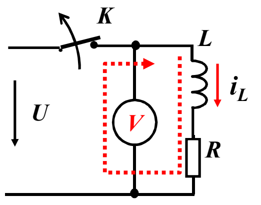
例2



已知:

$U=20\,\mathrm{V}$、$R=1\,\mathrm{k\Omega}$、$L=1\,\mathrm{H}$

电压表内阻 $R_V=500\,\mathrm{k\Omega}$

设开关 *K* 在 $t=0$ 时打开。

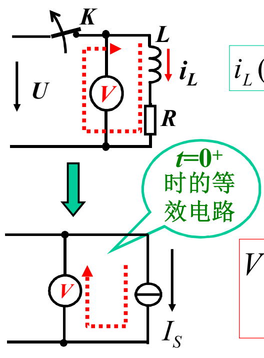
求：*K*打开的瞬间,电压表两的电压。

解:

换路前 $i_L(0^-)=\dfrac{U}{R}=\dfrac{20}{1000}=20\,\mathrm{mA}$

换路瞬间 $i_L(0^+)=i_L(0^-)=20\,\mathrm{mA}$

(大小,方向都不变)



$i_L(0^+)=i_L(0^-)=20\ \mathrm{mA}$

$u_V(0^+)=i_L(0^+)\cdot R_V$

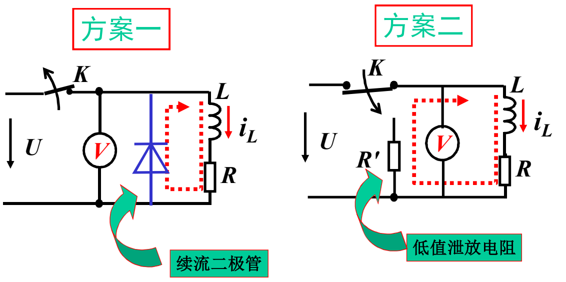
$V=20\times10^{-3}\times500\times10^{3}$

$=10000\ \mathrm{V}$

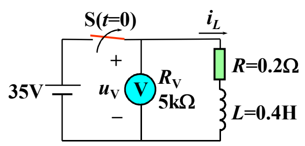
$I_S=i_L(0^+)=20\,\mathrm{mA}$

注意:实际使用中要加保护措施

给电感储能提供泄放途径



例.



$i_L(0^+)=i_L(0^-)=35/0.2=175\ \mathrm{A}=I_0$

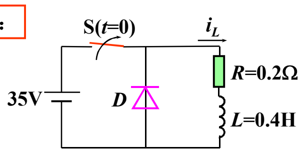
$\tau=\dfrac{L}{R+R_V}=\dfrac{0.4}{5000}=8\times10^{-5}\,\mathrm{s}=80\,\mu\mathrm{s}$

$i_L=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$

$u_V=-R_Vi_L=-R_VI_0e^{-\frac{R}{L}t}=-875e^{-\frac{R}{L}t}\ \mathrm{kV}\qquad(t>0)$

$u_V(0^+)=-875\ \mathrm{kV}$ ！ 现象：电压表烧坏！

预防措施:



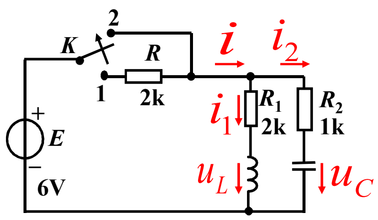
小结:

1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应都是一个指数衰减函数。
2. 衰减快慢取决于时间常数τ.

   *RC*电路 ： $\tau=RC$，　*RL*电路： $\tau=L/R$
3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。
4. 一阶电路的零输入响应和初值成正比。

返回首页

例3

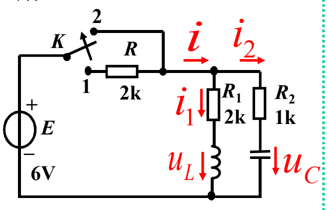


已知：*K* 在“1”处停留已久，在*t*=0时合向“2”

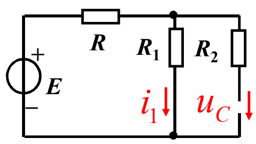
求： i、i_1、i_2、u_C、u_L

的初始值，即 $t=(0^+)$时刻的值。

解：



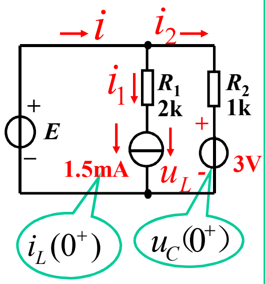
换路前的等效电路



$$i_L(0^-)=i_1(0^-)=\frac{E}{R+R_1}=1.5\ \text{mA}$$

$$u_C(0^-)=i_1(0^-)\times R_1=3\ \text{V}$$

t=0$^+$ 时的等效电路



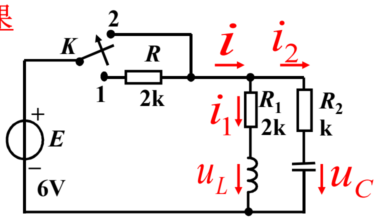
$$i_1(0^+)=i_L(0^+)=i_L(0^-)$$
$$=1.5\ \text{mA}$$

$$i_2(0^+)=\frac{E-u_C(0^+)}{R_2}$$
$$=3\ \text{mA}$$

$$i(0^+)=i_1(0^+)+i_2(0^+)$$
$$=4.5\ \text{mA}$$

$$u_L(0^+)=E-i_1(0^+)\times R_1=3\ \text{V}$$

计算结果

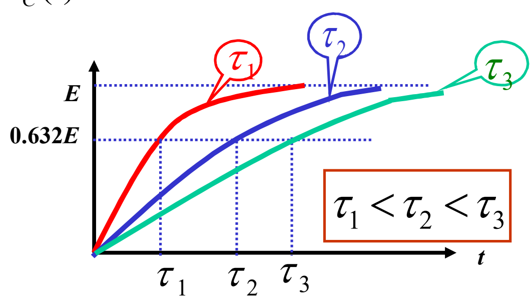


电量	i	$i_1=i_L$	i_2	u_C	u_L
$t=0^-$	1.5mA	1.5mA	0	3V	0
$t=0^+$	4.5mA	1.5mA	3mA	3V	3V

小结

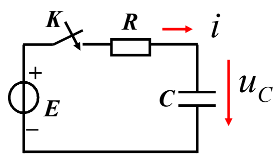
1. 换路瞬间，u_C、i_L 不能突变。其它电量均可能突变，变不变由计算结果决定；
2. 换路瞬间，$u_C(0^-)=U_0\neq 0$，电容相当于恒压源，其值等于 U_0；$u_C(0^-)=0$，电容相当于短路；
3. 换路瞬间，$i_L(0^-)=I_0\neq 0$ 电感相当于恒流源，其值等于 I_0；$i_L(0^-)=0$，电感相当于断路。

$$u_C(t)=E-Ee^{-t/\tau}$$



结论：τ 越大，过渡过程曲线变化越慢，u_C达到稳态所需要的时间越长。

（二） 三要素法



根据经典法推导的结果：

$$u_C(t)=u'_C+u''_C$$
$$=u_C(\infty)+[u_C(0^+)-u_C(\infty)]\,e^{-t/RC}$$

可得一阶电路微分方程解的通用表达式：

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]\,e^{-t/\tau}$$

$(t\geq 0)$

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$(t \geq 0)$

式中 $f(t)$ 代表一阶电路中任一电压、电流函数。

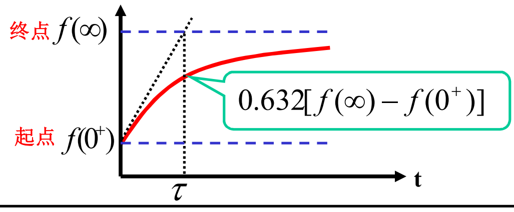
其中三要素为：
$$\begin{cases}\text{初始值 ----}\ f(0^+)\\ \text{稳态值 ----}\ f(\infty)\\ \text{时间常数----}\ \tau\end{cases}$$

