Fundamentals of Electric Circuits 2020.04

Supplement:

TELLEGEN'S THEOREM

特勒根定理 TELLEGEN'S THEOREM

Let the graph have *b* branches, let us use associated reference directions. Let *I* be any set of branch currents satisfying KCL and let *U* be any set of branch voltages satisfying KVL, then:

$$\sum_{k=1}^{b} U_k I_k = 0$$

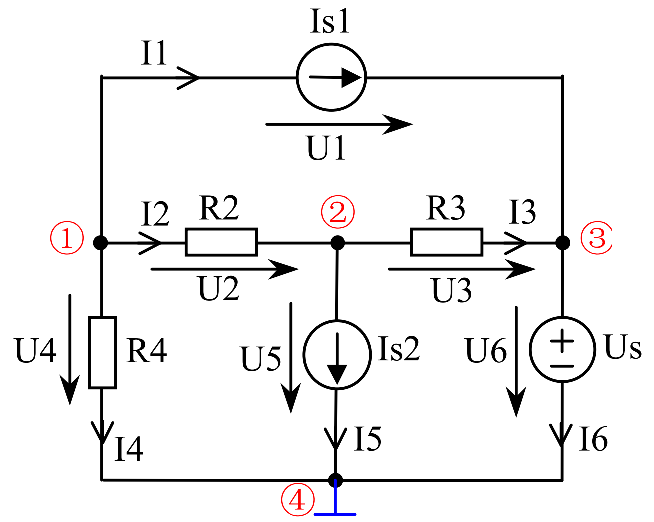
$U_1=U_{①}-U_{③}$， $U_2=U_{①}-U_{②}$， $U_3=U_{②}-U_{③}$， $U_4=U_{①}$，
$U_5=U_{②}$， $U_6=U_{③}$

$\Sigma P=U_1I_1+U_2I_2+U_3I_3+U_4I_4+U_5I_5+U_6I_6$

$=(U_{①}-U_{③})I_1+(U_{①}-U_{②})I_2+(U_{②}-U_{③})I_3+\ldots$

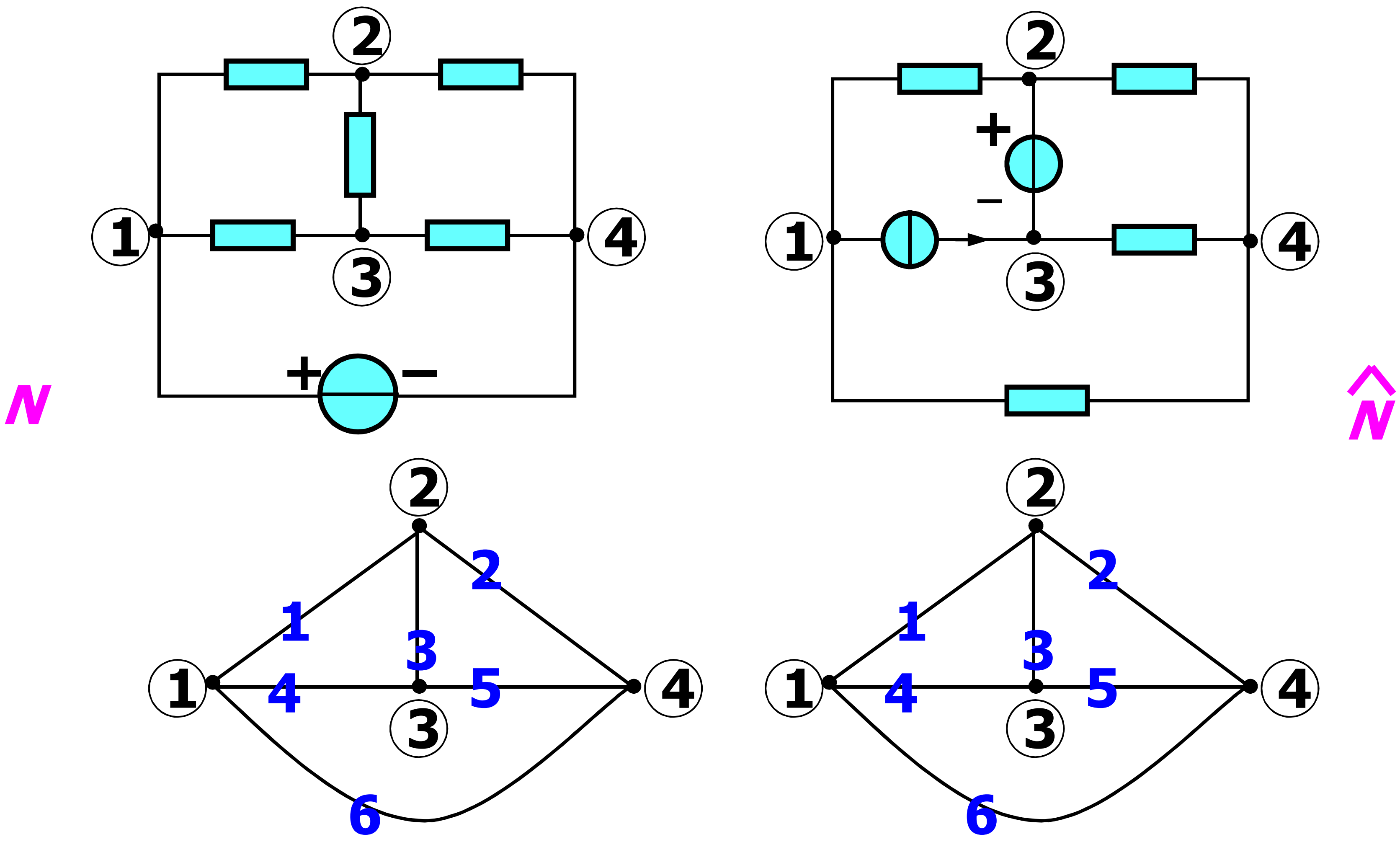
$=U_{①}(I_1+I_2+I_4)+U_{②}(-I_2+I_3+I_5)+U_{③}(-I_1-I_3+I_6)$

$= 0$

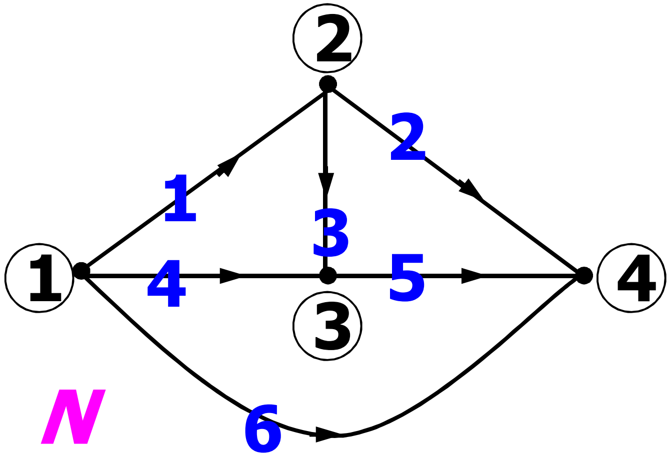


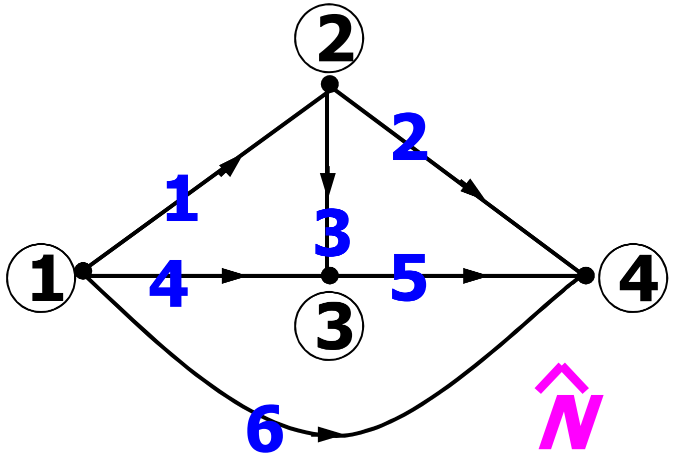
特勒根定理(Tellegen’s Theorem)

