自动控制原理

朱英华
Email: yhzhu@swjtu. edu.cn
西南交通大学电气工程学院

2.3 状态空间模型

时域模型

不仅可用于研究线性定常系统，还可以研究非线性，时变和多变量的系统。

2.3 状态空间模型

- 线性定常系统的状态空间模型
- 状态空间模型举例

一、线性定常系统的状态空间模型

1. 状态变量

系统的状态变量是表示系统状态的变量，能描述系统的当前状态。在给定输入激励和系统动态方程的条件下，状态变量可用于进一步确定系统未来的状态和输出响应。

2. 状态向量

动态系统的状态由一组状态变量 $[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ 来描述，这组状态变量构成的列向量就称为状态向量。

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

3. 状态空间模型

矩阵方程

状态向量

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \text{状态微分方程} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \text{输出方程} \end{cases}$$

输出向量　　　　输入向量

$t \geq t_0$，初始条件为 $x(t_0)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

对于线性定常系统，A、B、C和D为 常数矩阵。

A —— 系统矩阵　　B —— 输入矩阵

C —— 输出矩阵　　D —— 前馈矩阵

状态变量的选择

(1) 选择最少的状态变量作为状态向量的元素，这些最少的状态变量能充分描述系统状态。

状态变量的个数等于系统的阶数。

(2) 状态向量的元素(各状态变量)必须是线性独立的。

状态变量的选择不是唯一的。同一个系统，当选择不同的状态变量时，得出的状态空间模型也是不同的。

4. 状态空间模型的解

状态微分方程的解

零输入响应

$$\boxed{x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (t\geq 0)}$$

状态转移矩阵 $\Phi(t)=e^{At}$

物理意义

随着时间的推移，将系统的初始状态转移到任意时刻的状态。

4. 状态空间模型的解

状态微分方程的解

零输入响应

$$\boxed{x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (t \geq 0)}$$

状态转移矩阵 $\Phi(t) = e^{At}$

拉普拉斯变换 $\Phi(s) = [sI - A]^{-1}$

状态转移矩阵完全决定了系统的零输入响应。

4. 状态空间模型的解

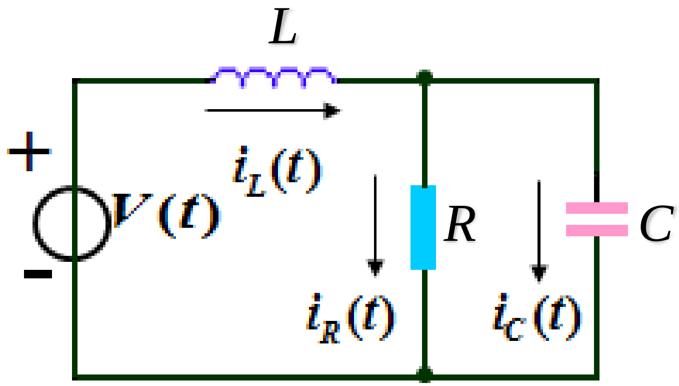
输出方程的解

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\boxed{y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \qquad (t \geq 0)}$$

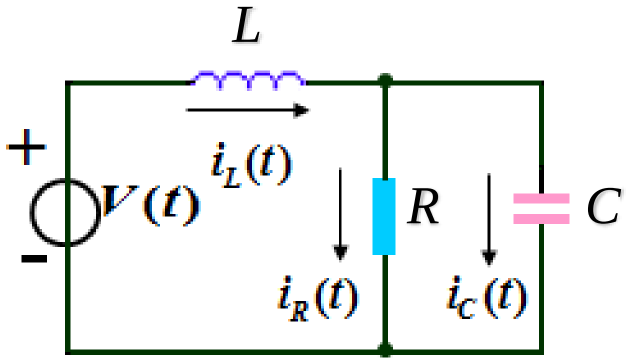
二、状态空间模型举例

例2-3 在下图所示的电路系统中， $V(t)$为系统的输入， $i_R(t)$为系统的输出，试确定该电路系统的状态空间模型。



解：

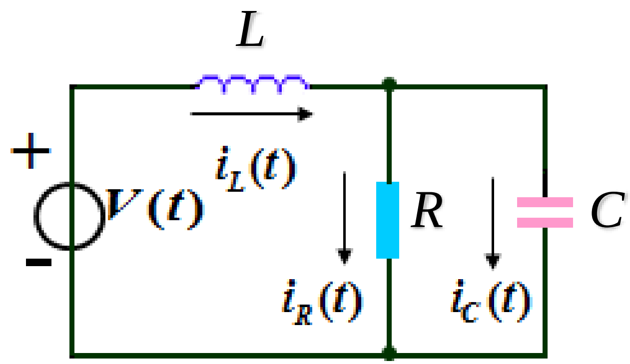
选择电容电压 $V_c(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 为系统的状态变量，则



$$\begin{cases} i_C = C\dfrac{dV_C}{dt} = C\dot{V}_C \\ V_L = L\dfrac{di_L}{dt} = L\dot{i}_L \end{cases}$$

$$\dot{V}_C = \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}[-i_R + i_L] = -\frac{1}{RC}V_C + \frac{1}{C}i_L$$

