西南交通大學

电子测量技术

秦　娜

qinna@swjtu.cn

电气工程学院

第5章 信号的分析及处理

5.1 信号的采样

5.2 数字化电气测量常用算法 重点：谐波分析

5.3 频谱分析 重点：2,4,8点蝶形流图

5.4 数字滤波 不讲

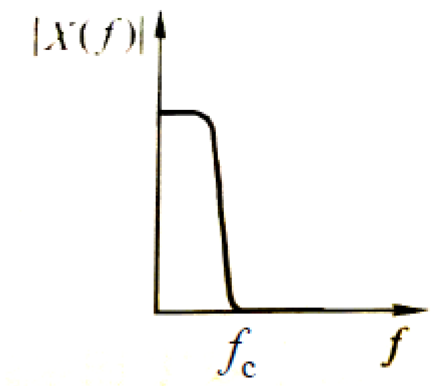
5.1 信号的采样

- 奈奎斯特采样定理
- 频谱混叠

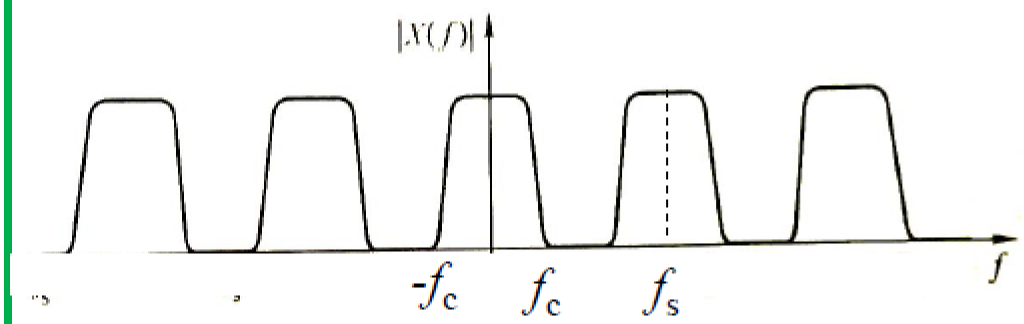
1. 奈奎斯特采样定理

为保证采样后的信号能真实地保留原模拟信号的信息，采样频率至少应为信号最高频率的2倍。

采样定理说明了采样频率与信号频谱之间的关系，是连续信号离散化的基本依据。



带宽为f_c的信号

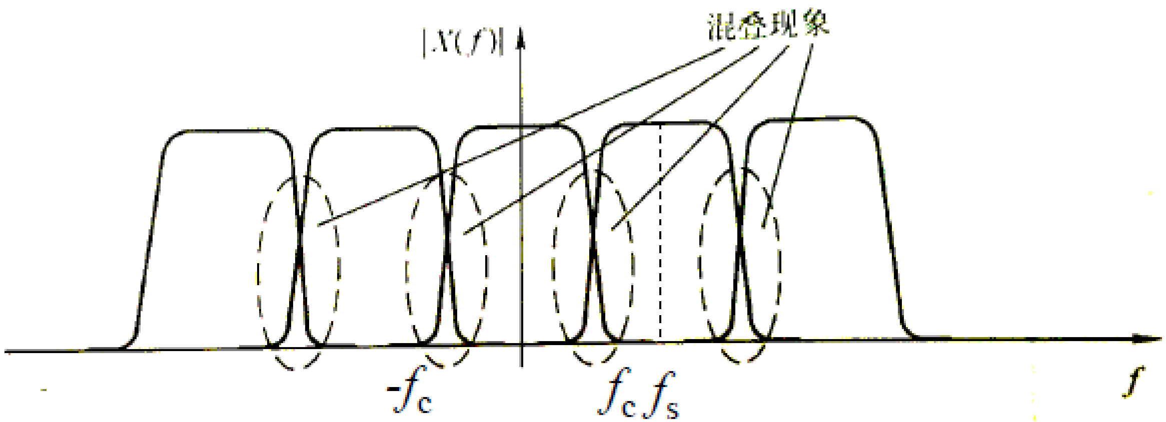


采样后的频谱（$f_s>2f_c$）

能够根据采样后的信号准确地恢复原信号。

实际中采样频率通常选择为被测信号最高频率的3~5倍。

2. 频谱混叠



$f_s<2f_c$，出现频谱混叠现象

2. 频谱混叠

当采样频率小于$2f_{max}$时，频谱图中高频与低频部分发生重叠，这种现象称为频谱混叠。

★

一旦出现频谱混叠，信号复原时将丢失原始信号中的高频信息。

在实际工程中往往会遇到频带较宽，甚至无限宽的信号。

采样频率如何设置才能避免混叠?

此时要避免混叠，必须采用抗混叠低通滤波器，令其截止频率小于等于$f_s/2$，滤掉信号中大于$f_s/2$的频率成分，迫使其最高频率变成有限。

新版教材P209

5.2 数字化电气测量的常用算法

- 有效值的计算 本学期不考
- 谐波分析

2. 谐波分析

重要！

电力系统中大容量电力设备、用电整流或换流设备以及其它非线性负荷造成电力网内的谐波分量，导致波形畸变，影响电网的电能质量。因此需要对电网中的电压和电流进行谐波分析，找到电力网谐波治理及改善的方法。

★ 对信号进行谐波分析，主要是分析各次谐波含量、含有率及谐波总畸变率等参数。

畸变的周期性电流可分解为傅里叶级数：

所考虑谐波的最高次数

幅值

工频角频率

$$i(t)=\sum_{h=1}^{M}\sqrt{2}I_h\sin(h\omega_1 t+\beta_h)$$

谐波次数

★ 谐波电流含量：

$$I_H=\sqrt{\sum_{h=2}^{M}I_h^2}$$

h次谐波均方根值，有效值

★ h次谐波电流的含有率：

h次谐波均方根值，有效值

$$\mathrm{HRI}_h = \frac{I_h}{I_1} \times 100\%$$

基波均方根值，有效值

★ 总畸变率（反映谐波引起的畸变波形偏离正弦波形的程度）：

$$\mathrm{THD}_I = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{M} I_h^2}}{I_1} \times 100\%$$