利用求三要素的方法求解过渡过程，称为三要素法。只要是一阶电路，就可以用三要素法。

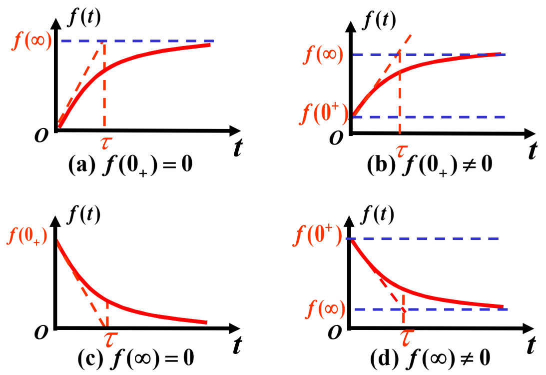
三要素法求解过渡过程要点：

- 分别求初始值、稳态值、时间常数；
- 将以上结果代入过渡过程通用表达式；
- 画出过渡过程曲线（由初始值→稳态值）。

（电压、电流随时间变化的关系）



响应曲线的几种情况



"三要素"的计算（之一）

初始值 $f(0^+)$ 的计算:

步骤：(1)求换路前的 $u_C(0^-)$、$i_L(0^-)$

(2)根据换路定理得出：$\begin{cases}u_C(0^+)=u_C(0^-)\\ i_L(0^+)=i_L(0^-)\end{cases}$

(3)根据换路后的等效电路，求未知的 $u(0^+)$ 或 $i(0^+)$。

（计算举例见前）

"三要素"的计算（之二）

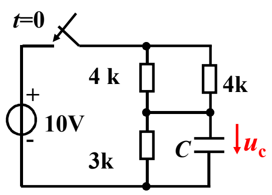
稳态值 $f(\infty)$ 的计算:

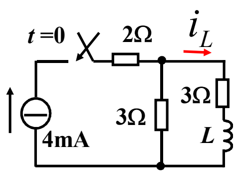
步骤：(1) 画出换路后的等效电路（注意:在直流激励的情况下,令*C*开路, *L*短路）；

(2) 根据电路的解题规律，求换路后所求未知数的稳态值。

注：在交流电源激励的情况下,要用相量法来求解。

求稳态值举例





$$u_C(\infty)=\frac{3}{3+4//4}\times 10=6\text{V}$$

$$i_L(\infty)=4\times\frac{3}{3+3}=2\text{ mA}$$

"三要素"的计算（之三）

时间常数 τ 的计算:

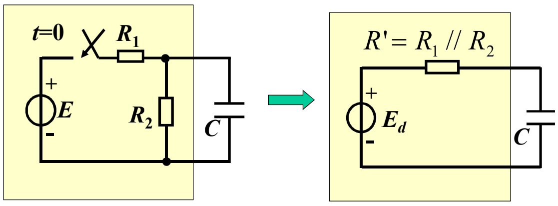
原则: τ 要由换路后的电路结构和参数计算。

(同一电路中各物理量的 τ 是一样的)

步骤: (1) 对于只含一个*R*和*C*的简单电路，$\tau = RC$；对于较复杂的一阶*RC*电路，将*C*以外的电路，视为有源二端网络，然后求其等效内阻 *R'*。则:

$$\boxed{\tau = R'C}$$

RC 电路 τ 的计算举例

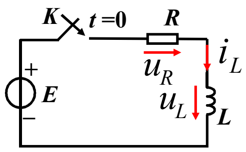


$$\boxed{\tau = R'C}$$

（2）对于只含一个 *L* 的电路，将 *L* 以外的电 路,视为有源二端网络,然后求其等效内阻 *R'*。则:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R'}}$$

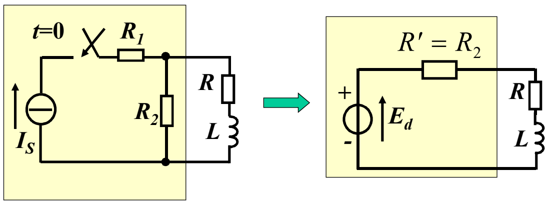
R、*L* 电路 τ 的求解



$$u_L + u_R = E$$

$$\boxed{L\frac{di_L}{dt} + i_L \cdot R = E}$$

R、*L* 电路 τ 的计算举例

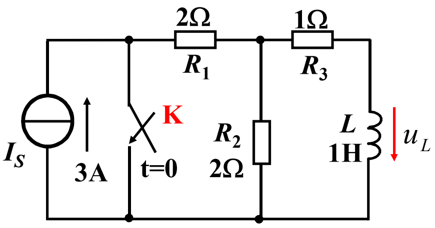


$$\boxed{\tau = \frac{L}{R' + R}}$$

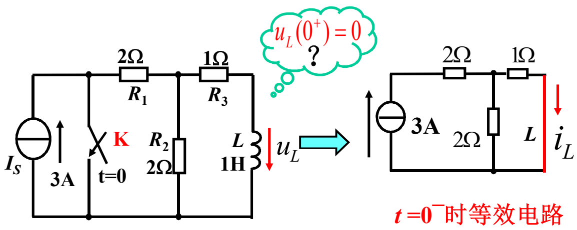
"三要素法"例题

例1 已知: *K* 在t=0时闭合，换路前电路处于稳态。

求: 电感电压 $u_L(t)$

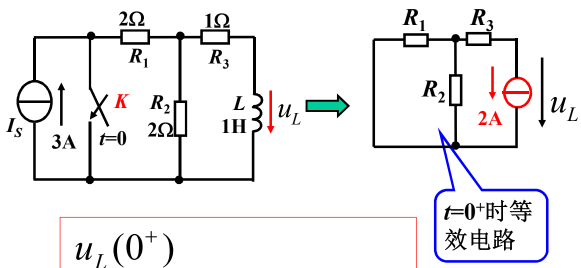


第一步:求起始值 $u_L(0^+)$



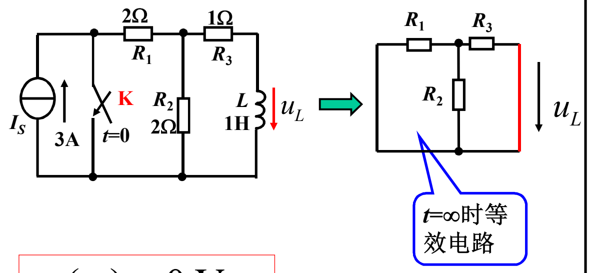
t =0⁻时等效电路

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{2}{1+2} \times 3 = 2\ \text{A}$$



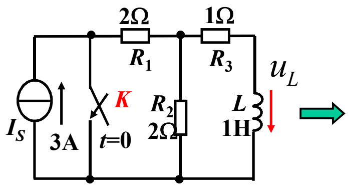
$$
\begin{aligned}
&u_L(0^+)\\
&=-i_L(0^+)[R_1 // R_2+R_3]\\
&=-4\text{ V}
\end{aligned}
$$

