

## 作业解答—第6章

1、设某单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G_o(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

试对该系统进行串联校正，使之具有下列性能指标：

系统对单位斜坡输入信号的稳态误差  $e_{ss} \leq 1/30$  ,

相角裕度  $\phi_{pm} \geq 40^\circ$  , 增益裕度  $G_M \geq 10\text{dB}$  , 幅穿

频率  $\omega_c$  不低于 **2rad/s**。（在给出的对数坐标中画

出校正前后的**Bode图**）。

1. 解:

1) 要求对单位斜坡输入信号的稳态误差

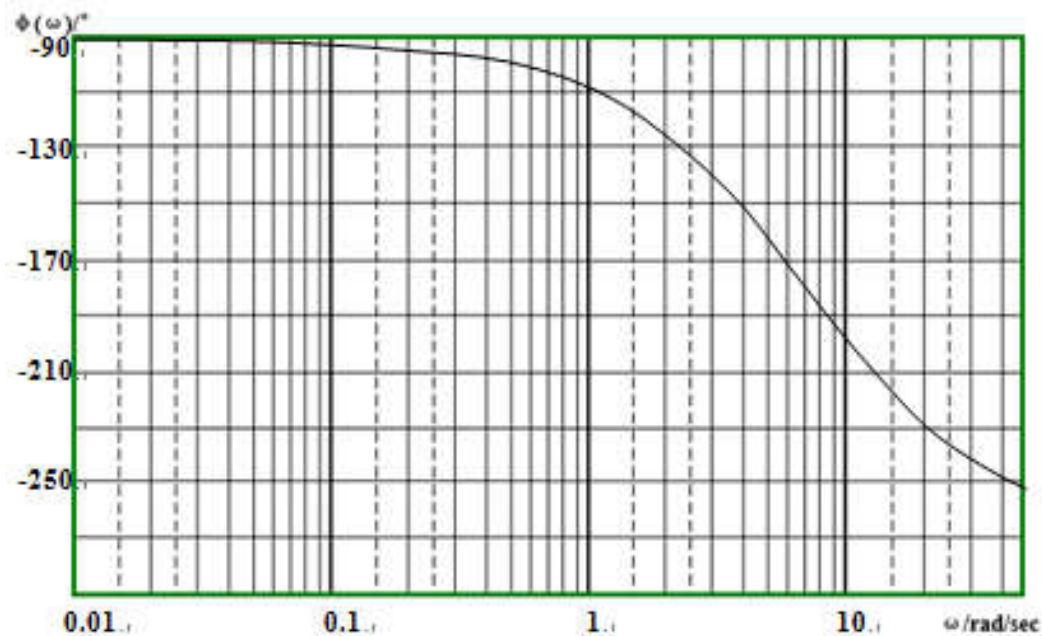
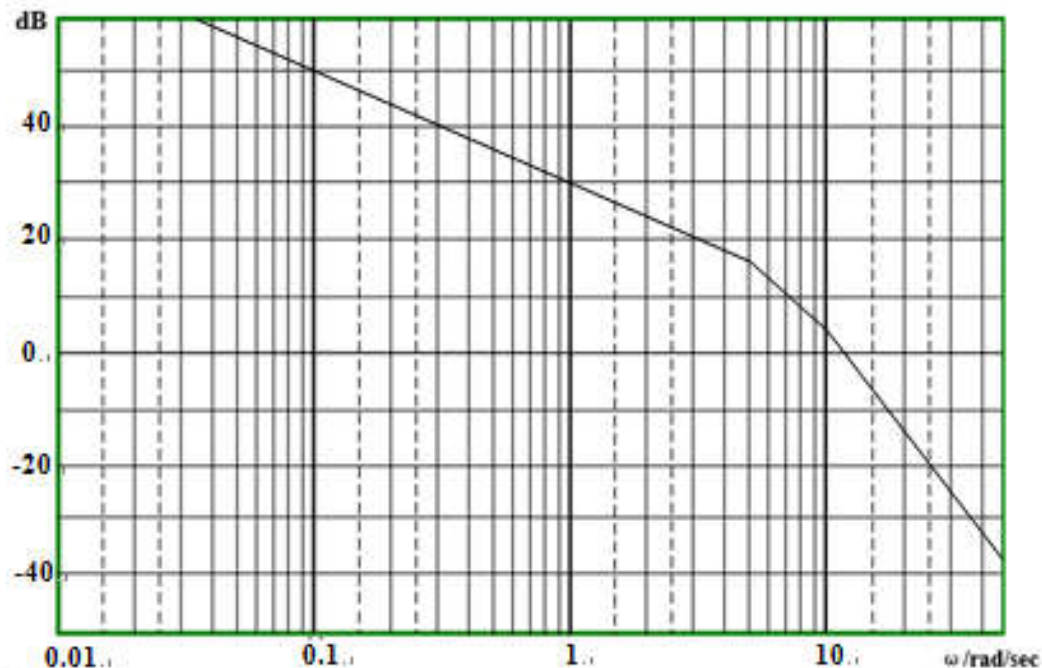
$$e_{ss} \leq 1/30$$

