作业解答——第5章

1、 已知系统开环传函，绘制对数频率特性图(Bode图)，并从图上读出幅穿频率 、相位裕量 、相位穿越频率 和增益裕量 。

（1） $G_1(s)=\dfrac{10}{s(s+0.1)}$

（2） $G_2(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$

解：(1)　$$G_1(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega+0.1)}=\frac{100}{j\omega\left(\frac{j\omega}{0.1}+1\right)}$$

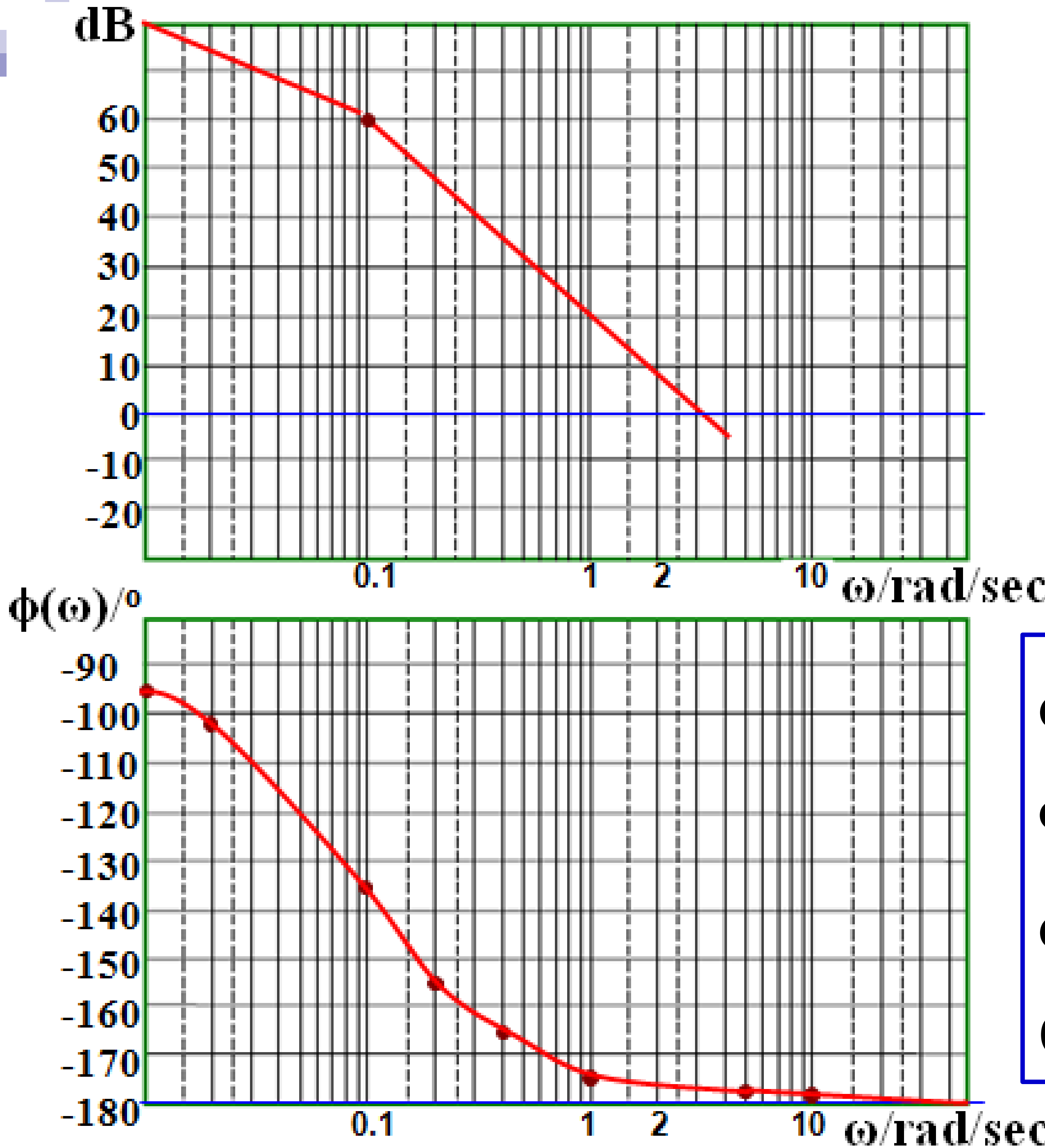
①幅频

转折频率0.1rad/sec左侧的折线斜率为-20dB/dec，其右侧的折线斜率为-40dB/dec，0.1rad/sec处的幅值为60dB。

②相频

$$\phi_1(\omega)=-90^o-tg^{-1}10\omega$$

ω	0.01	0.02	0.1	0.2	0.4	1	5
$\varphi(\omega)$	-96°	-102°	-135°	-155°	-166°	-175°	-179°



ω_c =3.2rad/s，

Φ_{pm}=2°，

ω_g = ∞ rad/s，

G_M = ∞dB

(2) $$G_2(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}=\frac{5}{j\omega(j\omega+1)\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$

