自动控制原理

朱英华
Email: yhzhu@swjtu. edu.cn
西南交通大学电气工程学院

第二章　系统数学模型

数学模型

利用数学工具对系统行为进行的描述。

反映系统动态性能的数学表达式

线性控制系统的数学模型

用系统的输入输出信号或其变换式所表示的数学模型。

输入输出模型

状态空间模型

- 时域模型： 微分方程
- 复数域模型： 传递函数
- 频域模型： 频率特性
- 图示模型： 方框图模型
  信号流图模型

线性控制系统的数学模型

状态方程
输出方程

输入输出模型 ⟷ 状态空间模型

变换

输入输出描述法
(外部描述法)

状态空间描述法
(内部描述法)

建立数学模型的方法：

解析法

根据系统及元件各变量之间所遵循的物理或化学规律列出相应的数学关系式，建立模型。

实验法

对系统施加某种测试信号，记录输出响应，并用适当的数学模型进行逼近。这种方法也称为系统辨识。

第二章　系统数学模型

2.1 微分方程、传递函数和频率特性

2.2 方框图模型和信号流图模型

2.3 状态空间模型

2.4 输入/输出模型与状态空间模型之间的转换

2.5 系统数学模型举例

2.1 微分方程、传递函数和频率特性

- 微分方程
- 传递函数
- 频率特性

一、微分方程（时域模型）

1. 线性定常系统的微分方程

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t)$$

输出

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m r(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 r(t)$$

输入

$$(n \geq m)$$

常系数线性微分方程

2. 建立系统微分方程的一般步骤

① 明确输入量与输出量

② 列写各环节的微分方程

③ 消去中间变量，求出输出/输入关系

④ 将微分方程整理成标准形式

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m r(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 r(t)$$

$$(n \geq m)$$

标准形式

3. 线性定常系统的微分方程的求解

① 经典法

② 拉普拉斯变换法

控制分析常用的方法

③ 计算机求解法

拉普拉斯变换法求解微分方程

微分方程 ——→ 代数方程

时域(t) ——→ 复数域(s)

(1) 对微分方程进行拉普拉斯变换。

(2) 求出复数域中输出量的表达式。

(3) 对复数域中的输出量求拉普拉斯反变换，得出输出量的时域表达式，即微分方程的解。

拉普拉斯反变换

复数域(s) ——→ 时域(t)

拉普拉斯变换法求解微分方程

P47 例2.2（12版） 某微分方程的解

[书例 2.2] 某微分方程的解

考虑下述微分方程所描述的系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2r(t)$$

其中，初始条件为

$$y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=0$$

$$r(t)=1,\ t\geq 0$$

对微分方程进行拉普拉斯变换，得

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+4[sY(s)-y(0)]+3Y(s)=2R(s)$$

由于 $R(s)=1/s$ 并且 $y(0)=1, y'(0)=0$，可

$$Y(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+3}+\frac{2}{s(s^2+4s+3)}$$

其中 $q(s)=s^2+4s+3=(s+1)(s+3)=0$，而 $d(s)=s$. 则$Y(s)$的部分分式展开式为

$$Y(s)=\left[\frac{3/2}{s+1}+\frac{-1/2}{s+3}\right]+\left[\frac{-1}{s+1}+\frac{1/3}{s+3}\right]+\frac{2/3}{s}=Y_1(s)+Y_2(s)+Y_3(s)$$

因此，时间响应函数为

$$y(t)=\left[\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]+\left[-1e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\right]+\frac{2}{3}$$