谐波分析常用算法

对周期为T的电流信号$i(t)$，每周期采样N次，得到电流采样信号 $i(k\frac{T}{N})$，简写为i_k，即：

$$\{i_k\}=i_0,i_1,i_2,\cdots,i_{N-1}$$

对于该有限长的时间序列，求该序列的离散傅里叶变换，得频谱序列 $\{\dot{I}_h\}$，即：

$$\dot{I}_h \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} i_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kh} \quad h = 0,1,2,\cdots,N-1$$

k为采样点，h 为谐波次数

电流采样信号

由于

根据欧拉公式 $e^{ix} = cosx + isinx$

指数函数　　三角函数

$$\dot{I}_h = \frac{1}{2}(a_h - jb_h)$$

h次谐波的正弦项系数

h次谐波的余弦项系数

对于该有限长的时间序列，求该序列的离散傅里叶变换，得电流信号的频谱序列 $\{\dot{I}_h\}$，即：

$$\dot{I}_h \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} i_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kh} \quad h = 0,1,2,\cdots,N-1$$

h次谐波的余弦项系数 $a_h = \frac{2}{N}\left[i_0 + \sum_{k=1}^{N-1} i_k \cos\frac{2kh\pi}{N}\right]$

h次谐波的正弦项系数 $b_h = \frac{2}{N}\left[\sum_{k=1}^{N-1} i_k \sin\frac{2kh\pi}{N}\right]$

则可得h次谐波的有效值为：

$$I_h = \sqrt{\frac{a_h^2 + b_h^2}{2}} \quad h = 0,1,2,\cdots,N-1$$

谐波含有率：$\mathrm{HRI}_h = \dfrac{I_h}{I_1} \times 100\%$

总畸变率：$\mathrm{THD}_I = \dfrac{\sqrt{\sum_{h=2}^{M} I_h^2}}{I_1} \times 100\%$

计算流程回顾

谐波分析常用算法

对周期为T的电流信号$i(t)$，每周期采样N次，得到电流采样信号 $i(k\frac{T}{N})$ ，简写为i_k，即：

$$\{i_k\} = i_0, i_1, i_2, \cdots, i_{N-1}$$

利用下式确定a_h和b_h。

$$a_h = \frac{2}{N}\left[i_0 + \sum_{k=1}^{N-1} i_k \cos\frac{2kh\pi}{N}\right]$$

$$b_h = \frac{2}{N}\left[\sum_{k=1}^{N-1} i_k \sin\frac{2kh\pi}{N}\right]$$

则可得h次电流谐波的有效值（均方根值）为：

$$I_h = \sqrt{\frac{a_h^2 + b_h^2}{2}} \quad h = 0,1,2,\cdots,N-1$$

谐波含有率：$\mathrm{HRI}_h = \dfrac{I_h}{I_1} \times 100\%$

总谐波畸变率：$\mathrm{THD}_I = \dfrac{\sqrt{\sum_{h=2}^{M} I_h^2}}{I_1} \times 100\%$

对于电压信号，h次谐波的有效值（均方根值）为：

$$U_h = \sqrt{\frac{a_h^2 + b_h^2}{2}} \quad h = 0,1,2,\cdots,N-1$$

谐波含有率：$\mathrm{HRU}_h = \dfrac{U_h}{U_1} \times 100\%$

总谐波畸变率：$\mathrm{THD}_U = \dfrac{\sqrt{\sum_{h=2}^{M} U_h^2}}{U_1} \times 100\%$

电力系统中的电流或电压能够满足狄里赫利条件，可以分解为傅里叶级数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{h=1}^{\infty}[a_h\cos(h\omega t)+b_h\sin(h\omega t)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{h=1}^{\infty}A_h\sin(h\omega t+\phi_h)$$

连续信号

其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega t)d(\omega t)$$

$$a_h=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega t)\cos(h\omega t)d(\omega t)$$

$$b_h=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega t)\sin(h\omega t)d(\omega t)$$

h次谐波的幅值

$$A_h=\sqrt{a_h^2+b_h^2}$$

$$\phi_h=\tan^{-1}(\frac{a_h}{b_h})$$

由于A_h为h次谐波的幅值，因此h次谐波的有效值（均方根值）为：

有效值 $$\frac{A_h}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a_h^2 + b_h^2}{2}}$$

相一致 $$I_h = \sqrt{\frac{a_h^2 + b_h^2}{2}}$$

对周期为T的电流信号$i(t)$，每周期采样N次，得到电流采样序列i_k，即：

$$\{i_k\} = i_0, i_1, i_2, \cdots, i_{N-1}$$

则

$$a_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos(h\omega t)d(\omega t)$$

离散信号

$$a_h = \frac{2}{N}\left[i_0 + \sum_{k=1}^{N-1} i_k \cos\frac{2kh\pi}{N}\right]$$

$$b_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\sin(h\omega t)d(\omega t)$$

$$b_h = \frac{2}{N}\left[\sum_{k=1}^{N-1} i_k \sin\frac{2kh\pi}{N}\right]$$

可得 h次电流谐波的有效值

$$I_h = \sqrt{\frac{a_h^2 + b_h^2}{2}}$$

5.3 频谱分析

- 频谱分析
- ★ DFT变换

  Discrete Fourier Transformation

1. 频谱分析

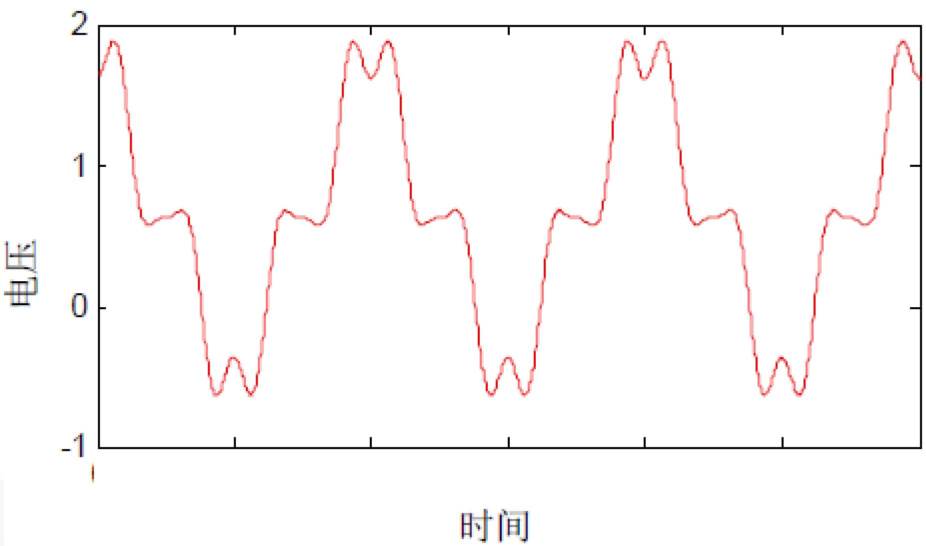
在频域中分析信号的**频率分量**的情况。通过对信号进行傅立叶变换，将信号表示成一个基波分量和许多谐波分量之和的形式，确定信号的频谱。

