Không gian vector[1]

PGS. TS. Mai Hoàng Biên

Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TP. HCM

Nội dung chính

[1]File này chỉ là hỗ trợ bài giảng. Sinh viên cần tham gia đầy đủ buổi học để được giải thích kỹ hơn

Nội dung chính

1. Các khái niệm cơ bản.
2. Không gian vector con.
3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.
4. Cơ sở, số chiều và tọa độ
5. Một số không gian vector con

Lịch sử ngắn gọn về Không gian vector[2]

1. Có thể xem khái niệm không gian vector xuất hiện từ vật lý với không gian 2 chiều $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.
2. Trước khi Peano dùng "ngôn ngữ trừu tượng" năm 1888, cấu trúc không gian vector được phát triễn và khám phá một cách rời rạc:
    1. Fermat và Descartes (thế kỷ 17),
    2. Bolzano (1804).
    3. Hamilton đưa ra một cấu trúc đại số 4 chiều (1843), một trong những cấu trúc quan trọng trong vật lý lý thuyết.
    4. ...
    5. Peano được xem là "người xây dựng" nên khái niệm không gian vector như ngày nay.
3. Nó liên quan tới các ngành khác như Vật lý, Thống kê, Kinh tế, ...

[2] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Abstract_linear_spaces/

Bài 1. Các khái niệm cơ bản

1.1. Định nghĩa.

Cho trường K và tập hợp V khác rỗng. Giả sử V và K có hai phép toán:
(i) cộng (+) trong V: với mỗi $u, v \in V$, có duy nhất phần tử trong V ký hiệu là $u + v$;
(ii) và phép nhân (·) của K **và** V: với mỗi $\alpha \in K$ và $v \in V$, có duy nhất phần tử trong V, ký hiệu là $\alpha \cdot v$.
Ta nói V là không gian vector nếu hai phép toán trên thỏa 8 tính chất sau với mọi $u, v, w \in V$ và $\alpha, \beta \in K$:

1. $u + v = v + u$ (tính giao hoán của phép $+$).
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (tính kết hợp của phép $+$).
3. $\exists 0_V \in V : u + 0_V = 0_V + u = u$ (có phần tử "trung hòa"). Ta gọi 0_V là *vector không, phần tử không* hoặc *phần tử trung hòa*
4. $\exists u' \in V : u + u' = u' + u = 0_V$ (có phần tử "đối"). Ta ký hiệu $-u = u'$.
5. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (tính phân phối giữa phép nhân và phép cộng trong K).
7. $\alpha(\cdot u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (tính phân phối giữa phép nhân và phép cộng trong V).
8. $1 \cdot u = u$ (tính "trung hòa" của 1).

Nếu không có gì nhầm lẫn, ta viết gọn 0 là 0_V và αv thay cho $\alpha \cdot v$ với $\alpha \in K$ và $v \in V$

Ví dụ

1.

Đặt $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Ta định nghĩa hai phép toán $+$ và nhân $(\cdot)$ trên $\mathbb{R}^2$ như sau: với $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ và $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. Phép cộng: $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
2. Phép nhân ngoài: $\alpha a = \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)$.

Khi đó, $\mathbb{R}^2$ là không gian vector với $(0, 0)$ là phần tử trung hòa và phần tử đối của $a = (a_1, a_2)$ là $-a = (-a_1, -a_2)$.
Chú ý. Ta bỏ dấu mũi tên $a = (a_1, a_2)$ so với $\vec{a} = (a_1, a_2)$ những gì đã biết ở toán phổ thông.

Ví dụ

2.

Một cách tổng quát. Với $n \geq 2$. Đặt $\mathbb{R}^n = \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$. Ta định nghĩa hai phép toán $+$ và nhân $(\cdot)$ trên $\mathbb{R}^n$ như sau: với $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. Phép cộng: $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
2. Phép nhân ngoài: $\alpha a = \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$.