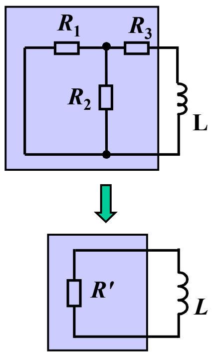
第二步:求稳态值 $u_L(\infty)$



$$u_L(\infty)=0\text{ V}$$

第三步:求时间常数 τ





$$R' = R_1 \| R_2 + R_3$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R'} = \frac{1}{2} = 0.5(\text{s})}$$

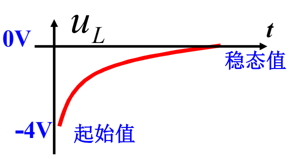
第四步: 将三要素代入通用表达式得过渡过程方程

$$
\begin{cases}
u_L(0^+) = -4\text{V}\\
u_L(\infty) = 0\\
\tau = 0.5\text{s}
\end{cases}
$$

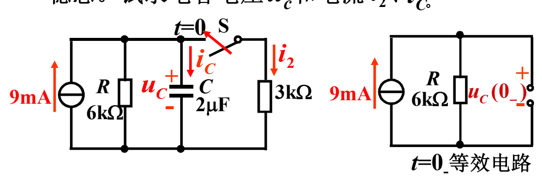
$$
\begin{aligned}
u_L(t) &= u_L(\infty)+[u_L(0^+)-u_L(\infty)]\,e^{-t/\tau}\\
&=0+(-4-0)\,e^{-2t}\\
&=-4\,e^{-2t}\text{V} \qquad (t\ge 0)
\end{aligned}
$$

第五步: 画过渡过程曲线（由初始值→稳态值）

$$
\begin{aligned}
u_L(t) &= u_L(\infty)+[u_L(0^+)-u_L(\infty)]e^{-t/\tau}\\
&=0+(-4-0)e^{-2t}\\
&=-4e^{-2t}\text{V} \qquad (t\ge 0)
\end{aligned}
$$



例2 电路如图，t=0时合上开关S，合S前电路已处于稳态。试求电容电压u_c和电流 i_2、i_C。



解： 用三要素法求解

$$u_C = u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(1)确定初始值 $u_C(0_+)$

由t=0_电路可求得 $u_C(0_-)=9\times10^{-3}\times6\times10^{3}=54\text{ V}$

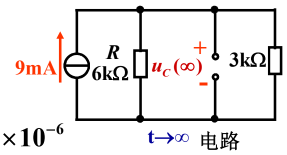
由换路定则 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=54\text{ V}$

(2) 确定稳态值 $u_c(\infty)$

由换路后电路求稳态值 $u_c(\infty)$

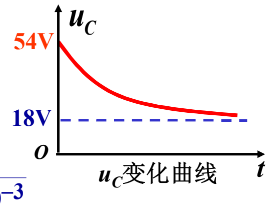
$$u_C(\infty) = 9\times10^{-3}\times\frac{6\times3}{6+3}\times10^{3}$$
$$= 18\ \text{V}$$

(3) 由换路后电路求时间常数 τ



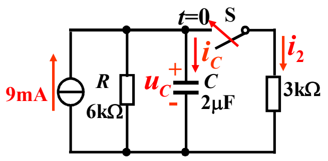
$$\tau = R_0 C$$
$$= \frac{6\times3}{6+3}\times10^{3}\times2\times10^{-6}$$
$$= 4\times10^{-3}\ \text{s}$$

三要素
$$\begin{cases} u_C(0_+) = 54\ \text{V} \\ u_C(\infty) = 18\ \text{V} \\ \tau = 4\times10^{-3}\ \text{s} \end{cases}$$



$$\therefore u_C = 18 + (54-18)e^{-\frac{t}{4\times10^{-3}}}$$
$$= 18 + 36e^{-250t}\ \text{V} \quad (t\ge0)$$

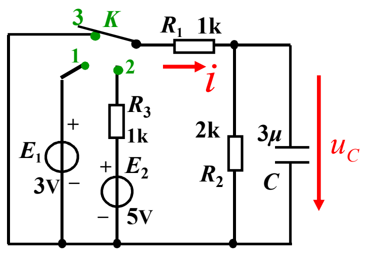
u_C 的变化曲线如图



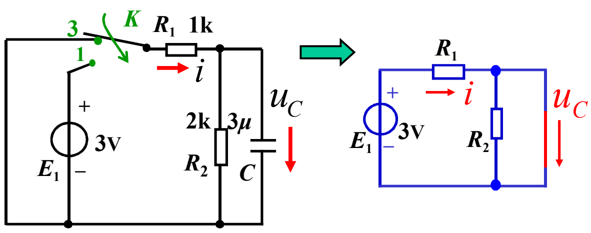
$$u_C = 18 + (54-18)e^{-\frac{t}{4\times10^{-3}}}$$
$$= 18 + 36e^{-250t}\ \text{V} \quad (t\ge0)$$
$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = 2\times10^{-6}\times36\times(-250)e^{-250t}$$
$$= -18e^{-250t}\ \text{mA} \quad (t\ge0)$$
$$i_2(t) = \frac{u_C(t)}{3\times10^{3}} = 6 + 12\,e^{-250\,t}\ \text{mA} \quad (t\ge0)$$

例3　已知：开关 K 原在 “3”位置，电容未充电。当 $t=0$ 时，K合向 “1” $t=20$ ms 时，K再 从 “1”合向 “2”

求：$u_C(t)$、$i(t)$

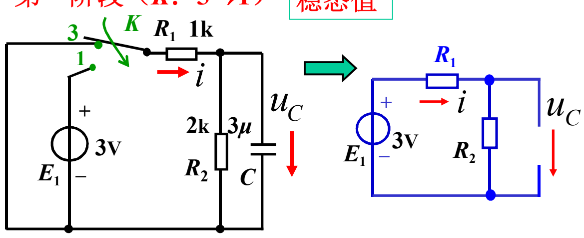


解：第一阶段 （t = 0 ~ 20 ms，K：3→1） 初始值



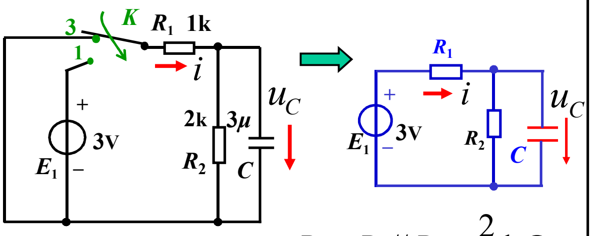
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\ \text{V}$$
$$i(0^+) = \frac{E}{R_1} = 3\ \text{mA}$$

第一阶段（K：3→1） 稳态值



$$i(\infty) = \frac{E_1}{R_1+R_2} = 1\ \text{mA}$$
$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot E_1 = 2\ \text{V}$$

