

自动控制原理

朱英华

Email: zyh09@sina.com

西南交通大学电气工程学院

练习及作业解答——第7章

练习 1

画出图1所示的继电非线性环节的 $-N^{-1}(X)$ 曲线。
已知继电非线性环节的描述函数为：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X}$$

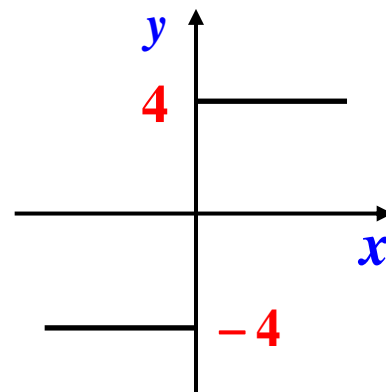


图1 继电型非线性



解：

继电型非线性的描述函数为：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X}$$

由于

$$M = 4$$

有：

$$N(X) = \frac{16}{\pi X}$$

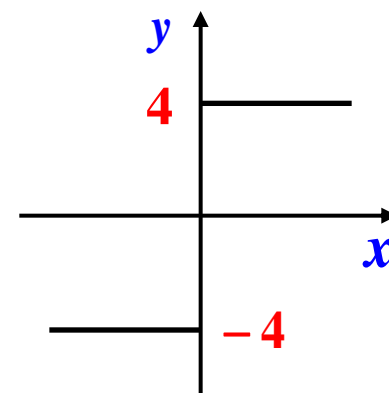


图1 继电型非线性



继电型非线性的负倒描述函数为：

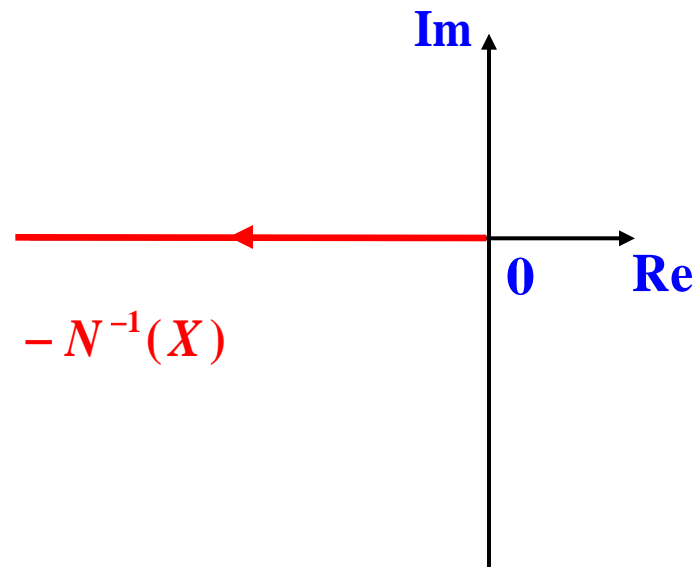
$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi X}{16}$$

X	$0 \rightarrow 16 \rightarrow \infty$
$-N^{-1}(X)$	$0 \rightarrow -3.14 \rightarrow -\infty$



继电型非线性的负倒描述函数为：

$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi X}{16}$$



练习 2

画出图3所示的非线性环节的 $-N^{-1}(X)$ 曲线。已知该非线性环节的描述函数为：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} \right] - j \frac{4Mh}{\pi X^2}$$

$$(X \geq h)$$

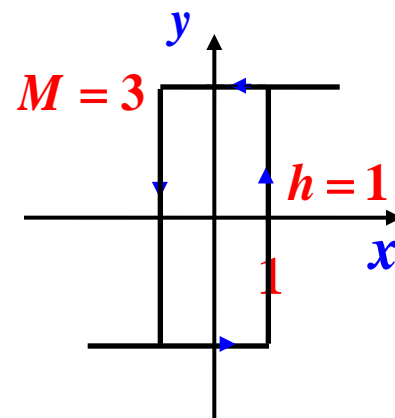


图2



解：

非线性环节的描述函数为：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} \right] - j \frac{4Mh}{\pi X^2} \quad (X \geq h)$$