一、具有相同拓扑结构的电路



例:





*对应支路取相同的参考方向

*各支路电压、电流均取关联的参考方向

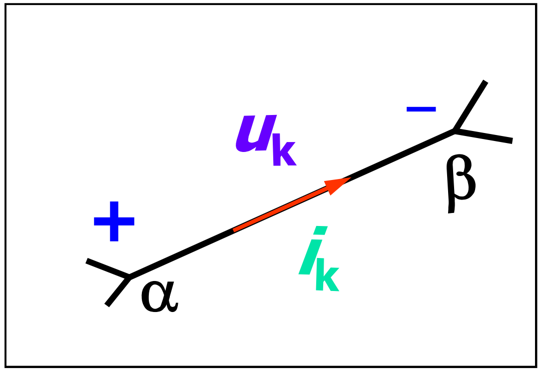
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6}(u_k\hat{i}_k) &= u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 + u_3\hat{i}_3 + u_4\hat{i}_4 + u_5\hat{i}_5 + u_6\hat{i}_6 \\
&= (u_{n1} - u_{n2})\hat{i}_1 + (u_{n2} - u_{n4})\hat{i}_2 + (u_{n2} - u_{n3})\hat{i}_3 \\
&\quad + (u_{n1} - u_{n3})\hat{i}_4 + (u_{n3} - u_{n4})\hat{i}_5 + (u_{n1} - u_{n4})\hat{i}_6 \\
&= u_{n1}(\hat{i}_1 + \hat{i}_6 + \hat{i}_4) + u_{n2}(-\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3) \\
&\quad + u_{n3}(-\hat{i}_3 - \hat{i}_4 + \hat{i}_5) + u_{n4}(-\hat{i}_2 - \hat{i}_5 - \hat{i}_6) = 0
\end{aligned}
$$

二、特勒根定理

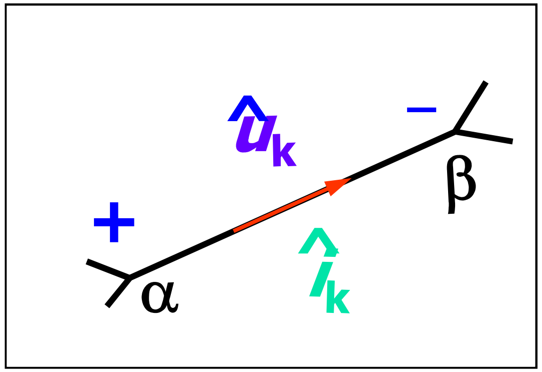
网络$\boldsymbol{N}$ 和$\hat{N}$ 具有相同的拓扑结构

取： **1.** 对应支路取相同的参考方向

2. 各支路电压、电流均取关联的参考方向



$\boldsymbol{N}$



$\hat{N}$

特勒根定理

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$$

证明　　令 $u_k = u_\alpha - u_\beta$ ， $\hat{i}_k = \hat{i}_{\alpha\beta} = -\hat{i}_{\beta\alpha}$

$$u_k\hat{i}_k = (u_\alpha - u_\beta)\hat{i}_{\alpha\beta} = u_\alpha\hat{i}_{\alpha\beta} - u_\beta\hat{i}_{\alpha\beta} = u_\alpha\underbrace{\hat{i}_{\alpha\beta}}_{\text{流出}\alpha} + u_\beta\underbrace{\hat{i}_{\beta\alpha}}_{\text{流出}\beta}$$

$$\sum_{k=1}^{b} u_k\hat{i}_k = u_\alpha\sum_{\alpha}\hat{i} + u_\beta\sum_{\beta}\hat{i} + \cdots$$

n个节点，有n项

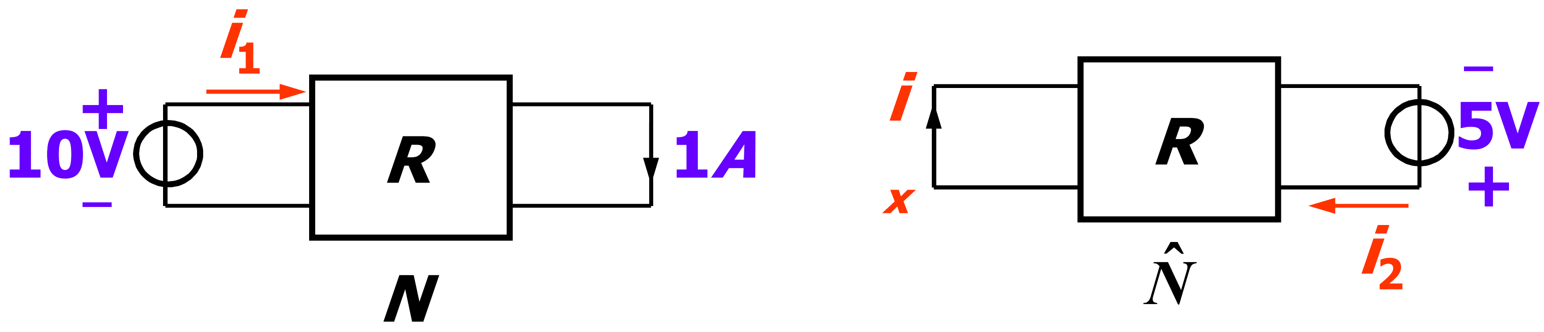
$\sum_{\alpha}\hat{i}$　流出节点α的所有支路电流和

$= 0$

同理可证： $\sum_{k=1}^{b}\hat{u}_k i_k = 0$

功率守恒定理 $\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$ 是特勒根定理的特例.

例　　已知如图，求电流 i_x。



解　　设电流 i_1和 i_2，方向如图所示。

由特勒根定理，得

$$10\times(-i_x)+0\times i_2+\sum_3^b u_k\hat{i}_k=0$$

$$0\times(-i_1)+(-5)\times 1+\sum_3^b \hat{u}_k i_k=0$$

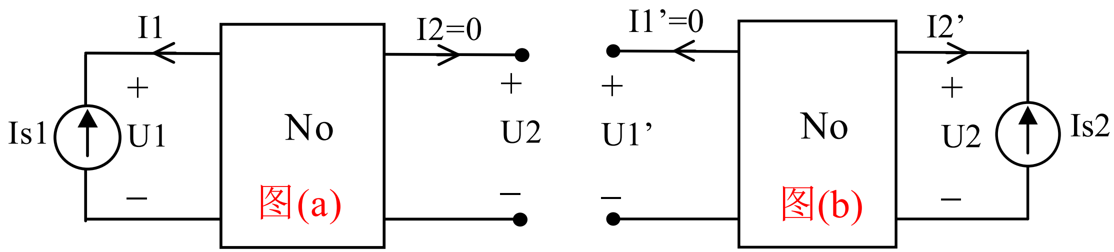
$$\because \quad u_k\hat{i}_k=i_kR_k\hat{i}_k=i_k\hat{u}_k$$

$$\therefore \quad -10i_x=-5 \qquad i_x=0.5A$$

特勒根第二定理（特勒根似功率定理）：如电路N和N′的拓扑图形完全相同，各有b条支路，n个节点，对应支路采用相同编号，支路电压和电流的参考方向取为一致，则有：

$$\sum_{k=1}^{b} U_k I'_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{b} U'_k I_k = 0$$

例：No为无源线性电阻网络，I_{S1}=4A，U_2=10V，I_{S2}=2A，U_1'=?