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L}V_L = \frac{1}{L}[V(t) - V_C] = -\frac{1}{L}V_C + \frac{1}{L}V(t)$$



$$i_R = \frac{1}{R} V_C$$

该电路系统的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V(t)$$

状态微分方程

$$i_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}, D = 0$$

输出方程

线性时变系统的状态空间模型

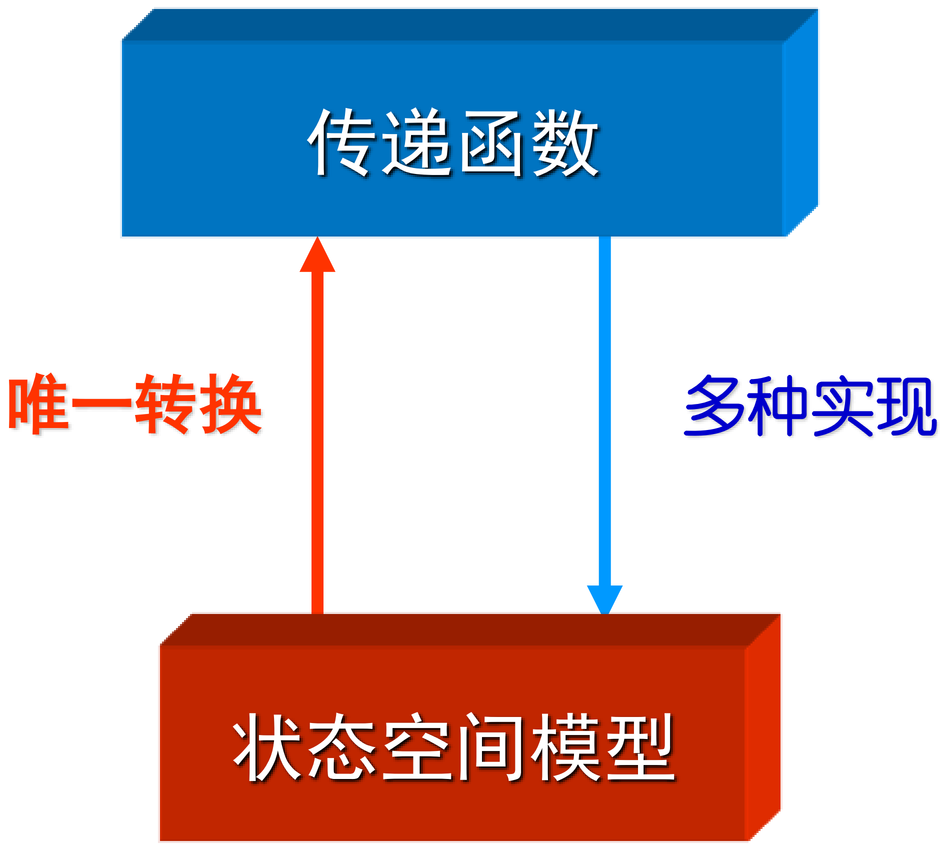
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

非线性系统的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u,t) \\ y(t) = g(x,u,t) \end{cases}$$

2.4 输入/输出模型与状态空间模型之间的转换

- 传递函数转换为状态空间模型
- 状态空间模型转换为传递函数


传递函数
唯一转换
多种实现
状态空间模型

一、传递函数转换为状态空间模型

1. 传递函数分子为常数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)=b_0R(s)$$

在零初始条件下，利用拉氏反变换，得：

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=b_0 r$$

选状态变量

$$\boxed{\text{状态变量的个数等于系统的阶数}n\text{。}}$$

$$x_1=y \quad x_2=\frac{dy}{dt} \quad x_3=\frac{d^2y}{dt^2} \quad \cdots \quad x_n=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$

得：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + b_0 r$$

状态空间模型

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ b_0\end{bmatrix}r$$

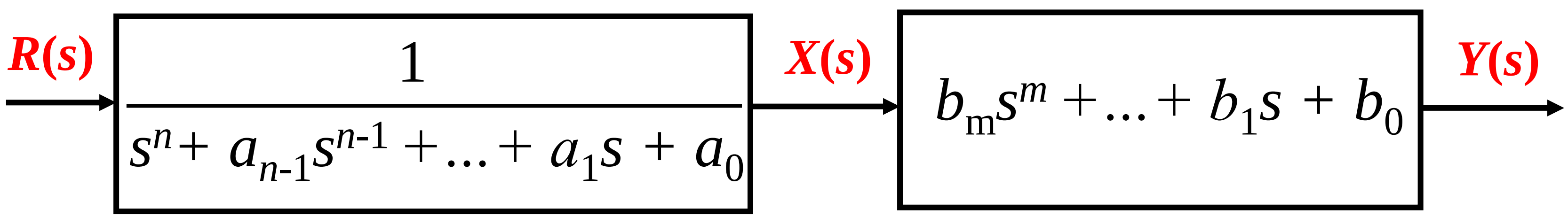
$$y=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix},D=0$$