Khi đó, $\mathbb{R}^n$ là không gian vector với

1. $(0, 0, \ldots, 0)$ là phần tử trung hòa
2. và phần tử đối của $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là $-a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Ví dụ

3. Không gian nghiệm

Gọi V là tập hợp tất cả nghiệm của hệ pttt thuần nhất trên K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Giả sử $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ và $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ là hai nghiệm của hệ pttt trên và $\alpha \in K$. Khi đó, ta có $(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n)$ và $(\alpha c_1, \alpha c_2, \ldots, \alpha c_n)$ cũng là nghiệm của hệ pttt. Từ đây, nó cho phép ta định nghĩa hai phép toán cộng và nhân ngoài trên V. Khi đó, V là không gian vector trên K với

1. $(0, 0, \ldots, 0)$ là phần tử trung hòa
2. và phần tử đối của $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là $-a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Không gian vector này được gọi là *không gian nghiệm*.

Ví dụ

4. Không gian ma trận

Với tập hợp các ma trận $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ với hai phép toán cộng là cộng hai ma trận và nhân $\alpha \in K$ với ma trân A như đã biết thì $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ lập thành không gian vector với phần tử trung hòa là $0_{m\times n}$ và ma trận đối là ma trận $-A = (-1)A$.

Ví dụ

5. Không gian dãy số thực

Cho V là tập hợp các dãy số thực $\{v_i\}_{i\geq 1} = v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$. Khi đó, Ta định nghĩa tổng hai dãy số và tích một số với dãy số như sau: với $u = \{u_i\}_{i\geq 1} = u_1, u_2, \ldots; v = \{v_i\}_{i\geq 1} = v_1, v_2, \cdots \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. Phép cộng: $u + v = \{u_i + v_i\}_{i\geq 1} = u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots$
2. Phép nhân ngoài: $\alpha u = \{\alpha u_i\}_{i\geq 1}$.

Khi đó, V là không gian vector với

1. $\{0\}_{i\geq 1} = 0, 0, \ldots$ là phần tử trung hòa
2. và phần tử đối của v là $-v = \{-v_i\}_{i\geq 1} = -v_1, -v_2, \ldots$.

Ví dụ

Rất nhiều cấu trúc không gian vector trên $\mathbb{R}$ như:
6. V gồm các hàm số khả vi trên $[a, b]$.
7. V gồm các số có đại hàm vô hạn lần trên $[a, b]$.
8. V tập tất cả các đa thức hệ số thực.
9. Với n nguyên dương. V_n tập tất cả các đa thức bậc $\leq n$ hệ số thực.
với hai phép toán cộng và nhân thông thường đã biết ở phổ thông.
....

Ví dụ

10. Cho $V = (0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Ta định nghĩa hai phép toán cộng [a] như sau: với $u, v \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $u \oplus v = uv$.
2. $\alpha \odot u = u^{\alpha}$.

[a] ta ký hiệu $\oplus$ và nhân $\odot$ để phân biệt với phép toán cộng và nhân thông thường

Khi đó, ta lần lượt kiểm tra 8 tiên đề thì V là không gian vector trên $\mathbb{R}$ với

1. Phần tử trung hòa $0_V = 1$.
2. Phần tử đối của $u \in V$ là $\frac{1}{u}$. (làm sao tìm được phần tử trung hòa và phần tử đối?)

10. Với $u, v \in V = (0, +\infty)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$
1. $u \oplus v = uv$ và 2. $\alpha \odot v = v^{\alpha}$.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $\exists 0_V \in V : u + 0_V = 0_V + u = u$
4. $\exists u' \in V : u + u' = u' + u = 0_V$
   Ta ký hiệu $-u = u'$.
5. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
7. $\alpha(\cdot u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
8. $1 \cdot u = u$

Giải. Cho $u, v, w \in V = (0, +\infty)$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
1. Ta có $u \oplus v = uv$ và $v \oplus u = vu = uv$. Suy ra $u \oplus v = v \oplus u$.
2. $(u \oplus v) \oplus w = (uv) \oplus w = uvw$ và $u \oplus (v \oplus w) = u \oplus (vw) = uvw$. Suy ra $(u + v) + w = u + (v + w)$.