解：设No内各支路电压、电流采用关联参考方向

图(a)中：$U_1 I_1' + U_2 I_2' + \sum_{k=3}^{b} U_k I_k' = 0$，即 $U_1 I_1' + U_2 I_2' = -\sum_{k=3}^{b} R_k I_k I_k'$

图(b)中：$U_1' I_1 + U_2' I_2 + \sum_{k=3}^{b} U_k' I_k = 0$，即 $U_1' I_1 + U_2' I_2 = -\sum_{k=3}^{b} R_k I_k' I_k$

$$\therefore\ U_1 I_1' + U_2 I_2' = U_1' I_1 + U_2' I_2$$

$$U_1 \times 0 + 10 \times (-2) = U_1' \times (-4) + U_2' \times 0 \quad \Rightarrow\ U_1' = 5V$$

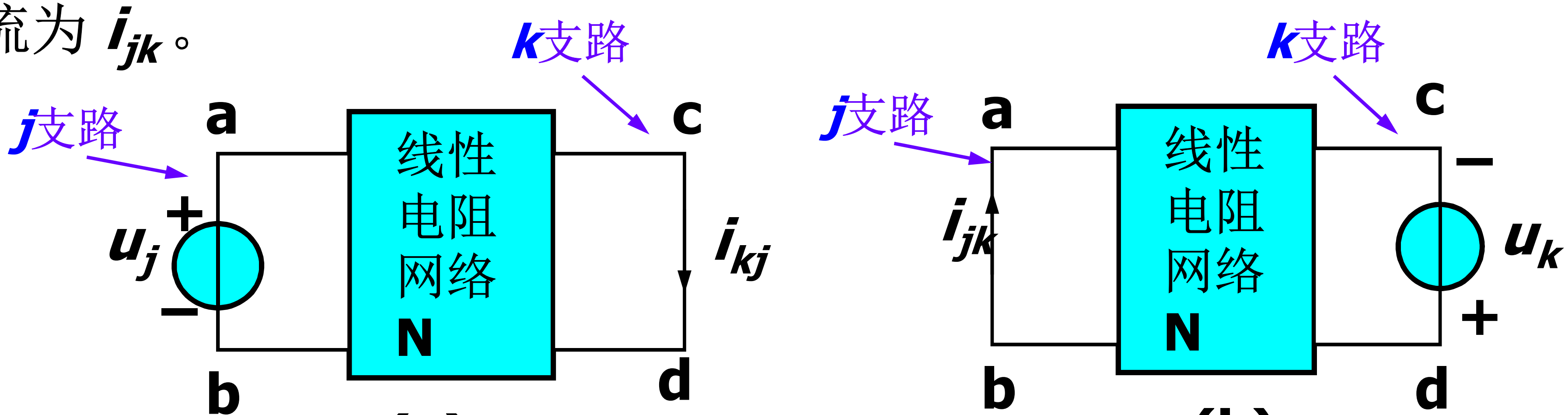
$$\therefore\ \frac{U_2}{I_{S1}} = \frac{10}{4} = 2.5, \quad \frac{U_1'}{I_{S2}} = \frac{5}{2} = 2.5\text{，} \qquad \text{即}\ \frac{U_2}{I_{S1}} = \frac{U_1'}{I_{S2}}$$

互易定理 (Reciprocity Theorem)

第一种形式:　　激励—电压源，响应—电流

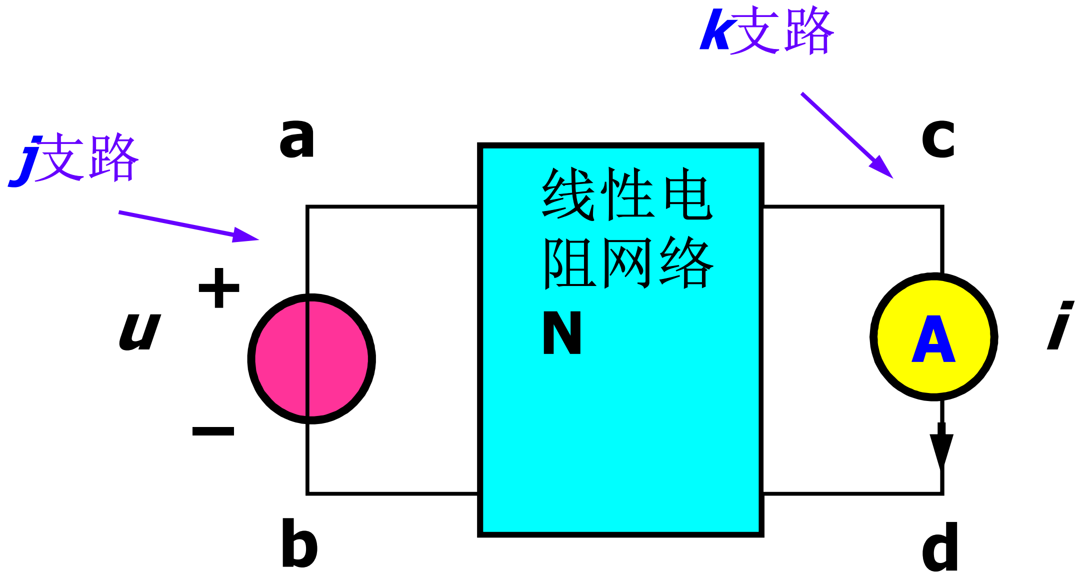
图a电路中，只有j支路中有电压源u_j，其在k支路中产生的电流为 i_{kj}。

图b电路中，只有k支路中有电压源u_k，其在j支路中产生的电流为 i_{jk}。

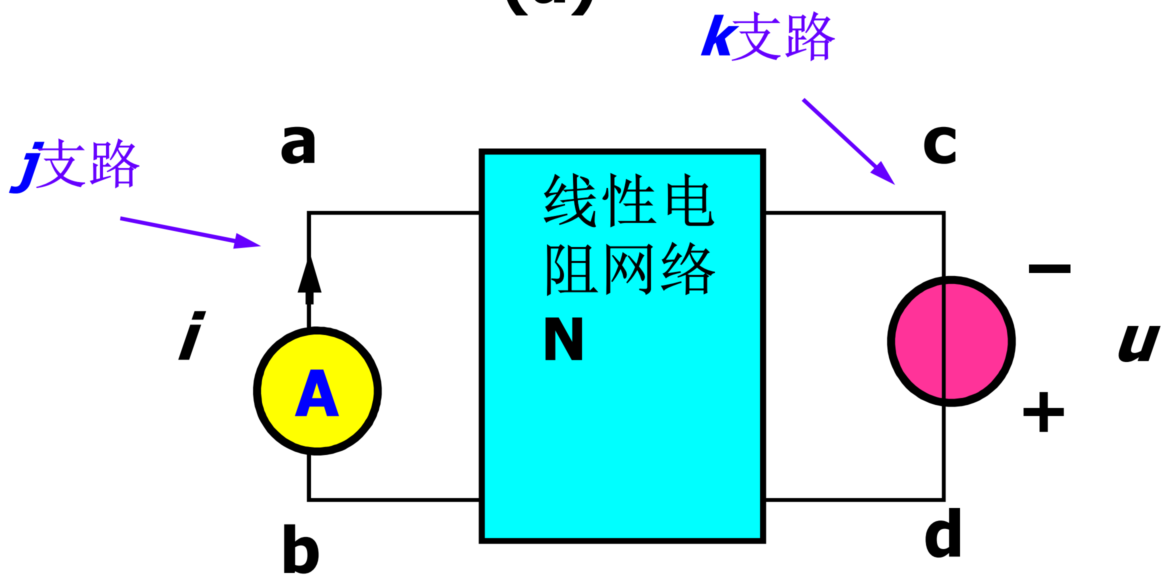


(a)　　　　(b)