$$K_v = 30$$

$$\therefore K = 30$$

2) 画出 $G_0(j\omega)$ 的Bode图:

$$G_0(j\omega) = \frac{30}{j\omega(j0.1\omega + 1)(j0.2\omega + 1)}$$



由 $G_0(j\omega)$ 的Bode图读出

$$\omega_{c0} = 12 \text{ rad/s}$$

$$\Phi_{pm0} = -28^\circ$$

$$\omega_{g0} = 7 \text{ rad/s}$$

$$G_{M0} = -10 \text{ dB}$$

$G_0(j\omega)$ 的相频特性在 $\omega_{c0}$ 附近(略大于 $\omega_{c0}$ 处)下降太快，用超前校正一般无效。

### 3) 采用滞后校正

$$G_c(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} = \frac{1}{\alpha} \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad \alpha > 1$$

根据  $\Phi_M \geq 40^\circ$ ，选  $\omega_c$ ：

考虑到加入校正环节后会使幅穿频率处的相频下降，  
因此，幅穿频率应选在  $\Phi_M^* = 40^\circ + \Delta\varphi (= \varphi_0(\omega_c) + 180^\circ)$  处。

$$\text{取 } \Delta\varphi = 5^\circ, \quad \Phi_M^* = 45^\circ$$

$$\varphi_0(\omega) = \Phi_M^* - 180^\circ = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$$

$$\omega_c = 2.8 \text{ rad/s}$$

确定衰减度 $\alpha$ ：

$$20 \lg |G_0(j\omega)|_{\omega=2.8} \approx 21$$

$$\text{令 } 20 \lg \frac{1}{\alpha} = -21 \text{ dB, 故 } \alpha = 11。$$

$$\text{确定转折频率} \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{10} \omega_c = 0.28 \rightarrow T = 3.57$$

$$\text{所加校正环节传函为} \quad G_c(s) = \frac{1 + 3.57s}{1 + 39.3s}$$

校正后开环传函

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{30(3.57s + 1)}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)(39.3s + 1)}$$