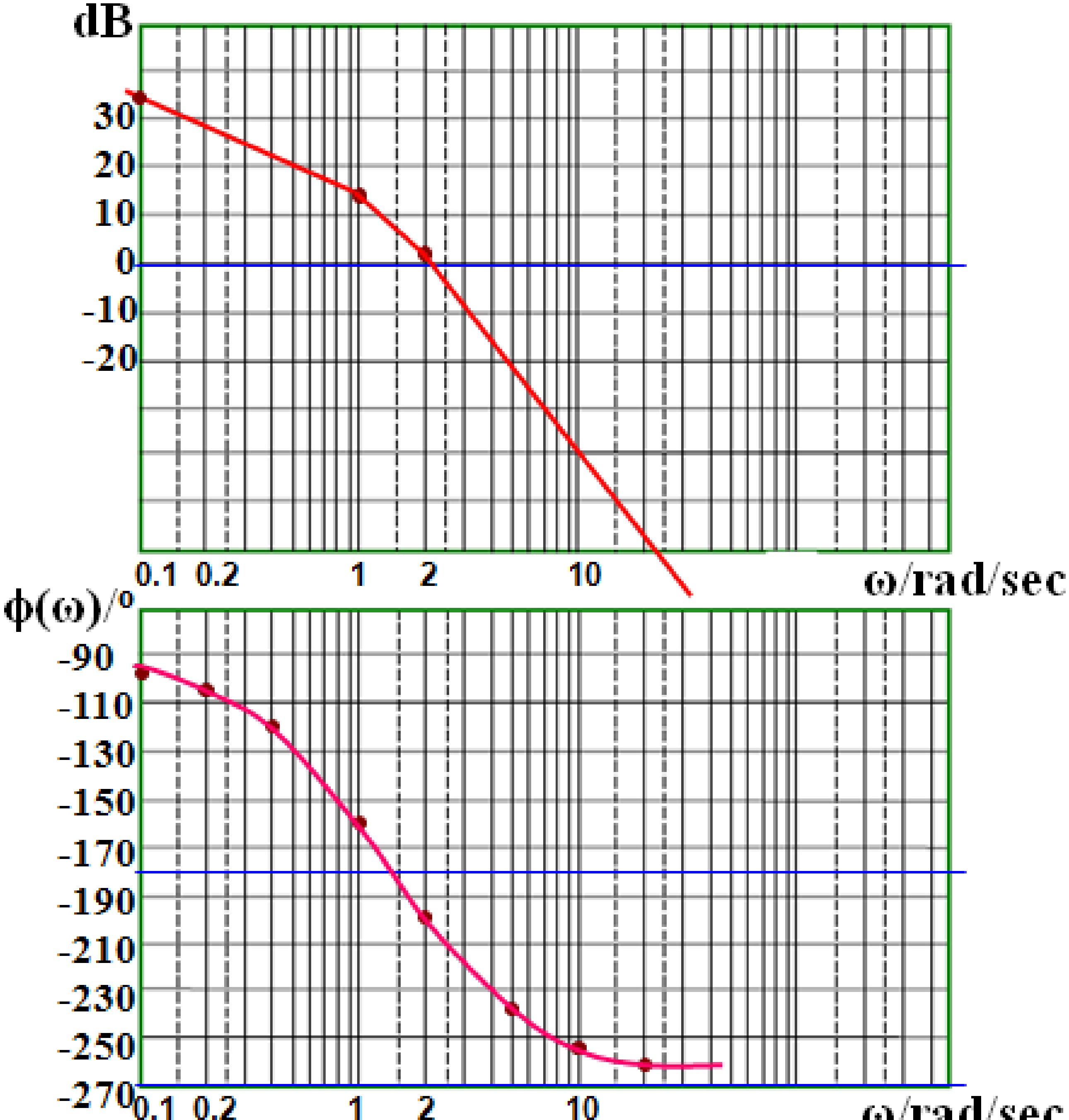
①幅频

转折频率1rad/sec左侧的折线斜率为-20dB/dec，转折频率1rad/sec~2rad/sec之间的折线斜率为-40dB/dec，转折频率2rad/sec右侧的折线斜率为-60dB/dec，1rad/sec处的幅值为14dB。

②相频

$$\phi_2(\omega)=-90^o-tg^{-1}\omega-tg^{-1}\frac{\omega}{2}$$

ω	0.1	0.2	0.4	1	2	5	10	20
$\varphi(\omega)$	-99°	-107°	-123°	-162°	-198°	-237°	-253°	-261°



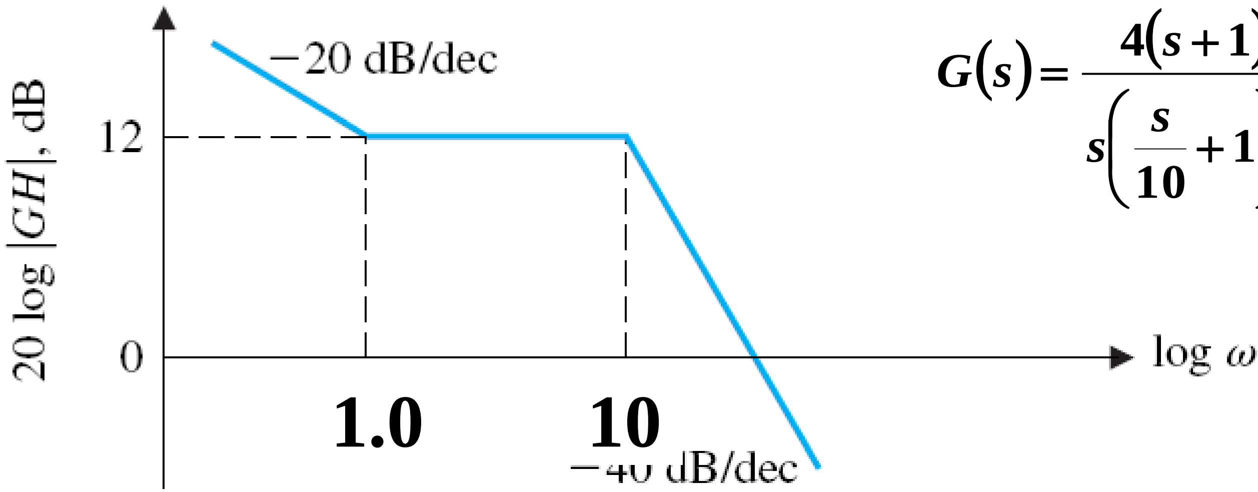
ω_c =2.1rad/s，

Φ_{pm}= -22°，

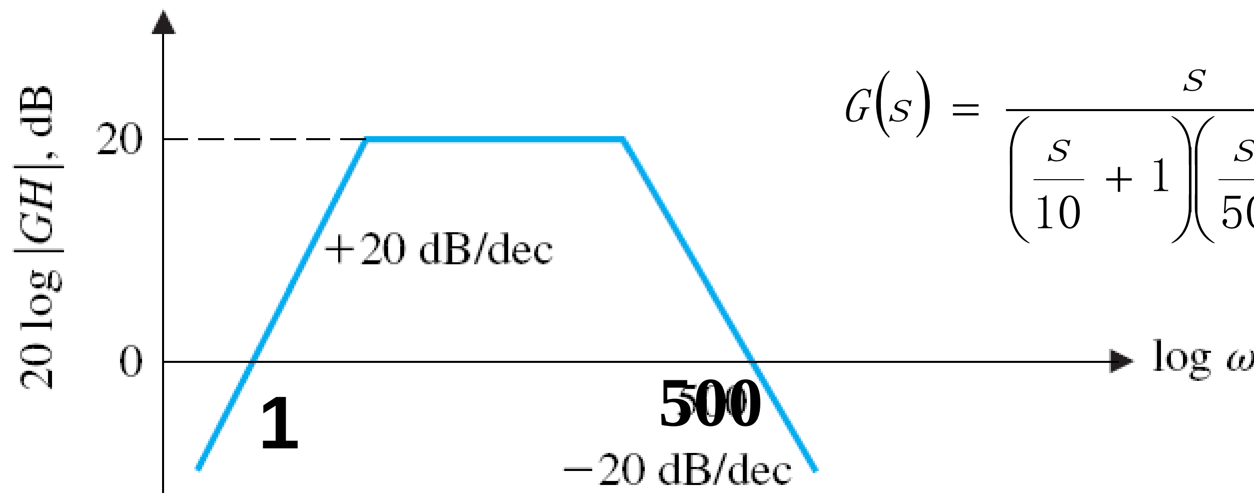
ω_g=1.4 rad/s，

G_M= -8dB

2. 确定传函。



$$G(s)=\frac{4(s+1)}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)^{2}}$$



