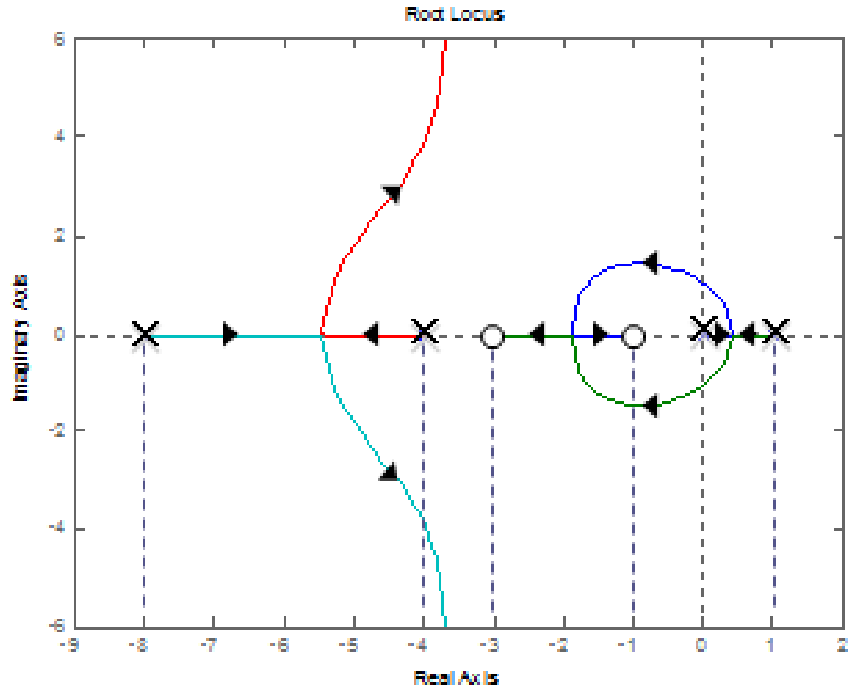
作业解答—第4章

1. 试确定具有如下根轨迹的控制系统的开环传递函数。



解：

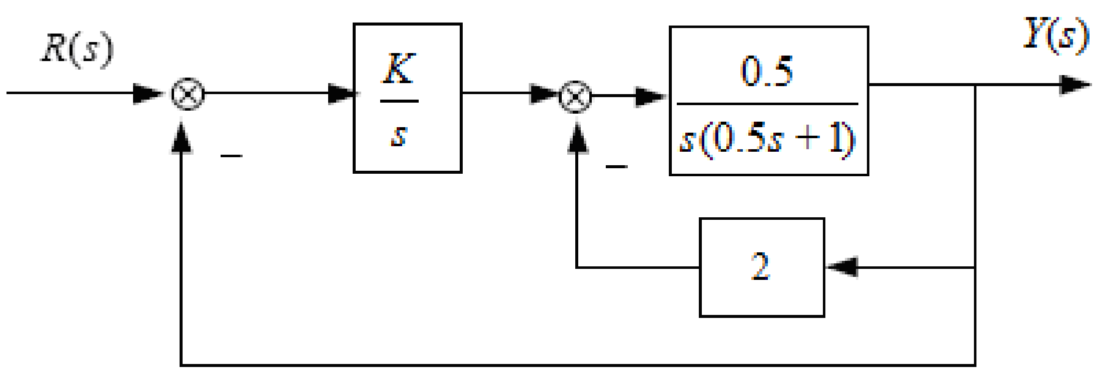
$n=4 \quad -p_{o1}=1 \quad -p_{o2}=0 \quad -p_{o3}=-4 \quad -p_{o4}=-8$

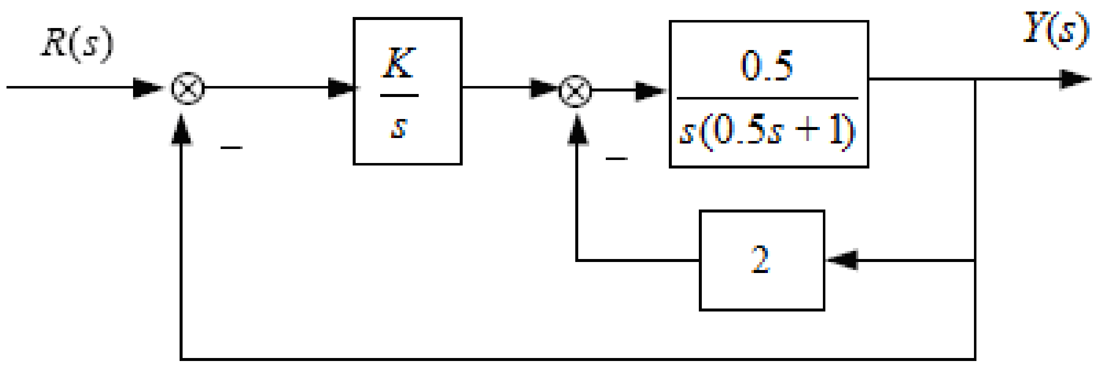
$m=2 \quad -z_{o1}=-1 \quad -z_{o2}=-3$

开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=KP(s)=\frac{K(s+1)(s+3)}{s(s-1)(s+4)(s+8)}$$