由于 $M = 3$ $h = 1$

得：

$$\begin{aligned} N(X) &= \frac{12}{\pi X} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2} \right] - j \frac{12}{\pi X^2} \\ &= \frac{12}{\pi X^2} \left(\sqrt{X^2 - 1} - j \right) \quad (X \geq 1) \end{aligned}$$

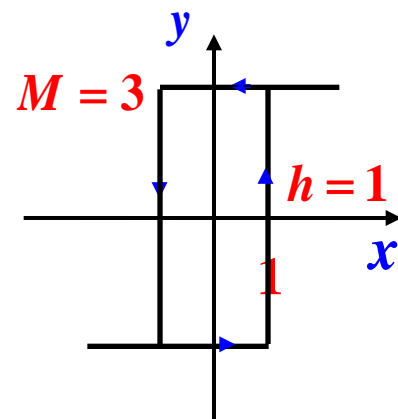


图 2



继电型非线性的负倒描述函数为：

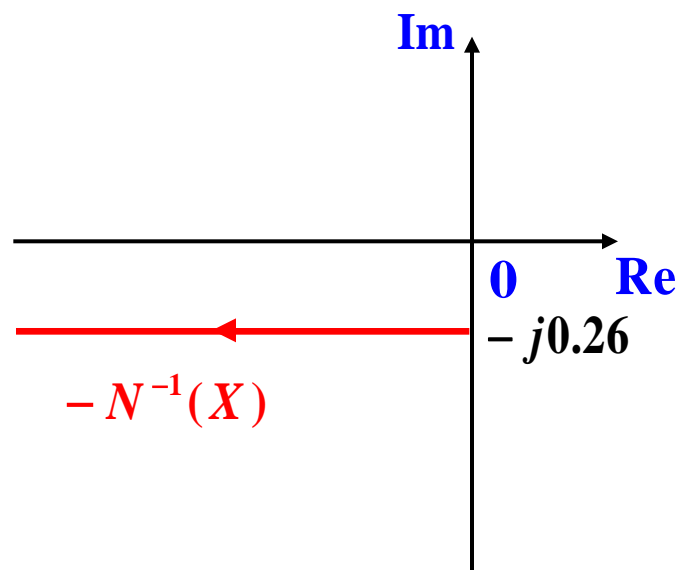
$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi}{12} \left(\sqrt{X^2 - 1} + j \right) \quad (X \geq 1)$$

X	$1 \rightarrow 100 \rightarrow \infty$
$-N^{-1}(X)$	$-j0.26 \rightarrow -26.2 - j0.26 \rightarrow -\infty - j0.26$



继电型非线性的负倒描述函数为：

$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi}{12} \left(\sqrt{X^2 - 1} + j \right) \quad (X \geq 1)$$



作业

1. 分析图1所示非线性系统的稳定性。

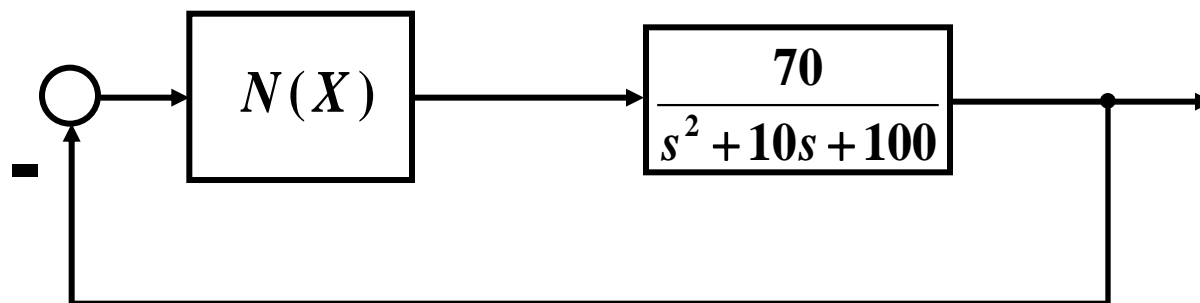


图 1

其中非线性环节的描述函数为：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2} - j \frac{4}{\pi X^2} \quad (X \geq 1, M = 1)$$