第一阶段（K：3→1） 时间常数



$$R_d = R_1 // R_2 = \frac{2}{3}\text{k}\Omega$$

$$\boxed{\tau = R_d C = 2\ \text{ms}}$$

第一阶段（$t = 0 \sim 20$ ms）电压过渡过程方程：

$$f(t) = f(\infty) + \left[f(0^+) - f(\infty)\right] \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\begin{cases} \tau = R_d C = 2(\text{ms}) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0(\text{V}) \\ u_C(\infty) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E_1 = 2(\text{V}) \end{cases}$$

$$\boxed{u_c(t) = 2 - 2e^{-t/2}\ \text{V}} \qquad 0 \le t \le 20ms$$

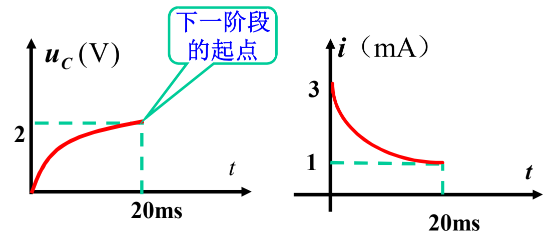
第一阶段（$t = 0 \sim 20$ ms）电流过渡过程方程：

$$f(t) = f(\infty) + \left[f(0^+) - f(\infty)\right] \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\begin{cases} \tau = R_d C = 2\text{ms} \\ i(0^+) = \dfrac{E}{R_1} = 3\,\text{mA} \\ i(\infty) = \dfrac{E_1}{R_1 + R_2} = 1\,\text{mA} \end{cases}$$

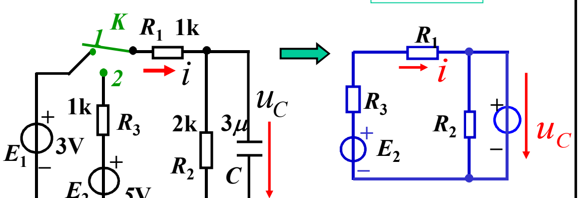
$$\boxed{i(t) = 1 + 2e^{-t/2}\ \text{mA}} \qquad 0 \le t \le 20ms$$

第一阶段波形图



说明： τ=2 ms，5τ=10 ms
20 ms > 10 ms，t=20 ms 时，可以认为电路已基本达到稳态。

第二阶段：20ms ~ （K由 1→2） 起始值

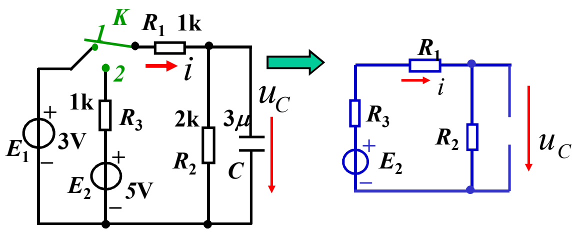


t=20$^+$ ms 时等效电路

$$u_C(20\,\text{ms}^+) = u_C(20\,\text{ms}^-) = 2\text{V}$$

$$i(20\,\text{ms}^+) = \frac{E_2 - u_c(20\,\text{ms}^+)}{R_1 + R_3} = 1.5\text{mA}$$

第二阶段:(K:1→2) 稳态值

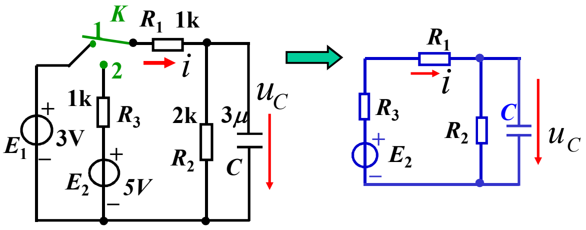


$$u_c(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} E_2 = 2.5\text{ V}$$

$$i(\infty) = \frac{E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 1.25\text{ mA}$$

第二阶段:(K:1→2)

时间常数



$$R_d=(R_1+R_3)//R_2=1\,\mathrm{k}\Omega$$

$$\boxed{\tau = R_d C = 3\,\mathrm{ms}}$$

第二阶段（ 20ms ~） 电压过渡过程方程

$$\begin{cases}\tau = R_d C = 3\,\mathrm{ms}\\ u_C(20\,\mathrm{ms}^+) = 2\,\mathrm{V}\\ u_C(\infty) = 2.5\,\mathrm{V}\end{cases}$$

?

$$\boxed{u_C(t-20) = 2.5 - 0.5\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \mathrm{V}\quad (t \ge 20\mathrm{ms})}$$

第二阶段（20ms ~）电流过渡过程方程

$$\begin{cases}\tau = R_d C = 3\,\mathrm{ms}\\ i(20\,\mathrm{ms}^+) = 1.5\,\mathrm{mA}\\ i(\infty) = 1.25\,\mathrm{mA}\end{cases}$$

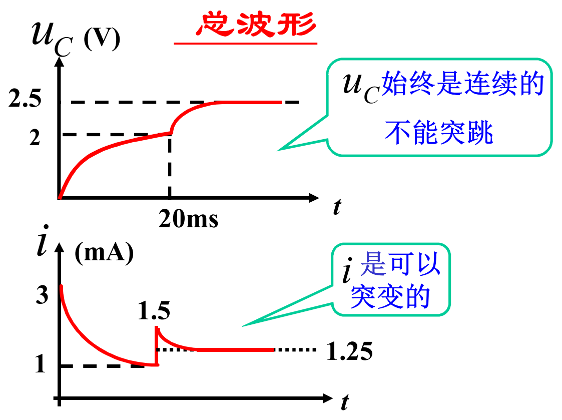
$$\boxed{i(t) = 1.25 + 0.25\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \mathrm{mA}\quad (t \ge 20\mathrm{ms})}$$

第一阶段小结：

$$u_c(t) = 2 - 2\,e^{-500t}\ \mathrm{V}$$
$$i(t) = 1 + 2\,e^{-500t}\ \mathrm{mA}$$
$$(0 \le t \le 20\mathrm{ms})$$

第二阶段小结：

$$u_c(t) = 2.5 - 0.5\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \mathrm{V}$$
$$i(t) = 1.25 + 0.25\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \mathrm{mA}$$
$$(t \ge 20\mathrm{ms})$$



小结

1、三要素法中只适用于一阶电路。

2、在一阶微分方程式的求解中，必须注明方程式的时域。

3、求解一阶电路的响应方法不是唯一的。还可以利用求解出的响应，元件上电压与电流的基本特性，电路中的各支路的电压、各结点的电流约束关系求解。

5.2.2 *RC*电路的响应

电路状态

零状态、非零状态

换路前电路中的储能元件均未贮存能量，称为零状态；反之为非零状态。

零输入、非零输入

电路中无电源激励（即输入信号为零）时，为零输入；反之为非零输入。

电路的响应

♣ 零输入响应：

在零输入的条件下，由非零初始态引起的响应，为零输入响应；此时，$u_c(0^+)$ 或 $i_L(0^+)$ 被视为一种输入信号。

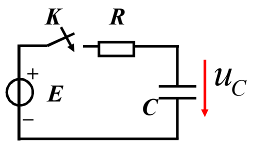
♣ 零状态响应：

在零状态的条件下，由激励信号产生的响应为零状态响应。

♣ 全响应：

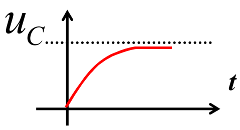
电容上的储能和电源激励均不为零时的响应，为全响应。

*R-C*电路的零状态响应(充电）

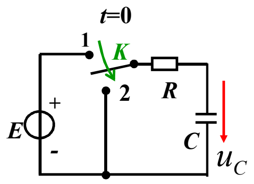


$u_C(0^-) = 0$

$$u_C(t) = E - Ee^{-t/RC} \quad (t \ge 0)$$

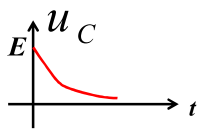


*R-C*电路的零输入响应（放电）

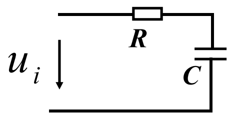


$u_C(0^+) = E$

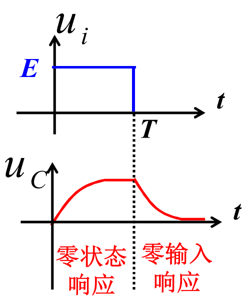
$$u_C(t) = Ee^{-t/RC} \quad (t \ge 0)$$



*R-C*电路的全响应(零状态响应 +零输入响应)