当　$u_k = u_j$ 时，$i_{kj} = i_{jk}$。



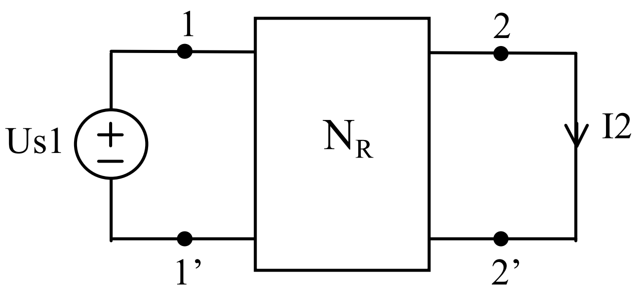
(a)

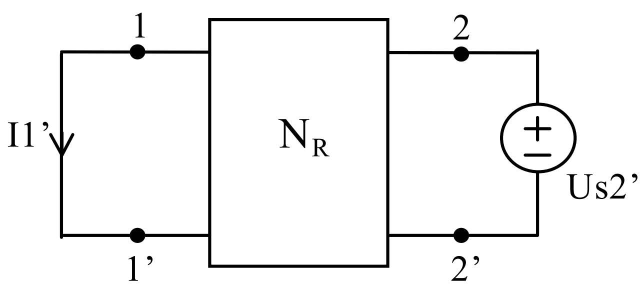


(b)

互易定理 RECIPROCITY THEOREM

In any passive linear bilateral network, if the single voltage source U_X in branch x produces the current response I_Y in branch y, then the removal of the voltage source from branch x and its insertion in branch y will produce the current response I_Y in branch x.





$$\frac{I_2}{U_{S1}} = \frac{I_1'}{U_{S2}'}$$

$$G_{21} = G_{12} \text{ (转移电导)} \qquad G_{21} = \frac{I_2}{U_{S1}}, \quad G_{12} = \frac{I_1'}{U_{S2}'}$$

图5－36(a)的电流$i_2=G_{21}u_S$与图5－36(b)的电流$i_1=G_{12}u_S$相同。也就是说互易网络中电压源与电流表互换位置，电流表读数不变。

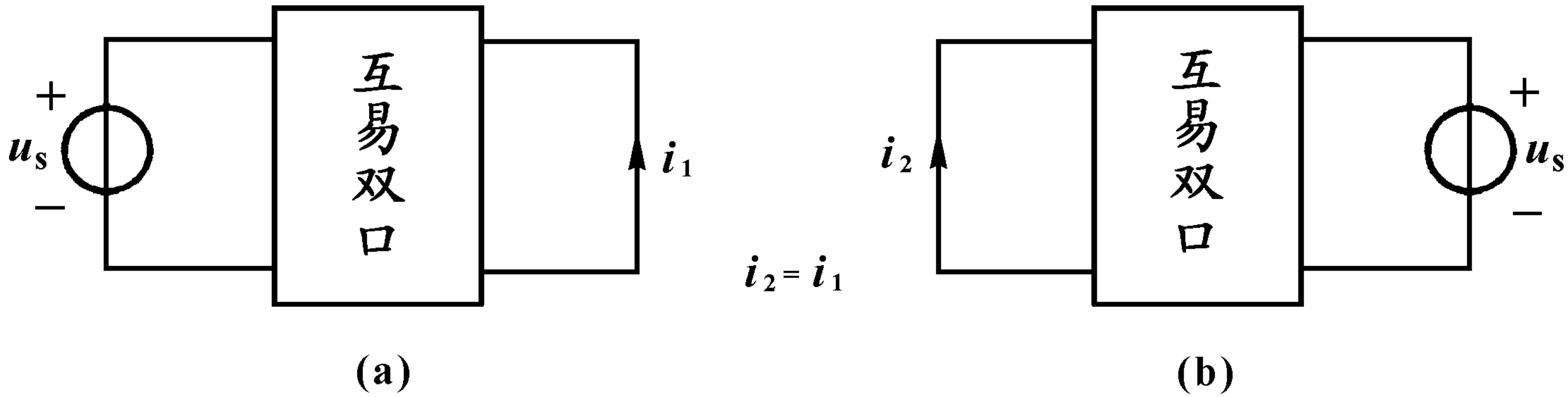
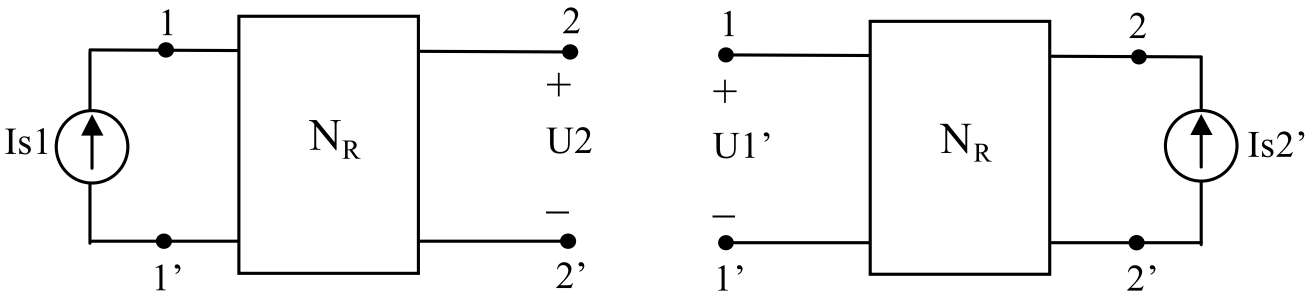


图5－36 电压源与电流表互换

In any passive linear bilateral network, if the single current source I_X between nodes x and x' produces the voltage response Uy between nodes y and y', then the removal of the current source from nodes x and x' and its insertion between nodes y and y' will produce the voltage response Uy between nodes x and x'.



$$\frac{U_2}{I_{S1}} = \frac{U_1'}{I_{S2}'}$$

$R_{21}=R_{12}$ (转移电阻)　（$R_{21} = \frac{U_2}{I_{S1}}$，$R_{12} = \frac{U_1'}{I_{S2}'}$）

图5－35(a)的电压$u_2=R_{21}i_S$与图5－35(b)的电压$u_1=R_{12}i_S$ 相同。也就是说，在互易网络中电流源与电压表互换位置，电压表读数不变。