解：

(1) 写出非线性部分的描述函数。

非线性环节的描述函数为：

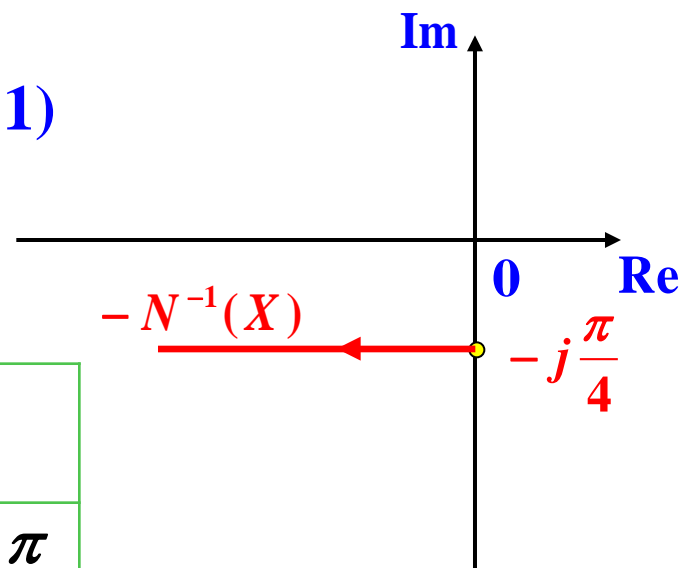
$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2} - j \frac{4}{\pi X^2} \quad (X \geq 1, M = 1)$$

$$\Rightarrow N(X) = \frac{4}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2} - j \frac{4}{\pi X^2}, \quad X \geq 1$$



(2) 确定非线性环节的负倒描述函数。

$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi\sqrt{X^2-1}}{4} - j\frac{\pi}{4} \quad (X \geq 1)$$



X	$1 \rightarrow 7 \rightarrow \infty$
$-N^{-1}(X)$	$-j\frac{\pi}{4} \rightarrow -5.44 - j\frac{\pi}{4} \rightarrow -\infty - j\frac{\pi}{4}$



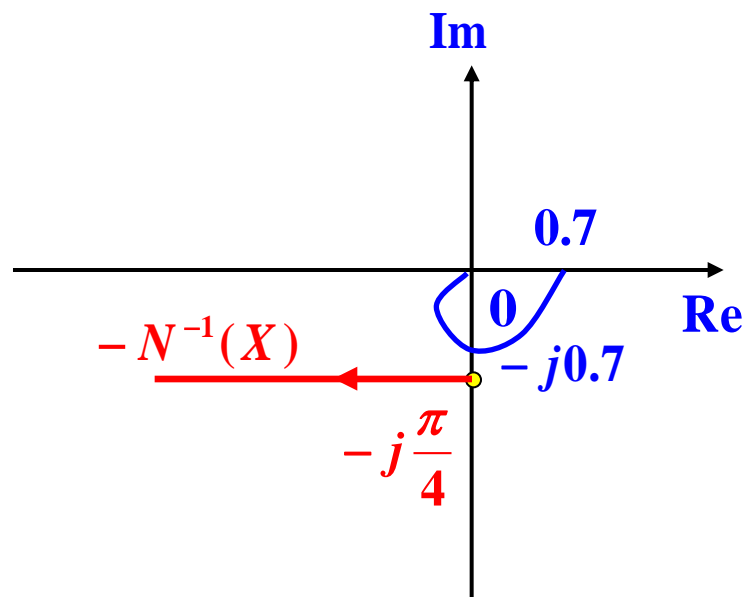
(3) 画出线性部分的奈奎斯特图。

$$G(s) = \frac{70}{s^2 + 10s + 100}$$

线性部分的频率特性为：

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{70}{100 - \omega^2 + 10j\omega} \\ &= \frac{70[(100 - \omega^2) - 10j\omega]}{\omega^4 - 100\omega^2 + 10000} \end{aligned}$$