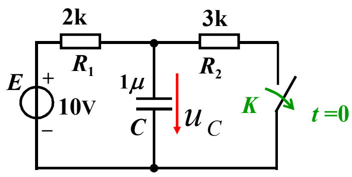
*C*在 u_i 加入前未充电



例

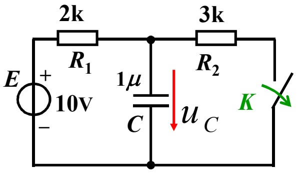
已知：开关 K 原处于闭合状态，t=0时打开。

求：$u_C(t)$



$$u_C(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 6\ \mathrm{V}$$

解(一)：三要素法



起始值：$u_C(0^+)=u_C(0^-)=6\text{V}$

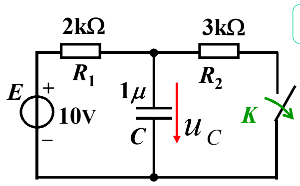
稳态值：$u_C(\infty)=10\text{V}$

时间常数：$\tau=R_1C=2\text{ms}$

解：

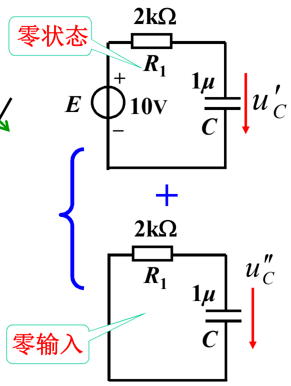
$$\boxed{\begin{aligned}u_C(t)&=u_C(\infty)+\left[u_C(0^+)-u_C(\infty)\right]\cdot e^{-t/\tau}\\&=10-4e^{-t/0.002}\ \text{V}\quad(t\ge 0)\end{aligned}}$$

解(二)：零状态解和零输入解迭加



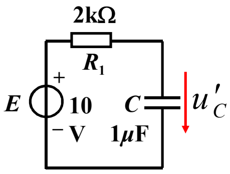
$$u_C'(0^+)=0\text{V}$$

$$u_C''(0^+)=6\text{V}$$



零状态解

$$u_C'(0^+)=0\text{V}$$

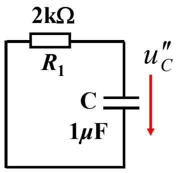


$$\boxed{\begin{aligned}u'_c(t)&=10+(0-10)\cdot e^{-t/R_1C}\\&=10-10\cdot e^{-t/\tau}\ \text{V}\ (t\ge 0)\end{aligned}}$$

零输入解

$$\boxed{u_C''(0^+)=6\ \text{V}}$$

$$u''_c(t)=6\cdot e^{-t/\tau}\ \text{V}$$



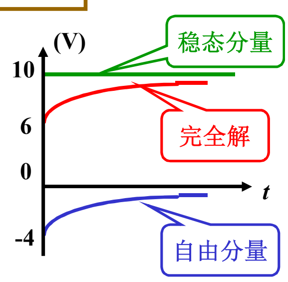
全解

$$\boxed{\begin{aligned}u_C(t)&=u'_C(t)+u''_C\\&=\left[10+-10\cdot e^{-t/\tau}\right]+\left[6e^{-t/\tau}\right]\\&=10-4e^{-t/\tau}\ \text{V}\quad(t\ge 0)\end{aligned}}$$

两种方法小结

$$\boxed{u_C(t)=10-4e^{-t/\tau}\ \text{V}}\qquad(t\ge 0)$$

稳态分量 + 自由分量



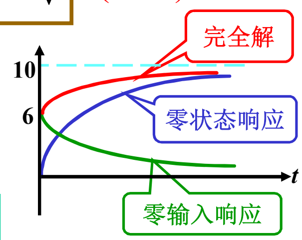
经典法或三要素法着眼于电路的变化规律

零状态响应 + 零输入响应

$$\boxed{u'_c(t)=10-10\cdot e^{-t/\tau}\ \text{V}}\qquad(t\ge 0)$$

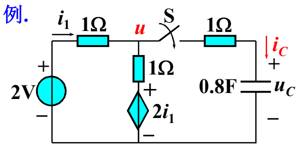
$$\boxed{u''_c(t)=6\cdot e^{-t/\tau}\ \text{V}}$$

$(t\ge 0)$



电路响应分析法着眼于电路的因果关系

例.



t= 0时闭合开关S.

求u_C、i_1的零状态响应。

解法1:
$$\begin{cases} \dfrac{2-u}{1}+\dfrac{2i_1-u}{1}=i_C \\ u=C\dfrac{du_C}{dt}+u_C \end{cases} \Rightarrow 4\frac{du_C}{dt}+4u_C=6$$

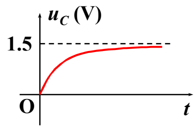
$$4p+4=0 \to p=-1$$

$$u_C'=Ae^{-t}$$

$$u_C''=6/4=1.5\text{V}$$

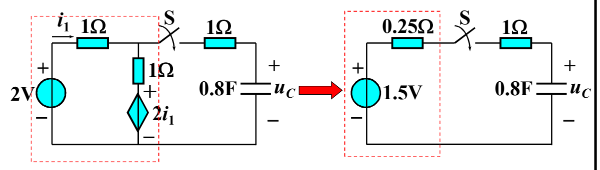
$$u_C=1.5+Ae^{-t}$$

$$\boxed{u_C=1.5-1.5e^{-t}\ \text{V}\quad (t>0)}$$



$$i_1=\frac{2-(C\dfrac{du_C}{dt}+u_C)}{1}=0.5+0.3e^{-t}\ \text{A}\quad (t>0)\qquad i_1(0^+)\neq i_1(0^-)$$

解法2: 戴维南等效.

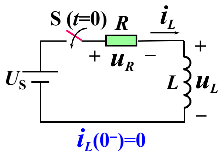


$$\tau=RC=(1+0.25)\times 0.8=1\ \text{s}$$

$$u_C''=1.5\ \text{V}$$

$$\boxed{u_C=1.5-1.5e^{-t}\ \text{V}\quad (t>0)}$$

2. RL电路的零状态响应

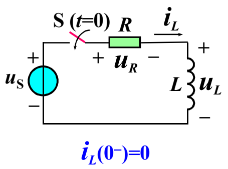


$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_S$$

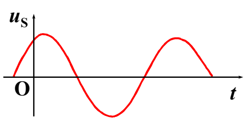
$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$$

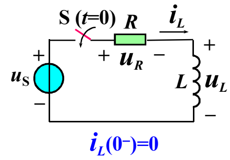
$$u_L=U_Se^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

3. 正弦电源激励下的零状态响应(以RL电路为例)



$$u_S=U_m\sin(\omega t+\psi_u)\ \text{V}$$



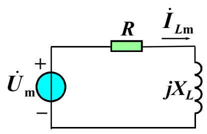


$$Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$$

$$i_L=i_L'+i_L''=i_L'+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

强制分量(稳态)　　自由分量(暂态)

用相量法计算稳态解i_L':



$$\dot{I}_{Lm}=\frac{\dot{U}_m}{R+jX_L}=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+X_L^2}}\angle\Psi_u-\varphi$$

$$\varphi=\text{arctg}\frac{\omega L}{R}\qquad I_{Lm}=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+X_L^2}}$$

$$i_L'=I_{Lm}\sin(\omega t+\Psi_u-\varphi)$$

$$i_L=i_L'+i_L''=I_{Lm}\sin(\omega t+\Psi_u-\varphi)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