系统的稳态响应为

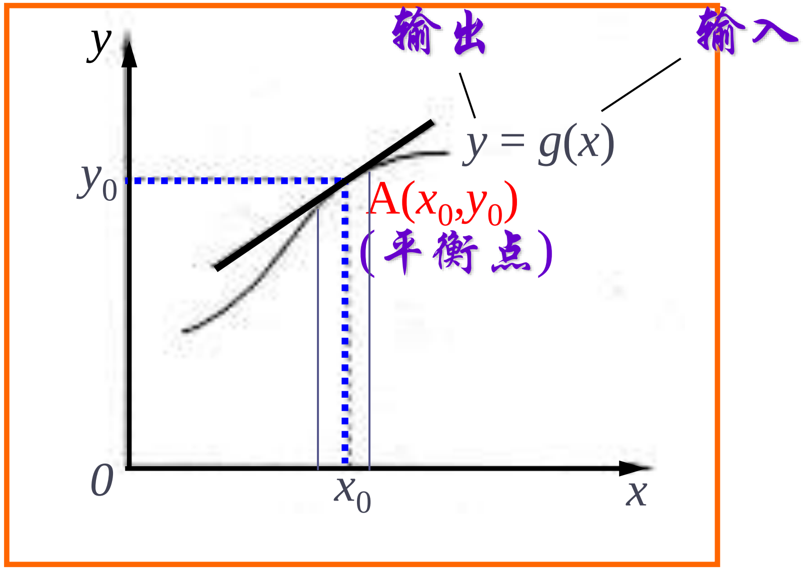
$$r(t)=1,\ t\geq 0 \qquad \lim_{t\to\infty} y(t)=\frac{2}{3}$$

根据系统的输出可分析系统的稳定性、动态特性和稳态特性。

物理系统的线性近似

适用于非本质的非线性系统

小信号分析理论



若函数 $y=g(x)$ 在平衡点 $A(x_0, y_0)$）处连续可微，则展开成泰勒级数为：

$$y=g(x)=g(x_0)+\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots$$

当$\Delta x=x-x_0$很小时，忽略二次以上各高次项，有：

$$y=g(x)=g(x_0)+\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)$$

斜率

$$g(x)-g(x_0)=\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)$$

m

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$\boxed{\Delta y=m\Delta x}$$

例2-1 摆振荡器模型

根据图所示的摆振荡器，作用在质点上的力矩为：

$$T = MgL\sin\theta$$

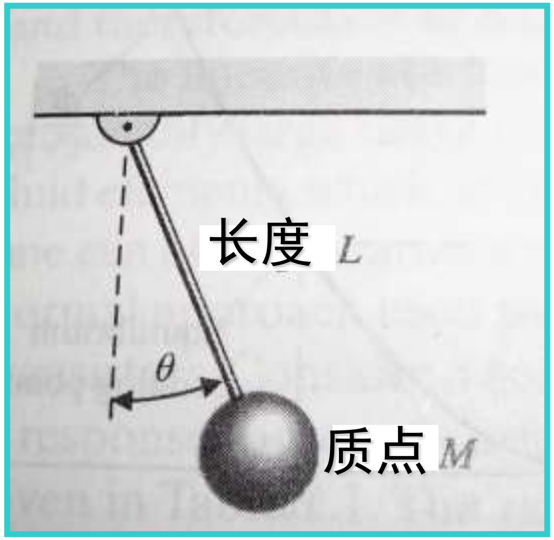
非线性

$$T - T_0 = MgL\left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0)$$

$$T_0 = MgL\sin\theta_0 = 0 \qquad \theta_0 = 0^\circ$$

$$T = MgL(\cos 0^\circ)\theta = MgL\,\theta$$

线性



P41(12版)， 图2.6

拉普拉斯变换

表2.3 P42 (12版)， P38 (11版) 重要的拉普拉斯变换对

$$\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s} \qquad \mathscr{L}[\delta(t)]=1$$

$$\mathscr{L}[e^{-at}]=\frac{1}{s+a} \qquad \mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathscr{L}[\frac{d^k f(t)}{dt^k}]=s^k F(s)-s^{k-1} f(0^-)-\cdots-f^{(k-1)}(0^-)$$

零初始条件 $$L\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]=s^k F(s)$$

拉普拉斯变换

重要的定理：

$$\mathscr{L}[kf(t)]=kF(s)$$

$$\mathscr{L}[f_1(t)\pm f_2(t)]=F_1(s)\pm F_2(s)$$

$$\mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{F(s)}{s}$$

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

初值定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

终值定理

二、传递函数（复数域模型）

1. 线性定常系统的传递函数

① 传递函数的定义

在零初始条件下，系统输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比。

对于一线性定常系统:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{dt} + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}r(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

$$(n \geq m)$$

两边取拉普拉斯变换（零初始条件）,得:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s)$$

传递函数:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$(n\geq m)$$

$$\boxed{Y(s)=G(s)R(s)}$$

传递函数:

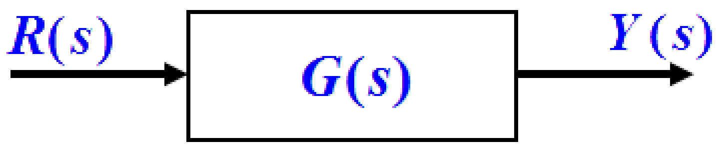
$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\quad (n\geq m)$$

$$R(s)\longrightarrow\boxed{G(s)}\longrightarrow Y(s)$$

- 是复数域的表达式。 $s=\sigma+j\omega$
- 反映系统的输入量与输出量之间的传递关系。
- 针对单输入、单输出的系统。

传递函数:　　n 阶系统

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\quad (n\geq m)$$



- 传递函数由系统的**结构和参数**决定。
- 传递函数和系统的输入、输出**无关**。
- 反映系统数学模型的**阶次**。

② 传递函数的常用表达式

- 有理分式函数表示形式

分子多项式

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{M(s)}{N(s)}$$

分母多项式

若G(s)为系统的传递函数或闭环传递函数，则

$$N(s)=\underbrace{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}_{\text{特征多项式}}=0 \quad \boxed{\text{特征方程}}$$

s_i 特征根

时间常数表示形式

$$G(s)=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{d_m s^m+d_{m-1}s^{m-1}+\cdots+d_1 s+1}{c_n s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+1}$$

$$=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{\prod_{j=1}^{n}(T_j s+1)}$$

系统增益

时间常数

给出开环传递函数，如何求开环增益？

将开环传递函数化为时间常数的形式，增益K即为开环增益。

零,极点表示形式

$$G(s)=\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{s^m+d'_{m-1}s^{m-1}+\cdots+d'_1s+d'_0}{s^n+c'_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c'_1s+c'_0}$$

$$=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

令分子为零,得: $s=-z_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$ 零点

令分母为零,得: $s=-p_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$ 极点

开环传递函数 开环零点、开环极点

闭环(系统)传递函数 闭环零点、闭环极点

零, 极点表示形式

$$G(s)=\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{s^m+d'_{m-1}s^{m-1}+\cdots+d'_1s+d'_0}{s^n+c'_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c'_1s+c'_0}$$

$$=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

在零极点分布图中，零点用○表示，极点用×表示。

令分子为零，得： $s=-z_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$ 零点

令分母为零，得： $s=-p_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$ 极点

系统传递函数的极点就是系统的特征根。

$$G(s)=\frac{3(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

零点 $-z_1=-3 \quad (m=1)$

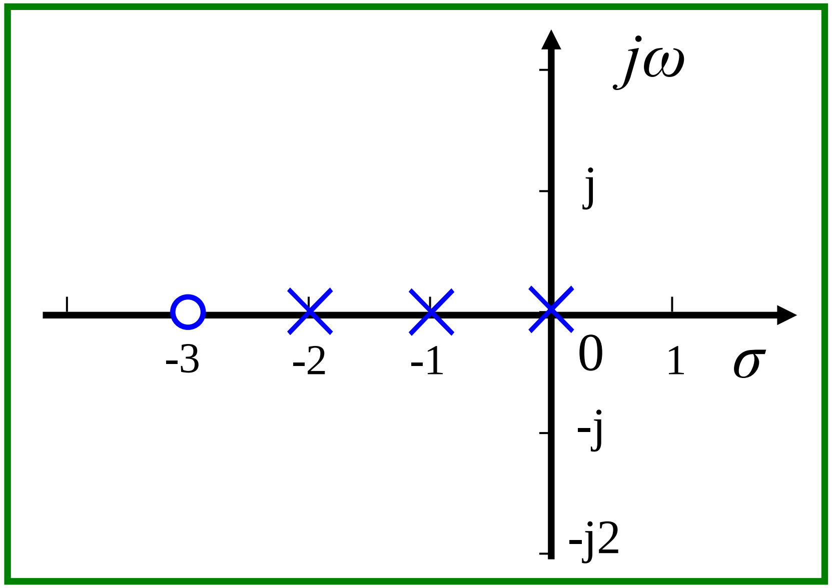
极点 $-p_1=0 \quad -p_2=-1 \quad -p_3=-2$

$(n=3)$

零极点分布图

虚轴

复平面
(s平面)



实轴