由于负倒描述函数曲线没有被奈奎斯特曲线包围，因此该非线性控制系统稳定。



2. 分析图2所示非线性系统的自激振荡。

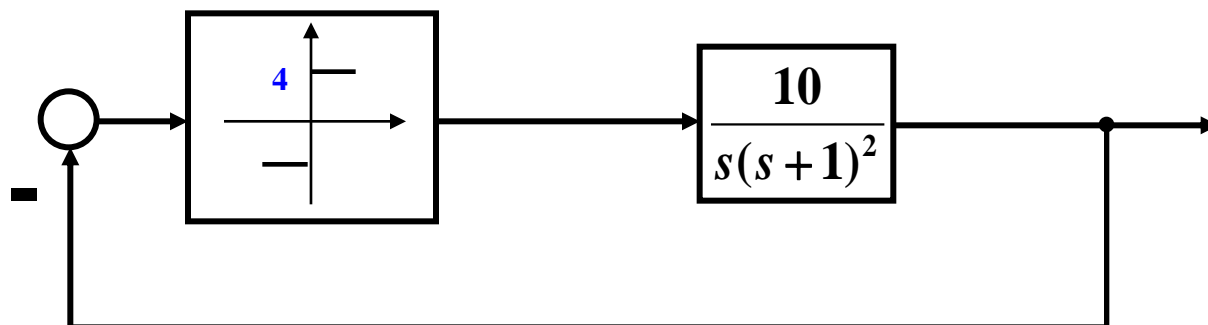


图 2

(继电型非线性环节的描述函数为： $N(X) = \frac{4M}{\pi X}$)