定常数　$i_L(0^+)=0=I_{Lm}\sin(\Psi_u-\varphi)+A$

$$A=-I_{Lm}\sin(\Psi_u-\varphi)$$

解答为　$i_L=I_{Lm}\sin(\omega t+\Psi_u-\varphi)-I_{Lm}\sin(\Psi_u-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$

讨论:

(1) $\Psi_u-\varphi=0°$，即合闸时$\Psi_u=\varphi$

A=0 无暂态分量　$i_L=I_{Lm}\sin(\omega t+\Psi_u-\varphi)$

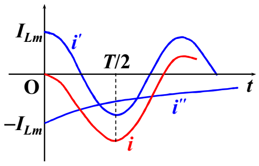
合闸后，电路直接进入稳态，不产生过渡过程。

(2) $\Psi_u-\varphi=\pm\pi/2$ 即 $\Psi_u=\varphi\pm\pi/2$

$$A=\mp I_{Lm}\qquad i_L''=\mp I_{Lm}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L=I_{Lm}\sin(\omega t+\Psi_u-\varphi)\mp I_{Lm}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\Psi_u=\varphi+\pi/2$时波形为:



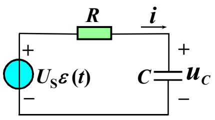
$$|i_{max}|\leq 2I_{Lm}$$

$$\tau\to\infty\quad i_{L\max}=2I_{Lm}$$

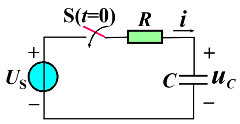
最大电流出现在合闸后半个周期时$t=T/2$。

返回首页

4. 阶跃响应

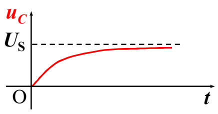


$u_C(0^-)=0$

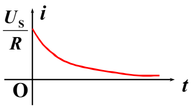


$u_C(0^-)=0$

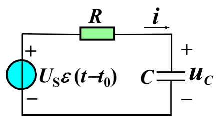
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$



$$i = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

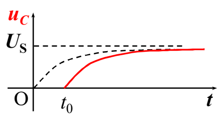


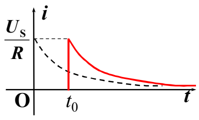
延时阶跃响应:



$u_C(t_0^-)=0$

激励在$t=t_0$时加入，
则响应从$t=t_0$开始。





$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\varepsilon(t-t_0)$$

$$i = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\varepsilon(t-t_0)$$

注意:

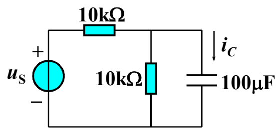
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\varepsilon(t-t_0)$$

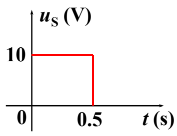
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t-t_0)$$

二者的区别！

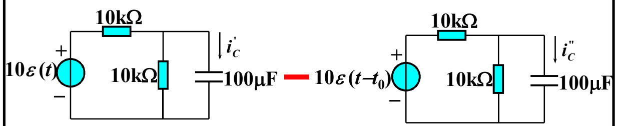
结论: 零状态网络的阶跃响应为 $y(t)\varepsilon(t)$ 时，
则延时t_0的阶跃响应为 $y(t-t_0)\ \varepsilon(t-t_0)$.

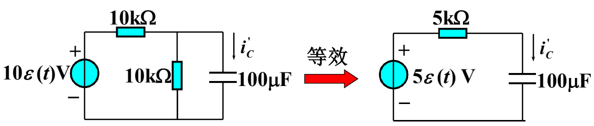
例. 求响应i_C.





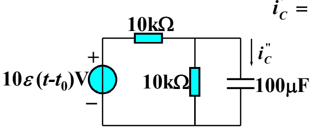
解: $u_S = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$





$$\tau = RC = 100\times10^{-6}\times5\times10^{-3} = 0.5\ \text{s}$$

$$i_C' = e^{-2t}\varepsilon(t)\ \text{A}$$

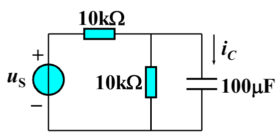


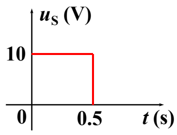
$$i_C'' = e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\ \text{A}$$

$$\boxed{i_C = i_C' - i_C'' = e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\ \text{A}}$$

分段表示为: $i_C = \begin{cases} e^{-2t}\ \text{A} & (0<t<0.5) \\ -0.632e^{-2(t-0.5)}\ \text{A} & (t>0.5) \end{cases}$

另解：直接分段求解。

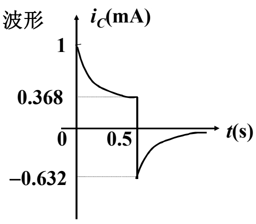




分段表示式

$$i_C = \begin{cases} e^{-2t}\ \text{A} & (0<t<0.5) \\ -0.632e^{-2(t-0.5)}\ \text{A} & (t>0.5) \end{cases}$$

波形



小结：

1. 一阶电路的零状态响应是储能元件无初始储能时，由输入激励引起的响应。解答有二个分量：

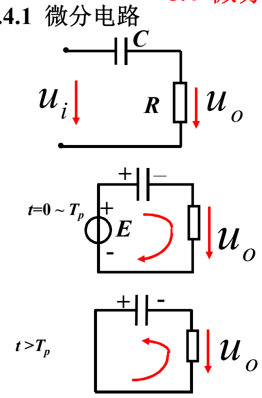
$$u_C = u_C' + u_C''$$

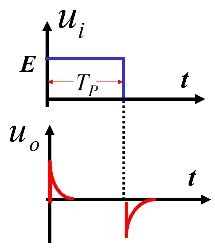
2. 时间常数与激励源无关。
3. 线性一阶网络的零状态响应与激励成正比。
4. 零状态网络的阶跃响应为 $y(t)\varepsilon(t)$ 时，则延时t_0的阶跃响应为 $y(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$。

5.4 微分与积分电路

5.4.1 微分电路

条件：$\tau << T_P$



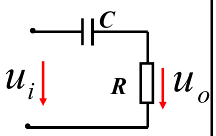


电路的输出近似为输入信号的微分

微分关系：

由于$\tau << T_P$，$u_i = u_c + u_o \approx u_c$

$$u_o = iR = RC\frac{du_c}{dt} \approx RC\frac{du_i}{dt}$$



*RC*电路满足微分关系的条件：

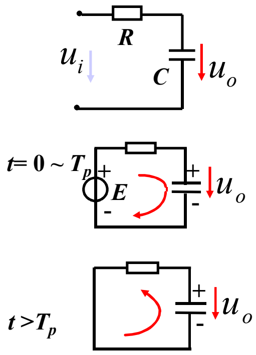
（1）$\tau << T_P$

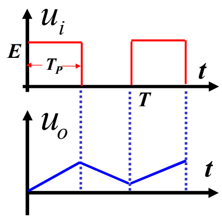
（2）从电阻端输出

脉冲电路中，微分电路常用来产生尖脉冲信号

5.4.2 积分电路

条件：$\tau >> T_P$





电路的输出近似为输入信号的积分

积分关系：

由于，$\tau >> T_P$ $u_i = u_R + u_o \approx u_R$

$$u_0 = u_c = \frac{1}{C}\int i dt \approx \frac{1}{RC}\int u_i dt$$

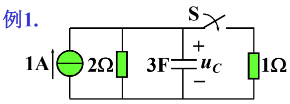
RC 电路满足积分关系的条件：

（1）$\tau >> T_P$

（2）从电容器两端输出

脉冲电路中，积分电路常用来产生三角波信号

例1.



