电气测量技术第二章作业

1. 用量程为 10A 的电流表，测量实际值为 8A 的电流，若读数值为 7.91A，求测量的绝对误差，示值相对误差，实际值相对误差和引用误差。若该表为模拟式电流表，试确定其准确度级别。（知识点在旧版教材 P10）

解： 绝对误差

$$\Delta x = x - x_0 = 7.91 - 8 = -0.09\ (\mathrm{A})$$

示值相对误差

$$\gamma_x = \frac{\Delta x}{x} \times 100\% = \frac{-0.09}{7.91} \times 100\% = -1.1\%$$

实际值相对误差

$$\gamma_{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% = \frac{-0.09}{8} \times 100\% = -1.1\%$$

引用误差（满度相对误差）

$$\gamma_m = \frac{\Delta x}{x_m} \times 100\% = \frac{-0.09}{10} \times 100\% = -0.9\%$$

由于

$$|\gamma_m| = 0.9\% < 1\%$$

则该模拟电流表的准确度级别为 1.0 级。

2. (P56 页 1.6)某校准证书说明，标称值为 10Ω的标准电阻器的电阻 R 在 20℃时完整的测量结果为 10.000 742Ω±29μΩ（p＝99%），求该电阻器电阻的标准不确定度，并说明是属于哪一类评定的不确定度。（知识点在旧版教材 P43）

解：

根据题意，标准电阻器电阻测量结果的扩展不确定度为 29 μΩ，则包含因子根据正态分布查表得：

$$k_{99} = 2.576$$

则该电阻器电阻的标准不确定度为：

$$u(R) = \frac{U(R)}{k_{99}} = \frac{29 \times 10^{-6}}{2.576} = 11.3 \times 10^{-6}\ \Omega$$

3. (P56 页 1.3)对某电压的测量数据如下：

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
电压/mV	10.32	10.28	10.21	10.41	10.25	10.52	10.31	10.32	10.04

试用格拉布斯检验法判别测量数据中是否存在异常值。（知识点在旧版教材 P16）

格拉布斯系数 $(p=99\%)$

n	4	5	6	7	8	9	10
$G_{99}(n)$	1.49	1.75	1.94	2.10	2.22	2.32	2.41

解：采用格拉布斯准则判断异常值

$$\boxed{\left|R_k-\overline{R}\right|>G_p(n)s(R)}$$

①. 算术平均值为：

$$\overline{U}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_i=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}U_i=10.3mV$$

②. 计算残差：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
电压 mV	10.32	10.28	10.21	10.41	10.25	10.52	10.31	10.32	10.04
残差 mV	0.02	-0.02	-0.09	0.11	-0.05	0.22	0.01	0.02	**-0.26**

③. 实验标准差：

$$s(U)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i^{\ 2}}=\sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(U_i-\overline{U})^2}=0.13mV$$

④. 判断第 9 个测量值是否为异常值：

设 p=99%　n=9　查表得　$G_p(n)=2.32$

$$G_p(n)s(U)=2.32\times0.13=0.3>0.26$$

说明无异常值存在。

4. (P56 页 1.5)对某电阻重复测量 8 次，测得数据分别为（无异常值）：802.40，802.50，802.38，802.48，802.42，802.46，802.45，802.43（Ω）试分别用贝塞尔法和极差法确定电阻测量结果的 A 类标准不确定度。（知识点在旧版教材 P27）

极差系数 C 及自由度 ν

n	4	5	6	7	8	9	10
C	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08
ν	2.7	3.6	4.5	5.3	6.0	6.8	7.5

解：首先判断有无异常值存在。（此步骤省略）

（1）贝塞尔法

①. 算术平均值：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}x_k=802.44$$

②. 实验标准差：

$$s(x_k)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{8}\upsilon_k{}^2}=0.04$$

③. A 类标准不确定度为：

$$u(\bar{x})=\frac{s(x_k)}{\sqrt{n}}=\frac{0.04}{\sqrt{8}}=0.0141$$

④. 自由度为：

$$\nu=n-1=8-1=7$$

（2）极差法

①. 极差

$$R=x_{\max}-x_{\min}=802.50-802.38=0.12$$

②. 实验标准差：

查表得 C=2.85 $\quad s(x)=\frac{R}{C}=\frac{0.12}{2.85}=0.042$

③. A 类标准不确定度为：

$$u(\bar{x})=\frac{s(x_k)}{\sqrt{n}}=\frac{0.042}{\sqrt{8}}=0.015$$

④. 自由度为（查表得）： $\nu=6$

5、(P56 页 1.8) 对某电路电流 I 进行间接测量，测得电路电阻及其两端电压分别为：R=4.26 ，u(R)=0.02 ；U=16.50V，u(U)=0.05V。已知相关系数 r(U，R)=1, 试求电流 I 的合成标准不确定度。

（知识点在旧版教材 P38）

解：

电流 I 的测量结果为：

$$I=\frac{U}{R}=\frac{16.50}{4.26}=3.87\ \text{A}$$

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_ju(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j)}$$