相变量规范型

2. 传递函数分子为多项式

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\quad(n>m)$$

$$G(s)=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}(b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0)$$



确定状态微分方程　　　　确定输出方程

$$G_1(s)=\frac{X(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \qquad (1)$$

对方程(1)变形整理，再求拉氏反变换得

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)X(s)=R(s)$$

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=r \qquad (2)$$

选状态变量

$$x_1=x \quad x_2=\frac{dx}{dt} \quad x_3=\frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots \quad x_n=\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

则n阶微分方程(2)化为:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dot{x}_3 = x_4 \\
\quad\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n \\
\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + r
\end{cases}
$$

状态微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

确定输出方程

$$G_2(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0 \qquad (3)$$

$$Y(s)=(b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0)X(s)$$

$$y(t)=b_m\frac{d^m x}{dt^m}+\cdots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0 x$$

$$=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_m x_{m+1}$$

输出方程

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

状态空间模型

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\quad (n>m)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0\cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{m+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

相变量规范型

二、状态空间模型转换为传递函数

n阶线性定常系统的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

在零初始条件下，利用拉氏变换，得：

$$\begin{cases} sX(s) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s) & (1) \\ Y(s) = \mathbf{C}X(s) + \mathbf{D}U(s) & (2) \end{cases}$$

对（1）式进行矩阵运算，得：

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \qquad (3)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \qquad (4)$$

状态转移矩阵 $\Phi(s)$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)=\Phi(s)BU(s) \qquad (5)$$

将(5)式带入(2)式，得:

传递函数矩阵

$$Y(s)=CX(s)+DU(s)=[C\Phi(s)B+D]U(s)$$

对于单输入单输出（SISO）系统，得

传递函数:

状态转移矩阵 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$

$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C\Phi(s)B+D}$$

例3.5 P143(12版)

RLC网络的传递函数。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{-R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\boxed{H^{-1} = \frac{1}{\det(H)} H^{*}}$$

对于2×2矩阵，如 $H = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$

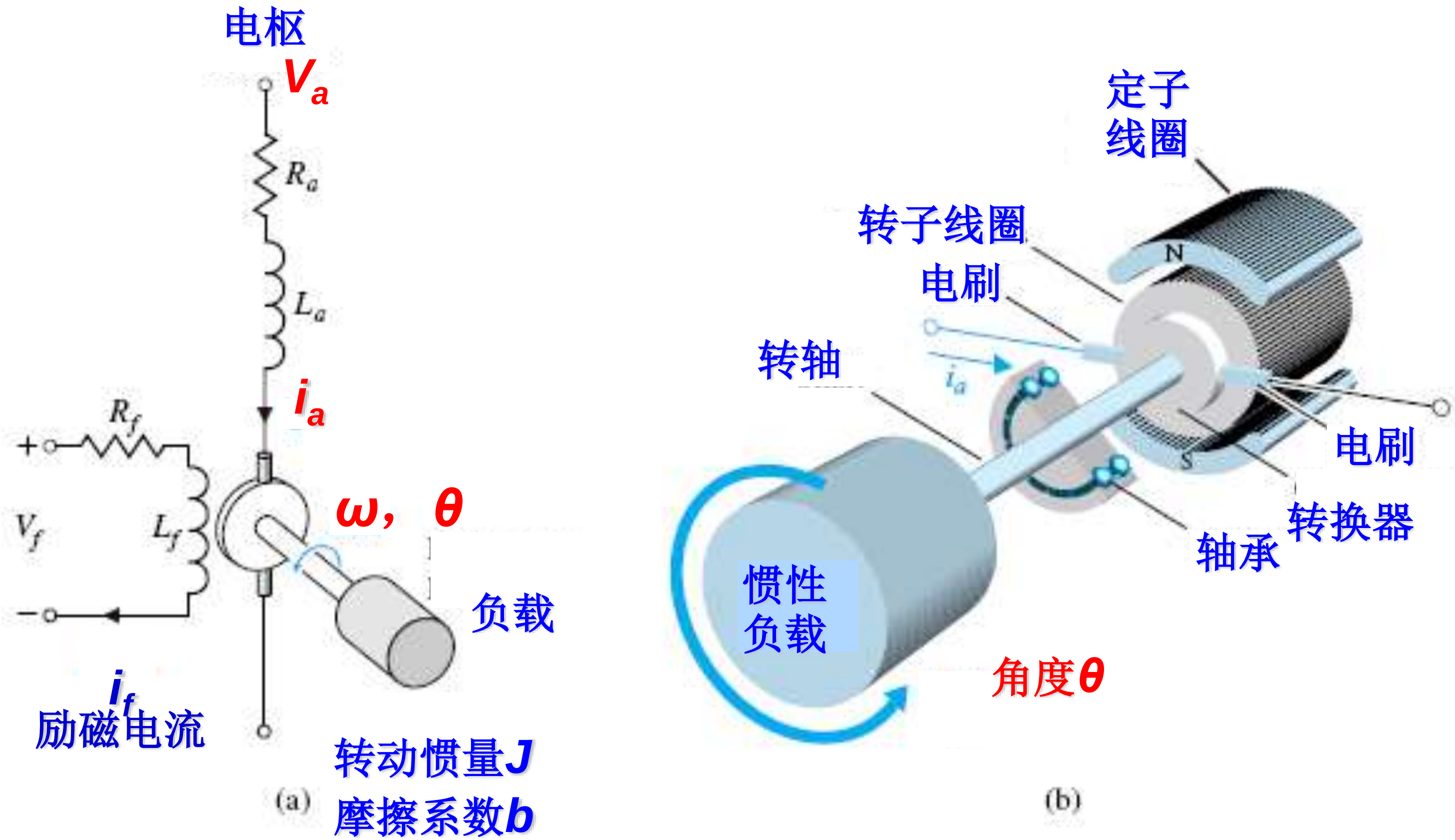
$$H^{*} = \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