已知：t=0时合开关S。

求 换路后的$u_C(t)$。

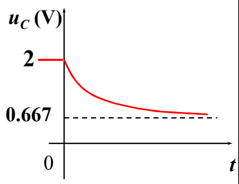
解 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2\text{V}$

$$\tau = R_{等}C = \frac{2}{3}\times 3 = 2\ \text{s}$$

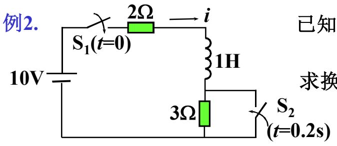
$$u_C(\infty) = \frac{2}{2+1}\times 1 = 0.667\text{V}$$

$$u_C = 0.667 + (2-0.667)e^{-0.5t}$$

$$= 0.667 + 1.33e^{-0.5t}\text{V} \quad (t \geq 0)$$



例2.



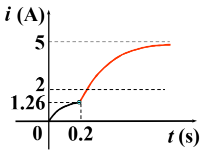
已知：电感无初始储能 $t=0$ 时合 S_1，t=0.2s时合S_2。求换路后的电感电流$i(t)$。

解　$0<t<0.2$s

$i(0^+)=0 \quad \tau_1=0.2$ s

$i(\infty)=2$A

$i(t)=2-2e^{-5t}$ A



$t>0.2$s

$i(0.2^-)=2-2e^{-5\times0.2}=1.26$ A

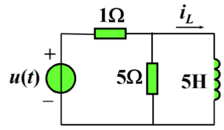
$i(0.2^+)=1.26$ A

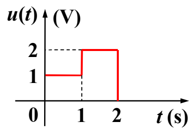
$\tau_2=0.5$ s

$i(\infty)=5$ A

$i(t)=5-3.74e^{-2(t-0.2)}$ A

例3. 已知：$u(t)$如图示，$i_L(0)=0$。求：$i_L(t)$，并画波形.





解　方法一：用分段函数表示

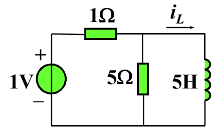
$t<0$　$i_L(t)$=0

$0<t\le1$　$i_L(0^+)$=0

$i_L(\infty)$=1A

τ=5/ (1//5)=6 s

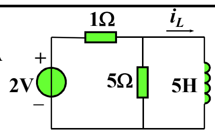
$i_L(t)=1-e^{-t/6}$ A



$1<t\le2$　$i_L(1^+)=i_L(1^-)=1-e^{-1/6}$=0.154 A

$i_L(\infty)$=2A

τ =6 s

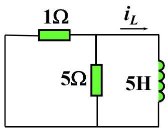


$i_L(t)=2+[0.154-2]\,e^{-(t-1)/6}=2-1.846\,e^{-(t-1)/6}$ A

$t>2$　$i_L(2^+)=i_L(2^-)=2-1.846\,e^{-(2-1)/6}$=0.437 A

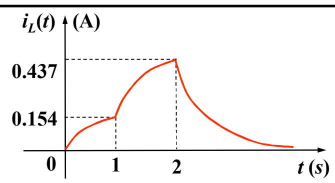
$i_L(\infty)$=0

τ =6 s



$i_L(t)=0.437\,e^{-(t-2)/6}$ A

$$i_L(t)=\begin{cases}0 & t\le0\\ 1-e^{-t/6}\ \text{A} & 0<t\le1\\ 2-1.846e^{-(t-1)/6}\ \text{A} & 1<t\le2\\ 0.437e^{-(t-2)/6}\ \text{A} & 2<t\end{cases}$$



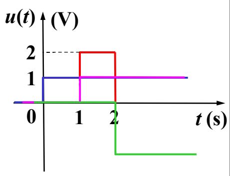
解法二：用全时间域函数表示(叠加)

$u(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$

$\varepsilon(t) \longrightarrow (1-e^{-t/6})\varepsilon(t)$

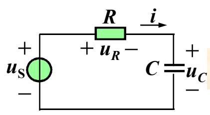
$\varepsilon(t-1) \longrightarrow (1-e^{-(t-1)/6})\varepsilon(t-1)$

$-2\varepsilon(t-2) \longrightarrow -2(1-e^{-(t-2)/6})\varepsilon(t-2)$

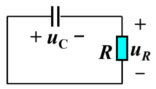


$i_L(t)=(1-e^{-t/6})\varepsilon(t)+(1-e^{-(t-1)/6})\varepsilon(t-1)-2(1-e^{-(t-2)/6})\varepsilon(t-2)$ A

脉冲序列作用下的*RC*电路

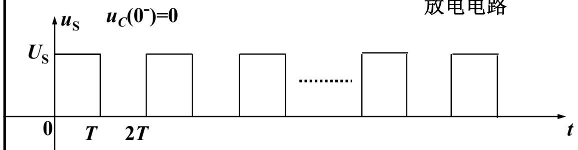


充电电路



放电电路

$u_C(0^-)$=0



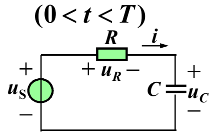
多次换路

0~T：电容充电　　T~$2T$：电容放电　　…

一、$\tau<<T$　过渡过程在半个周期(T)内结束

（1）u_C的变化规律

$(0<t<T)$

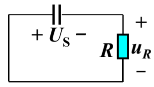


$u_C(0^-)$=0

由三要素法得

$u_C=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})$

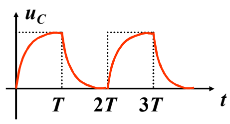
$(T<t<2T)$



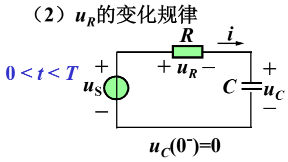
放电电路

$u_C=U_S e^{-\frac{t-T}{RC}}$

变化曲线为

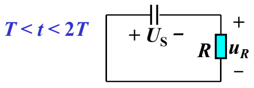


（2）u_R的变化规律



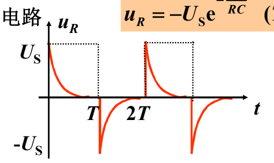
三要素为

$$u_R(0^+)=U_S$$
$$u_R(\infty)=0$$
$$\tau=\frac{1}{RC}$$
$$u_R=U_S e^{-\frac{t}{RC}}\quad(0<t<T)$$

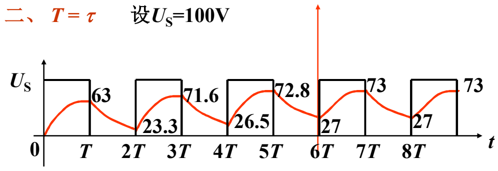


$$u_R(T^+)=-U_S$$
$$u_R(\infty)=0$$
$$u_R=-U_S e^{-\frac{t}{RC}}\quad(T<t<2T)$$

变化曲线为



二、$T=\tau$　设U_S=100V



$t=T$　u_C=100(1−0.37)=63　　$t=2T$　u_C= 0.37×63 = 23.3

$t=3T$　u_C=23.3+0.63 ×(100−23.3) = 71.6

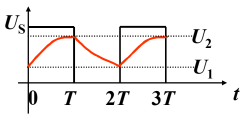
$t=4T$　u_C=0.37×71.6=26.5

⋮

开始时，充电幅值 ＞放电幅值

当充电幅值 ＝ 放电幅值时，进入准稳态。

稳态解



$0<t<T$

$$u_C'=U_S+(U_1-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$T<t<2T$　$$u_C'=U_2 e^{-\frac{t-T}{RC}}$$