画出校正后的  
Bode图。

#### 4) 检验性能指标:

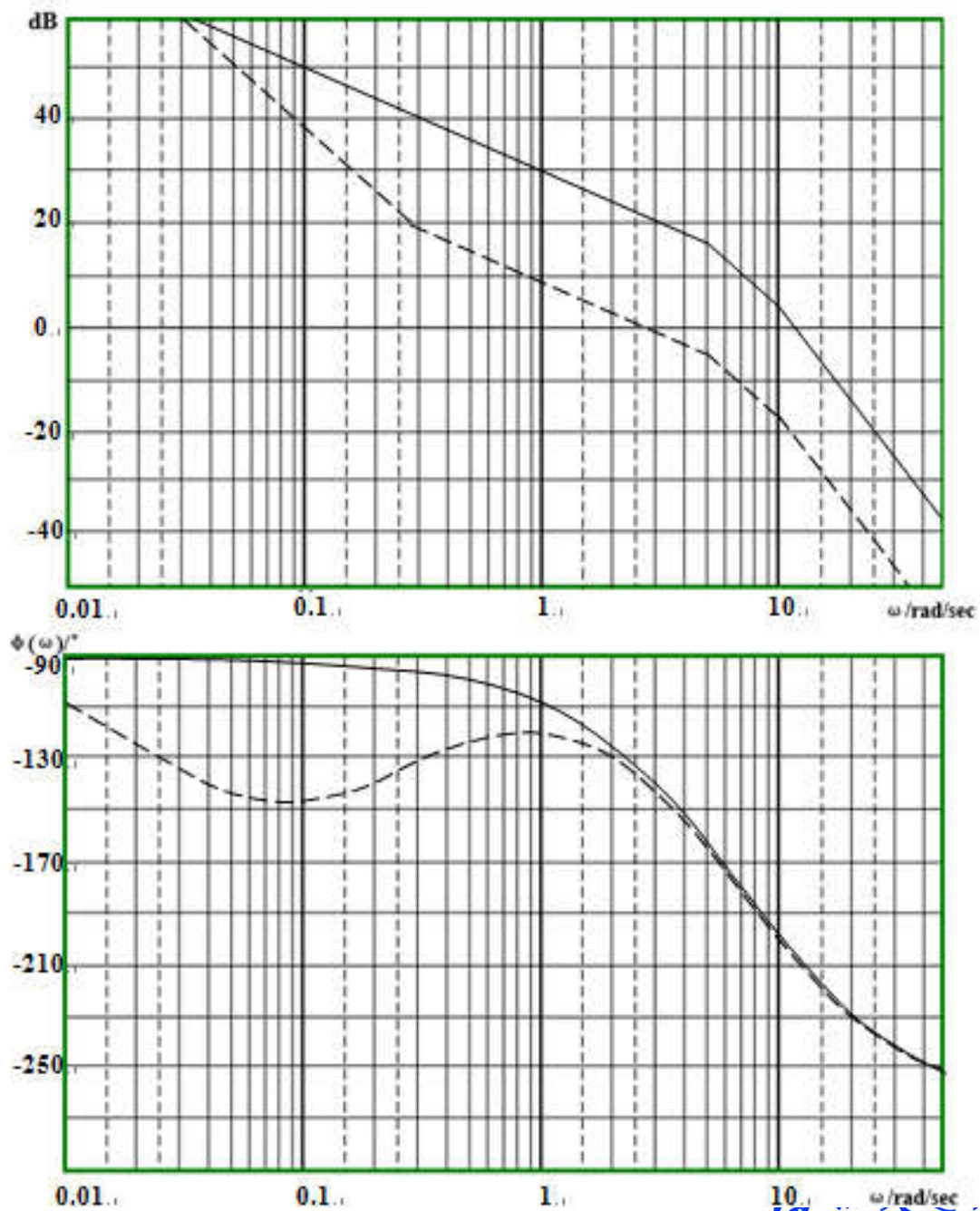
$$K_v = 30s^{-1},$$

$$\omega_c = 2.8\text{rad/s},$$

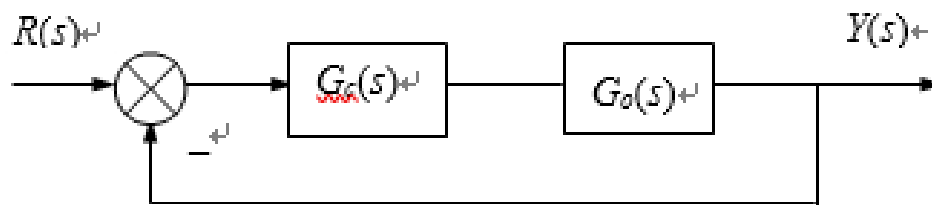
$$\Phi_M = 40^\circ$$

$$\omega_g = 6.8\text{rad/s},$$

$$G_M = 10\text{dB}$$



2. 控制系统框图如下图所示，试确定串联校正环节  $G_c(s)$ 。



其中  $G_o(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ ，要求校正后系统的相位裕量  $\phi_{pm} \geq 40^\circ$ ，

$\omega_c \geq 4 \text{ rad/s}$ ， $K_v \geq 12 \text{ s}^{-1}$ 。

（在给出的对数坐标中画出校正前后的Bode图）。

## 2. 解:

1) 根据对静态速度误差系数的要求, 确定系统的附加开环增益 $K_c$ 。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s[K_c G_o(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10K_c}{s+1} = 10K_c \geq 12$$