解：

(1) 写出非线性部分的描述函数。

继电型非线性环节的描述函数为：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X}$$

由于

$$M = 4$$

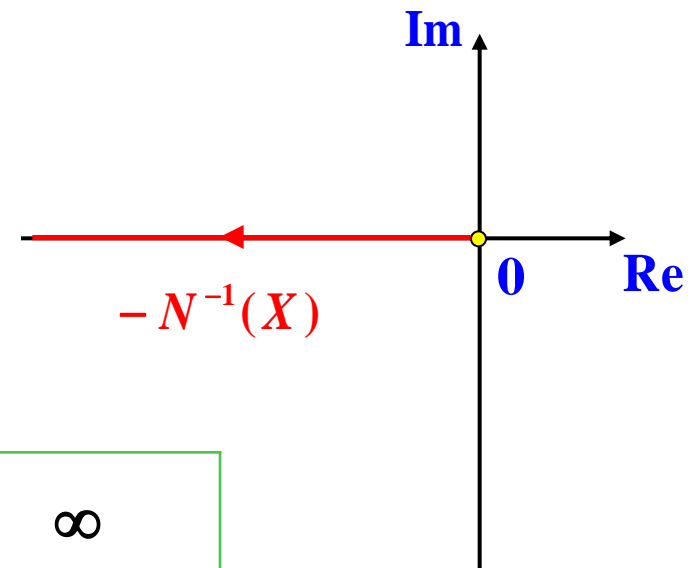


$$N(X) = \frac{16}{\pi X}$$



(2) 确定非线性环节的负倒描述函数。

$$-N(X)^{-1} = -\frac{\pi X}{16}$$



X	0	16	∞
$-N^{-1}(X)$	0	$-\pi$	$-\infty$



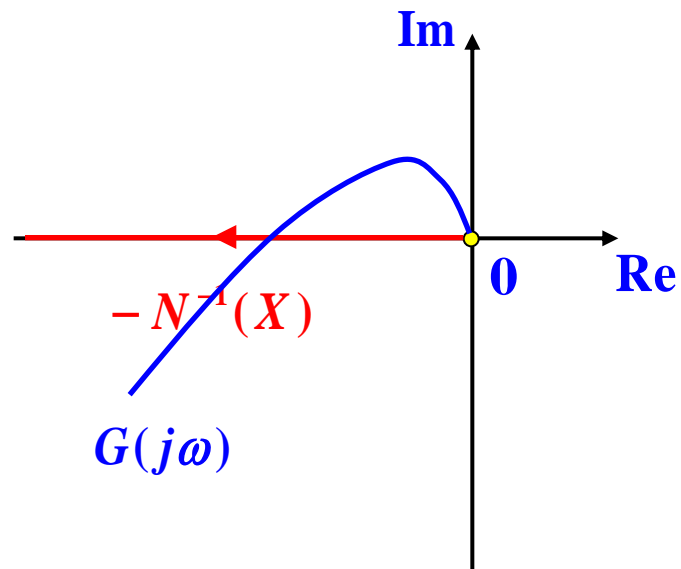
(3) 画出线性部分的奈奎斯特图。

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

线性部分的频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)^2}$$





(4) 确定交点处的自激振荡。

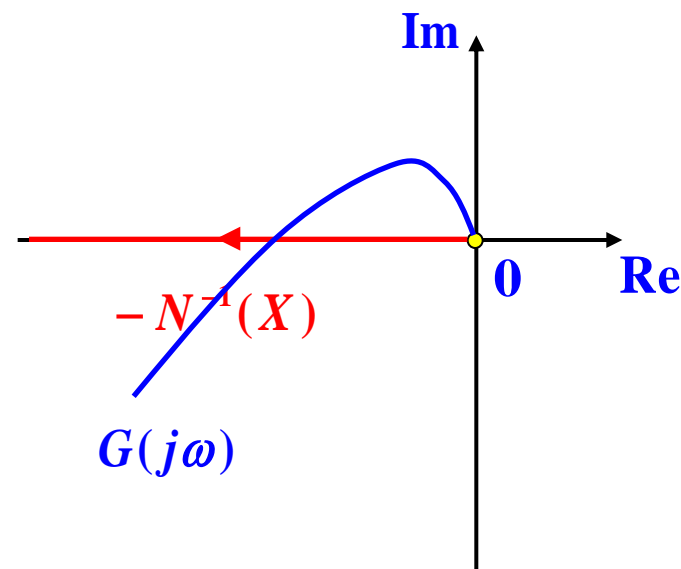
$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega + 1)^2}$$

令

$$\text{Im}[G(j\omega)] = 0$$

得：

$$\omega = 1 \text{ rad} / \text{s}$$



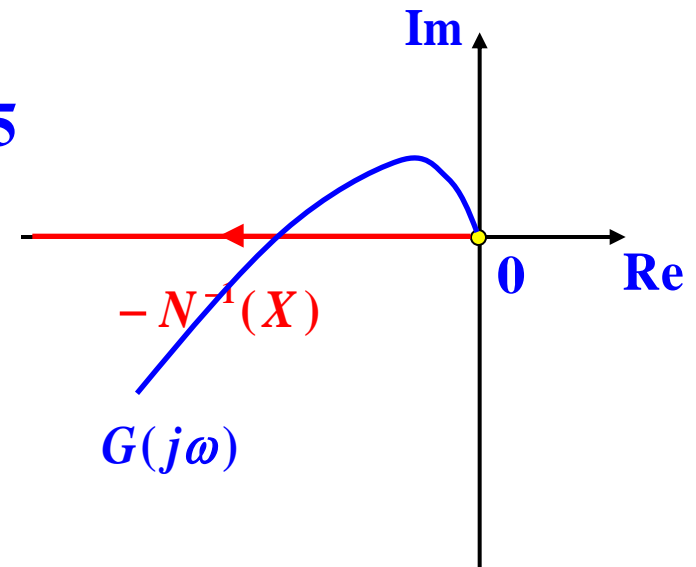
频率特性 $G(j\omega)$ 在交点处的实部为：

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)]_{\omega=1} = -5$$

因此：

$$-N(X)^{-1} = -\frac{\pi X}{16} = -5$$

$$\Rightarrow X = \frac{80}{\pi} = 25.46$$



系统在交点处具有等效的正弦振荡：

$$y(t) = 25.46 \sin t$$

负倒描述函数 $-N^{-1}(X)$ 从不稳定区通过交点 到达稳定区，因此交点处的振荡 $y(t)$ 为稳定的自激振荡。