对于3×3矩阵，如 $H=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

$$H^*=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

2.5 系统数学模型举例

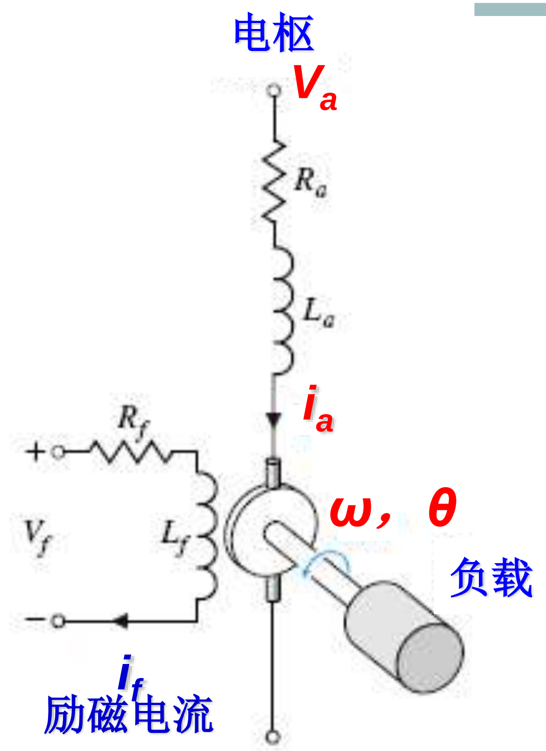
一、电枢控制式直流电机系统的数学模型



1. 输入量：V_a　　输出量：θ

2. 系统组成

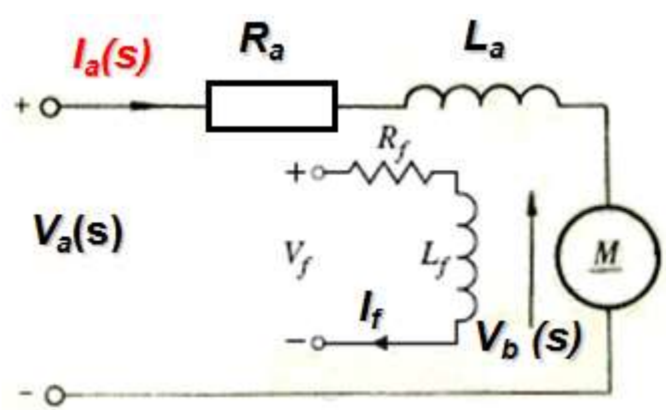
（1）根据基尔霍夫定律，列出电枢回路方程：

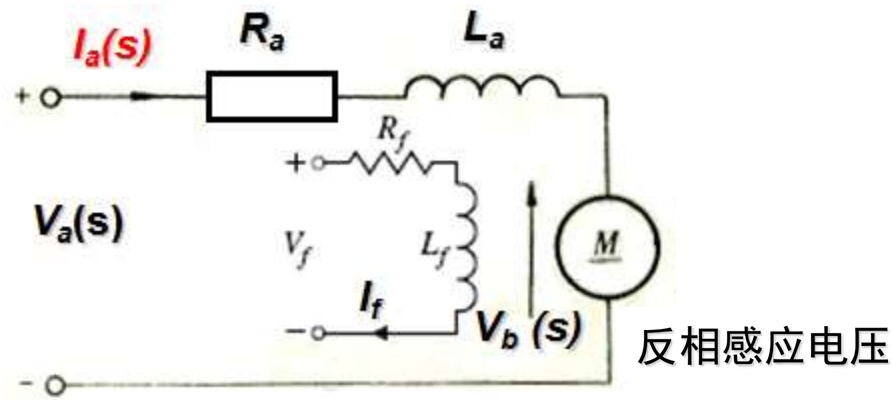


反相感应电压

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + V_b(s)$$

$$V_b(s) = K_b \omega(s)$$





$$V_a(s) = (R_a + L_a s)I_a(s) + K_b\omega(s)$$

则电枢电流为：

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b\omega(s)}{R_a + L_a s} \qquad \text{(A)}$$