根据相关系数 $r(U,R)=1$，得：

$$u_c(I)=\left|c_1u(U)+c_2u(R)\right|=\left|\frac{1}{R}\times s(U)+(-\frac{U}{R^2})\times s(R)\right|=\left|\frac{0.05}{4.26}-\frac{16.50}{4.26^2}\times 0.02\right|=0.0064\ \text{A}$$

6、利用数字万用表 20V 量程档测量某电路的电压 U，测量数据(不含异常值)为：

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
电压/V	12.48	12.59	12.71	12.66	12.62	12.56	12.47	12.70	12.58	12.63

数字万用表20V量程档的最大允许误差为±（0.5%×读数+0.2%×量程）。已知通过该电路的电流I =22.5mA，其扩展不确定度U(I) = 0.5mA（包含因子为2），求该电路所耗功率及其合成标准不确定度。（I和U互不相关）

解：电压的最佳估计值为：

$$\overline{U}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_k=12.60\ \text{V}$$

该电路所耗功率为：

$$P=\overline{U}I=12.60\times 22.5=283.5\ \text{mW}=0.2835\ \text{W}$$

电压的标准不确定度分量有两个，一是由于重复性测量条件下随机因素的影响导致的标准不确定度分量 $u_1(\overline{U})$，由 A 类评定确定；二是由于数字万用表最大允许误差引入的标准不确定度分量 $u_2(\overline{U})$，由 B 类评定确定。

$$s(U_k)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\upsilon_k^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}[(-0.12)^2+(-0.01)^2+0.11^2+0.06^2+0.02^2+(-0.04)^2+(-0.13)^2+0.1^2+(-0.02)^2+0.03^2]}$$

$$=0.082\ \text{V}$$

则

$$u_1(\overline{U})=s(\overline{U})=\frac{s(U_k)}{\sqrt{n}}=\frac{0.082}{\sqrt{10}}=0.026\ \text{V}$$

A 类评定

$$\nu_1(\overline{U})=n-1=9$$

由于

$$A=0.5\%\times\text{读数}+0.2\%\times\text{量程}=0.5\%\times 12.60+0.2\%\times 20=0.103\ \text{V}$$

则

$$u_2(\bar{U}) = \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{0.103}{\sqrt{3}} = 0.059 \text{ V}$$

B 类评定

$$v_2(\bar{U}) \to \infty$$

电压的标准不确定度及其自由度为：

$$u(\bar{U}) = \sqrt{[u_1(\bar{U})]^2 + [u_2(\bar{U})]^2} = \sqrt{[0.026]^2 + [0.059]^2} = 0.064 \text{ V}$$

$$v(\bar{U}) = \frac{[u(\bar{U})]^4}{\frac{[u_1(\bar{U})]^4}{v_1(\bar{U})} + \frac{[u_2(\bar{U})]^4}{v_2(\bar{U})}} = \frac{[0.064]^4}{\frac{[0.027]^4}{9} + \frac{[0.059]^4}{\infty}} = 330.4$$

电流的标准不确定度及其自由度为：

$$u(I) = \frac{U(I)}{k} = \frac{0.5}{2} = 0.25 \text{ mA} = 0.00025 \text{ A}$$

$$v(I) \to \infty$$

由于 I 和 U 互不相关，则功率的合成标准不确定度为：

$$u_c(P) = \sqrt{[c_1 u(\bar{U})]^2 + [c_2 u(I)]^2} = \sqrt{[Iu(\bar{U})]^2 + [\bar{U}u(I)]^2}$$

$$= \sqrt{(0.0225 \times 0.064)^2 + (12.60 \times 0.00025]^2} = 0.0035 \text{ W}$$

7、(P57页1.12) 已知 $y = x_1^2 x_2 + 10 x_1 x_3$， x_1、x_2、x_3 的测量数据如下：

x_1	2.14	2.21	2.09	2.13	2.18	2.15	2.24	2.20	2.17	2.16
x_2	4.82	4.91	4.90	4.85	4.88	4.83	4.89	4.84	4.91	4.87
x_3	5.33	5.30	5.28	5.29	5.32	5.28	5.29	5.27	5.30	5.31

已知测量数据中无异常值，相关系数为 $r(x_1,x_2) = r(x_1,x_3) = r(x_2,x_3)$ =1，试写出 y 的完整测量结果。（包含因子 k=2）

解：（1）输入量 x_1、x_2、x_3 的最佳估计值分别为：

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{1k} = 2.167$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{2k} = 4.870$$

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{3k} = 5.297$$

（2）测量结果为：

$$y = \bar{x}_1^2\bar{x}_2 + 10\bar{x}_1\bar{x}_3 = 2.167^2 \times 4.87 + 10 \times 2.167 \times 5.297 = 137.655$$

（3） 由于输入量 x_1、x_2、x_3 的测量不确定度来源均为随机因素导致的数据不重复，且 n=10，因此可利用 A 类评定（贝塞尔法）确定出其标准不确定度。