2. 求某反馈系统的方框图如下图所示。试在给出的坐标系中绘制K从0变到∞时该系统的根轨迹图。





解：系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K}{s}\times\frac{0.5}{s(0.5s+1)+0.5\times 2}=\frac{K}{s(s^2+2s+2)}$$

（1）开环极点：

$$n=3,\qquad -p_{o1}=0,\qquad -p_{o2}=-1+j,\qquad -p_{o3}=-1-j$$

开环零点：

$m=0,$ 无有限开环零点

根轨迹分支数： $n=3$

（2）实轴上的根轨迹段：

$$(-\infty,\quad 0]$$

（3）渐近线条数： $N = n - m = 3$

渐近线与实轴交点：

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_{oj}) - \sum_{i=1}^{m}(-z_{oi})}{n-m} = \frac{0+(-1+j)+(-1-j)}{3} = -\frac{2}{3}$$

渐近线与实轴夹角：

$$\varphi_A = \frac{2k+1}{n-m}\times 180^\circ = 60^\circ,\quad 180^\circ,\quad 300^\circ$$

（4）求与虚轴交点

系统的特征方程为：

$$q(s)=s(s^2+2s+2)+K=s^3+2s^2+2s+K=0$$

令 $s=j\omega$ 代入特征方程，得

$$\begin{cases} j\omega[(j\omega)^2+2]=0 \\ 2(j\omega)^2+K=0 \end{cases}$$

解得:

$$\omega_1=0 \quad K=0; \qquad \omega_{2,3}=\pm\sqrt{2} \quad K=4$$

根轨迹与虚轴的交点为 $\pm j\sqrt{2}$

（5）$-p_{o2}$的出射角

$$-\theta_{-po2}-\angle[-p_{o2}-(-p_{o1})]-\angle[-p_{o2}-(-p_{o3})]=(2k+1)\times180^{\circ}$$

$$\theta_{-po2}=-(2k+1)\times180^{\circ}-\angle(-1+j)-90^{\circ}=-(2k+1)\times180^{\circ}-135^{\circ}-90^{\circ}$$