周期信号

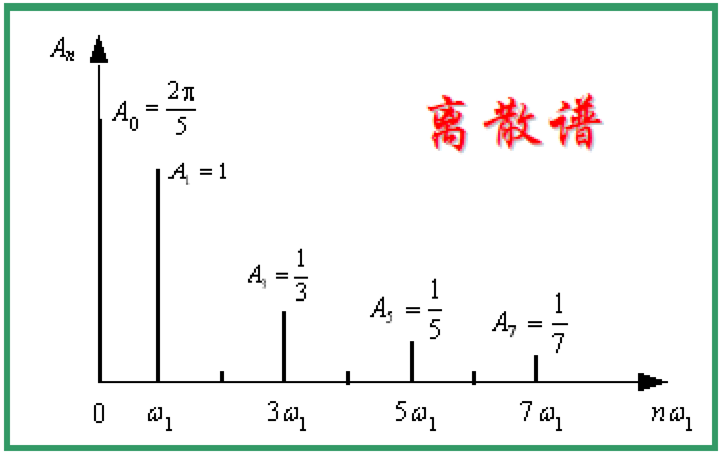
高次谐波

$$U(t)=\frac{\pi}{5}+\cos\omega_1 t+\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t+\pi)+\frac{1}{7}\cos(7\omega_1 t+\pi)$$

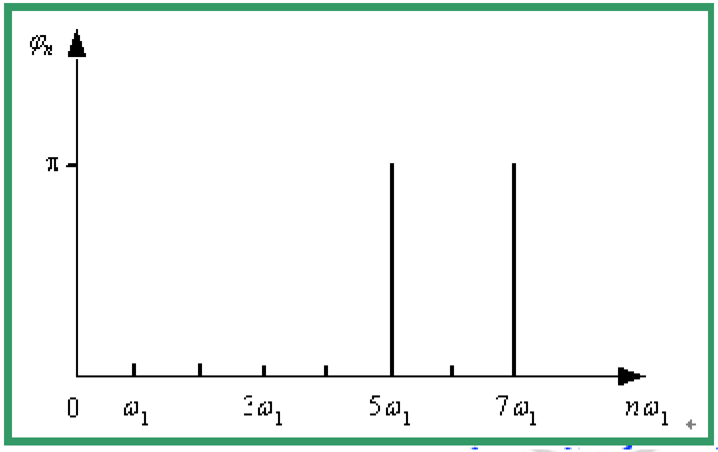
直流分量　基波分量



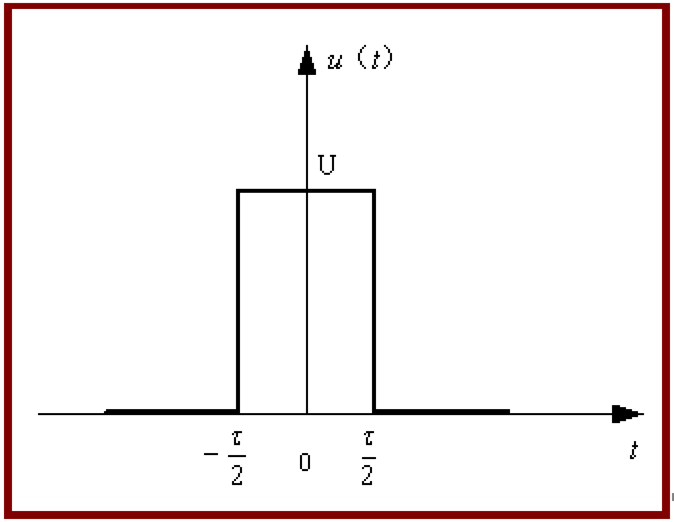
幅值谱



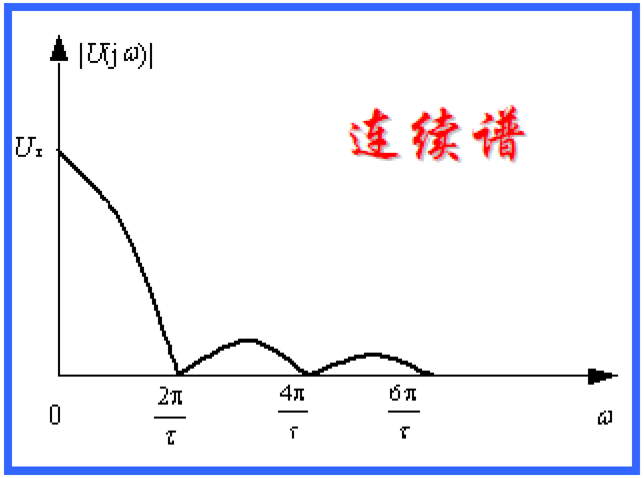
相位谱



非周期信号

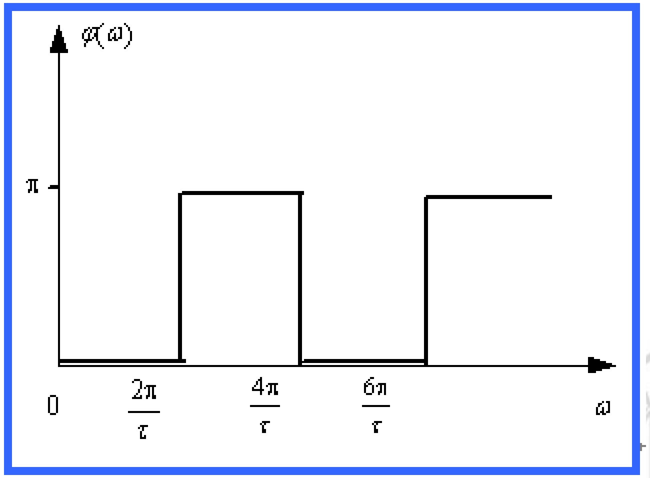


幅值谱



$$u(t)=\begin{cases} U & -\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2} \\ 0 & t<-\frac{\tau}{2}\text{或}t>\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