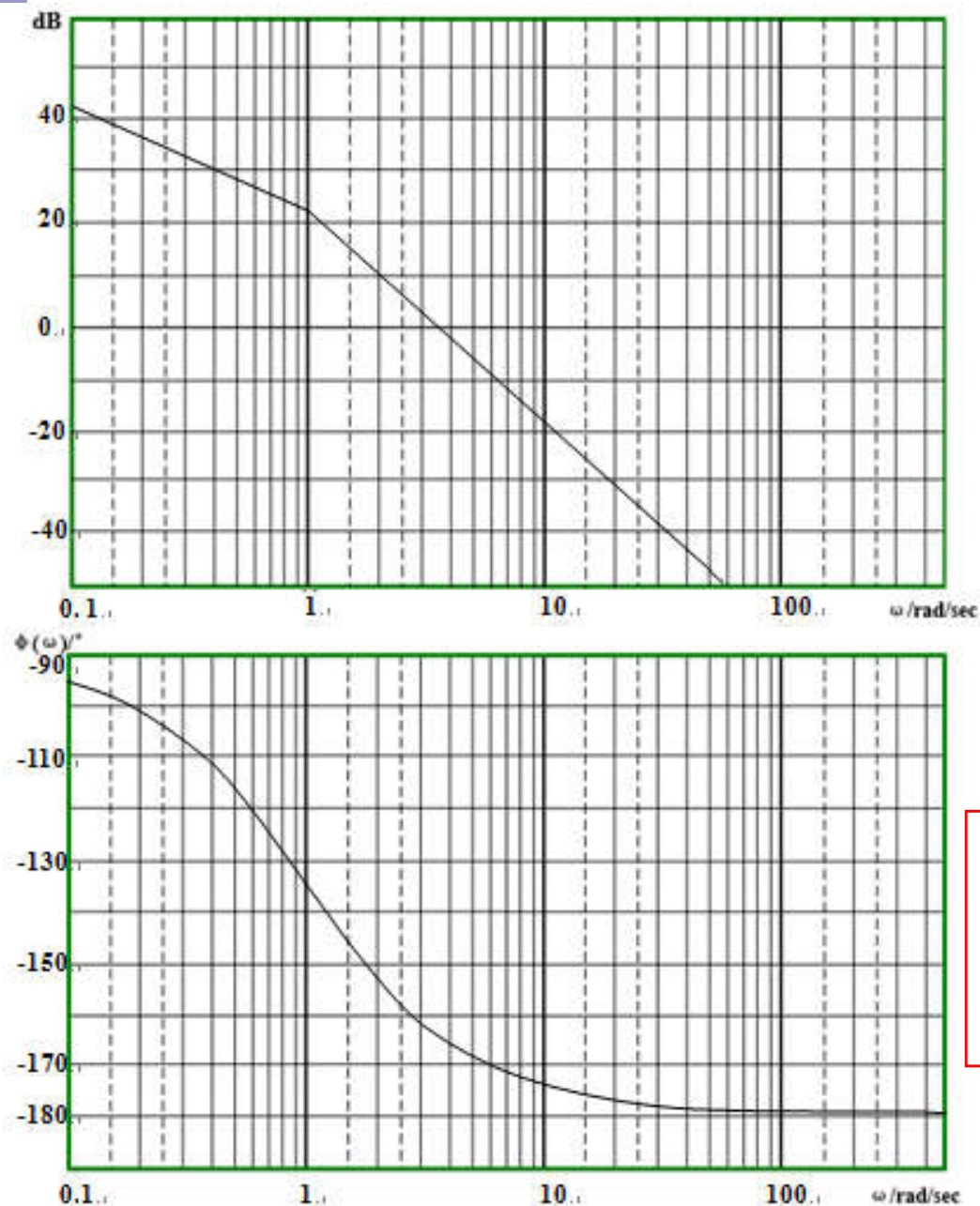
$$\text{即: } K_c \geq 1.2$$

$$\text{取 } K_c = 1.2$$

2) 画出 $K_c G_o(j\omega)$  的Bode图

$$K_c G_o(j\omega) = \frac{12}{j\omega(j\omega+1)}$$





由Bode图上读出：

$$\omega_{c0} = 3.5 \text{ rad/s}$$

$$\Phi_{pm0} = 15^\circ$$

$$\omega_{g0} = \infty$$

$$G_{M0} = \infty$$

相角裕度达不到指标要求，  
要使相角裕度大于等于 $40^\circ$ ，  
需加入超前校正网络。

### 3) 确定采用超前校正网络

$$G_c(s) = K_c G'_c(s) = K_c \frac{1 + Ts}{1 + \beta Ts} \quad \beta < 1$$

(1) 超前装置提供的超前角  $\varphi_m$  为

$$\varphi_m = \Phi_{pm} - \Phi_{pm0} + \Delta\varphi = 40^\circ - 15^\circ + 5^\circ = 30^\circ$$

(2) 确定衰减系数  $\beta$

$$\beta = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = \frac{1 - 0.5}{1 + 0.5} = 0.334$$

### (3) 确定校正后系统的幅穿频率 $\omega_c$

为充分利用超前相角, 令最大超前角处的频率 $\omega_m$ 等于 $\omega_c$ 。

$$10\lg \frac{1}{\beta} = 10\lg \frac{1}{0.334} = 4.8\text{dB}$$

故将 $\omega_m$ 选在 $K_c G_0(j\omega)$ 的幅值为-4.8dB处。

$$\text{即 } 20\lg |K_c G_0(j\omega)| = -4.8$$

由图读出  $\omega_c = \omega_m = 4.6 \text{ rad/s}$

#### (4) 确定 $T$

$$\therefore T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\beta}} = \frac{1}{4.6 \times \sqrt{0.334}} = 0.376$$