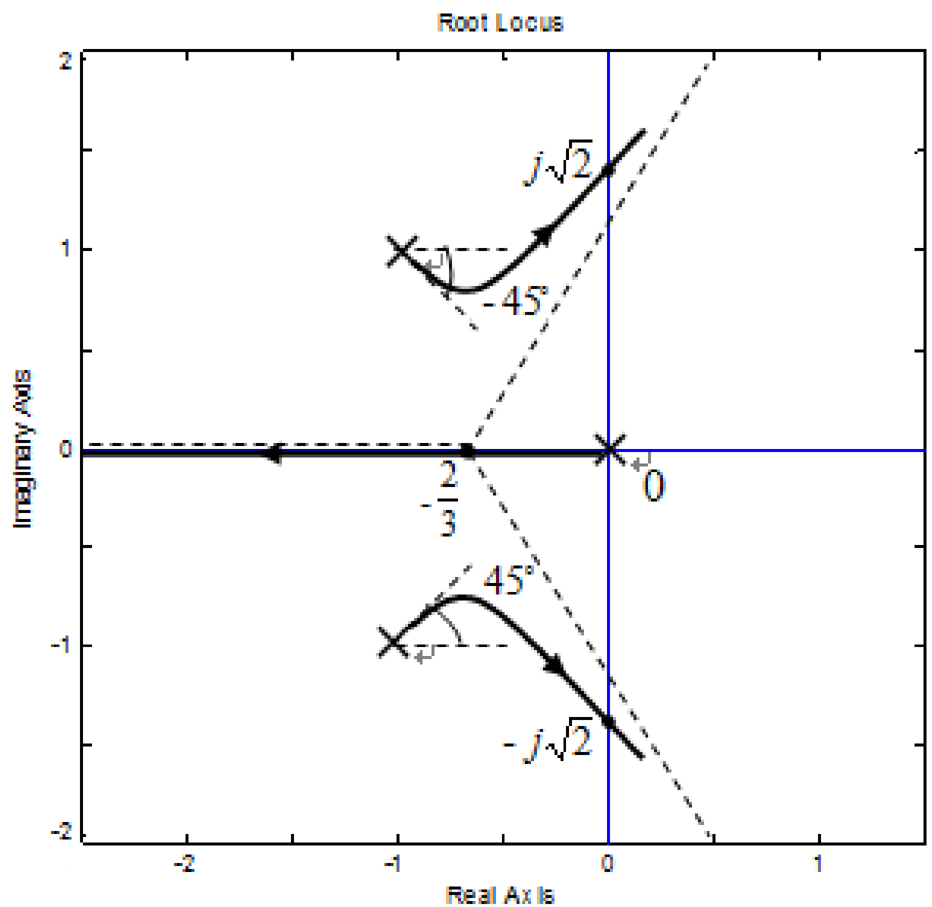
取$k=-1$，则

$$\theta_{-po2}=-45^{\circ}$$

因为$-p_{o3}$和$-p_{o2}$共轭，因此$-p_{o3}$的出射角为：

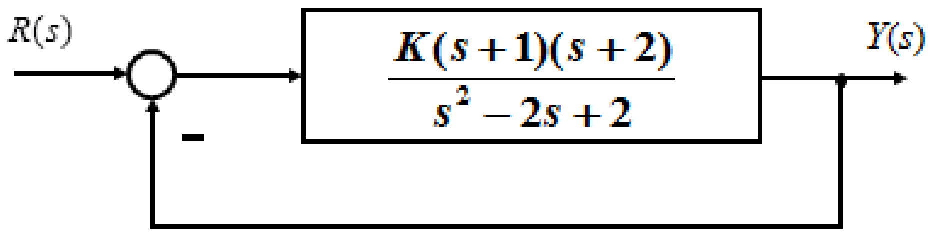
$$\theta_{-po3}=45^{\circ}$$

（6）K从0变到∞ 时该系统的根轨迹图为：



西南交通大學

3. 某反馈控制系统的框图如下图所示：



（1）在给出的坐标系中绘制系统当K从零变化到无穷时的根轨迹。

（2）确定系统稳定的K值范围。

（3）确定系统临界阻尼时对应的K值。

（4）计算当ζ=0.707时，闭环极点对应的K值。

(1) 系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K(s+1)(s+2)}{s^2-2s+2}$$

开环极点：

$$n=2,\qquad -p_{o1}=1+j,\qquad -p_{o2}=1-j$$

开环零点：

$$m=2,\qquad -z_{o1}=-1,\qquad -z_{o2}=-2$$

根轨迹分支数：

$$n=2$$

实轴上的根轨迹段：

[-2, -1]

求分离点：

$$P(s)=\frac{z_o(s)}{p_o(s)}=\frac{(s+1)(s+2)}{s^2-2s+2}$$

$$z_o(s)=(s+1)(s+2) \qquad p_o(s)=s^2-2s+2$$

$$z_o'(s)=2s+3 \qquad p_o'(s)=2s-2$$

$$z_o'(s)p_o(s)-p_o'(s)z_o(s)=(2s+3)(s^2-2s+2)-(s+1)(s+2)(2s-2)=0$$

$$5s^2-10=0 \quad \Rightarrow \quad s_1=\sqrt{2},\ s_2=-\sqrt{2}$$

代入特征方程，得：

$$K_1 = -0.142 < 0,\ K_2 = 28.14 > 0$$

即 $s_2 = -\sqrt{2}$ 为分离点。该分离点的分离角为：

$$\theta_d = \frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \begin{cases} 90^\circ, & k = 0 \\ 270^\circ, & k = 1 \end{cases}$$

求与虚轴交点

系统的特征方程为:

$$q(s)=s^2-2s+2+K(s+1)(s+2)=0$$

令 $s=j\omega$ 代入特征方程，得

$$\begin{cases}(j\omega)^2+2+K[(j\omega)^2+2]=0\\ -2(j\omega)+3K(j\omega)=0\end{cases}$$

解得: $\omega_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ $\quad K=\dfrac{2}{3}$

根轨迹与虚轴的交点为: $\pm j\sqrt{2}$

$-p_{o1}$的出射角

$$\angle[-p_{o1}-(-z_{o1})]+\angle[-p_{o1}-(-z_{o2})]-\theta_{-po1}-\angle[-p_{o1}-(-p_{o2})]=(2k+1)\times 180^{\circ}$$

$$\theta_{-po1}=-(2k+1)\times 180^{\circ}+\angle(2+j)+\angle(3+j)-90^{\circ}=-(2k+1)\times 180^{\circ}+26.6^{\circ}+18.4^{\circ}-90^{\circ}$$