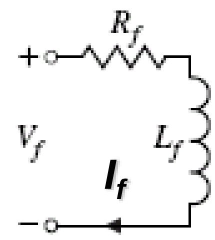
（2）根据牛顿运动定律，列出力矩平衡方程：

扰动扭矩

$$\sum T = T_m(t) - T_d(t) - T_f(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

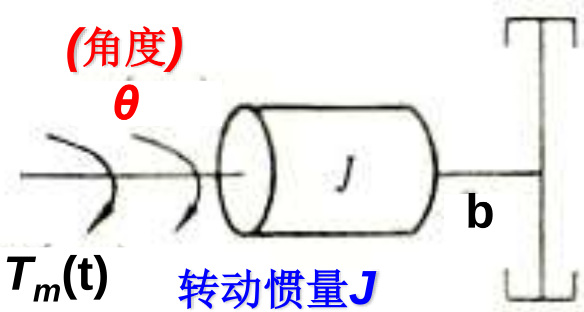
电机扭矩

摩擦扭矩



$$T_m(t) = K_1\phi i_a(t) = K_1K_fI_fi_a(t) = K_mi_a(t)$$

$$T_f(t) = b\omega(t) = b\frac{d\theta(t)}{dt}$$



转动惯量J

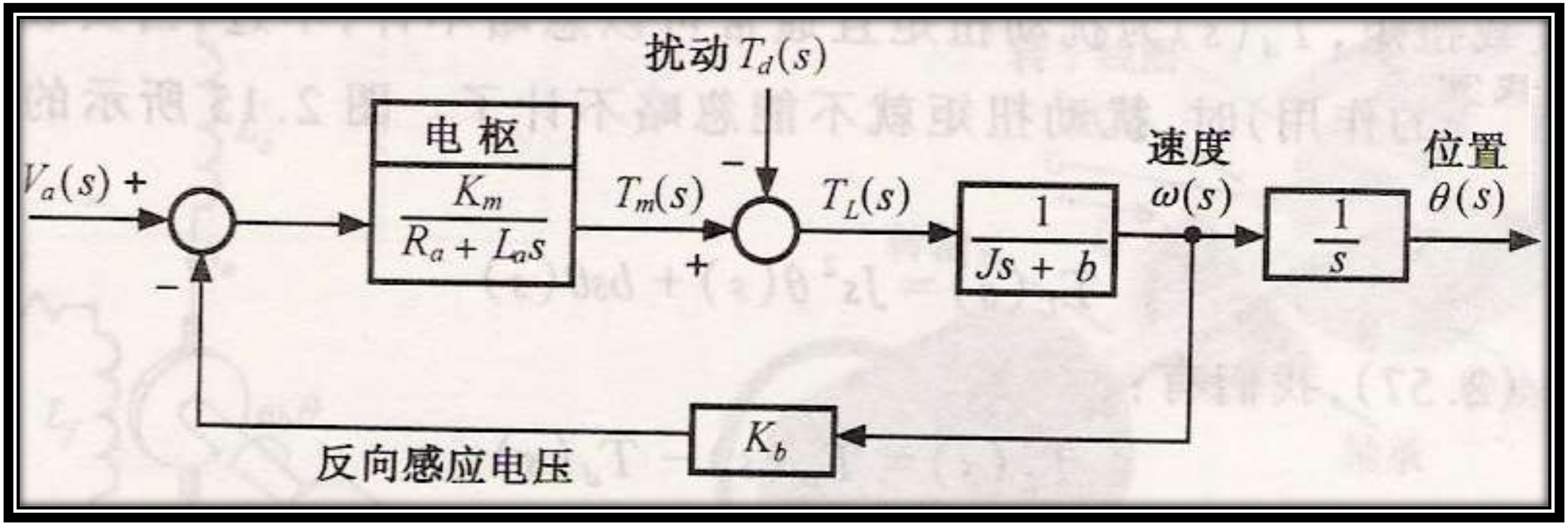
摩擦系数b

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+b\frac{d\theta(t)}{dt}=K_m i_a(t)-T_d(t)$$

$$Js^2\theta(s)+bs\theta(s)=K_m I_a(s)-T_d(s) \qquad \text{（B）}$$

3. 综合(A)、(B)两式, 当T_d=0 时, 传递函数为:

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m}{s[(R_a+L_a s)(Js+b)+K_b K_m]}$$



电枢控制式直流电机系统的框图模型

（P52 12版）

二、电路系统的数学模型

给定某系统的传递函数

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s(Ts+1)}}$$

如果用电阻、电容、运算放大器等元件构成该系统的模拟装置，试画出该模拟装置的电路原理图。

1. 输入量：$R(s)$　输出量：$Y(s)$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s(Ts+1)}}$$