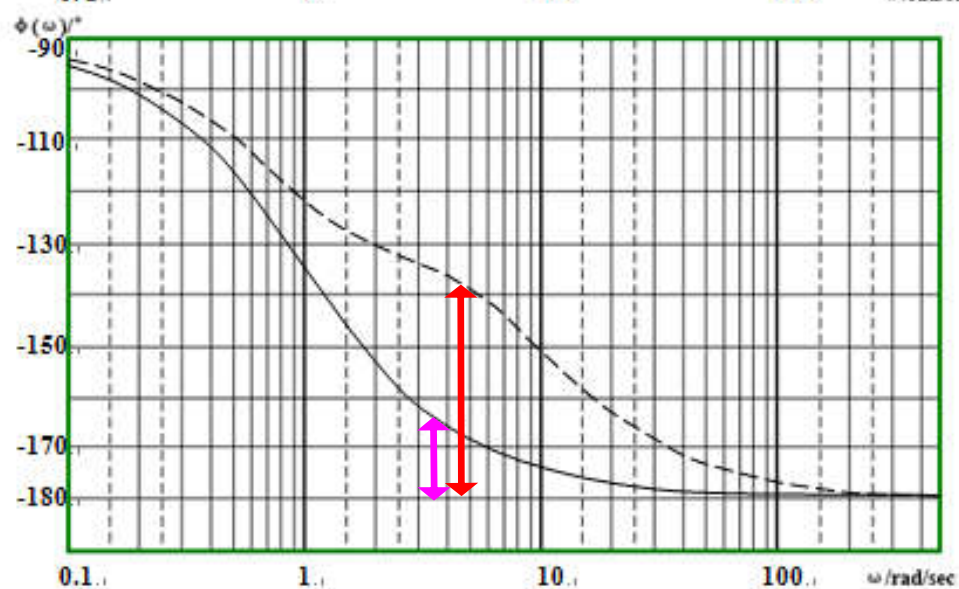
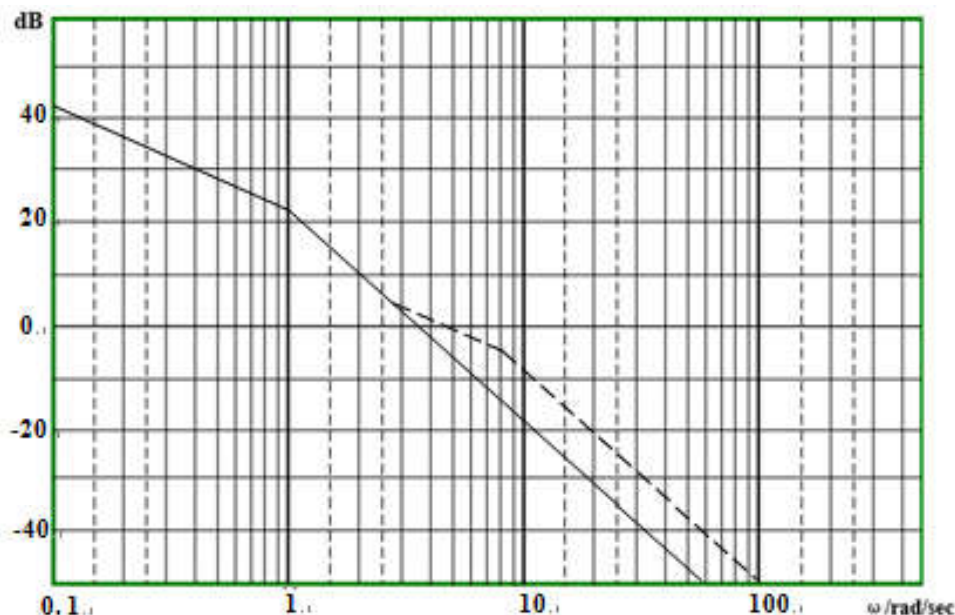
#### 4) 校正网络的传递函数

$$\therefore G_c(s) = 1.2 \frac{1 + 0.376s}{1 + 0.125s}$$

#### 5) 校正后系统的开环传函

$$\begin{aligned} G(s) &= G_0(s)G_c(s) \\ &= \frac{12(1 + 0.376s)}{s(1 + s)(1 + 0.125s)} \end{aligned}$$