实验标准差：

$$s(x_1) = \sqrt{\frac{1}{n\quad 1}\sum_{k=1}^{n} \upsilon_{1k}{}^2} = 0.043$$

$$s(x_2) = \sqrt{\frac{1}{n\quad 1}\sum_{k=1}^{n} \upsilon_{2k}{}^2} = 0.033$$

$$s(x_3) = \sqrt{\frac{1}{n\quad 1}\sum_{k=1}^{n} \upsilon_{3k}{}^2} = 0.019$$

标准不确定度及自由度：

$$u(x_1) = s(\bar{x}_1) = \frac{s(x_1)}{\sqrt{10}} = 0.014, \quad \nu_1 = 9$$

$$u(x_2) = s(\bar{x}_2) = \frac{s(x_2)}{\sqrt{10}} = 0.010, \quad \nu_2 = 9$$

$$u(x_3) = s(\bar{x}_3) = \frac{s(x_3)}{\sqrt{10}} = 0.0060, \quad \nu_3 = 9$$

（4）输入量 x_1、x_2、x_3 标准不确定度的灵敏系数分别为：

$$c_1=\frac{\partial y}{\partial x_1}=2x_1x_2+10x_3=74.08$$

$$c_2=\frac{\partial y}{\partial x_2}=x_1^2=4.70$$

$$c_3=\frac{\partial y}{\partial x_3}=10x_1=21.67$$

（5）由于输入量间的相关系数为 1，即各输入量之间完全正相关，因此被测量 y 的合成标准不确定度为：

$$u_c(y)=\left|c_1u(x_1)+c_2u(x_2)+c_3u(x_3)\right|$$

知识点在
旧版教材 P38 页

$$=74.08\times0.014+4.70\times0.010+21.67\times0.0060=1.2$$

（6）扩展不确定度为：

$$U(y)=2\times u_c(y)=2.4$$

（7）完整的测量结果为：

$$y=137.7\pm2.4,\qquad k=2$$

8、(P57 页 1.13) 请判断下述完整测量结果的表达是否正确，若不正确，请修改在右侧的括号内。

① 3.427±0.2　　（　　　　）

② 746±2.42　　（　　　　）

③ 6 523.587±0.35　　（　　　　）

④ 821.53±4.6×10^{-2}　　（　　　　）

知识点在
旧版教材 P47 页

注：④中的 4.6×10^{-2} 为相对扩展不确定度。

解：

① 3.427±0.2　不正确　（ 3.4±0.2 ）

② 746±2.42　不正确　（ 746.0±2.4 ）

③ 6 523.587±0.35　不正确　（ 6 523.59±0.35 ）

④ 821.53±4.6×10^{-2}　不正确　（ 821.53（1±4.6×10^{-2}）或 822±38 ）

(P56 页 1.7)

解：

①. 数学模型：所耗功率为 $\boldsymbol{P=U*I=12.6V*22.5*10^{-3}A=283.5mW}$

②. U 的灵敏系数及标准不确定度为：

$$C_U=\frac{\partial P}{\partial U}=I=22.5*10^{-3} \qquad u(U)=0.3V$$

I 的灵敏系数及标准不确定度为：

$$C_I=\frac{\partial P}{\partial I}=U=12.6 \qquad u(I)=0.5*10^{-3}A$$

③. I 和 U 不相关，则 P 的合成标准不确定度为：

$$\boldsymbol{u_c(P)=\sqrt{[c_U u(U)]^2+[c_I u(I)]^2}=\sqrt{(22.5*10^{-3}*0.3)^2+(12.6*0.5*10^{-3})^2}=9.3mW}$$

(P57 页 1.11)

解：

①. 测量的数学模型 $y=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_2x_3^3}}=x_1x_2^{-\frac{1}{2}}x_3^{-\frac{3}{2}}$

幂指数分别为 $p_1=1 \qquad p_2=-\dfrac{1}{2} \qquad p_3=-\dfrac{3}{2}$

②. 由于各输入量的估计值互不相关，则相对合成标准不确定度为：

$$u_{\text{crel}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}[p_iu_{rel}(x_i)]^2}=\sqrt{(1\times2\%)^2+(-\frac{1}{2}\times1.5\%)^2+(-\frac{3}{2}\times1\%)^2}=2.61\%$$

③. 各输入量的自由度为:

$\nu(x_1)=8 \qquad \nu(x_2)=6 \qquad \nu(x_3)=10$

有效自由度为:

$$\nu_{\text{eff}}=\frac{u_{\text{crel}}^{\ 4}(y)}{\sum_{i=1}^{3}\frac{[p_iu_{\text{rel}}(x_i)]^4}{\nu_i}}=\frac{(2.61\%)^4}{\frac{(1\times2\%)^4}{8}+\frac{(-\frac{1}{2}\times1.5\%)^4}{6}+\frac{(-\frac{3}{2}\times1\%)^4}{10}}=18.13\approx18$$

④. 由于输入量的个数较少，考虑被测量之值服从 t 分布，查 t 分布临界值表得：

$$k_{95}=t_{95}(18)=2.10$$

⑤. 测量结果 y 的相对扩展不确定度为：

$$\boldsymbol{U_{95\text{rel}}=k_{95}u_{\text{crel}}(y)=2.10\times2.61\%=5.5\%}$$