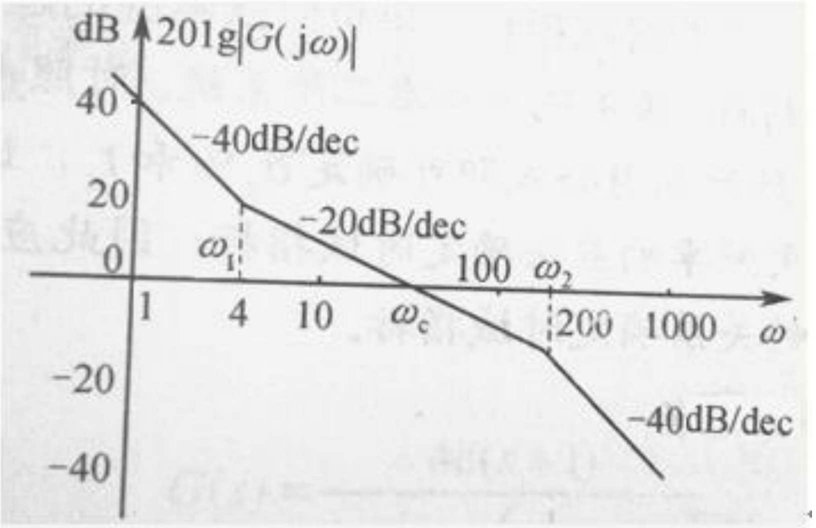
$$G(s)=\frac{s}{\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)}$$

(b)

3、已知单位负反馈最小相位系统Bode图的对数幅频特性曲线如下图所示。

（1）试计算系统在 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 作用下的稳态误差。

（2）若 $\omega_c=25rad/s$，试确定相角裕度。



解：(1) 由图可得，该系统的开环频率特性为：

$$G(j\omega)H(j\omega)=G(j\omega)=\frac{100(1+j\omega/4)}{(j\omega)^2(1+j\omega/200)}$$

则系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{100(s/4+1)}{s^2(s/200+1)}$$

系统特征方程为：

$$1+G(s)=1+\frac{100(s/4+1)}{s^2(s/200+1)}=0$$

$$s^3+200s^2+5000s+20000=0$$

根据劳斯判据可知系统是稳定的，则系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\frac{1}{K_a}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2\times\dfrac{100(s/4+1)}{s^2(s/200+1)}}=0.01$$

或： $R(s)=\dfrac{1}{s^3}$ ， $e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s\times R(s)}{1+G(s)}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s\times 1/s^3}{1+\dfrac{100(s/4+1)}{s^2(s/200+1)}}=0.01$

(2) 若 $\omega_c=25rad/s$ ，则系统的相角裕度为：

$$\varphi_{\mathrm{pm}}=180^\circ+\varphi(\omega_{\mathrm{c}})=180^\circ+\tan^{-1}\frac{\omega_c}{4}-180^\circ-\tan^{-1}\frac{\omega_c}{200}=73.8^\circ$$

4、已知系统的开环传递函数如下所示，利用奈奎斯特稳定判据判定系统的闭环稳定性。

(1) $$GH(s)=\frac{30}{(2s+1)(5s+1)(10s+1)}$$

(2) $$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

(3) $$GH(s)=\frac{K}{s^2(\tau s+1)}$$

(4) $$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s-1)}$$

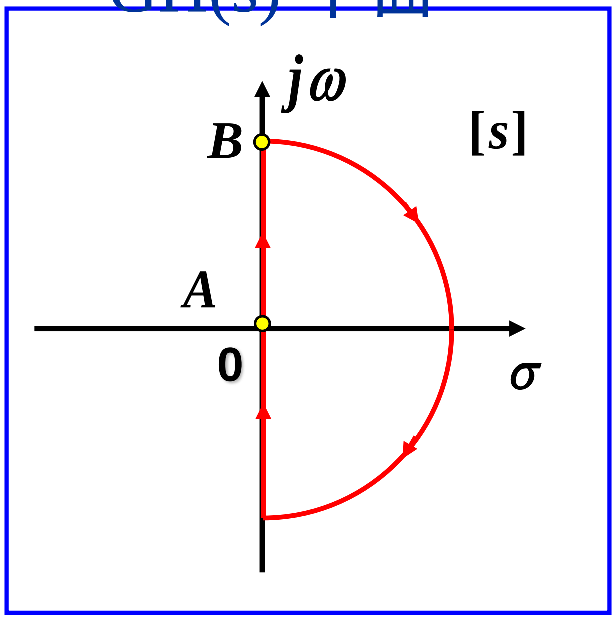
(5) $$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$$

（6） $$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{s^2(s+2)}$$

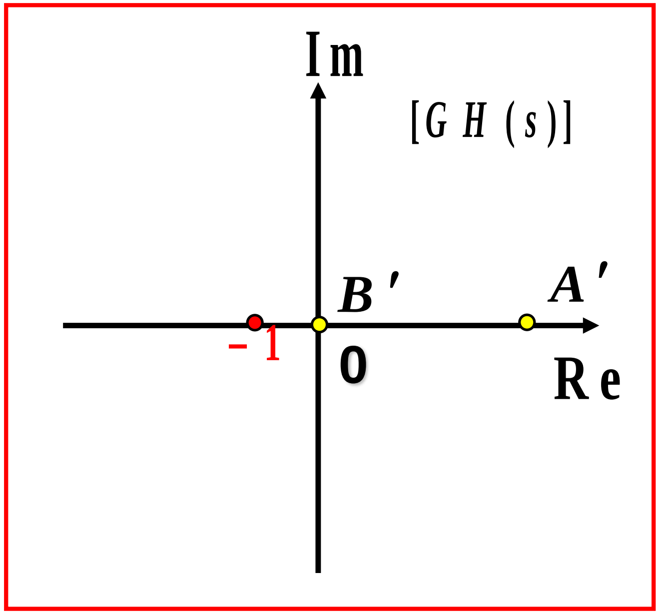
（7） $$G(s)H(s)=\frac{K(s-1)}{(s+1)^2}$$

(1) $GH(s)=\dfrac{30}{(2s+1)(5s+1)(10s+1)}$

解： 绘制奈奎斯特围线，将奈奎斯特围线映射到 GH(s) 平面



映射



$A:\quad s=j0 \quad\Rightarrow\quad A':\ GH(s)\big|_{s=j0}=\dfrac{30}{(2\times j0+1)(5\times j0+1)(10\times j0+1)}=30\angle 0^{\circ}$

$B:\quad s=j\infty \quad\Rightarrow\quad B':$

$$GH(s)\big|_{s=j\infty}=\frac{30}{(2\times j\infty+1)(5\times j\infty+1)(10\times j\infty+1)}\approx 0\angle -270^{\circ}$$

$$AB:\ s=j\omega\ (0^+<\omega<+\infty)$$

$$A'B':GH(s)\big|_{s=j\omega}=GH(j\omega)=\frac{30}{(2\times j\omega+1)(5\times j\omega+1)(10\times j\omega+1)}$$

$$=\frac{30[(-80\omega^2+1)+j\omega(100\omega^2-17)]}{(4\omega^2+1)(25\omega^2+1)(100\omega^2+1)}$$

取 $\omega=1/\sqrt{80}$ 则 $\mathrm{Re}[GH(s)\big|_{s=j\omega}]=0\quad \mathrm{Im}[GH(s)\big|_{s=j\omega}]<0$

映射曲线$A'B'$与虚轴的交点在负半虚轴上。

令 $\mathrm{Im}[GH(s)\big|_{s=j\omega}]=0$

得：$\omega(100\omega^2-17)=0 \Rightarrow \omega_1=0\quad \omega_2=\sqrt{0.17}\ \mathrm{rad/sec}$