相位谱



新版教材P212页

2. 离散傅里叶变换（DFT）

Discrete Fourier Transformation

设$x(n)$是一个长度为M的有限长序列，则定义$x(n)$的N点离散傅里叶变换为：

旋转因子

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{N}^{nk}$$

离散傅里叶变换的点数

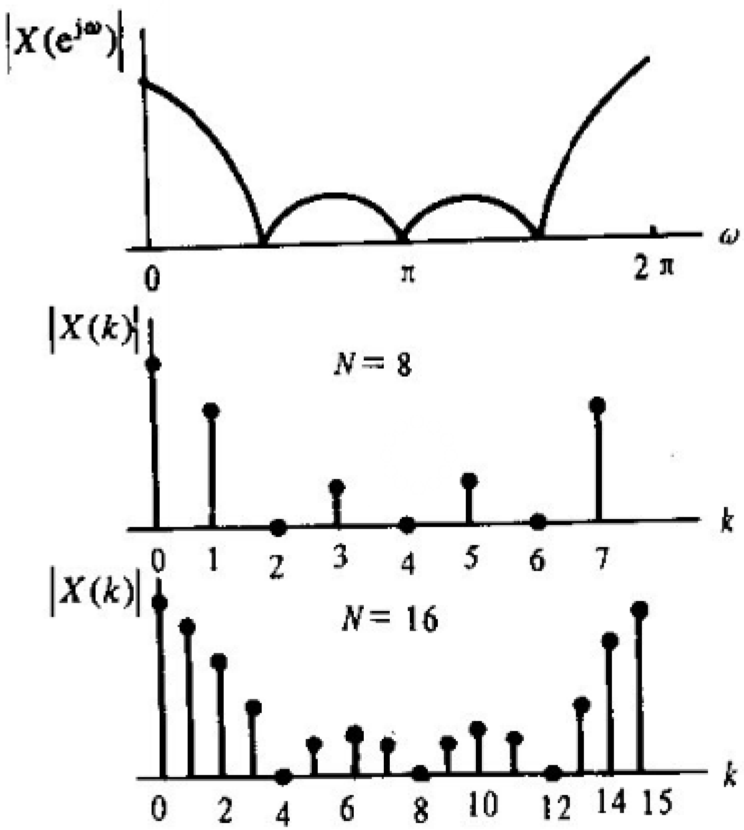
$X(k)$的离散傅里叶逆变换为：

$$x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_{N}^{-nk}$$

采样信号的序号 $n=0,1,\cdots N-1$

频谱的序号 $k=0,1,\cdots N-1$

通过离散傅里叶变换，有限长的时间序列变为有限长的频谱序列。



离散时间信号进行离散傅里叶变换后，频谱是离散的。

离散傅里叶变换的点数越多，频率分辨率越高。

要完成全部的DFT的运算要进行N^2次复数乘法和$N(N-1)$次复数加法，计算量太大，很难实时处理。

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

快速傅里叶变换（FFT）

FFT是离散傅里叶变换的一种快速算法，采用这种算法能使计算机计算DFT所需的乘法次数大为减少。正是它的出现，使离散傅里叶变换得到了广泛的应用。

快速傅里叶变换（FFT）

基本思想：

根据离散傅里叶变换周期性和对称性的特点，将大抽样点序列的DFT分解为小抽样点序列的DFT的组合，从而减少运算量。

旋转因子 W_N（即$e^{-j\frac{2\pi}{N}}$）因子具有两个特性

采样信号的序号 $n=0,1,\cdots N-1$

频谱的序号 $k=0,1,\cdots N-1$

■ 周期性 $W_N^{n(k+N)}=W_N^{nk}=W_N^{(n+N)k}$

根据欧拉公式 $e^{ix}=cosx+isinx$

$$W_N^{n(k+N)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+N)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\boxed{e^{-j2\pi n}}=W_N^{nk}$$

$=1$

$$W_N^{(n+N)k}=e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+N)k}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\boxed{e^{-j2\pi k}}=W_N^{nk}$$

■ 对称性 $W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$

$$W_N^{(k+N/2)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N/2)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\underbrace{\boxed{e^{-j\pi}}}_{=-1} = -W_N^k$$

根据欧拉公式 $e^{ix} = cosx + isinx$

按时间抽取的快速傅里叶变换（DIT）

序列 $x(n)$的离散傅里叶变换为：

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

将序列$x(n)$按奇偶项分解为两组

$$\begin{cases} x(2r) = x_1(r) \\ x(2r+1) = x_2(r) \end{cases} \qquad r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

则

$$X(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r)W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

偶数 奇数

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_N^{(2r+1)k}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_N^{2rk}+\underline{W_N^k}\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_N^{2rk}$$

由于

$$W_N^{2rk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2rk}=e^{-j\frac{2\pi}{N/2}\cdot rk}=W_{N/2}^{rk}$$

频谱的
前半部分

可得：

$$X(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_{N/2}^{rk}$$

$$=X_1(k)+W_N^kX_2(k)\quad（k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1）$$

其中$X_1(k)$、$X_2(k)$ 分别是两个小序列（$N/2$点）的DFT。

同理可得：

频谱的
后半部分

$$X(k+\frac{N}{2})=X_1(k+\frac{N}{2})+W_N^{k+N/2}X_2(k+\frac{N}{2})$$

根据周期性：

$$X_1(k+\frac{N}{2})=X_1(k),\quad X_2(k+\frac{N}{2})=X_2(k)$$

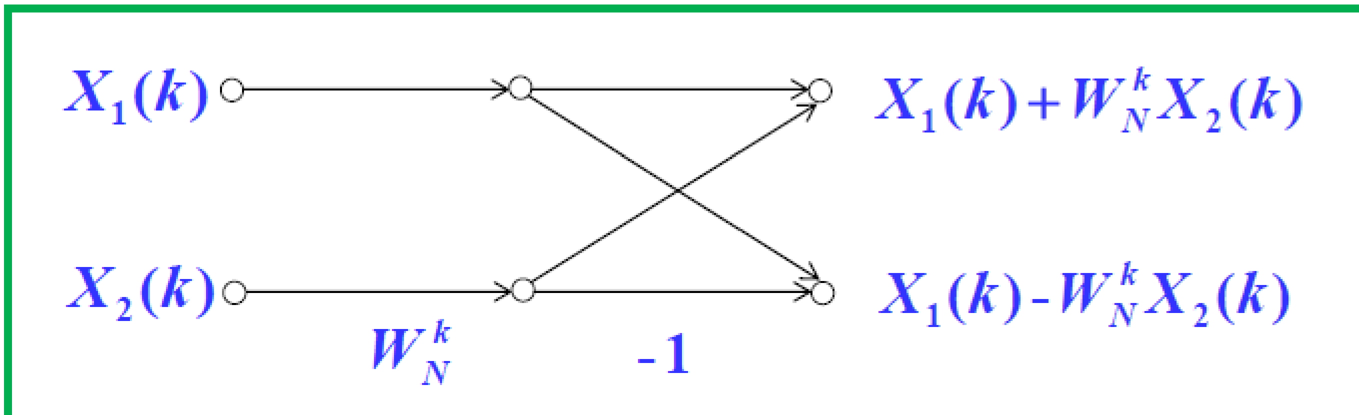
根据对称性： $W_N^{k+N/2}=-W_N^k$

则： $X(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k)$ （$k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$）