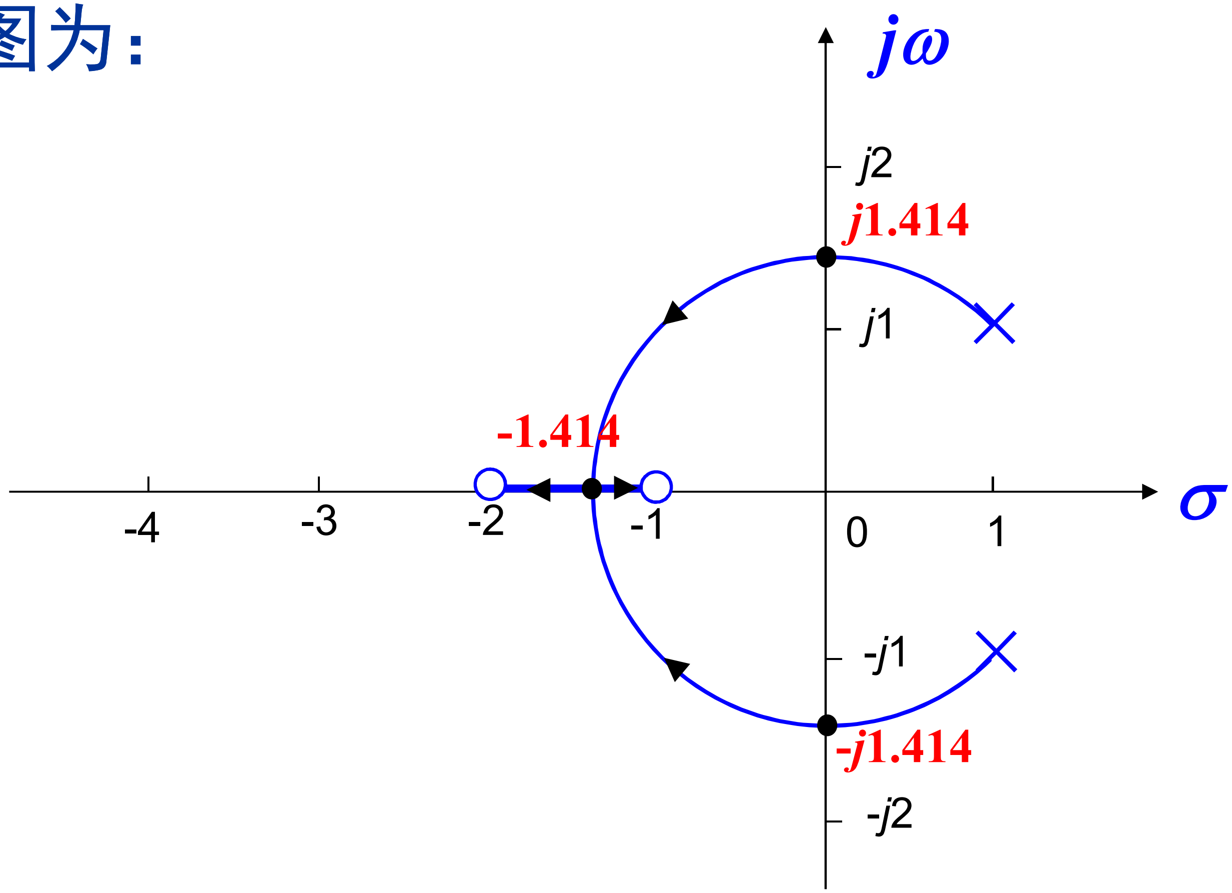
取$k=-1$，则

$$\theta_{-po1}=135^{\circ}$$

因为$-p_{o2}$和$-p_{o1}$共轭，因此$-p_{o2}$的出射角为：

$$\theta_{-po2}=-135^{\circ}$$

根据含零点的二阶系统在实轴以外的根轨迹为圆或圆弧，可得系统当K从零变化到无穷时的根轨迹图为：



(2) 稳定的K值范围为: $K > \dfrac{2}{3}$

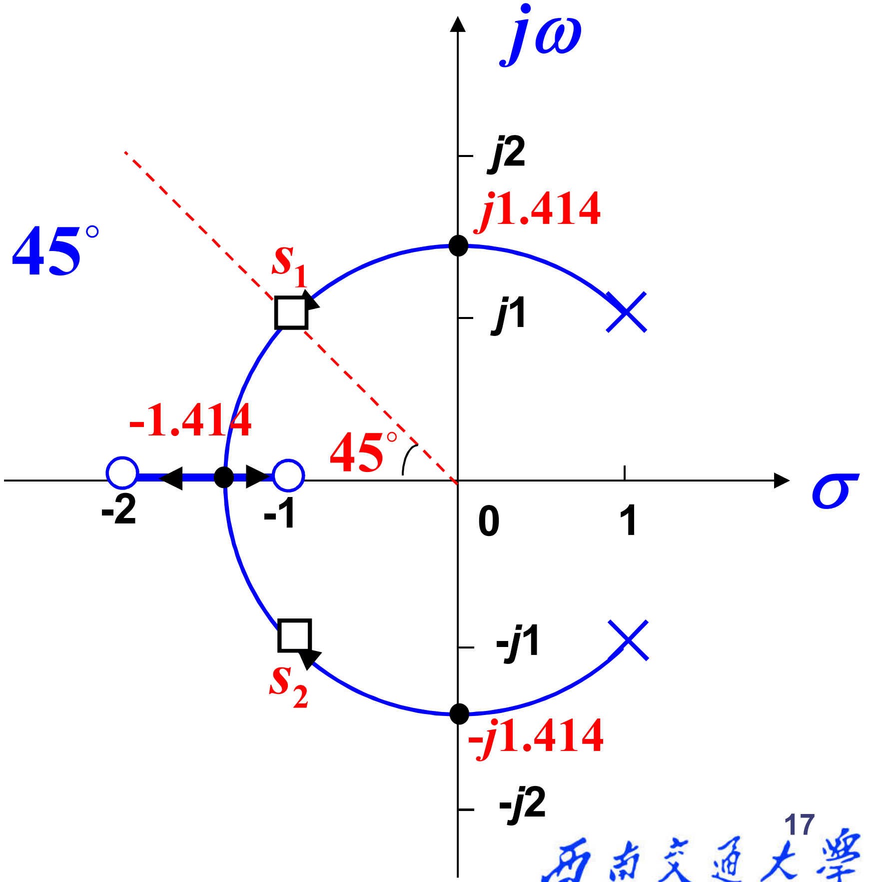
(3) 系统临界阻尼对应的 K值为： 28.14

(4) 当 $\zeta = 0.707$ ，

$$\theta = \cos^{-1}\zeta = \cos^{-1}0.707 = 45^\circ$$

设 $\zeta = 0.707$ 时对应的

闭环极点为s_1 和 s_2。

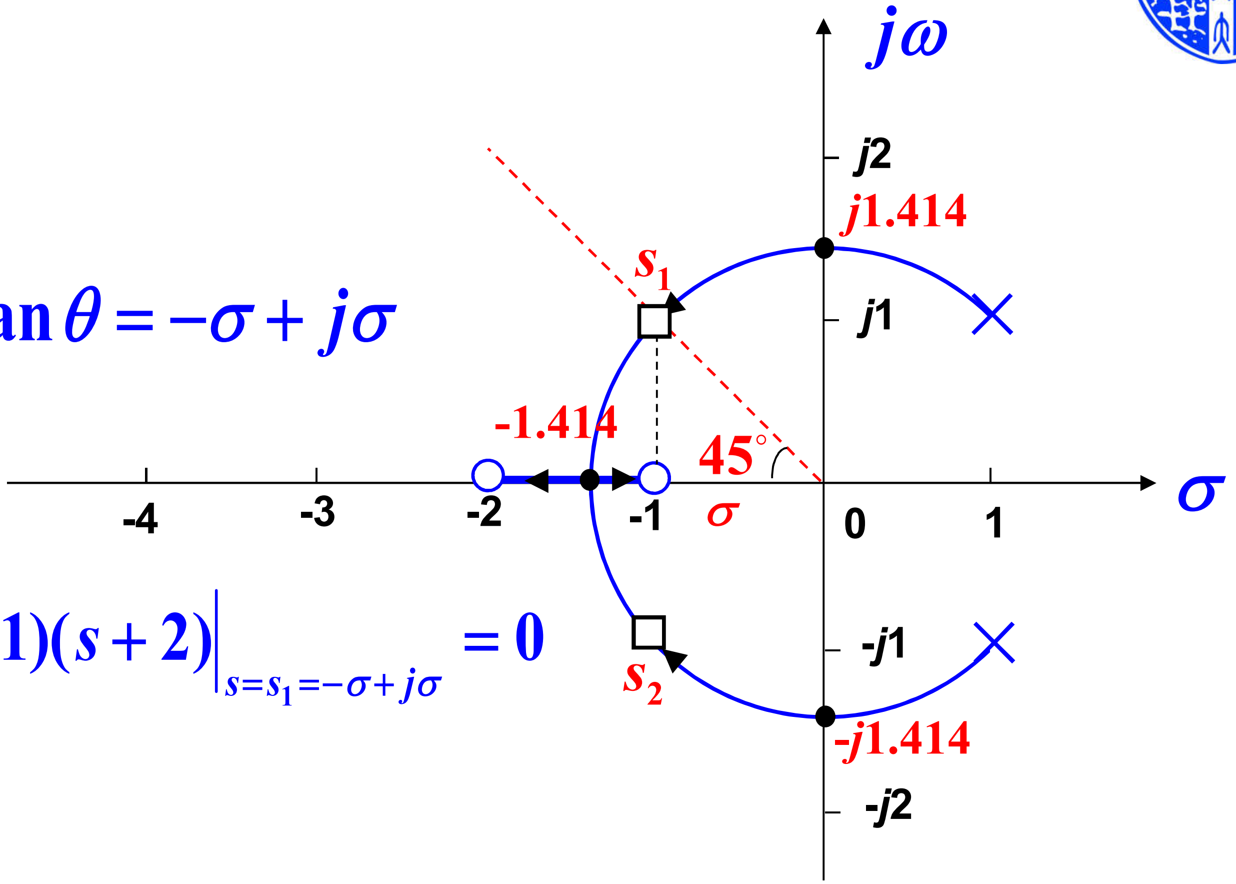


令

$$s_1 = -\sigma + j\sigma\tan\theta = -\sigma + j\sigma$$

则

$$s^2 - 2s + 2 + K(s+1)(s+2)\Big|_{s=s_1=-\sigma+j\sigma} = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = 1 \\ K = 4 \end{cases}$$

当 $\zeta = 0.707$ 时，闭环极点对应的K值为4 。

4. 某负反馈控制系统的特征方程为：

$$s^3+3s^2+(K+2)s+4K=0$$

试在给出的坐标系中绘制系统的根轨迹。

解：① 确定开环极点和开环零点

$$s^3+3s^2+(K+2)s+4K=0$$

$$\Rightarrow\quad 1+\frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)}=0$$

$$\Rightarrow\quad G(s)H(s)=KP(s)=K\frac{s+4}{s(s+1)(s+2)}$$

开环极点： $-p_{o1}=0$ $-p_{o2}=-1$ $-p_{o3}=-2$ $(n=3)$

开环零点： $-z_{o1}=-4$ $(m=1)$

根轨迹的分支数n=3，根轨迹分支关于实轴对称。

② 确定实轴上的根轨迹

[-4, -2]　　[-1, 0]