将 $\omega_1 = 0$ 和 $\omega_2 = \sqrt{0.17}\ \mathrm{rad/sec}$ 分别代入映射曲线

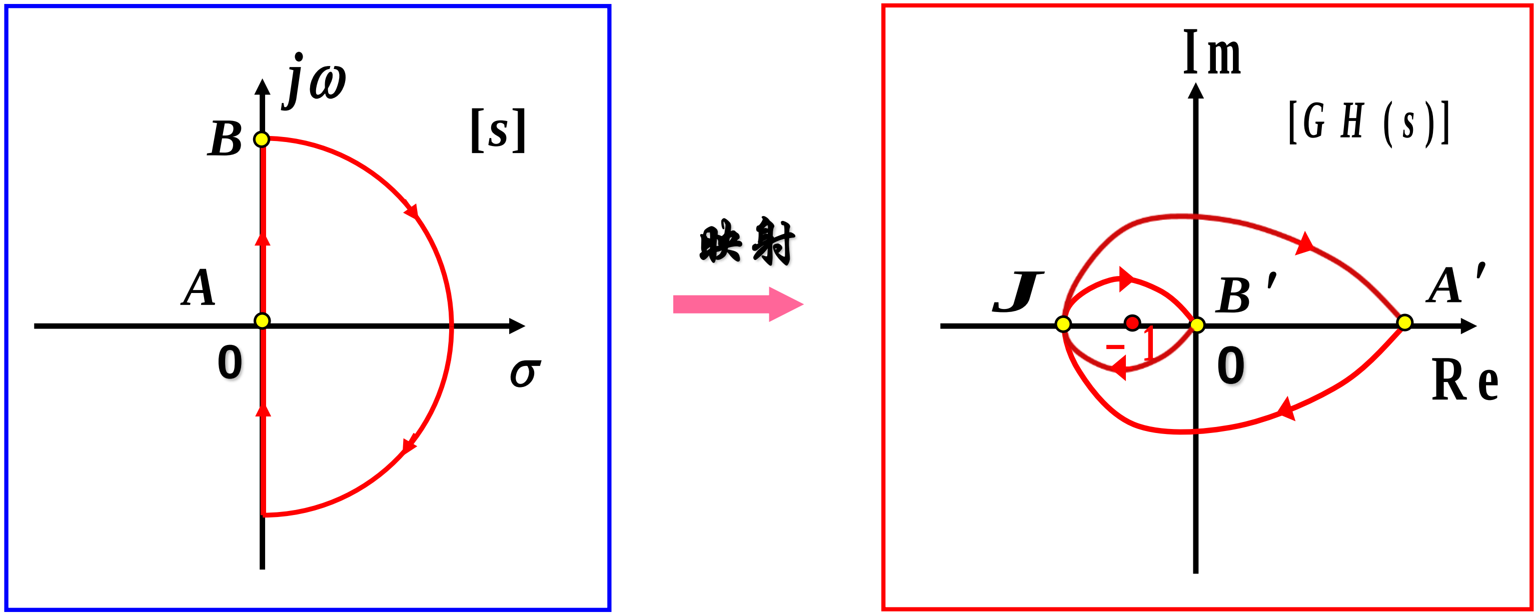
$$A'B':\quad GH(j\omega) = \frac{30[(-80\omega^2+1)+j\omega(100\omega^2-17)]}{(4\omega^2+1)(25\omega^2+1)(100\omega^2+1)}$$

得交点为：

$(30, j0)$ A'

