Aufgabe 4.2

Teil A

> Geben Sie die Matrizen A, B und H für den Kalman-Filter für die beschriebene Domäne an!

Zustandsraum, Aktionsraum und Messraum:

$$x := \begin{pmatrix} x \\ z \\ \theta \\ \lambda \\ \beta \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta \theta \end{pmatrix}, \quad Z := \begin{pmatrix} x \\ z \\ \theta \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Transitionsmodell, Aktionsmodell und Sensormodell:

$$A := I_5, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teil B

> Modellieren Sie die Aktionen rot und tra:
>
> - rot rotiert um den vorgegebenen Wert bei einer Standardabweichung von 0.02 und lässt x, z unverändert.
> - tra translatiert den Roboter um die vorgegebenen Werte bei einer Standardabweichung von 0.5 in beiden Dimensionen. Als Nebeneffekt ändert es möglicherweise die Orientierung mit einer Standardabweichung von 0.01

Rotation:

$$P(x_{t+1} | u_t, x_t) = n \cdot (Ax_t + Bf(u_t), RT_u)$$

$$RT := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Translation:

$$P(x_{t+1}|u_t, x_t) = n \cdot (Ax_t + Bf(u_t), TR_u)$$

$$TR := \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teil C

> Im Startzustand befinde sich der Roboter an $(0, 0, 0)$, der Luftdruck sei 1000 hPa, und die Anzahl der Bundesländer sei 16. Berechnen Sie den Zustand (mehrdimensionaler Mittelwert und Standardabweichung), der sich ergibt, wenn der Roboter erst um 0.3 rad rotiert und anschließend um 2 Einheiten x und 3 Einheiten z translatiert. Geben Sie für alle vorkommenden Zustände die a-priori-Werte für Mittelwert und Varianz sowie die entsprechenden Kalman-Gewinnmatrizen an.

Rotation (Teil 1)

$$x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix:

$$\Sigma_0 = I_5$$

$$\Sigma_Z = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\lambda^2 \end{pmatrix}$$

A-priori:

$$\overline{x}_{t+1} = Ax_t + Bu$$
$$\overline{\Sigma}_{t+1} = A\Sigma_t A^T + \Sigma_u$$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= Ax_0 + B\begin{pmatrix}0\\0\\0.3\end{pmatrix}\\
&= A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1000\\16\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}0\\0\\0.3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1000\\16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0.3\\0\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\0.3\\1000\\16\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}_1 &= A\Sigma_0 A^T + \Sigma_{u_{RT}}\\
&= I_5 + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.02 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.001 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1.02 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1.001 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Kalman-Gewinnmatrix:

$$K_{t+1} = \overline{\Sigma}_{t+1} H^T (H\overline{\Sigma}_{t+1} H^T + \Sigma_z)^{-1}$$

$$K_1 = \overline{\Sigma}_1 H^T (H\overline{\Sigma}_1 H^T + \Sigma_z)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H^T \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.001 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\lambda^2 \end{pmatrix})^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_z^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1.02+\sigma_\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1.001+\sigma_\lambda^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_z^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1.02}{1.02+\sigma_\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1.001}{1.001+\sigma_\lambda^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A-posteriori:

Mittelwert:

$$x_{t+1} = \overline{x}_{t+1} + K_{t+1}(z - H\overline{x}_{t+1})$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \overline{x}_1 + K_1(z - H\overline{x}_1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 1000 \\ 16 \end{pmatrix} + K_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ z_1 \\ \theta_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 1000 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 1000 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_x^2+1} \\ \frac{z_1}{\sigma_z^2+1} \\ \frac{1.02\theta_1 - 0.306}{1.02+\sigma_\theta^2} \\ \frac{1.001\lambda_1 - 1001}{1.001+\sigma_\lambda^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_x^2+1} \\ \frac{z_1}{\sigma_z^2+1} \\ \frac{1.02\theta_1 - 0.306}{1.02+\sigma_\theta^2} + 0.3 \\ \frac{1.001\lambda_1 - 1001}{1.001+\sigma_\lambda^2} + 1000 \\ 16 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Kovarianzmatrix:

$$
\Sigma_{t+1} = (1 - K_{t+1}H)\overline{\Sigma}_{t+1}
$$

$$
\Sigma_1 = (I_5 - K_1 H)\overline{\Sigma}_1
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sigma_x^2+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{\sigma_z^2+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1.02}{1.02+\sigma_\theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{1.001}{1.001+\sigma_\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1.02\sigma_\theta^2}{1.02+\sigma_\theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1.001\sigma_\lambda^2}{1.001+\sigma_\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Translation (Teil 2)

$$
\overline{x}_2 = Ax_1 + B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= x_1 + B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_x^2+1} \\ \frac{z_1}{\sigma_z^2+1} \\ \frac{1.02\theta_1-0.306}{1.02+\sigma_\theta^2}+0.3 \\ \frac{1.001\lambda_1-1001}{1.001+\sigma_\lambda^2}+1000 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_x^2+1}+2 \\ \frac{z_1}{\sigma_z^2+1}+3 \\ \frac{1.02\theta_1-0.306}{1.02+\sigma_\theta^2}+0.3 \\ \frac{1.001\lambda_1-1001}{1.001+\sigma_\lambda^2}+1000 \\ 16 \end{pmatrix}
$$

$$\overline{\Sigma}_2 = A\Sigma_1 A^T + \Sigma_{u_{TR}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1.02\sigma_\theta^2}{1.02+\sigma_\theta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1.001\sigma_\lambda^2}{1.001+\sigma_\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+1}+0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1}+0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1.02\sigma_\theta^2}{1.02+\sigma_\theta^2}+0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1.001\sigma_\lambda^2}{1.001+\sigma_\lambda^2}+0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalman-Gewinnmatrix:

$$K_2 = \overline{\Sigma}_2 H^T (H\overline{\Sigma}_2 H^T + \Sigma_z)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+1}+0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1}+0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1.02\sigma_\theta^2}{1.02+\sigma_\theta^2}+0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1.001\sigma_\lambda^2}{1.001+\sigma_\lambda^2}+0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot ($$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+1}+0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2+1}+0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1.02\sigma_\theta^2}{1.02+\sigma_\theta^2}+0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1.001\sigma_\lambda^2}{1.001+\sigma_\lambda^2}+0.001 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\lambda^2 \end{pmatrix})^{-1}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{6x^6+17x^4+8x^2+1}{4x^4+8x^2+4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6y^6+17y^4+8y^2+1}{4y^4+8y^2+4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25750000z^6+53042500z^4+785400z^2+2601}{25000000z^4+51000000z^2+26010000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1002000000000w^6+2008007000000w^4+3008005000w^2+1002001}{1000000000000w^4+2002000000000w^2+1002001000000} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

> **NB:** x,y,z,w in der letzten Matrix entsprechen σ_x, σ_z, σ_θ, σ_λ.