N点的DFT为：

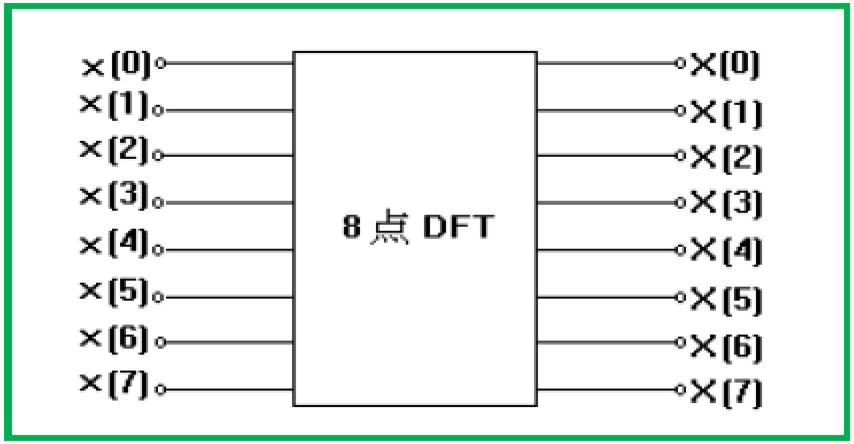
$$\begin{cases} X(k)=X_1(k)+W_N^k X_2(k) \\ X(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^k X_2(k) \end{cases},\quad (k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1)$$

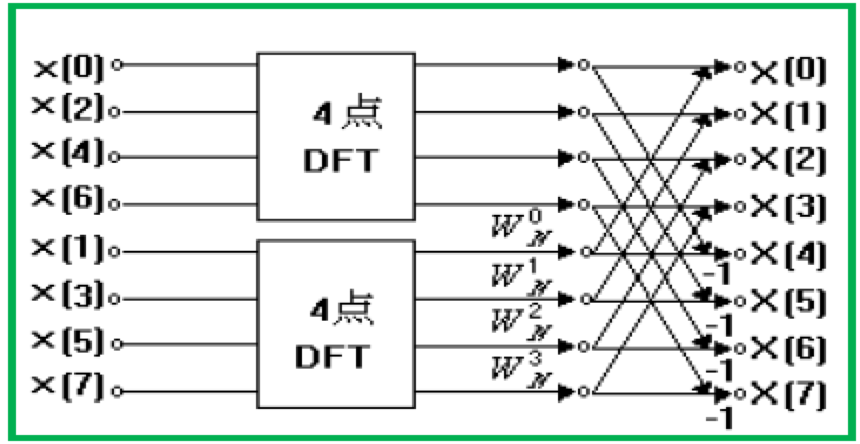
用的碟形符号来表示

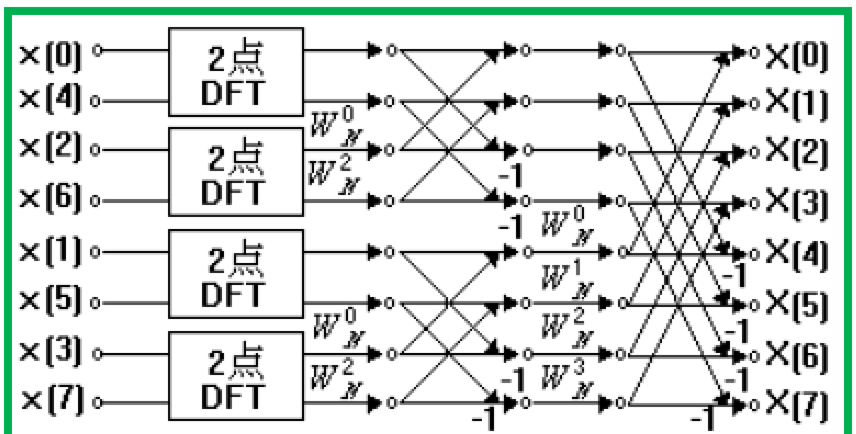


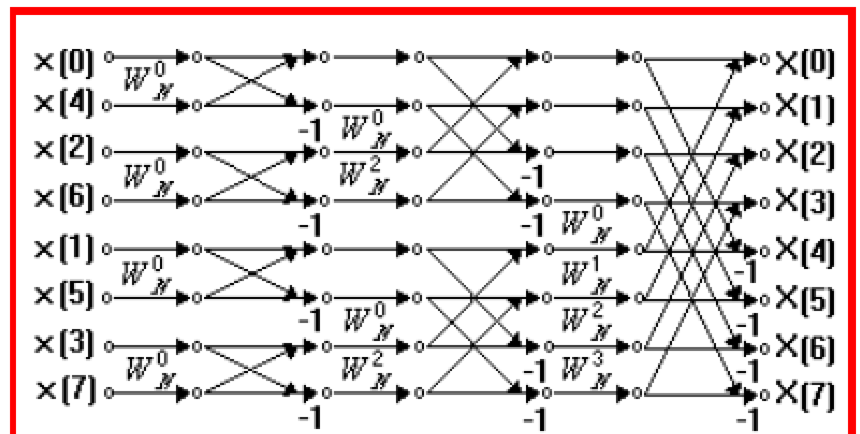
8点FFT运算流程图

重要!