$(-2.38, j0)$ J

画出映射曲线 $A'B'$，并根据对称性得出全部的映射曲线。



根据映射曲线可知其顺时针包围（-1，j0）点两圈，因此可得： $N=2$

根据系统的开环传递函数

$$GH(s)=\frac{30}{(2s+1)(5s+1)(10s+1)}$$

可知在右半s平面的开环极点数为0，即$P=0$。

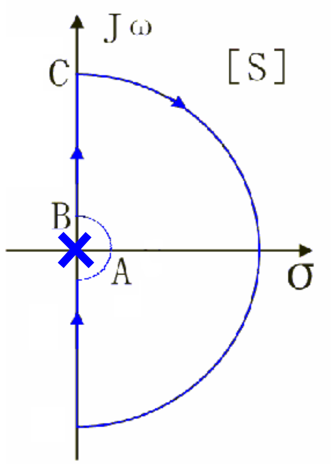
根据奈奎斯特稳定判据：

$$Z=N+P=2+0=2\neq 0$$

可知系统在右半s平面的闭环极点数为2，因此可判定该系统闭环不稳定。

（2） $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$

解：

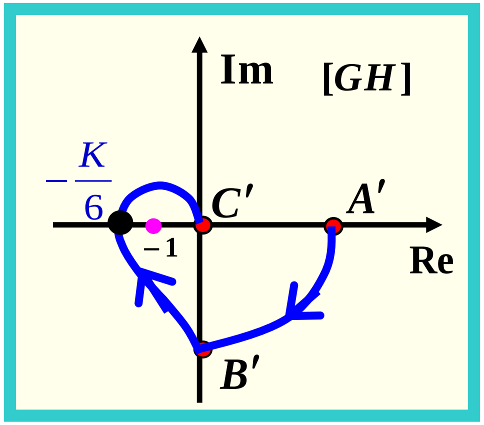


$A: s=\varepsilon e^{j0^\circ}$ ➡ $A': G(s)H(s)=\infty e^{j0^\circ}$

$B: s=\varepsilon e^{j90^\circ}$ ➡ $B': G(s)H(s)=\infty e^{-j90^\circ}$

$C: s=\infty e^{j90^\circ}$ ➡ $C': G(s)H(s)=0e^{-j270^\circ}$

令 $I_m[G(j\omega)H(j\omega)]=0$

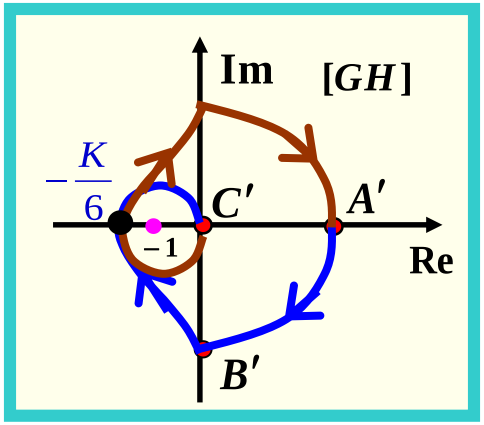


或 $\varphi(m)=-90^\circ-\arctan\omega-\arctan\dfrac{\omega}{2}=-180^\circ$

$$\omega=\sqrt{2}$$

$$R_e[G(j\omega)H(j\omega)]\big|_{\omega=\sqrt{2}}=-\frac{K}{6}$$

由对称性作出完整的Nyquist曲线。



当$K<6$时, $G(s)H(s)$轨迹不包围-1+j0点,

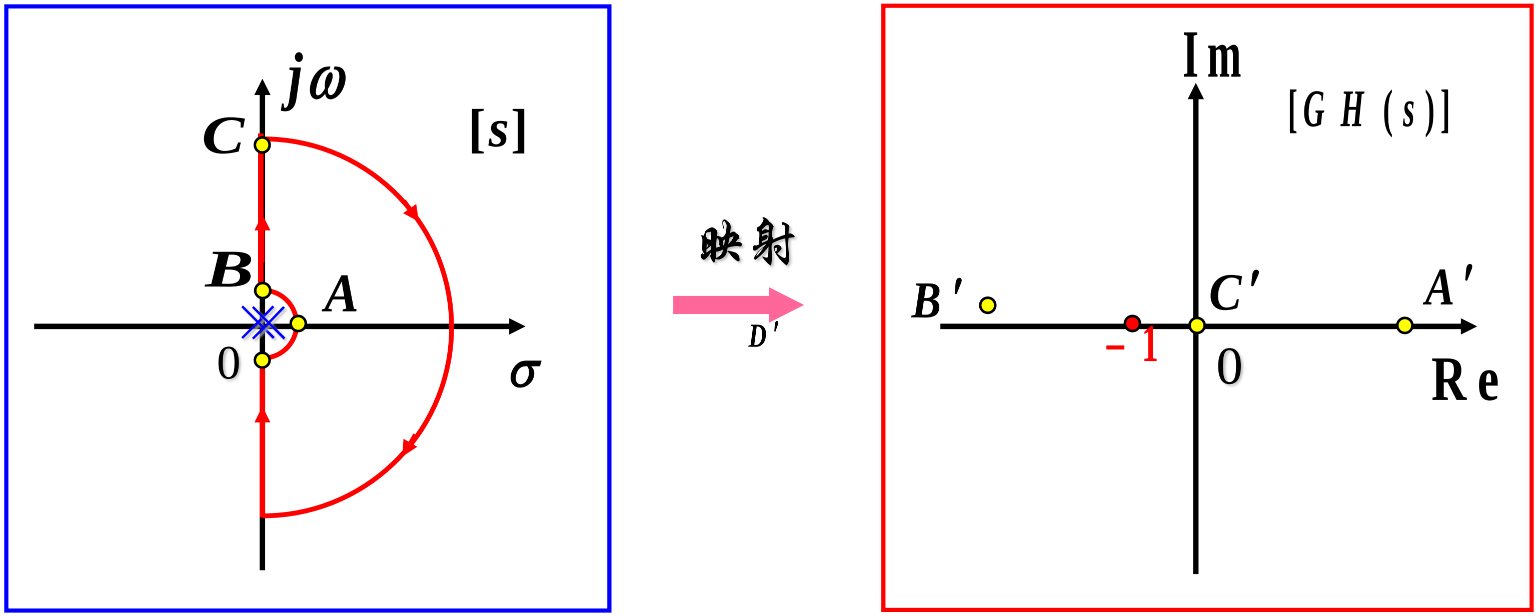
$N=0$,
$P=0$,

$\Rightarrow Z=N+P=0$，没有闭环极点在右半s平面

$\Rightarrow$ 闭环系统稳定。

(3) 解：

$$GH(s)=\frac{K}{s^2(\tau s+1)}\quad (\tau>0)$$

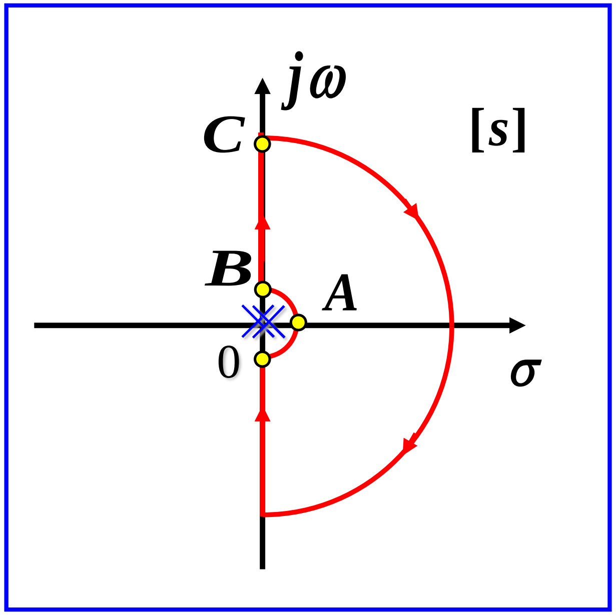


$A:\ s=\varepsilon\angle 0^\circ=\varepsilon \Rightarrow A':\ G(s)H(s)\big|_{s=\varepsilon}=\dfrac{K}{\varepsilon^2(\tau\varepsilon+1)}=\infty\angle 0^\circ$

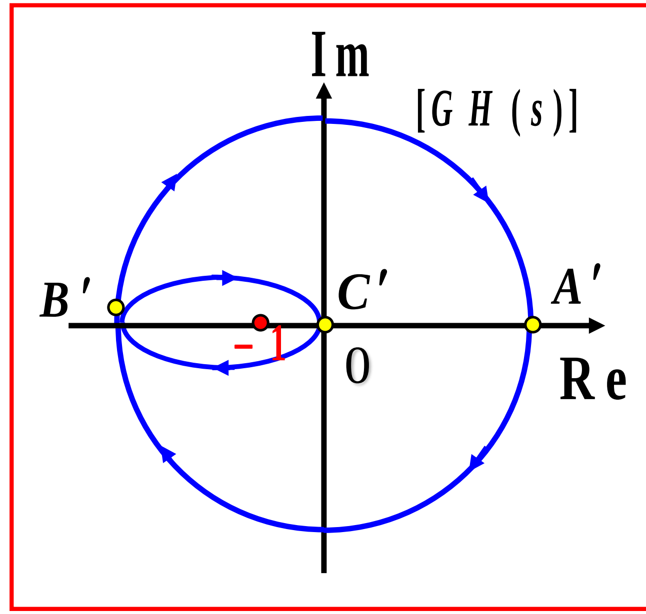
$B:\ s=j\varepsilon \Rightarrow B':\ G(s)H(s)\big|_{s=j\varepsilon}=\dfrac{K}{(j\varepsilon)^2(\tau\times j\varepsilon+1)}\approx\infty\angle-180^\circ$

$C:\ s=j\infty \Rightarrow C':\ G(s)H(s)\big|_{s=j\infty}=\dfrac{K}{(j\infty)^2(\tau\times j\infty+1)}\approx 0\angle-270^\circ$

$$GH(s)=\frac{K}{s^2(\tau s+1)}\quad (\tau>0)$$



映射



$AB:\quad s=\varepsilon\angle\theta\ (0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ)$

映射曲线$A'B'$为半径为无穷大的半圆。

$$A'B':\quad GH(s)\Big|_{s=\varepsilon\angle\theta}=\frac{K}{(\varepsilon\angle\theta)^2(\tau\times\varepsilon\angle\theta+1)}\approx\infty\angle(-2\theta)$$

$$B'C':\quad GH(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^2(j\omega\tau+1)}=\frac{K\ (j\omega\tau-1)}{\omega^2[(\omega\tau)^2+1]}\qquad(\omega\geq\varepsilon)$$