③ 确定渐近线

渐近线条数：$n-m=2$

渐近线中心点

$$\sigma_A=\frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_{oj})-\sum_{i=1}^{m}(-z_{oi})}{n-m}=\frac{0-1-2-(-4)}{2}=\frac{1}{2}$$

渐近线倾角

$$\phi_A=\frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}=\begin{cases}90^\circ, & k=0\\ 270^\circ, & k=1\end{cases}$$

④ 确定实轴上的分离点

$$P(s)=\frac{s+4}{s(s+1)(s+2)}=\frac{z_o(s)}{p_o(s)}$$

$$z_o(s)=s+4 \qquad p_o(s)=s(s+1)(s+2)$$

$$z_o'(s)=1 \qquad p_o'(s)=3s^2+6s+2$$

$$z_o'(s)p_o(s)-p_o'(s)z_o(s)=(s^3+3s^2+2s)-(s+4)(3s^2+6s+2)=0$$

试探法 $F(0)=8$ $F(-1)=-3$ $F(-0.5)=-0.5$

$F(-0.4)=0.672$ $F(-0.45)=0.055$ $F(-0.46)=-0.061$

$$\boxed{F(-0.455)=-0.003}$$

因此：

$$s_1 = -0.455 \qquad (K_1 = 0.108 > 0)$$

$$2s^3 + 15s^2 + 24s + 8 = 0$$

$$(s + 0.455)(2s^2 + 14.09s + 17.59) = 0$$

$$s_2 = -1.62 \qquad s_3 = -5.42$$

$$(K_2 < 0, \quad K_3 < 0)$$

则分离点为 -0.455。

该分离点的分离角为：

$$\theta_d = \frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \begin{cases} 90^\circ, & k=0 \\ 270^\circ, & k=1 \end{cases}$$

⑤ 确定根轨迹与虚轴的交点

特征方程为：

$$s^3+3s^2+(K+2)s+4K=0$$

令 $s=j\omega$，得：

$$\begin{cases} j\omega[(j\omega)^2+K+2]=0 \\ 3(j\omega)^2+4K=0 \end{cases}$$

解得：

$$\omega_1=0,\quad K=0;\qquad \omega_{2,3}=\pm 2\sqrt{2},\quad K=6$$

根轨迹和虚轴的交点为： $\pm j2\sqrt{2}=\pm j2.828$

⑤ 确定根轨迹与虚轴的交点（利用劳斯表）

特征方程为：

$$s^3+3s^2+(K+2)s+4K=0$$

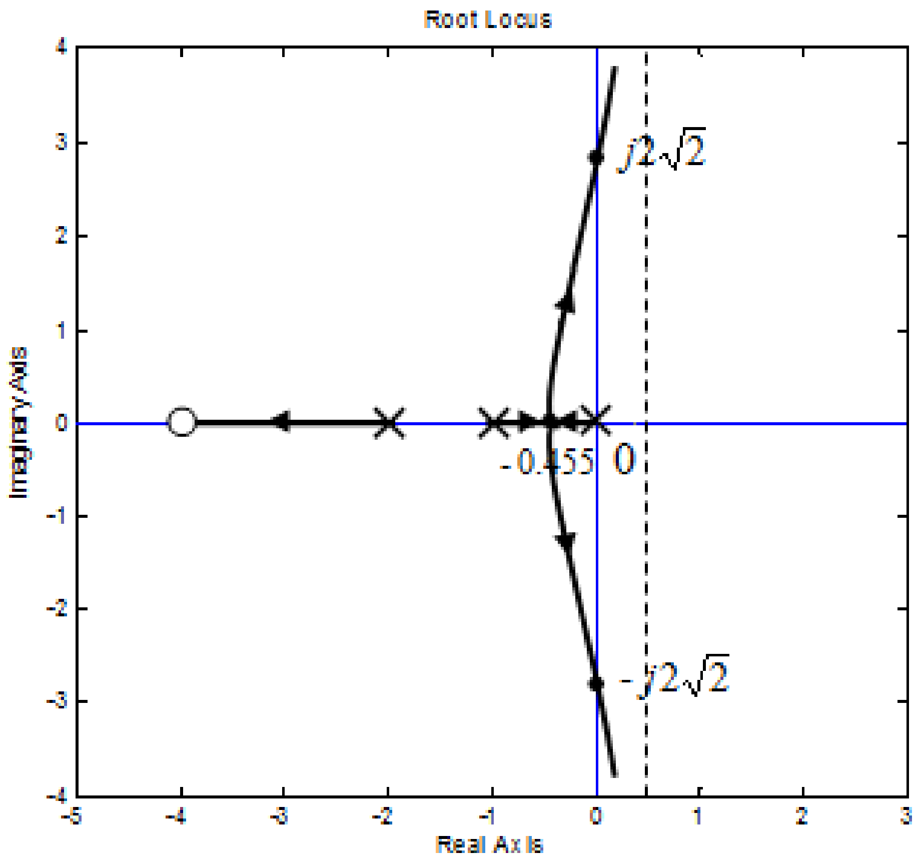
劳斯表

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & K+2 \\
s^2 & 3 & 4K \\
s^1 & \dfrac{-K+6}{3} & \\
s^0 & 4K &
\end{array}$$