N=8

偶数点序列　奇数点序列

频谱前半部分

$$X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k)$$

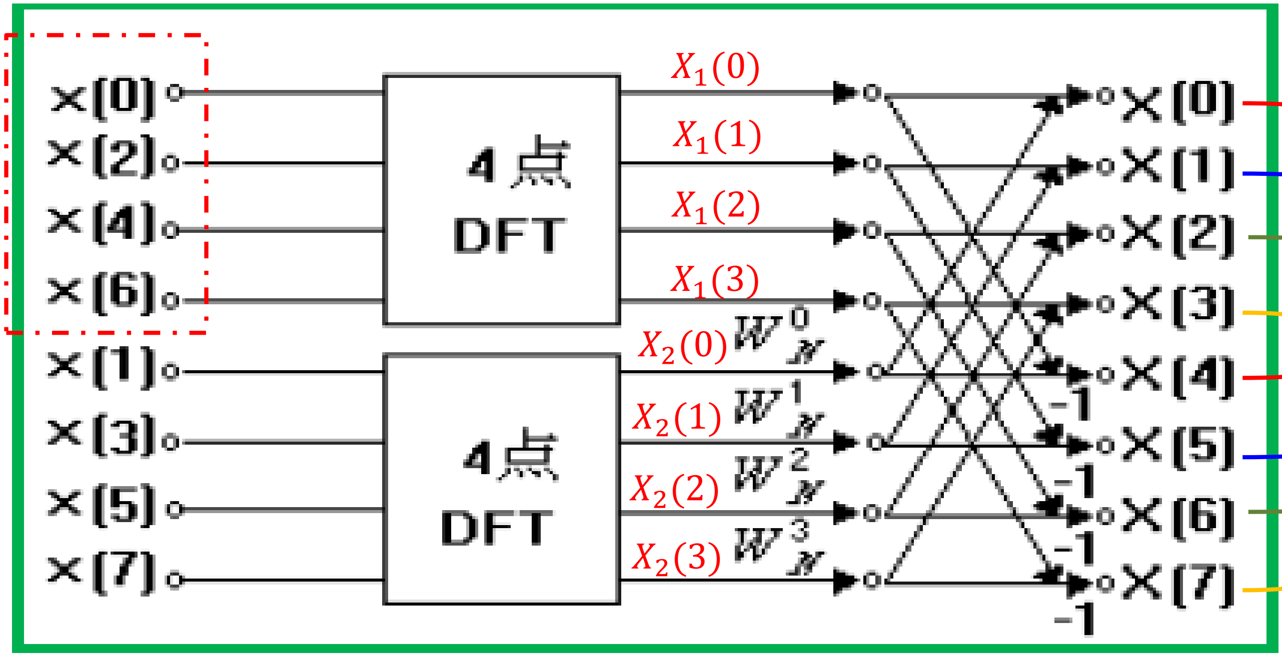
频谱后半部分

$$X(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k)$$

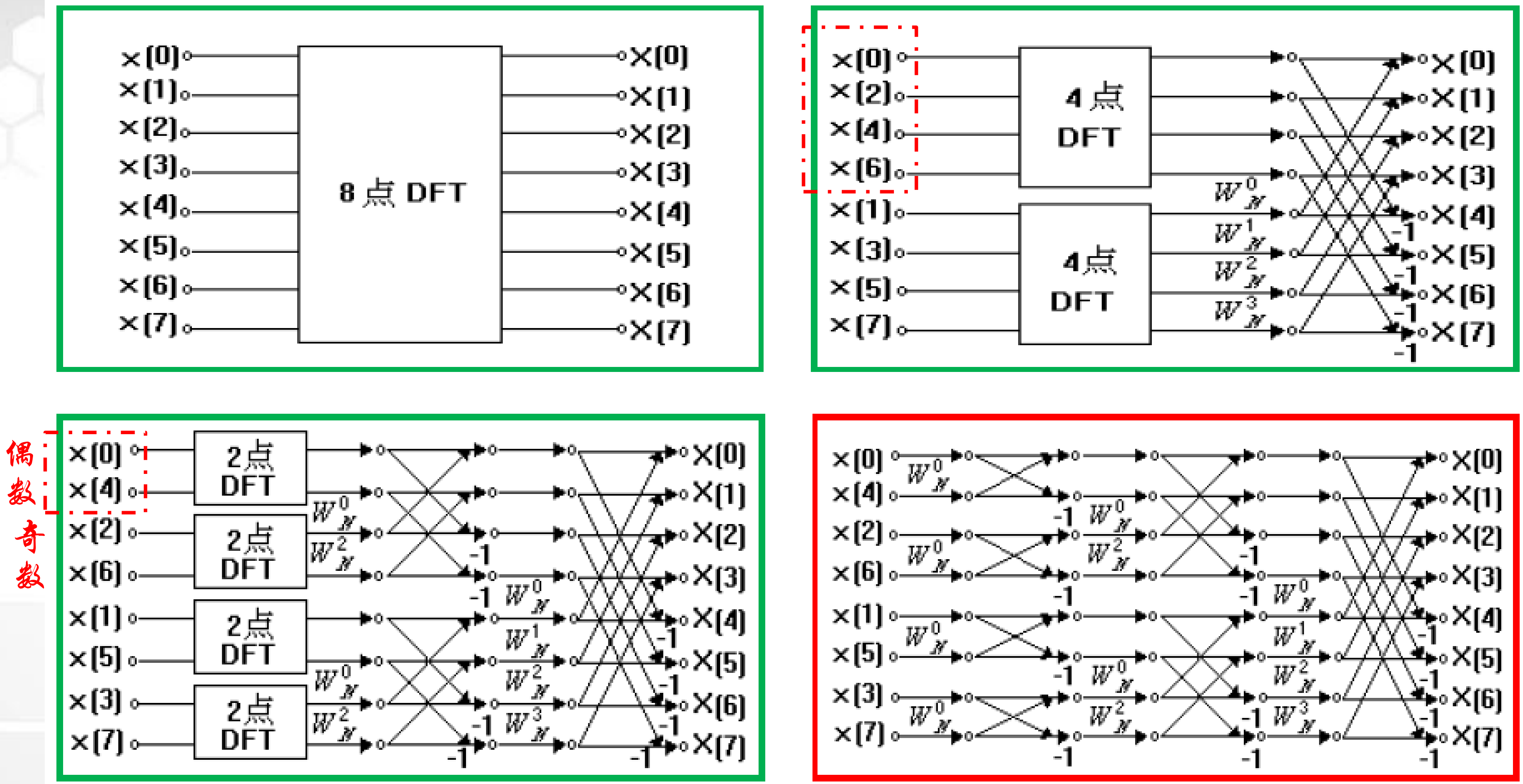
$$，\quad (k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1)$$