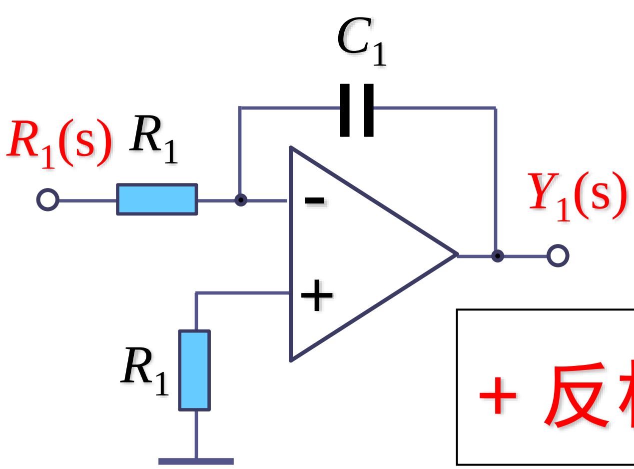
2. 系统组成

积分环节 $\boxed{\frac{1}{s}}$

一阶惯性环节 $\boxed{\frac{1}{Ts+1}}$

3. 系统的电路实现

积分环节 $\boxed{\frac{1}{s}}$

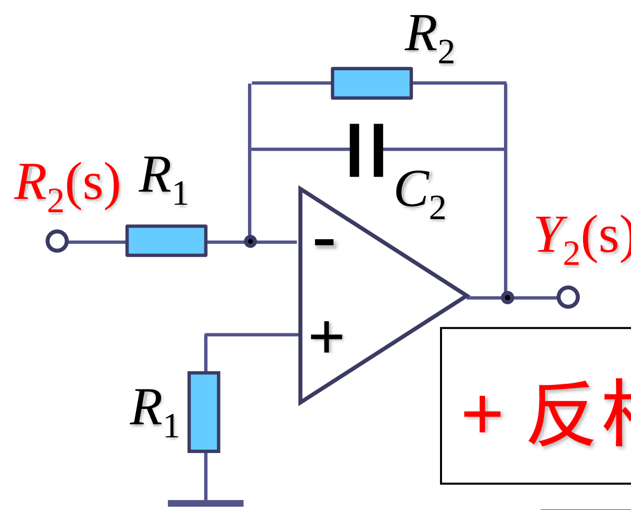


+ 反相器

$R_1C_1=1$

$$G_1(s)=\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}=-\frac{1}{R_1C_1s}$$