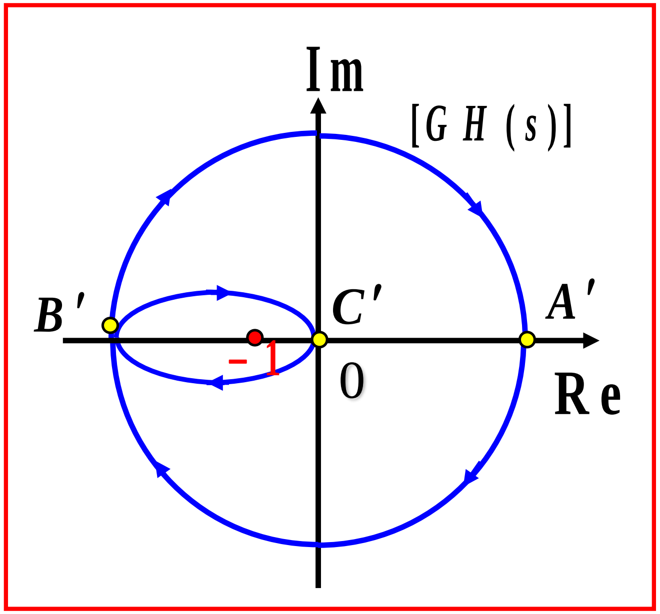
该部分映射曲线在第二象限。

根据对称性得出全部的映射曲线如图所示。

根据映射曲线可知其顺时针包围（-1，j0）点两圈，因此可得： N=2

根据系统的开环传递函数

$$GH(s)=\frac{K}{s^2(\tau s+1)}\quad(\tau>0)$$



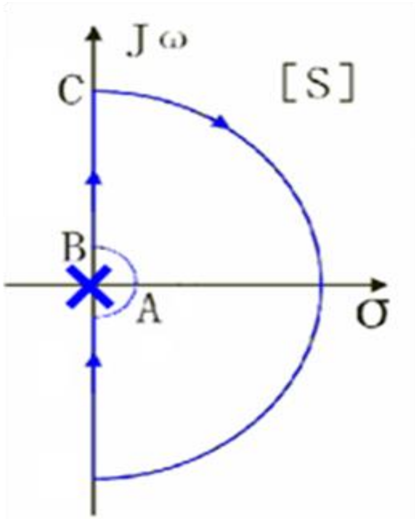
可知在右半s平面的开环极点数为0，即P =0。

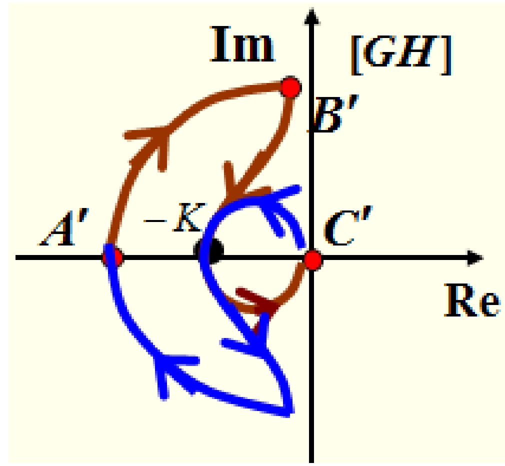
根据奈奎斯特稳定判据：

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2 \neq 0$$

可知系统在右半s平面的闭环极点数为2，因此可判定该系统闭环不稳定。

(4) 解: $$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s-1)}$$





$$A: s=\varepsilon e^{j0^\circ}$$
$$A': G(s)H(s)=-\frac{2K}{s}=\infty e^{j180^\circ}$$

$$B: s=\varepsilon e^{j90^\circ}$$
$$B': G(s)H(s)=-\frac{2K}{s}=\infty e^{j90^\circ}$$

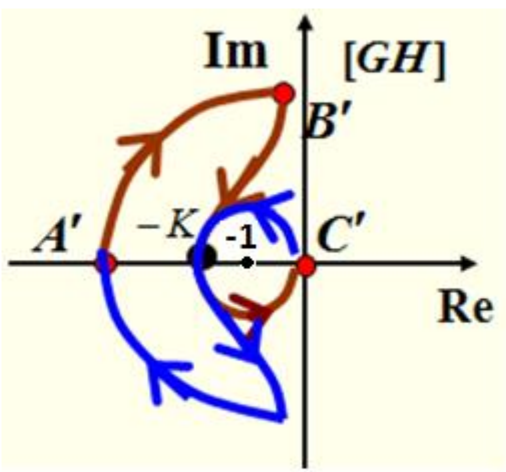
$$C: s=\infty e^{j90^\circ}$$
$$C': G(s)H(s)=\frac{K}{s}=0e^{-j90^\circ}$$