$t=T$　$U_2=U_S+(U_1-U_S)e^{-\frac{T}{RC}}$

$t=2T$　$U_1=U_2 e^{-\frac{2T-T}{RC}}$

可解出U_1，U_2

$$U_2=U_S\frac{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}{1-e^{-\frac{2T}{\tau}}}\qquad U_1=U_S\frac{(1-e^{-\frac{T}{\tau}})e^{-\frac{T}{\tau}}}{1-e^{-\frac{2T}{\tau}}}$$

当U_S=100V，$T=\tau$ 时解得U_2=73.2V，U_1=27V

稳态解一般形式

$$\begin{cases} u_C'=U_S+(U_1-U_S)e^{-\frac{t-2nT}{RC}} & 2nT<t<(2n+1)T \\ u_C'=U_2 e^{-\frac{t-(2n+1)T}{RC}} & (2n+1)T<t<(2n+2)T \end{cases}$$

$n=0$，1，2，3...

暂态解　$u_C''=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

全解　$u_C=u_C'+u_C''$

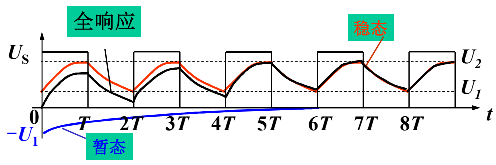
由初值 $u_C(0)=0$ 定系数 A

$$0=U_S+(U_1-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}+Ae^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=0}\qquad\therefore A=-U_1$$

全响应

$$u_C=U_S+(U_1-U_S)e^{-\frac{t-2nT}{RC}}-U_1 e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad 2nT<t<(2n+1)T$$

$$u_C=U_2 e^{-\frac{t-(2n+1)T}{RC}}-U_1 e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad (2n+1)T<t<(2n+2)T$$



一阶电路的冲激响应

单位冲激响应：电路在单位冲激激励作用下产生的零状态响应。
(Unit impulse response)

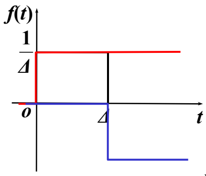
$\delta(t)$ → 零状态 → $h(t)$

一、由单位阶跃响应求单位冲激响应

单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$	单位阶跃响应 $s(t)$	$\delta(t)=\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$
单位冲激函数 $\delta(t)$	单位冲激响应 $h(t)$	$h(t)=\dfrac{d}{dt}s(t)$

证明：

$\varepsilon(t) \to \boxed{零状态} \to s(t)$ $\qquad$ $\delta(t) \to \boxed{零状态} \to h(t)$



$$f(t)=\frac{1}{\Delta}\varepsilon(t)-\frac{1}{\Delta}\varepsilon(t-\Delta)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

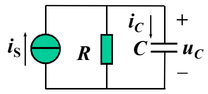
$$\frac{1}{\Delta}s(t) \qquad -\frac{1}{\Delta}s(t-\Delta)$$

$$h(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[s(t)-s(t-\Delta)]=\frac{d}{dt}s(t)$$

注意：(1) $s(t)$定义在$(-\infty，\infty)$整个时间轴。

(2) 阶跃响应$s(t)$可由冲激响应$h(t)$积分得到。

例1.



已知：$u_C(0^+)=0$。

求：$i_s(t)$为单位冲激时电路响应 $u_C(t)$和 $i_C(t)$

解 (1) 先求单位阶跃响应：令 $i_S(t)=\varepsilon(t)$A

$u_C(0^+)=0$ $\quad u_C(\infty)=R$ $\quad \tau=RC$ $\qquad i_C(0^+)=1$ $\quad i_C(\infty)=0$

$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$ $\qquad i_C=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$

(2) 再求单位冲激响应：

$$u_C=\frac{d}{dt}[R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)]=\underbrace{R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}_{0}+\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

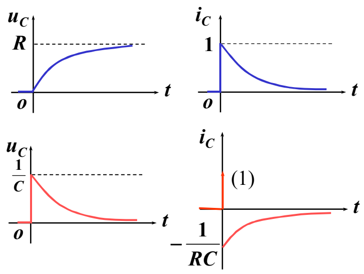
$f(t)\delta(t)$
$=f(0)\delta(t)$

$$i_C=\frac{d}{dt}[e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]=e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

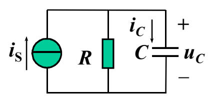
$$=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

阶跃响应

冲激响应



二、直接求冲激响应



$u_C(0^-)=0$

分二个时间段来考虑：

$$t\begin{cases}0^-\to 0^+ & 电容充电\\ 0^+\to\infty & 电容放电\end{cases}$$

1. t 从 $0^-\to 0^+$ $\qquad C\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{R}=\delta(t)$

u_C 不可能是冲激函数，否则KCL不成立

$$\int_{0^-}^{0^+}C\frac{du_C}{dt}dt+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\frac{u_C}{R}dt}_{=0}=\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt}_{=1}$$

$$C[u_C(0^+)-u_C(0^-)]=1 \qquad u_C(0^+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0^-)$$

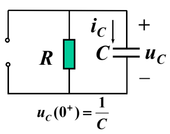
电容中的冲激电流使电容电压发生跳变

$$\Delta q=\int_{0^-}^{0^+}i_C dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1 \quad (转移电荷)$$

2. $t>0$ 零输入响应 (C放电)

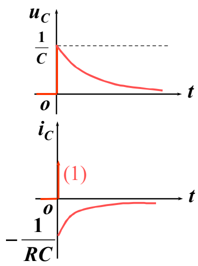
$$u_C=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t>0)$$

$$i_C=-\frac{u_C}{R}=-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t>0)$$

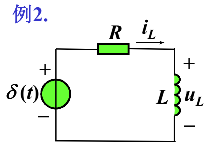


全时间域表达式：

$$\begin{cases}u_C=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\\ i_C=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\end{cases}$$



例2.



1. t 从 $0^-\to 0^+$

$Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=\delta(t)$ $\qquad i_L$不可能是冲激

$$\cancel{\int_{0^-}^{0^+}Ri_L dt}+\int_{0^-}^{0^+}L\frac{di_L}{dt}dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

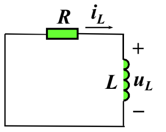
$$\int_{0^-}^{0^+}L\,di_L=1 \qquad i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}=\frac{1}{L}$$

定性分析：$u_L=\delta(t)$

$$\Delta\psi=\int_{0^-}^{0^+}u_L d\xi=1 \qquad i_L(0^+)-i_L(0^-)=\frac{\Delta\psi}{L}=\frac{1}{L}$$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}u_L d\xi=\frac{1}{L}$$

2. $t>0$ (L放电)

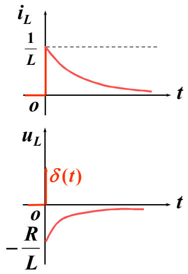


$i_L(0^+)=\frac{1}{L}$

$$\tau=\frac{L}{R}$$

$$i_L=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad t>0$$

$$u_L=-i_L R=-\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad t>0$$



全时间域表达式:

$$\begin{cases} i_L=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \\ u_L=\delta(t)-\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \end{cases}$$