## 6) 画出校正后系统的Bode图并检验性能指标。



$$K_v = 12 \text{ 秒}^{-1}$$

$$\omega_c = \omega_m = 4.6 \text{ rad/s}$$

$$\Phi_{pm} = 42^\circ$$

$$\omega_g = \infty$$

$$G_M = \infty$$

达到性能指标要求。

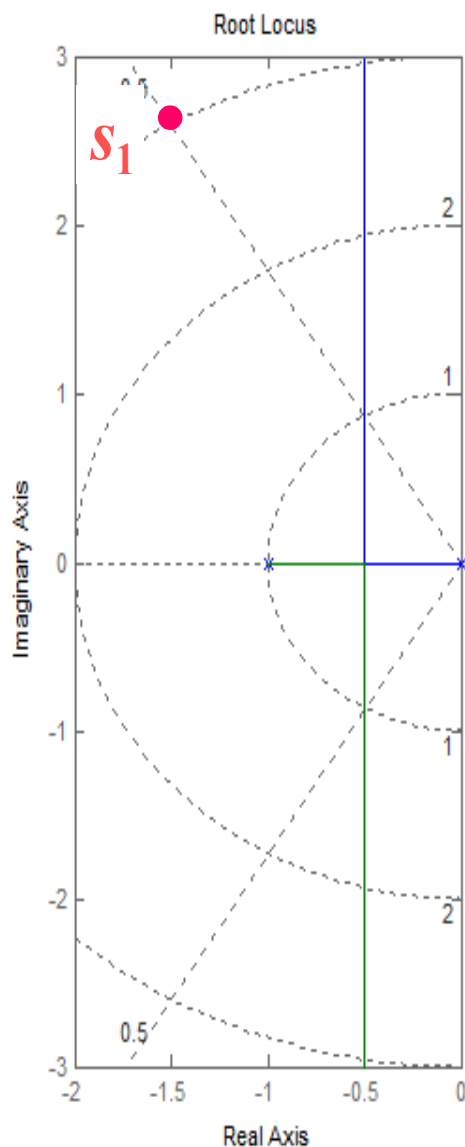
3. 设某单位反馈系统的开环传递函数为:

$$G_o(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

试对该系统进行串联校正, 要求校正后系统的闭环主导极点满足:  $\zeta = 0.5$ ,  $\omega_n = 3\text{s}^{-1}$

(在给定的坐标图中画出校正前后的根轨迹)。

### 3. 解： 1) 画出校正前原系统的根轨迹：



期望的闭环主导极点：

$$s_1 = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = -1.5 \pm j2.6$$

期望的闭环主导极点位于原系统根轨迹的左侧，故缺个超前角，应串联**超前**校正网络进行校正。

## 2) 确定超前校正网络

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad \alpha < 1$$

### (1) 确定超前相位角

$$\begin{aligned} \angle G_0(s_1) &= [-\angle s - \angle(s+1)]_{s=s_1} \\ &= -\angle(-1.5 + j2.6) - \angle(-0.5 + j2.6) \\ &= -220.9^\circ \end{aligned}$$

$$\phi_c = \angle G_c(s_1) = -180^\circ - \angle G_0(s_1) = 40.9^\circ$$



## (2) 确定超前校正网络的零点和极点。 (即确定 $\alpha$ 、 $T$ )

选择  $T$ ，使  $\alpha$  为最大值。

$$\delta = \frac{1}{2}(180^\circ - \phi_c - \theta) = 39.55^\circ$$

$$|Z_c| = \frac{1}{T} = \frac{\sin \delta}{\sin(\delta + \theta)} \omega_n = 1.94$$

$$|P_c| = \frac{1}{\alpha T} = \frac{\sin(\phi_c + \delta)}{\sin \delta} \omega_n = 4.65$$

### (3) 确定 $K_c$

由幅值条件  $|G_c(s)G_0(s)|_{s=s_1} = 1$

$$K_c = 1.234$$

### (4) 超前校正网络:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = 1.234 \cdot \frac{s + 1.94}{s + 4.65}$$

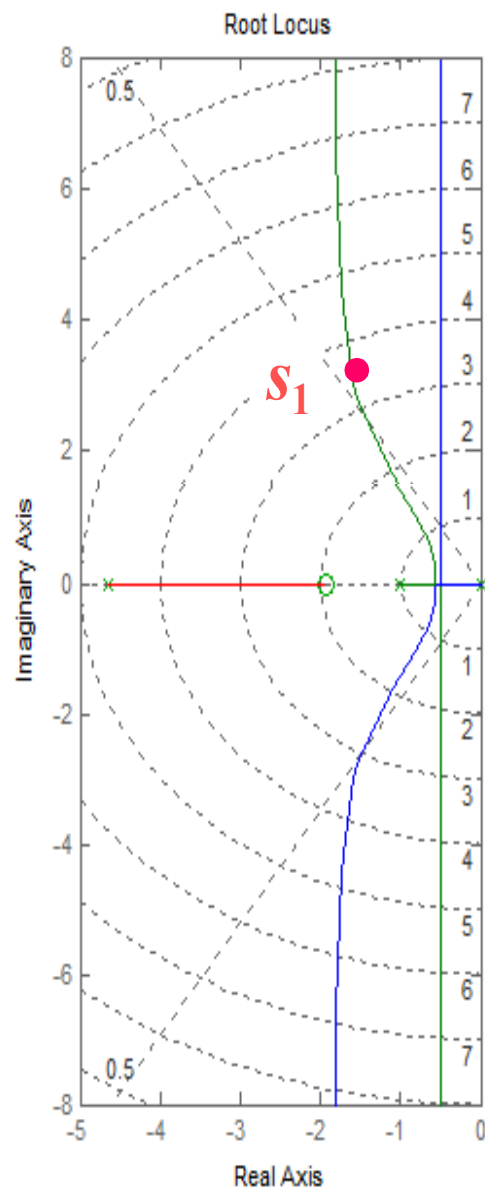
### 3) 检查 $s_1$ 是否为主导极点

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12.34(s+1.94)}{(s+1.5-j2.6)(s+1.5+j2.6)(s+2.65)}$$

