z_i
- **Konvention**: Wahrscheinlichkeit des Zustands x heißt *Bel*(x) (“Belief”)

$$Bel(x_t) = P(x_1 \mid u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t)$$

- Vereinfachung: Diskrete Zustände ➠ Ersetze $\int$ durch $\sum$

$$Bel(x_t) = \eta P(z_t \mid x_t) \sum_{x_{t-1}} P(x_t \mid x_{t-1}, u_t) \cdot Bel(x_{t-1})$$

(Statisches) Sensormodell **Aktionsmodell**

Briefkastenbeispiel (2)

- Aktion *leeren* leert den Briefkasten (meistens):

  $\mathbf{P}(S \mid leeren, S^{-}) =$

  $= \langle\, P(l \mid leeren, v), P(v \mid leeren, v), P(l \mid leeren, l), P(v \mid leeren, l)\,\rangle$

  $:= \langle\, 0.8, 0.2, 1, 0\,\rangle$

- Gelte für Anfangszustand x_0:

  $Bel(x_0{:}S{=}v) = P(v) := 0.75$

- Führe Aktion *leeren* zum Zustand x_1. Dann gilt a priori:

  $Bel(x_1{:}S{=}l) \quad = \sum_S P(l \mid leeren, S) \cdot Bel(x_0{:}S)$

  $= P(l \mid leeren, v) \cdot P(v) + P(l \mid leeren, l) \cdot P(l)$

  $= 0.8 \cdot 0.75 + 1 \cdot 0.25 = 0.85$

  $Bel(x_1{:}S{=}v) = 1 - Bel(x_1{:}S{=}l)$ (Nachprüfen zur Übung!)

Hier Belief noch ohne Messung ➥ a-posteriori-Schätzung analog dem 1. Beispiel-Teil mit Normalisierung