一阶惯性环节 $\boxed{\frac{1}{Ts+1}}$



+ 反相器

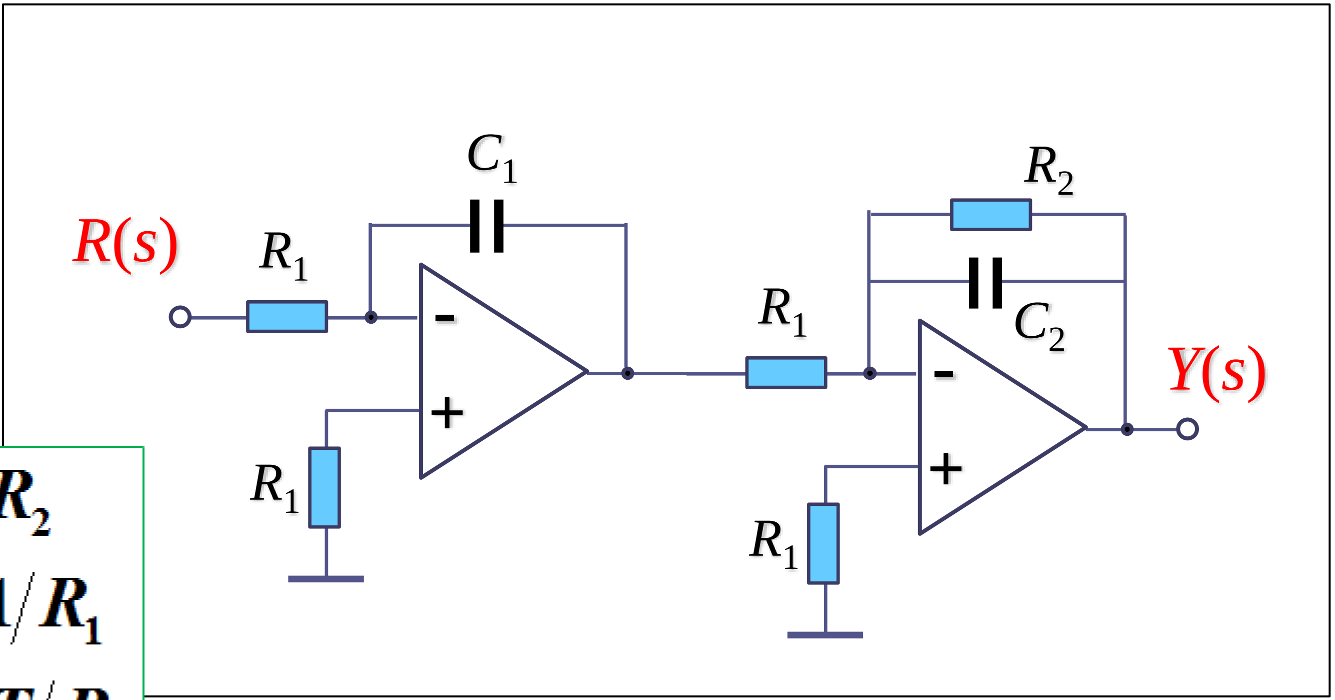
$R_2/R_1=1$

$R_2C_2=T$

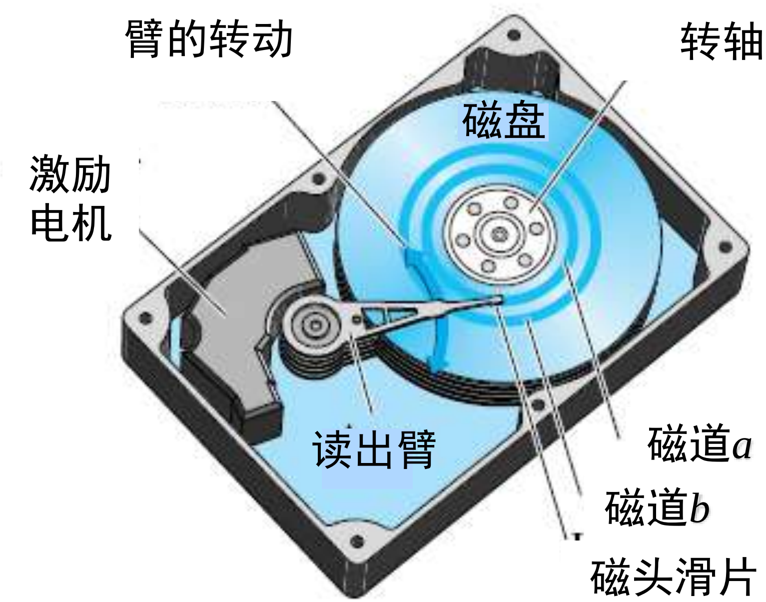
$$G_2(s)=\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}=-\frac{R_2}{R_1}\times\frac{1}{R_2C_2s+1}$$