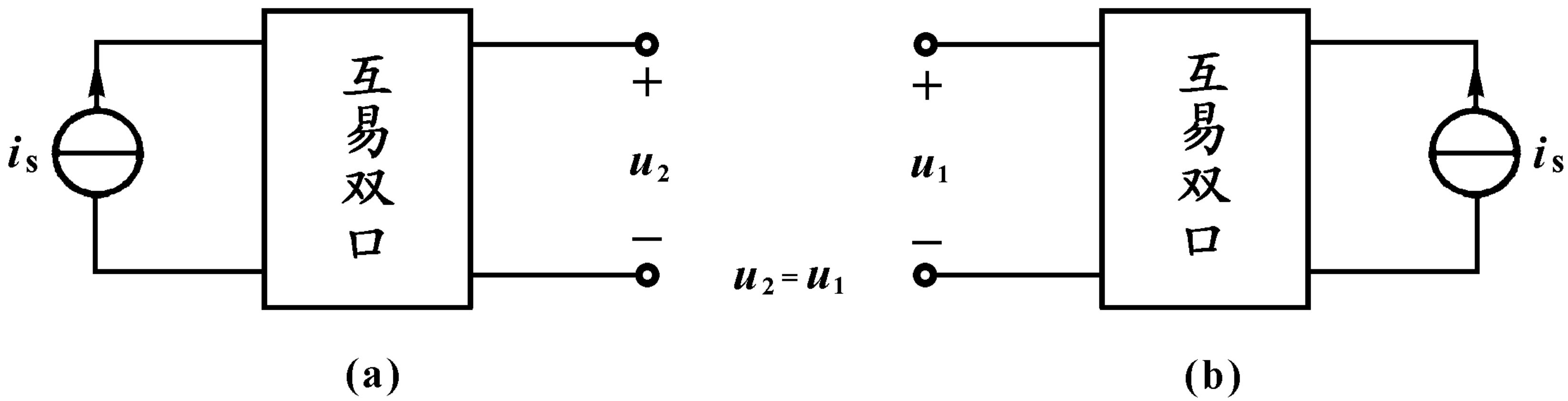
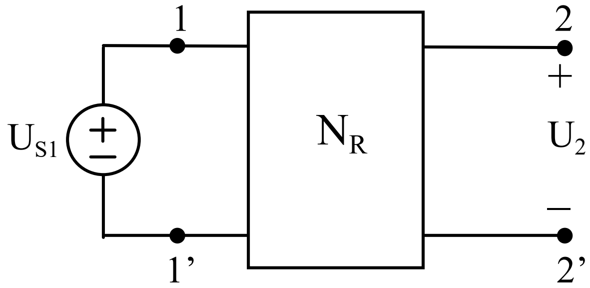
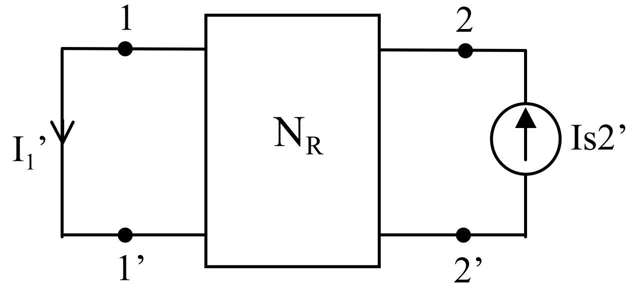


图5－35 电流源与电压表互换

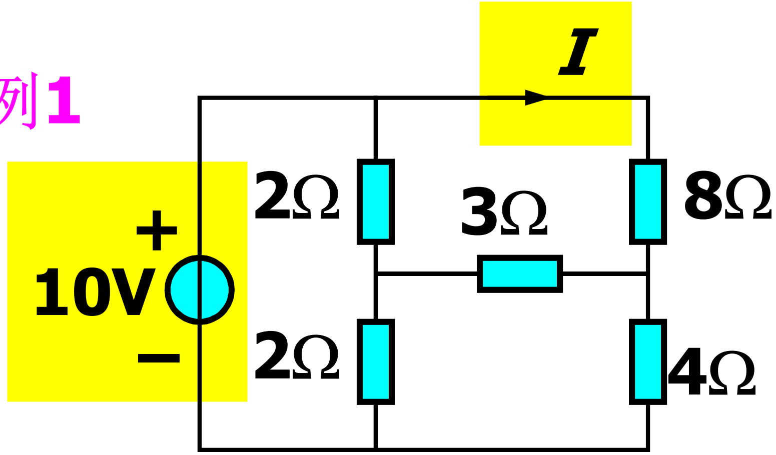
当在网络的11’间加电源U_{S1}，22’间的开路电压为U_2；在网络的22’间加电流源I_{S2}，11’间的短路电流为I_1’时，则不管网络的拓扑结构如何，也不管网络内各电阻元件的参数如何，总有：