第三个闭环极点为-2.65，与闭环零点-1.94很靠近，作用相消，对动态响应影响很小。

可以认为  $s_1 = -1.5 \pm j2.6$  是主导极点。

#### 4) 画出校正后系统根轨迹，验算性能指标。



只考虑主导极点，  
将三阶系统按二阶无零点欠阻尼系统近似估算。

满足性能指标要求。

4. 设某单位反馈系统的开环传递函数为:

$$G_o(s) = \frac{2.688}{s(s+1)(s+4)}$$

试对该系统进行串联校正, 使之满足以下性能指标:  
超调量小于等于16.3%, 调节时间小于等于12s( $\Delta=0.02$ ),  
速度误差系数  $K_v \geq 5s^{-1}$ 。(在给出的坐标图中画出校正前后的根轨迹)。



解： 1) 对原系统进行分析，根据  $G_o(s) = \frac{2.688}{s(s+1)(s+4)}$ ，得

$$T_0(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{2.688}{(s+4.2)(s+0.4+j0.693)(s+0.4-j0.693)}$$

主导极点为  $s_{01,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.4 \pm j0.693$

$$\Rightarrow \zeta_0 = 0.5, \quad \omega_{n0} = 0.8$$

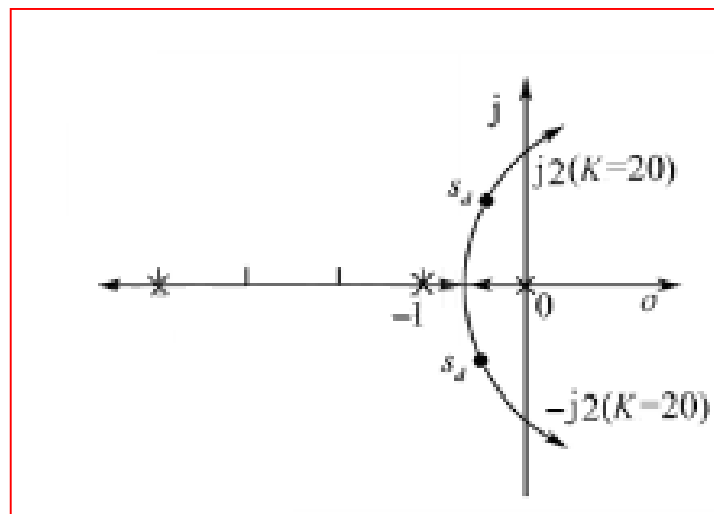
得  $P.O. = 16.3\%$ ,  $T_s = 10s$  ( $\Delta = 0.02$ )

动态性能指标满足要求。

$$K_{v0} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{2.688}{s(s+1)(s+4)} = 0.672s^{-1}$$

不满足稳态性能指标  $K_v \geq 5s^{-1}$ 。

## 2) 绘制未校正系统的根轨迹图



3) 由于原系统满足期望的动态性能，因此可设定期望的主导极点为原系统的主导极点，即

$$s_{1,2} = s_{01,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.4 \pm j0.693$$