$$\frac{-K+6}{3}=0 \Rightarrow K=6$$

$$3s^2+24=0 \Rightarrow s=\pm j2\sqrt{2}$$

⑥ 用箭头标出各根轨迹分支的方向，得根轨迹图为：



5. 某单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{4(s^2+1)}{s(s+a)}$$

试在给出的坐标系中画出$0 \le a < \infty$时的根轨迹图。

解：系统的特征方程为：

$$1+G(s)=1+\frac{4(s^2+1)}{s(s+a)}=\frac{s(s+a)+4(s^2+1)}{s(s+a)}=0$$

$$5s^2+4+as=0$$

$$1+\frac{as}{5s^2+4}=0$$

等效的开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=\frac{as}{5s^2+4}=\frac{as}{5(s^2+0.8)}$$

(1) 开环极点：

$$n=2, \qquad -p_{o1,2}=\pm j0.8944$$

开环零点：

$$m=1, \qquad -z_{o1}=0$$

根轨迹的分支数 n=2，根轨迹分支关于实轴对称。

（2）实轴上的根轨迹段

$$(-\infty, \quad 0]$$

（3）渐近线条数 $n-m=1$

渐近线中心点

$$\sigma_A=\frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_{oj})-\sum_{i=1}^{m}(-z_{oi})}{n-m}=\frac{(j0.8944)+(-j0.8944)-(0)}{1}=0$$

渐近线倾角

$$\varphi_A=\frac{2k+1}{n-m}\times180^\circ=180^\circ$$

(4) 求实轴上的分离点

$$P(s)=\frac{z_o(s)}{p_o(s)}=\frac{s}{5(s^2+0.8)}$$

$$z_o(s)=s \qquad p_o(s)=5(s^2+0.8)$$

$$z_o'(s)=1 \qquad p_o'(s)=10s$$

$$z_o'(s)p_o(s)-p_o'(s)z_o(s)=(5s^2+4)-10s^2=0$$

$$s_1=-0.8944,\ s_2=0.8944$$

代入特征方程，得 $K_1=8.94>0,\ K_2<0$

则分离点为 -0.8944。

该分离点的分离角为：

$$\theta_d = \frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \begin{cases} 90^\circ, & k=0 \\ 270^\circ, & k=1 \end{cases}$$

(5) $-p_{o1}$的出射角

$$\angle[-p_{o1}-(-z_{o1})]-\theta_{-po1}-\angle[-p_{o1}-(-p_{o2})]=(2k+1)\times180^{\circ}$$

$$\theta_{-po1}=-(2k+1)\times180^{\circ}+90^{\circ}-90^{\circ}=-(2k+1)\times180^{\circ}$$