偶数

奇数

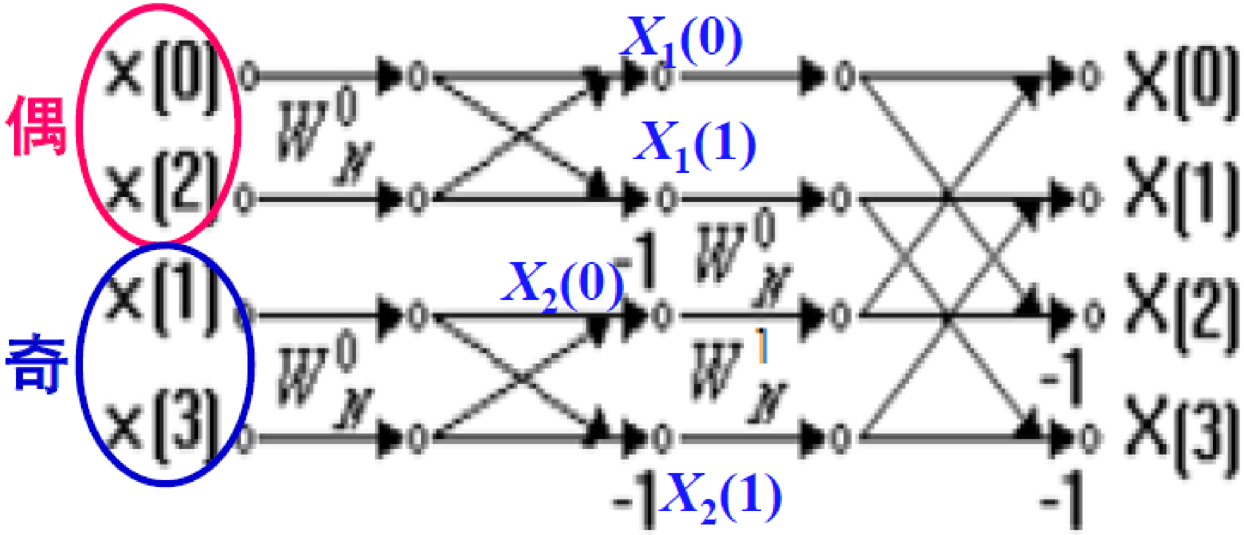


8点FFT运算流程图



重要！！！

利用碟形流图写出计算4点序列的DFT的表达式 ★



$$W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

$$W_N^0 = 1$$

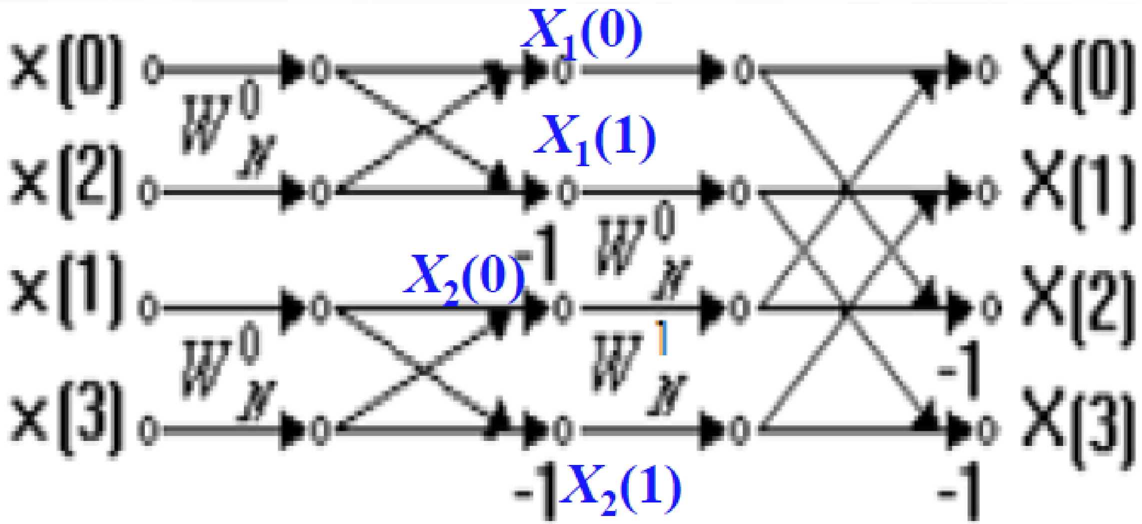
（1）先算2点DFT

$$X_1(0) = x(0) + W_N^0 x(2) = x(0) + x(2)$$

$$X_1(1) = x(0) - x(2)$$

$$X_2(0) = x(1) + x(3)$$

$$X_2(1) = x(1) - x(3)$$



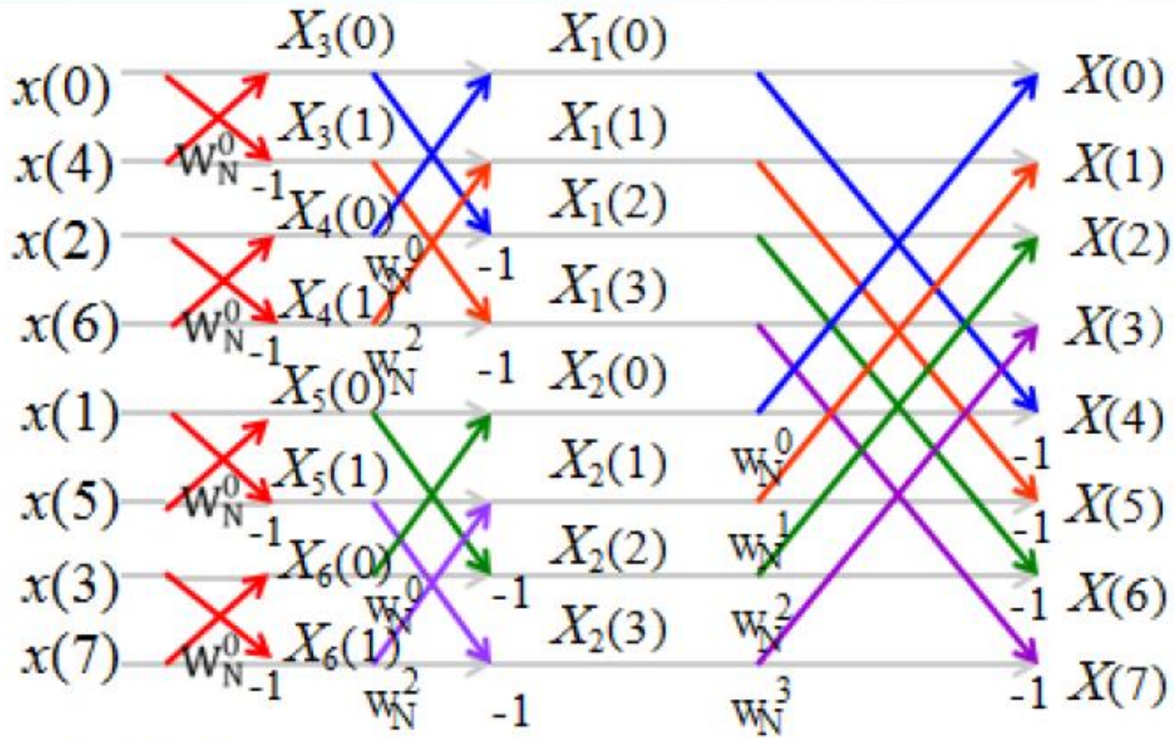
(2) 再算4点DFT $N = 4$ $W_N^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$$X(0) = X_1(0) + W_N^0 X_2(0) = x(0) + x(2) + x(1) + x(3)$$