3. Giả sử 0_V thỏa $0_V \oplus u = u \oplus 0_v = u \; \forall u \in V$. Suy ra, $0_V u = u$ hay $0_V = 1$. Ta kiểm lại, nếu $0_V = 1$ thì $0_V \oplus u = u \oplus 0_v = u$ nên phần tử trung hòa là $0_V = 1$.
4. Phần tử đối của $u \in V$ là $\frac{1}{u}$ (vì $u \oplus \frac{1}{u} = u\frac{1}{u} = 1 = 0_V$).

10. Với $u, v \in V = (0, +\infty)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ 1. $u \oplus v = uv$ và 2. $\alpha \odot v = v^\alpha$.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $\exists 0_V \in V : u + 0_V = 0_V + u = u$
4. $\exists u' \in V : u + u' = u' + u = 0_V$
   Ta ký hiệu $-u = u'$.
5. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
7. $\alpha(\cdot u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
8. $1 \cdot u = u$

8. Hiển nhiên $1 \odot u = u^1 = u$.

Giải. 5. Ta có $(\alpha\beta) \odot u = u^{\alpha\beta}$ và $\alpha \odot (\beta \odot u) = \alpha \odot (u^\beta) = (u^\beta)^\alpha = u^{\alpha\beta}$. Suy ra $(\alpha\beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$.
6. $(\alpha + \beta) \odot u = u^{\alpha+\beta} = u^\alpha u^\beta = (u^\alpha) \oplus (u^\beta) = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$.
7. $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot (uv) = (uv)^\alpha = u^\alpha v^\alpha = (u^\alpha) \oplus (v^\alpha) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$.

Bài tập. Xét xem với V và các phép toán sau trên $\mathbb{R}$ thì V có là không gian vector không?

11. Với $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = \{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in R, v_2 \neq 0\}$. Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 v_2)$.
2. $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2)$.

12. Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V = \mathbb{R}^2$ và $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $u + v = (3u_1 + 3v_1, u_2 + v_2)$.
2. $\alpha v = (3\alpha v_1, \alpha v_2)$.

"Thông thường", chúng ta thường kiểm tra lần lượt các tính chất trong tiên đề.

11. Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ và $\alpha \in \mathbb{R}$
1. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 v_2)$.
2. $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2)$.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $\exists 0_V \in V : u + 0_V = 0_V + u = u$
4. $\exists u' \in V : u + u' = u' + u = 0_V$
   Ta ký hiệu $-u = u'$.
5. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
7. $\alpha(\cdot u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
8. $1 \cdot u = u$

Giải. Cho $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in V = \mathbb{R}^2$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. Ta có $u + v = (u_1 + v_1, u_2 v_2)$ và $v + u = (v_1 + u_1, v_2 u_2) = (u_1 + v_1, u_2 v_2)$. Suy ra $u + v = v + u$.

2. $(u + v) + w = (u_1 + v_1, u_2 v_2) + (w_1, w_2) = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 v_2 w_2)$

và

$u + (v + w) = (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 w_2) = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 v_2 w_2)$.

Suy ra $(u + v) + w = u + (v + w)$.

11. Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ và $\alpha \in \mathbb{R}$
1. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 v_2)$.
2. $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2)$.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $\exists 0_V \in V : u + 0_V = 0_V + u = u$
4. $\exists u' \in V : u + u' = u' + u = 0_V$
   Ta ký hiệu $-u = u'$.
5. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
7. $\alpha(\cdot u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
8. $1 \cdot u = u$

Giải. 3. Giả sử $0_V = (x, y)$. Khi đó, $0_V + v = v \Leftrightarrow (x + v_1, yv_2) = (v_1, v_2)$. Suy ra $x = 0$ và $y = 1$. Thử lại, $(0, 1) + v = (v_1, v_2) = v + (0, 1)$. Suy ra $0_V = (0, 1)$.
4. Giả sử $v = (v_1', v_2')$ thỏa $v' + v = 0_V$. Khi đó, $(v_1' + v_1, v_2' v_2) = (0, 1)$.

Vậy $v_1' = -v_1$ và $v_2' = \frac{1}{v_2}$. Suy ra $-v = (-v_1, \frac{1}{v_2})$.

11. Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ và $\alpha \in \mathbb{R}$
1. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 v_2)$.
2. $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2)$.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $\exists 0_V \in V : u + 0_V = 0_V + u = u$
4. $\exists u' \in V : u + u' = u' + u = 0_V$
   Ta ký hiệu $-u = u'$.
5. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
7. $\alpha(\cdot u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
8. $1 \cdot u = u$

Giải. 5. $(\alpha\beta)v = (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2)$ và $\alpha(\beta v) = \alpha(\beta v_1, \beta v_2) = (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2)$. Vậy $(\alpha\beta)v = \alpha(\alpha v$.

6. $(\alpha + \beta)v$
$= ((\alpha + \beta)v_1, (\alpha + \beta)v_2)$ và
$\alpha v + \beta v = (\alpha v_1, \alpha v_2) + (\beta v_1, \beta v_2)$
$= ((\alpha + \beta)v_1, \alpha\beta v_2^2)$.
Vậy, nếu chọn $v = (1, 3)$ và $\alpha = 1, \beta = 1$ thì $(1 + 1)v = (2, 6) \neq (2, 9) = v + v$. Như vậy, đây không là không gian vector.

Bài tập. Xét xem với $V = \mathbb{R}^2$ và các phép toán sau trên $\mathbb{R}$ thì V có là không gian vector không?

12. Với $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $u + v = (3u_1 + 3v_1, u_2 + v_2)$.
2. $\alpha v = (3\alpha v_1, \alpha v_2)$.

Hiễn nhiên, ta không cần phải kiểm tra lần lược từ 1 đến 8. Chỉ cần tìm một tính chất không vi phạm tiên đề là đủ chứng minh nó ko là không gian vector. Cụ thể, nó vi phạm tính chất 8. Cụ thể, nếu chon $v = (1, 1)$ thì $1.v = 1.(1, 1) = (3, 1) \neq (1, 1) = v$.

1.2. Định lý.

Cho V là kg vector trên K. Khi đó,

1. 0_V là duy nhất.
2. phần tử đối $-v$ của v duy nhất theo v.

Chứng minh. 1. Giả sử có 0_v và $0'_V$ là 2 phần tử thỏa $x + 0_V = 0_V + x = x$ và $x + 0'_V = 0'_V + x = x$ với mọi $x \in V$. Khi đó, $0'_V = 0'_V + 0_V = 0_V$.
2. Với $v \in V$. Giả sử v', v'' thỏa $v + v' = v' + v = 0_V$ và $v + v'' = v'' + v = 0_V$. Khi đó,
$v'' = v'' + 0_V = v'' + (v + v') = (v'' + v) + v' = 0_V + v' = v'$.

1.3. Định lý.

Cho V là kg vector trên K. Khi đó,

1. Với $x \in V$, ta có $\alpha x = 0_V$ khi và chỉ khi $\alpha = 0$ hoặc $x = 0_V$.
2. $(-1)v = -v$ với $v \in V$.

Chứng minh. 1. **Chiều đảo.** Nếu $\alpha = 0$ và $x \in V$, thì đặt $u = 0x$. Khi đó, $u = 0x = (0+0)x = 0x + 0x = u + u$. Gọi $-u$ là phần tử đối của u. Khi đó, $u + (-u) = u + u + (-u) \Leftrightarrow 0_V = u + 0_V = u$. Suy ra $0x = 0_V$.
Chứng minh tương tự cho trường hợp $\alpha 0_V = 0_V$ với $\alpha \in K$.
Chiều thuận. Giả sử $\alpha x = 0_V$. Khi đó, nếu $\alpha \neq 0$ và $x \neq 0_V$ thì $0_V = \alpha^{-1}0_V = \alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1}\alpha)x = x$. Vô lý. Vậy $\alpha = 0$ hoặc $x = 0_V$.
2. Ta có $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0_V$. Suy ra $(-1)v = -v$.
Do $(-\alpha)v = -(\alpha v)$ nên kể từ đây, ta viết $\alpha u + (-\beta)v$ là $\alpha u - \beta v$.