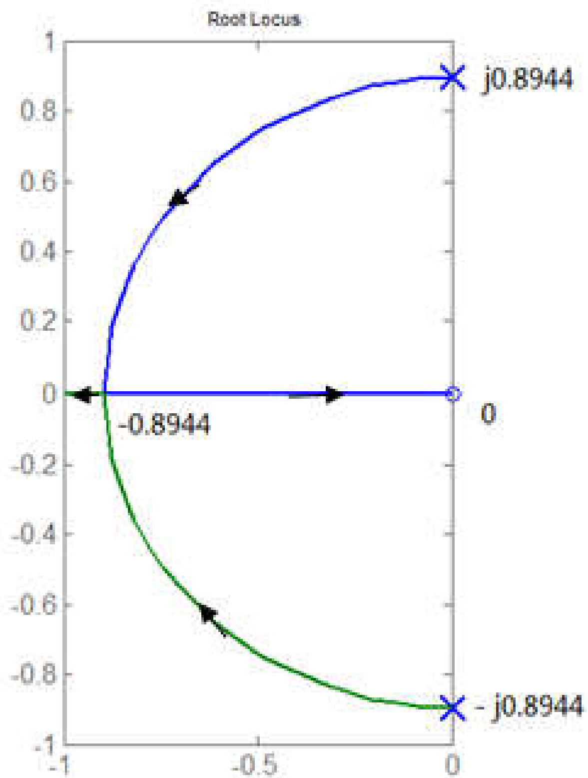
取$k=-1$，则

$$\theta_{-po1}=180^{\circ}$$

因为$-p_{o2}$和$-p_{o1}$共轭，因此$-p_{o2}$的出射角为：

$$\theta_{-po2}=-180^{\circ}$$

(6) $0 \le a < \infty$时的根轨迹图



7. 某单位负反馈系统的开环传递函数为：

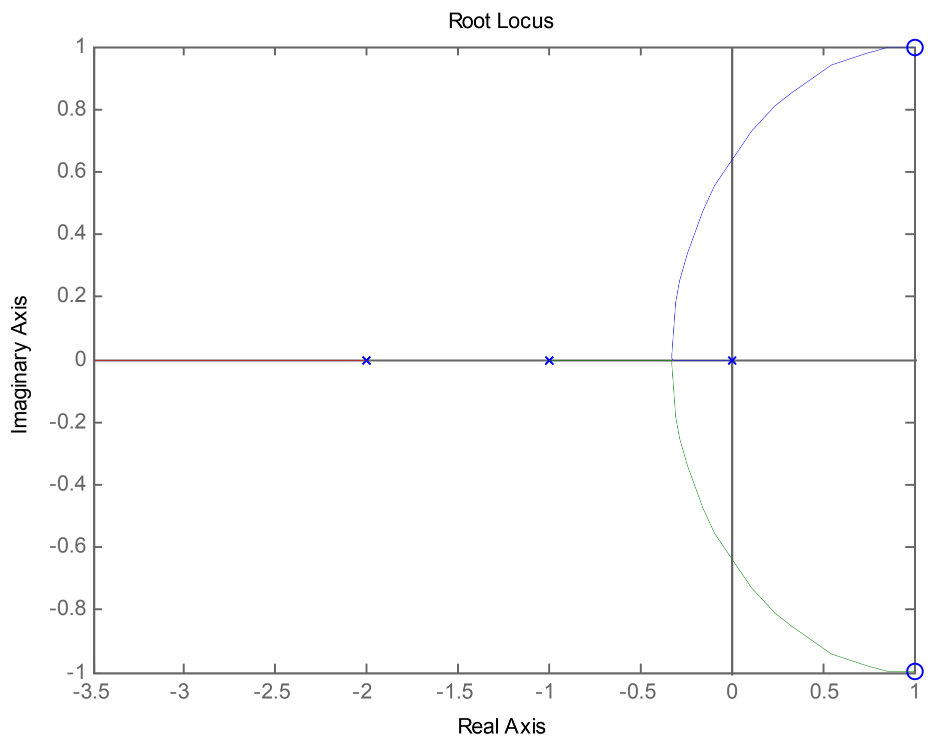
$$KG(s) = K\frac{s^2 - 2s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

编写m脚本程序绘制系统的根轨迹图，并用rlocfind函数验证，保证系统稳定时，K的最大值为K=0.79。

$$KG(s) = K\frac{(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

MATLAB 脚本文件:

```
>> num = [1 -2 2];
>> den = [1 3 2 0];
>> sys = tf(num, den);
>> rlocus(sys)
>> rlocfind(sys)
```



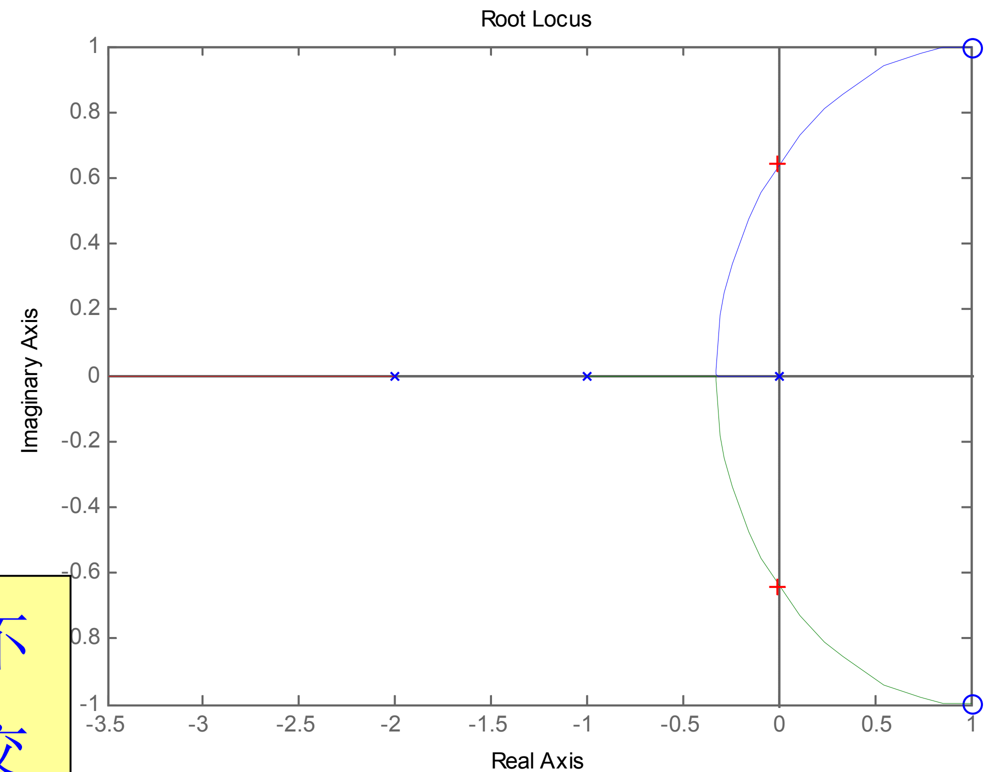
Select a point in the graphics window

selected_point =

0.0016 + 0.6386

ans =

0.7823



注：因为鼠标点击不易取到虚轴上的相交点，所以只能近似。