系统的电路原理图

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s(Ts+1)}$$

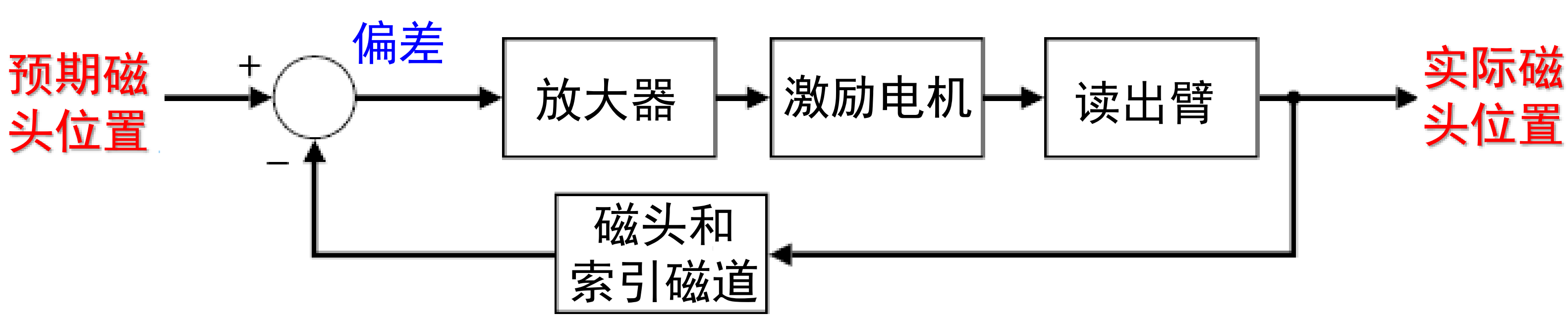


$$R_1=R_2$$
$$C_1=1/R_1$$
$$C_2=T/R_2$$

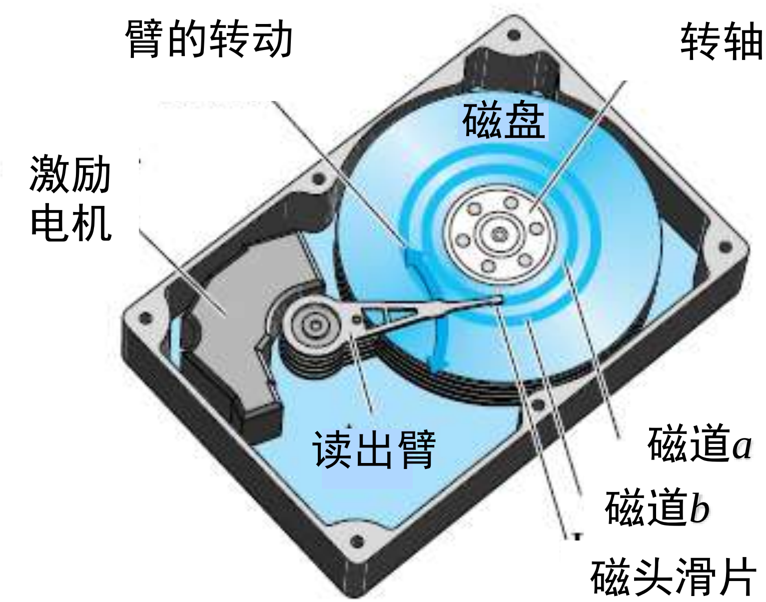


臂的转动
转轴
磁盘
激励
电机
读出臂
磁道a
磁道b
磁头滑片

- 磁盘驱动器读取系统



预期磁头位置
+
−
偏差
放大器
激励电机
读出臂
实际磁头位置
磁头和索引磁道

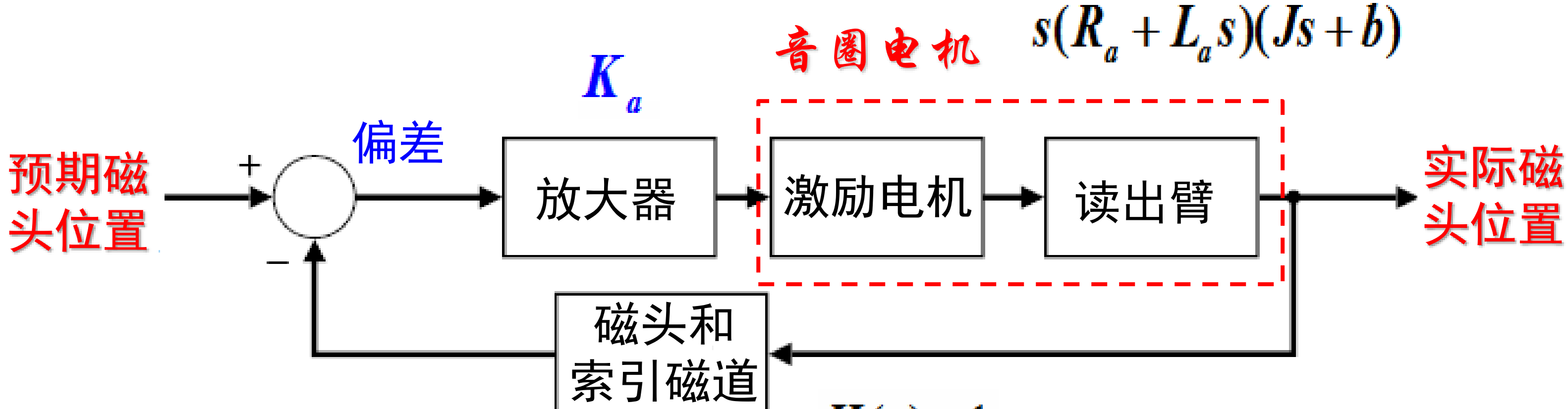


磁盘驱动器读取系统

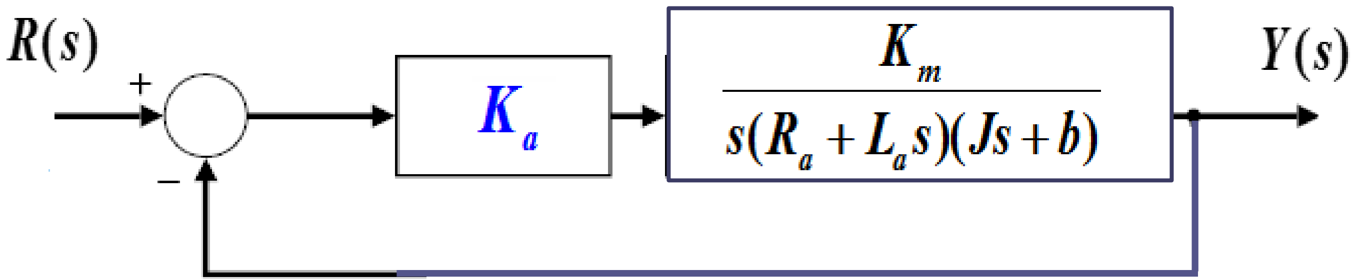
$$G(s)=\frac{K_m}{s[(R_a+L_a s)(Js+b)+K_b K_m]}$$

令 $K_b=0$

$$\frac{K_m}{s(R_a+L_a s)(Js+b)}$$



$$H(s)=1$$



磁盘驱动器读取系统的框图模型

$$\boxed{T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_aK_m}{s(R_a+Ls)(Js+b)+K_aK_m}}$$