Aufgabe 4.1

Teil A

> Berechnen Sie die a-priori Wahrscheinlichkeitsverteilung für den ersten Tag, an dem Sie Ihre Beobachtungen starten ($t = 1$).

t=0:

$$\mathrm{Bel}(R_0) = P(R_0) = 0.5$$
$$\mathrm{Bel}(S_0) = P(S_0) = 0.5$$

t=1:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Bel}}(R_1) &= P(R_1|R_0) \cdot \mathrm{Bel}(R_0) + P(R_1|S_0) \cdot \mathrm{Bel}(S_0) \\ &= 0.7 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 \\ &= 0.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Bel}}(S_1) &= P(S_1|S_0) \cdot \mathrm{Bel}(S_0) + P(S_1|R_0) \cdot \mathrm{Bel}(R_0) \\ &= 0.7 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 \\ &= 0.5\end{aligned}$$

Teil B

> Ausgehend von dieser Verteilung machen Sie die Beobachtung u_1 (der "Direktor“ kommt mit dem Regenschirm). Wie sieht unter Berücksichtigung dieser Information die a-posteriori Wahrscheinlichkeitsverteilung für Tag 1 aus?

$$\begin{aligned}\mathrm{Bel}(R_1) &= n \cdot P(u_1|R_1) \cdot \overline{\mathrm{Bel}}(R_1) \\ &= n \cdot 0.9 \cdot 0.5 \\ &= n \cdot 0.45\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Bel}(S_1) &= n \cdot P(u_1|S_1) \cdot \overline{\mathrm{Bel}}(S_1) \\ &= n \cdot 0.2 \cdot 0.5 \\ &= n \cdot 0.1\end{aligned}$$

Normalisieren:

$$
\begin{aligned}
1 &= n \cdot (0.45 + 0.1) \\
1 &= 0.55n \\
n &= 1.818
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Bel}(R_1) &= 1.818 \cdot 0.45 \\
&= 0.8181 \\
\text{Bel}(S_1) &= 1.818 \cdot 0.1 \\
&= 0.1818
\end{aligned}
$$

Teil C

> Berechnen Sie nun davon ausgehend die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(R_2|u_1)$, also die a-priori Wahrscheinlichkeit, dass es an Tag 2 regnet, wenn Sie an Tag 1 den Regenschirm gesehen haben.

$$
\begin{aligned}
\overline{\text{Bel}}(R_2) &= P(R_2|R_1) \cdot \text{Bel}(R_1) + P(R_2|S_1) \cdot \text{Bel}(S_1) \\
&= 0.7 \cdot 0.8181 + 0.3 \cdot 0.1818 \\
&= 0.62721
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\text{Bel}}(S_2) &= P(S_2|S_1) \cdot \text{Bel}(S_1) + P(S_2|R_1) \cdot \text{Bel}(R_1) \\
&= 0.7 \cdot 0.1818 + 0.3 \cdot 0.8181 \\
&= 0.373
\end{aligned}
$$

Teil D

> Wie sieht nun die a-posteriori Wahrscheinlichkeit $P(R_2|u_1, u_2)$ aus, wenn Sie den Regenschirm an Tag 2 erneut beobachten?

$$
\begin{aligned}
\text{Bel}(R_2) &= P(u_2|R_2) \cdot \overline{\text{Bel}}(R_2) \\
&= 0.9 \cdot 0.62721 \\
&= 0.565
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Bel}(R_2) &= P(u_2|S_2) \cdot \overline{\text{Bel}}(S_2) \\
&= 0.2 \cdot 0.373 \\
&= 0.075
\end{aligned}
$$

Normalisieren:

$$
\begin{aligned}
1 &= n \cdot (0.565 + 0.075) \\
1 &= 0.64n \\
n &= 1.5625
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bel}(R_2) &= 1.5625 \cdot 0.565 = 0.883 \\
\mathrm{Bel}(S_2) &= 1.5625 \cdot 0.075 = 0.117
\end{aligned}
$$

Teil E

> Nehmen Sie nun an, dass der Regenschirm auch an allen Tagen nach Tag 2 zu sehen ist. Berechnen Sie den Fixpunkt, gegen den die Wahrscheinlichkeit für Regen unter dieser Annahme konvergiert.

Konvergiert gegen 0.9, da die Wahrscheinlichkeit, dass ein Regenschirm mitgenommen wird unter der Bedingung, dass es regnet genau 90% ist.

Teil F

> Betrachten Sie nun den Fall, dass Sie den "Direktor" nach Tag 2 nicht mehr sehen. Welche Vorhersage für die Wahrscheinlichkeit von Regen können Sie nun für Tag 3 und 4 machen? Berechnen Sie auch hier den Fixpunkt, gegen den die Wahrscheinlichkeit für Regen konvergiert, wenn die Vorhersage ohne zusätzliche Beobachtungen weiter in die Zukunft gelegt wird.

Konvergiert gegen 0.5, da der Sensor (Direktor) keinen Einfluss auf die Korrektur hat und entsprechend sich der Wert mit $t \to \infty$ auf die in der Aufgabenstellung gegebenen 50% einpendeln wird.

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Bel}}(R_3) &= P(R_3|R_2) \cdot \mathrm{Bel}(R_2) + P(R_3|S_2) \cdot \mathrm{Bel}(S_2) \\
&= 0.7 \cdot 0.883 + 0.3 \cdot 0.117 \\
&= 0.653
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Bel}}(S_3) &= P(S_3|S_2) \cdot \mathrm{Bel}(S_2) + P(S_3|R_2) \cdot \mathrm{Bel}(R_2) \\
&= 0.7 \cdot 0.117 + 0.3 \cdot 0.883 \\
&= 0.347
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Bel}}(R_4) &= P(R_4|R_3) \cdot \overline{\mathrm{Bel}}(R_3) + P(R_4|S_3) \cdot \overline{\mathrm{Bel}}(S_3) \\
&= 0.7 \cdot 0.653 + 0.3 \cdot 0.347 \\
&= 0.561
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Bel}}(S_4) &= P(S_4|S_3) \cdot \overline{\mathrm{Bel}}(S_3) + P(S_4|R_3) \cdot \overline{\mathrm{Bel}}(R_3) \\
&= 0.7 \cdot 0.347 + 0.3 \cdot 0.653 \\
&= 0.439
\end{aligned}
$$