$$X(1) = X_1(1) + W_N^1 X_2(1) = x(0) - x(2) - j(x(1) - x(3))$$

$$X(2) = X_1(0) - W_N^0 X_2(0) = x(0) + x(2) - x(1) - x(3)$$

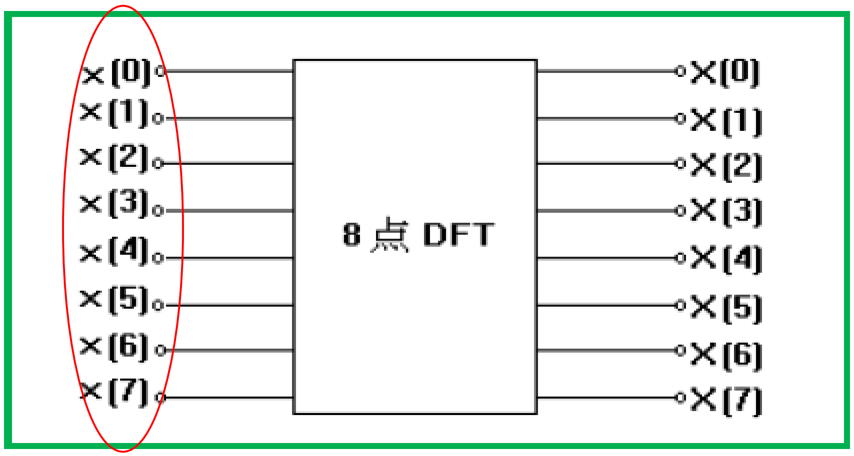
$$X(3) = X_1(1) - W_N^1 X_2(1) = x(0) - x(2) + j(x(1) - x(3))$$

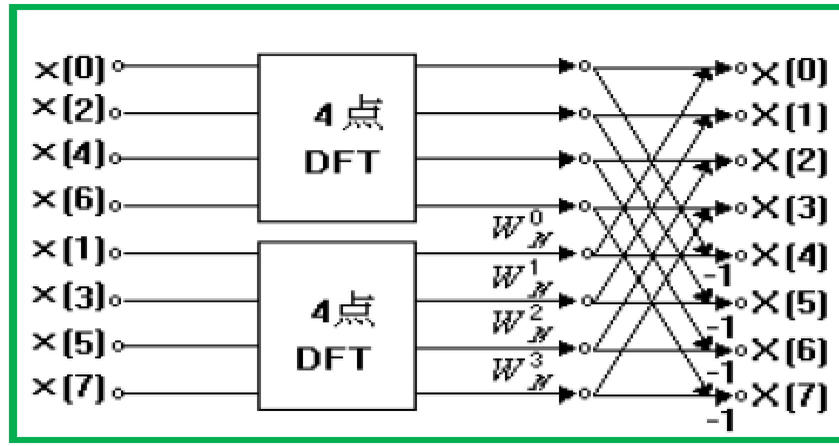


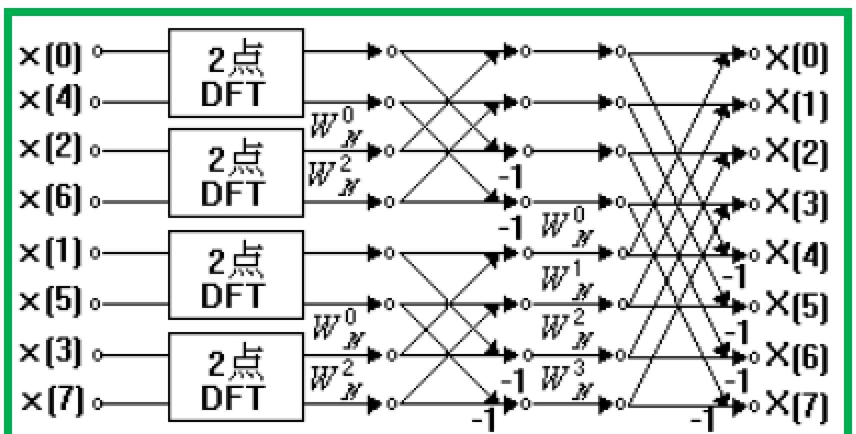
8点序列的DFT表达式

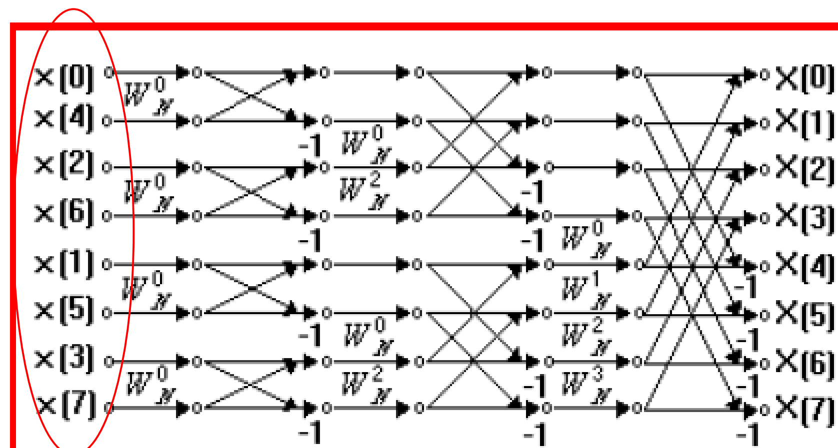
$$
\begin{aligned}
X(0) &= X_1(0) + W_N^0 X_2(0) \\
&= X_3(0) + W_N^0 X_4(0) + W_N^0\left(X_5(0) + W_N^0 X_6(0)\right) \\
&= x(0) + W_N^0 x(4) + W_N^0\left(x(2) + W_N^0 x(6)\right) \\
&\quad + W_N^0\left[x(1) + W_N^0 x(5) + W_N^0\left(x(3) + W_N^0 x(7)\right)\right]
\end{aligned}
$$

8点FFT运算流程图


x[0]
x[1]
x[2]
x[3]
x[4]
x[5]
x[6]
x[7]
8 点 DFT
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]


x[0]
x[2]
x[4]
x[6]
x[1]
x[3]
x[5]
x[7]
4 点 DFT
4点 DFT
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
-1
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]


x[0]
x[4]
x[2]
x[6]
x[1]
x[5]
x[3]
x[7]
2点 DFT
W_N^0
W_N^2
W_N^1
W_N^3
-1
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]


x[0]
x[4]
x[2]
x[6]
x[1]
x[5]
x[3]
x[7]
W_N^0
W_N^2
W_N^1
W_N^3
-1
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]

码位倒置

自然顺序	二进制表示	码位倒置	码位倒置顺序
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

FFT算法的两个特点

➢原位运算

当数据输入到存储器中以后，每一级运算的结果仍然存储在原来的存储器中，直到最后输出。

原位运算的结构可以节省存储单元，降低设备成本。

➢变址

数据一般先按自然顺序输入存储单元，然后通过变址运算将自然顺序的存储变为“码位倒置”的顺序。