$$\frac{U_2}{U_{S1}} = \frac{I_1'}{I_{S2}'}$$

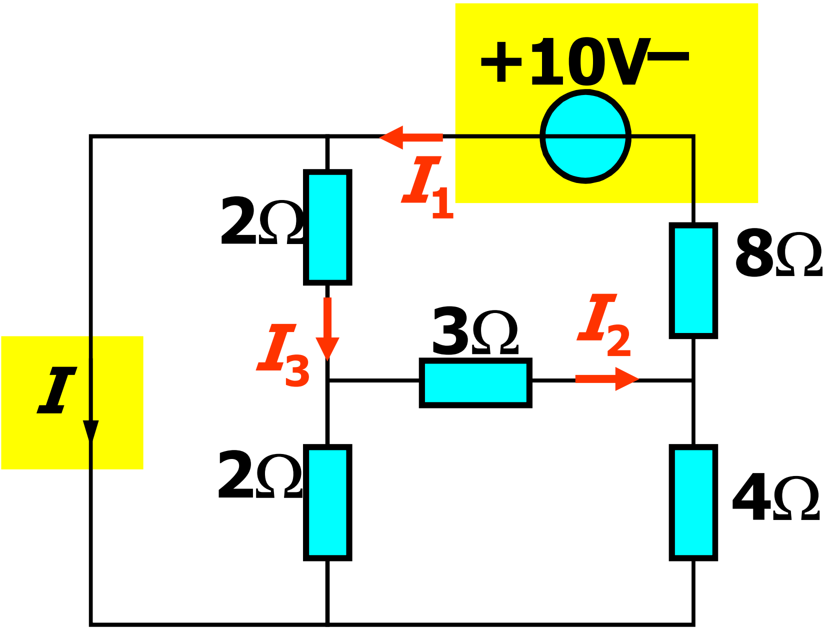
例1



求电流I。

可用回路法，节点法，戴维南

解 利用互易定理



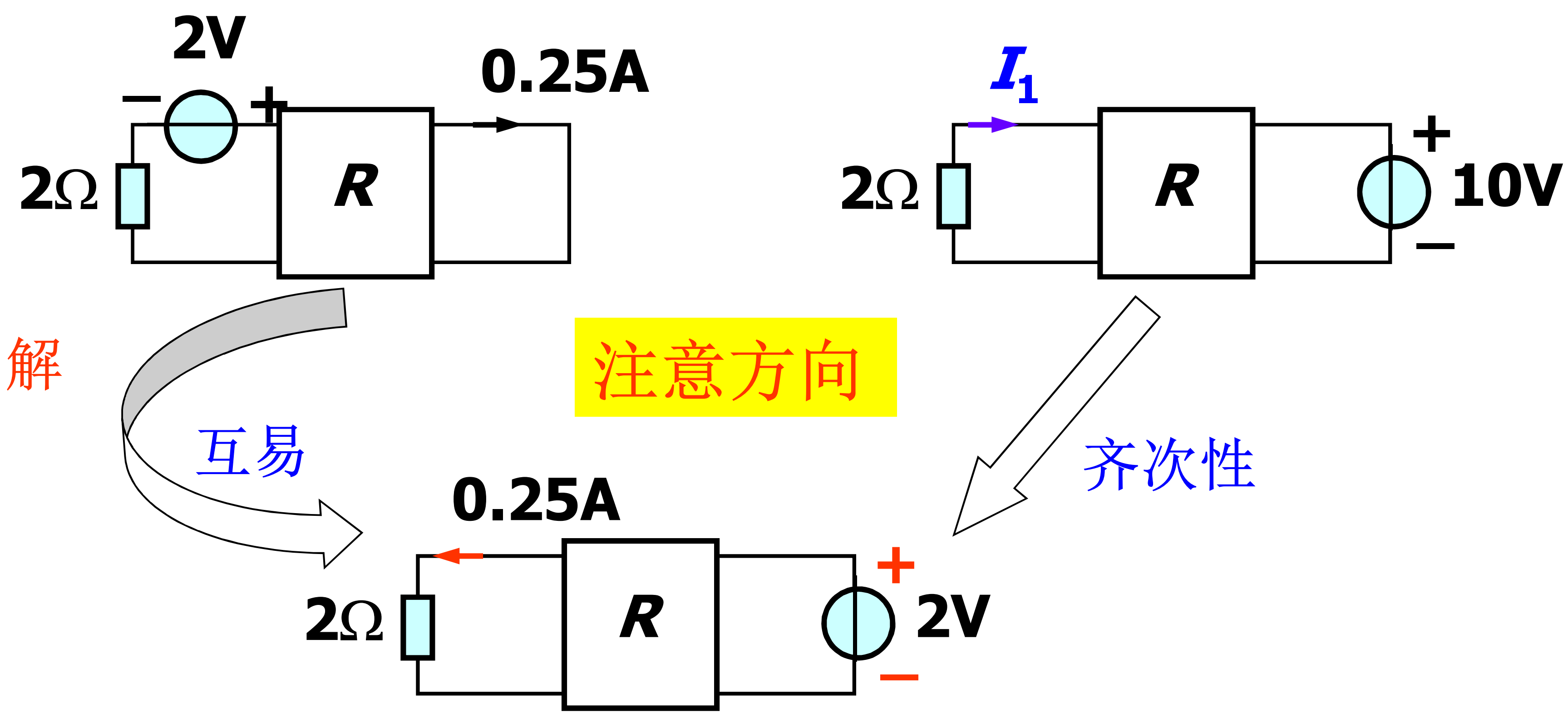
$$I_1=\frac{10}{8+(2//2+3)//4}=1\text{A}$$

I_2 = 0.5 I_1=0.5A

I_3 = 0.5 I_2=0.25A

I= I_1−I_3 = 0.75A

例2　已知如图。求：I_1



$$I_1 = \frac{10}{2}(-0.25) = -1.25A$$

例3 用互易定理求图3(a)中电流i。

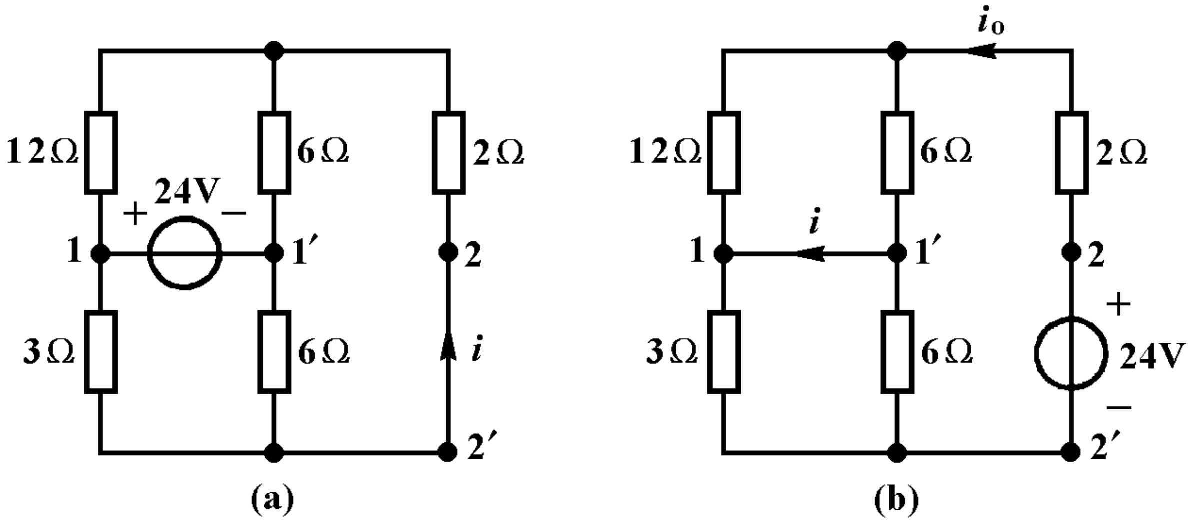


图3 互易定理的应用

解：根据互易定理，图3(a)和(b)中电流i相同。

从图3(b)中易于求得：

$$i_o = \frac{24}{2+\frac{6\times12}{6+12}+\frac{3\times6}{3+6}}\text{A} = 3\text{A}$$

$$i = \frac{12}{6+12}i_o - \frac{3}{3+5}i_o = 1\text{A}$$

应用互易定理时应注意：

(1) 适用于线性网络只有一个电源时，电源支路和另一支路间电压、电流的关系。

(2) 激励为电压源时，响应为电流

激励为电流源时，响应为电压

电压与电流互易。

(3) 电压源激励，互易时原电压源处短路，电压源串入另一支路；

电流源激励，互易时原电流源处开路，电流源并入另一支路的两个节点间。

(4) 互易时要注意电压、电流的方向。

(5) 含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

返回首页

对偶原理 (Dual Principle)

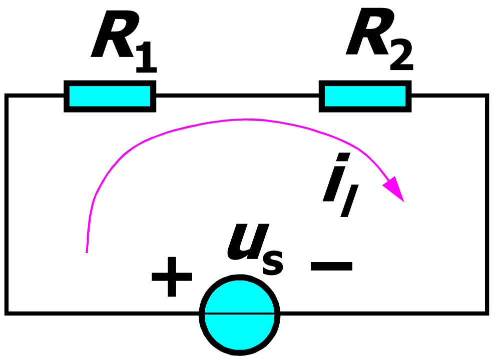
一、网络对偶的概念

1. 平面网络；

2. 两个网络所涉及的量属于同一个物理量(电路）；

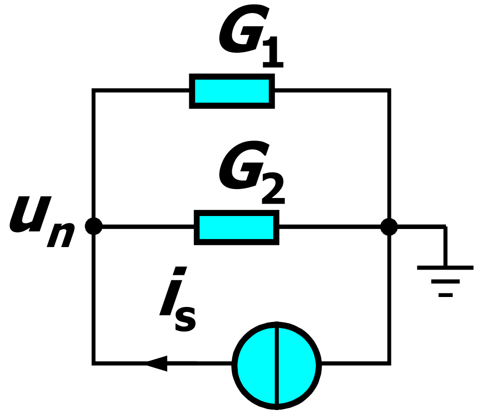
3. 两个方程中对应元素互换后方程能彼此转换，互换的元素称为对偶元素；这两个方程所表示的两个电路互为对偶。