- 4) 因为期望的主导极点在原系统的根轨迹上，因此选择滞后校正改善稳态特性。
- 5) 原系统在期望主导极点处的增益和稳态速度误差系数为：

$$K|_{s=s_{1,2}} = K_0 = 2.688$$

$$K'_{v0} = K_{v0} = 0.672s^{-1}$$

则

$$\alpha = \frac{K_v}{K'_{v0}} = \frac{5}{0.672} = 7.44$$

为留有余量，取  $\alpha = 10$ 。

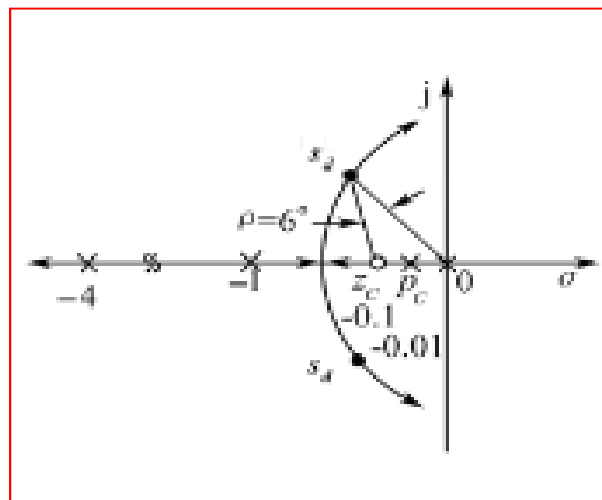


## 6) 由根轨迹可得

$$-z = -0.1$$

则 
$$-p = \frac{-z}{\alpha} = -0.01$$

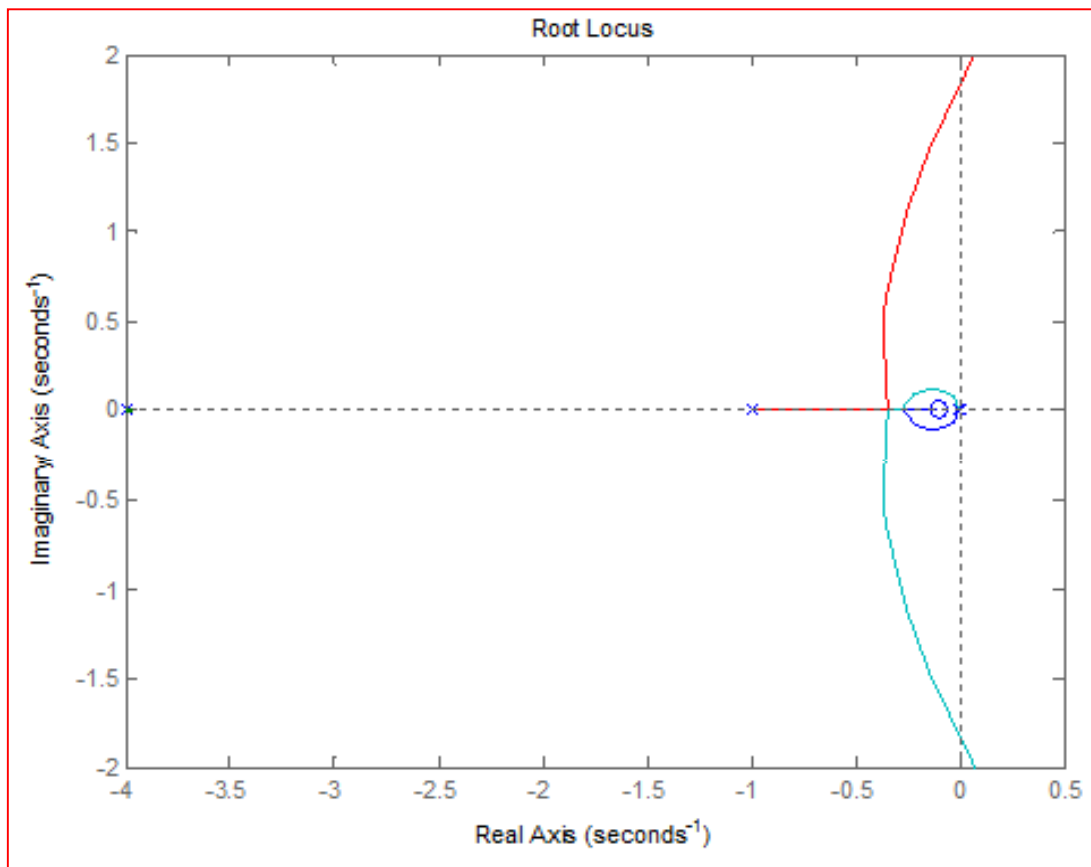
$$G_c(s) = K_c \times \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$



## 7) 校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{K_c \times 2.688(s + 0.1)}{s(s + 1)(s + 4)(s + 0.01)} = \frac{K(s + 0.1)}{s(s + 1)(s + 4)(s + 0.01)}$$

画出校正后系统的根轨迹图。



假设超调量不变，则  $\zeta=0.5$ ，由校正后系统的根轨迹图可得：  
实际的主导极点为： $s'_{1,2} = -0.36 \pm j0.61 \rightarrow \zeta = 0.5, \omega_n = 0.72$

## 8) 确定增益 $K_c$

$$\left| K_c \times \frac{s+0.1}{s+0.01} \times \frac{2.688}{s(s+1)(s+4)} \right|_{s=-0.36+j0.61} = 1$$

$$\Rightarrow K_c = 0.946$$

## 9) 滞后校正装置

$$G_c(s) = K_c \times \frac{s+0.1}{s+0.01} = \frac{0.946(s+0.1)}{s+0.01}$$

经检验闭环极点  $s'_{1,2}$  是校正后系统的闭环主导极点。

## 10) 校正后系统性能

$$P.O. = 16.3\%, \quad T_s = 11s \quad (\Delta = 0.02)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{0.946(s+0.1)}{(s+0.01)} \times \frac{2.688}{s(s+1)(s+4)} = 6.36 > 5s^{-1}$$

校正后系统满足性能指标要求。