令 $\mathrm{Im}[GH(s)|_{s=j\omega}]=0$

解得 $\omega=\sqrt{2}\mathrm{rad/sec}$

$$R_e\left[G(j\omega)H(j\omega)\right]_{\omega=\sqrt{2}}=-K$$

根据对称性得出全部的映射曲线如图所示。



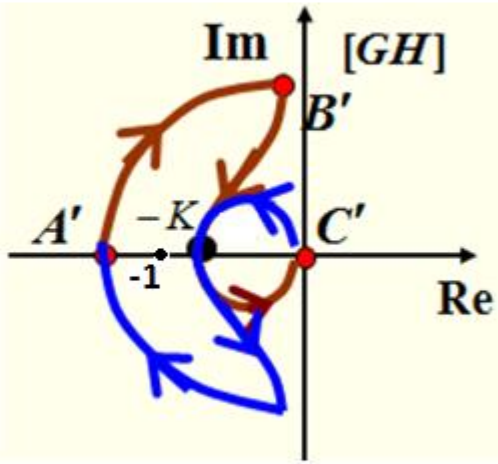
当K>1时，映射曲线逆时针包围（-1，j0）点一圈，N= -1

由系统的开环传递函数可知在右半s平面的开环极点数为1，即P =1。

根据奈奎斯特稳定判据得：

$$Z=N+P=-1+1=0$$

可知系统在右半s平面的闭环极点数为0，因此可判定该系统闭环稳定。



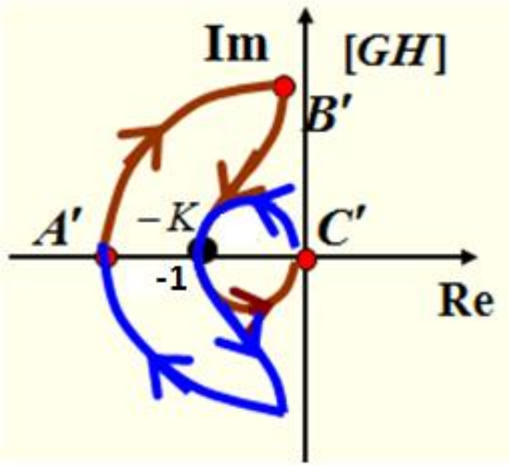
当K<1时，映射曲线**顺时针**包围（-1，j0）点一圈，N= 1

由系统的开环传递函数可知在右半s平面的开环极点数为1，即P =1。

根据奈奎斯特稳定判据得：

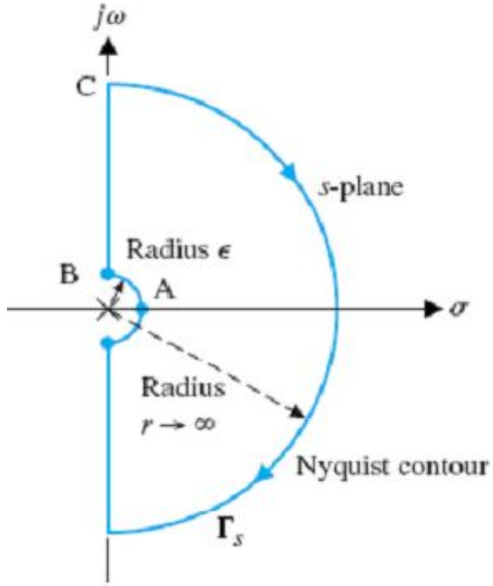
$$Z = N + P = 1 + 1 = 2$$

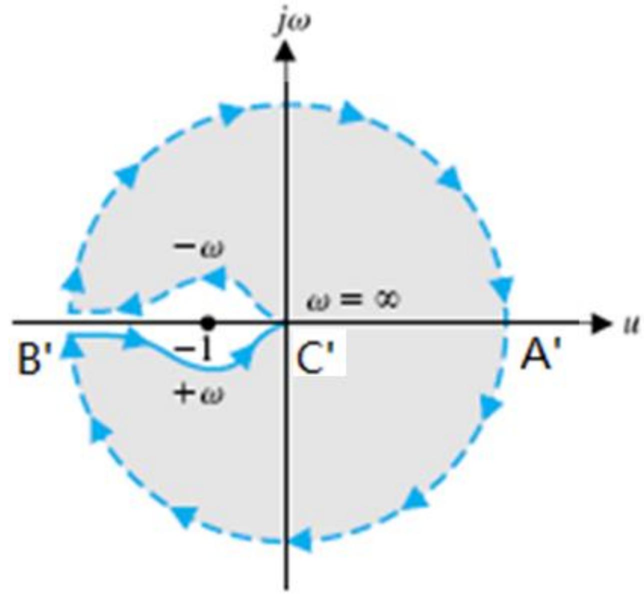
可知系统在右半s平面的闭环极点数为2，因此可判定该系统闭环不稳定。



当K=1时，映射曲线经过（-1，j0）点，该系统临界稳定。

(5) 解： $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$

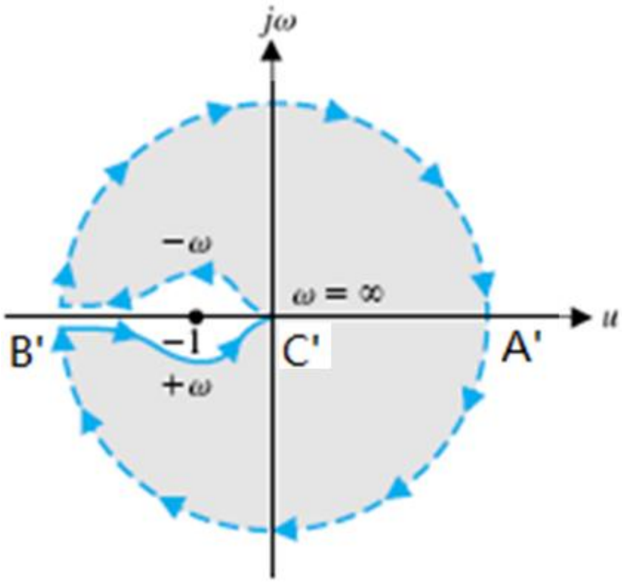




$$A:\varepsilon e^{j0} \quad \Rightarrow \quad A^{'}:\infty\angle 0^{o}$$

$$B:\varepsilon e^{j90} \quad \Rightarrow \quad B^{'}:\infty\angle -(180\text{-}\delta)^{o}\text{（3相限, 其中}\delta>0\text{）}$$

$$C:\infty e^{j90} \quad \Rightarrow \quad C^{'}:0\angle -180^{o}$$



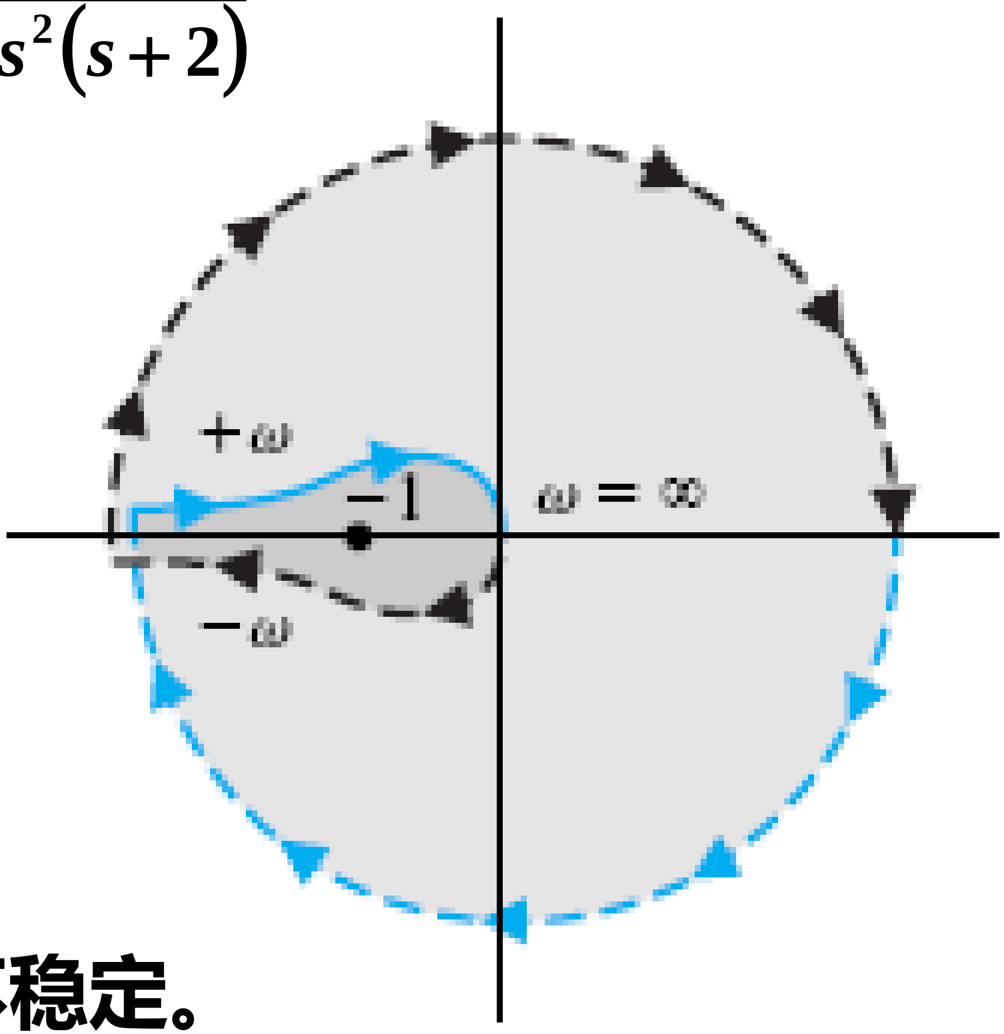
考虑到系统Nyquist曲线包围-1+j0点圈数N=0，由系统的开环传递函数可知系统在右半平面开环极点个数P=0，