例1



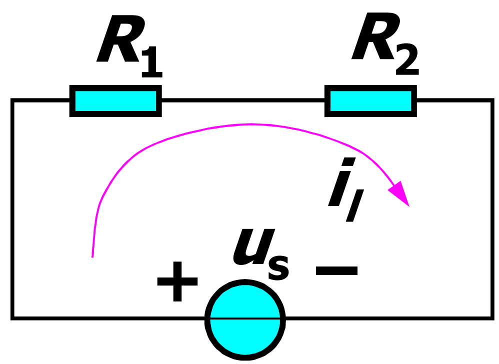
网孔电流方程：

$$(R_1 + R_2)i_l = u_s$$

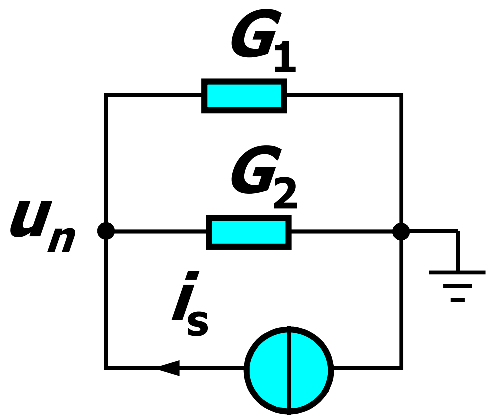


节点电压方程

$$(G_1 + G_2)u_n = i_s$$



$(R_1 + R_2)i_l = u_s$

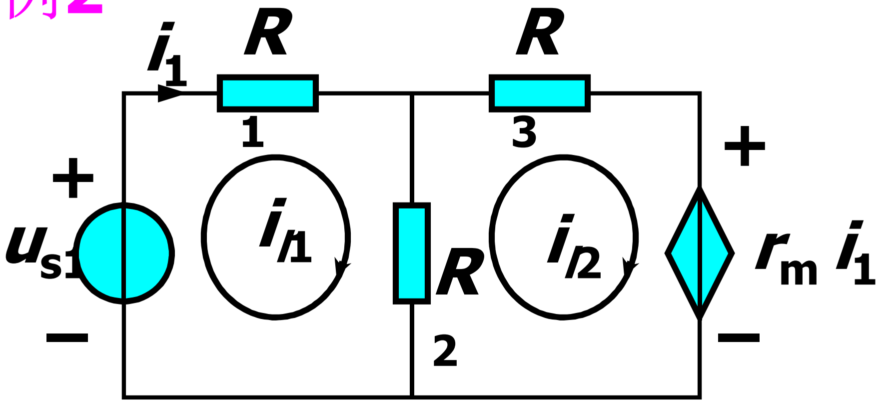


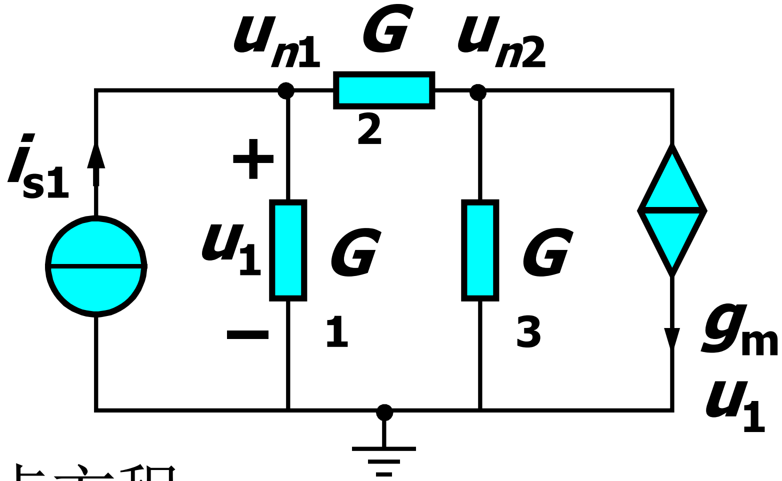
$(G_1 + G_2)u_n = i_s$

对应元素互换，两个方程可以彼此转换，两个电路互为对偶。

电阻 R	电压源 u_s	网孔电流 i_l	KVL	串联	网孔
电导 G	电流源 i_s	节点电压 u_n	KCL	并联	节点

例2





网孔方程:

$$\begin{cases}(R_1+R_2)\ i_{l1}-R_2\ i_{l2}=u_{s1}\\ -(R_2-r_m)\ i_{l1}+(R_2+R_3)\ i_{l2}=0\end{cases}$$

节点方程:

$$\begin{cases}(G_1+G_2)u_{n1}-G_2\ u_{n2}=i_{s1}\\ -(G_2-g_m)u_{n1}+(G_2+G_3)\ u_{n2}=0\end{cases}$$

对应元素 ……

网孔电阻阵 **CCVS** **T形**

节点导纳阵 **VCCS** π形

两个电路互为对偶电路。

二、对偶原理　两个对偶电路N，$\overline{N}$，如果对电路N有命题（或陈述）S成立，则将S中所有元素分别以其对应的对偶元素替换，所得命题（或陈述）$\overline{S}$对电路$\overline{N}$成立。

对偶关系

基本定律	$U=RI$	$I=GU$
	$\sum U=0$	$\sum I=0$
分析方法	网孔法	节点法
对偶结构	串联	并联
	网孔	节点
	∇	Y
对偶状态	开路	短路