根据奈奎斯特稳定判据：

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0$$

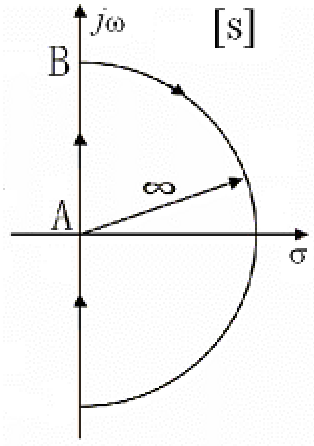
可知系统在右半s平面的闭环极点数为0，因此可判定该系统闭环稳定。

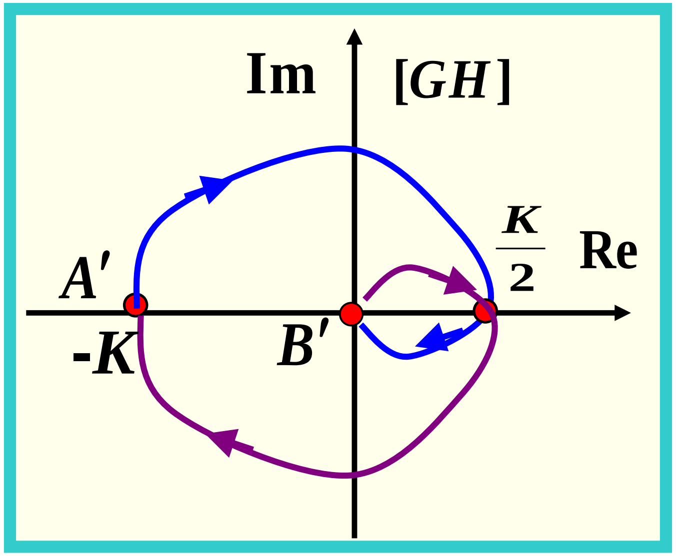
（6） $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s^2(s+2)}$



闭环系统不稳定。

（7）　$G(s)H(s)=\dfrac{K(s-1)}{(s+1)^2}$



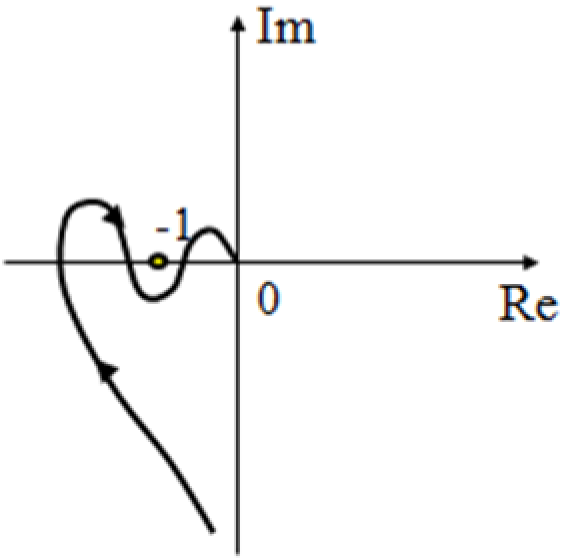


0<*K*< 1时，闭环系统稳定。

5、某单位负反馈系统具有如下的开环传递函数：

$$G(s)=\frac{K(T_5 s+1)(T_6 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)(T_4 s+1)}$$

且系统的极坐标图（ω>0）如图所示。试利用奈奎斯特判据判定系统的稳定性。



西南交通大学

$$G(s)=\frac{K(T_5s+1)(T_6s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

$N = (-1)+1 = 0$

$P = 0$

$Z = N + P = 0$

系统闭环稳定。

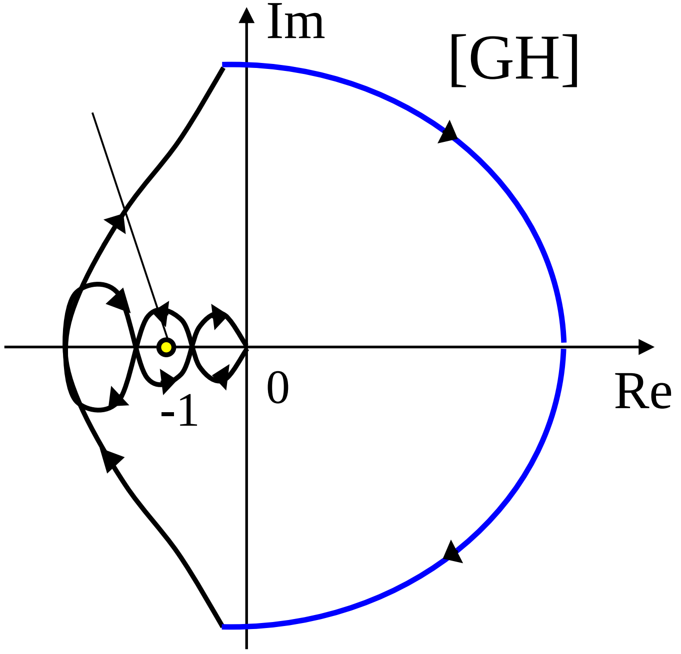


Fig. 2

6.某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

(a)当K=4时，验证系统的增益裕度为3.5dB。

$$\varphi(\omega)=-90^\circ-tg^{-1}\omega-tg^{-1}\frac{\omega}{2}$$

$$\varphi(\omega_g)=-90^\circ-tg^{-1}\omega_g-tg^{-1}\frac{\omega_g}{2}=-180^\circ$$

$$\omega_g=1.414$$

$$G_M=-20\lg\left|\frac{4}{\mathrm{j}\omega_g(\mathrm{j}\omega_g+1)(\mathrm{j}\omega_g+2)}\right|=3.5\ (\mathrm{dB})$$

(b)如果希望增益裕度为16dB，那么求出对应的K值。

$$-20\lg\left|\frac{4}{j\omega_g(j\omega_g+1)(j\omega_g+2)}\right|=3.5\ (\mathrm{dB})$$

$$-20\lg\left|\frac{K}{j\omega_g(j\omega_g+1)(j\omega_g+2)}\right|=16\ (\mathrm{dB})$$

两式相减，得

$$-20\lg K+20\lg 4=12.5$$

$$K=0.95$$

7.考虑上题给出的系统，当K=5时，计算系统的相角裕度。

$$\left|G(\mathrm{j}\omega_c)H(\mathrm{j}\omega_c)\right| = 1$$

$$\left|\frac{5}{\mathrm{j}\omega_c(\mathrm{j}\omega_c+1)(\mathrm{j}\omega_c+2)}\right| = 1$$

$$\omega_c = 1.3$$

$$\Phi_{pm} = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 5^\circ$$