对偶元件	R	G
	L	C
	$\vdots$	

对偶结论

开路电流为零，短路电压为零；

理想电压源不能短路，

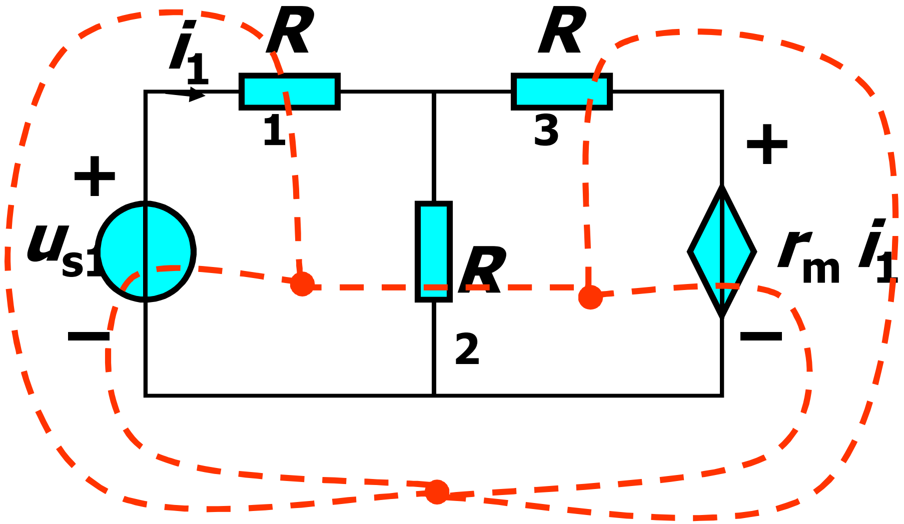
理想电流源不能开路；

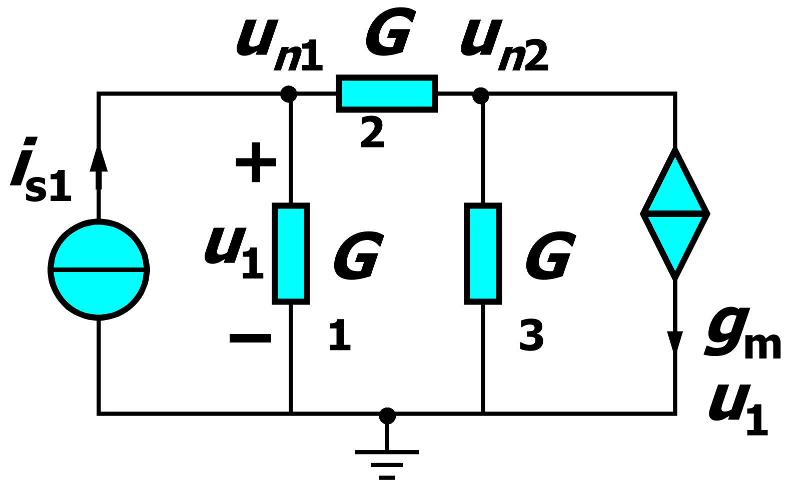
戴维南定理，诺顿定理；

…

三、求对偶电路的方法（打点法）

例





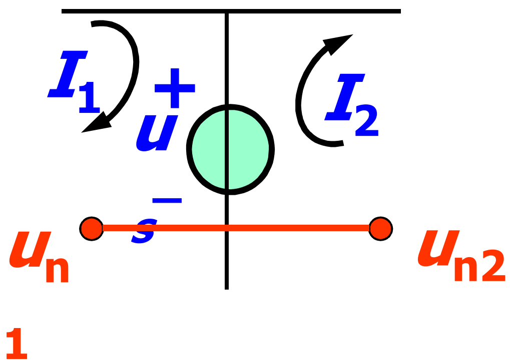
注意：

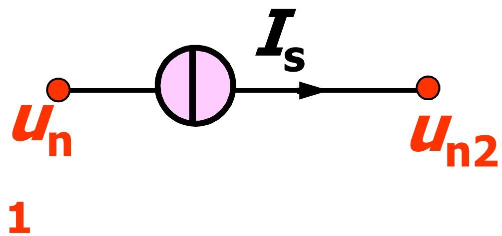
(1) 惯例网孔电流取顺时针方向，节点电压极性对地为正。

每个网孔对应一个节点，外网孔对应参考节点。

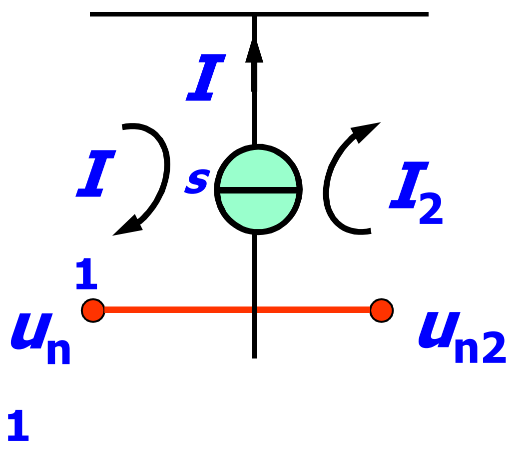
(2) 电源方向（在按惯例选取网孔电流和节点电压方向的前提下）

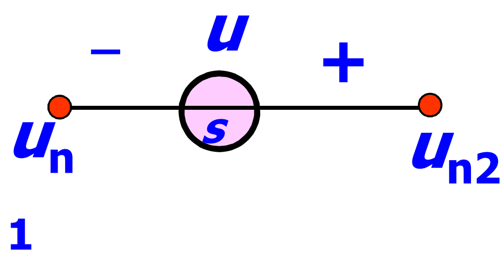
- 原回路中所包含的电压源如果沿顺时针方向电压升高，则在对偶电路中电流源的电流方向应指向该网孔对应的独立节点。





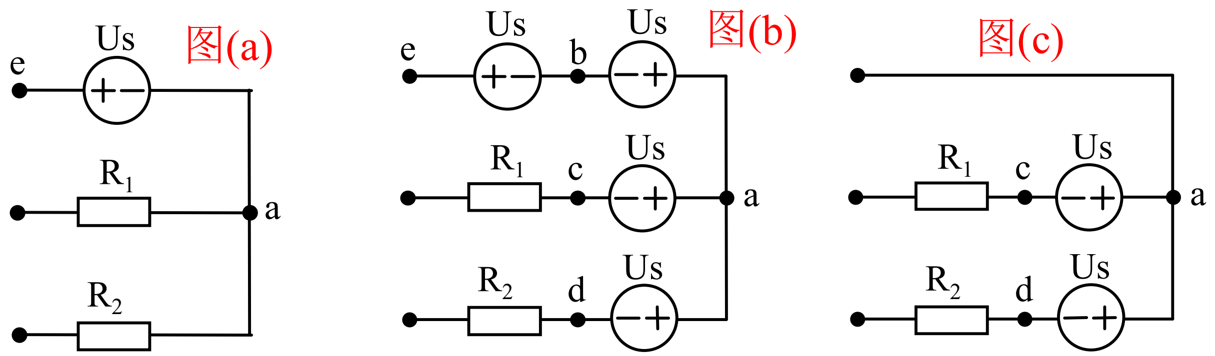
◆ 原回路中所包含的电流源的电流方向如果和网孔电流方向一致，则在对偶电路中电压源的正极落在该网孔对应的独立节点上。



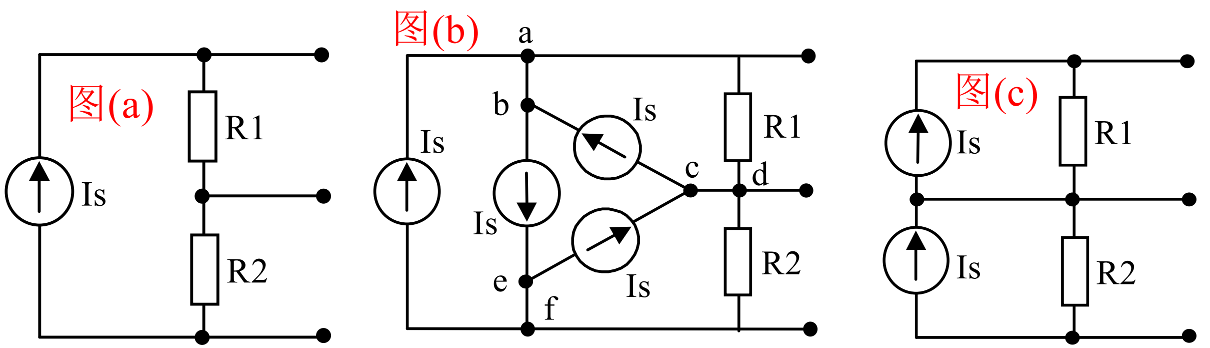


返回首页

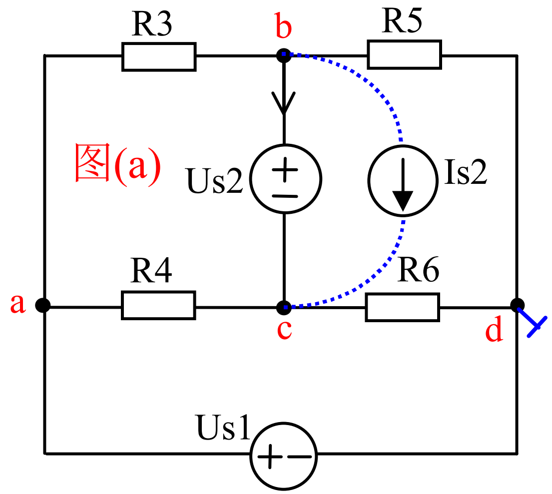
电源的转移

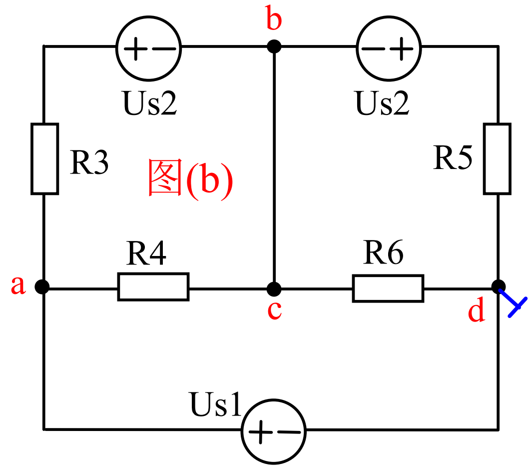


图(b)：Ubc= -Us+Us=0，Ucd= -Us+Us=0，Uea=Us –Us=0



例：改进节点法





节点a：$Ua=U_{S1}$

节点b：$$(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6})U_C-(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})U_a=-\frac{U_{S1}}{R_3}-\frac{U_{S1}}{R_5}$$

$Ub=U_{S1}+Uc$

The end