Bài 2. Không gian vector con

2.1. Định nghĩa

Cho V là kg vector trên K và $\emptyset \neq W \subseteq V$. Ta nói W là không gian vector con của V, ký hiệu $W \leq V$, nếu W trở thành không gian vector với hai phép toán cộng và nhân ngoài thừa hưởng từ V.

Ví dụ 1.

Cho V là không gian vector trên K. Khi đó,

1. Bản thân V là kg vector con của V. Đây là không gian vector con lớn nhất của V theo nghĩa tập hợp.
2. $\{0_V\}$, tập hợp chỉ 1 phần tử 0_V, là không gian vector con của V. Đây là không gian vector con nhỏ nhất của V theo nghĩa tập hợp (chứng minh sau).

Hai không gian vector con trên được gọi là không gian vector con tầm thường.

Ví dụ

2. Ta có $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ là kg vector trên $\mathbb{R}$ với 2 phép toán đã biết. Để tiện trình bày, ta xét $n = 3$. Tức là, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

a. Xét $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Nếu xem một bộ (x, y) là bộ $(x, y, 0)$ trong $\mathbb{R}^3$ thì $\mathbb{R}^2$ là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$.

b. Xét $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Nếu xem một bộ (x, y) là bộ $(x, 0, y)$ trong $\mathbb{R}^3$ thì $\mathbb{R}^2$ là cũng là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

2. Ta có $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ là kg vector trên $\mathbb{R}$ với 2 phép toán đã biết. Để tiện trình bày, ta xét $n = 3$. Tức là, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

c. Xét W là tập hợp các nghiệm của hệ thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}.$$

Khi đó, như đã biết, W là không gian vector (gọi là không gian nghiệm hệ pttt thuần nhất). Như vậy, một cách tự nhiên, $W \leq \mathbb{R}^3$.

Ví dụ

2. Ta có $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ là kg vector trên $\mathbb{R}$ với 2 phép toán đã biết. Để tiện trình bày, ta xét $n = 3$. Tức là, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

d. Xét "đường thẳng" (D) : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$ đi qua tâm $0 = (0, 0, 0)$.

Khi đó, (D) là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$.

e. Xét "mặt phẳng" (P) : $ax + by + cz = 0$ đi qua tâm $0 = (0, 0, 0)$.

Khi đó, (P) là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

3. Đặt $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ là tập hợp tất cả các đa thức có hệ số trên $\mathbb{R}$.

Với $n \in \mathbb{N}$, đặt $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ là tập hợp tất cả các đa thức cấp $\leq n$ có hệ số trên $\mathbb{R}$.
Với 2 phép toán thông thường như đã biết, $\mathbb{R}[x]$ và $\mathbb{R}_n[x]$ là hai không gian vector trên $\mathbb{R}$. Vậy $\mathbb{R}_n[x]$ là không gian vector con của $\mathbb{R}[x]$.

2.2. Mệnh đề [a]

[a] Xem slide "đặc trưng không gian vector con"

Cho $W \leq V$. Khi đó, $0_W = 0_V$.

2.3. Hệ quả

Cho không gian vector V và $W \subseteq V$.

1. Nếu $0_V \notin W$ thì W không là không gian vector con của V.
2. $\{0_V\}$ là không gian vector con nhỏ nhất của V theo nghĩa tập hợp.

Bài 2. Không gian vector con

2.4. Định lý (đặc trưng không gian vector con)

Cho không gian vector V trên K và $\emptyset \neq W \subseteq V$. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương.

1. $W \leq V$.
2. $u + v, \alpha u \in W$ với mọi $u, v \in W$ và $\alpha \in K$.
3. $u + \alpha v \in W$ với mọi $u, v \in W$ và $\alpha \in K$.

Chứng minh: Xem sách (Trang 161).

2.5. Định lý

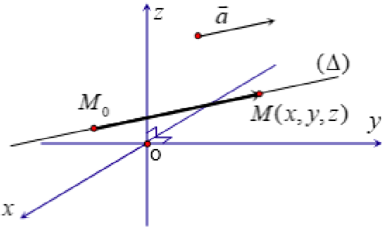
Giao của một họ không gian vector con là một không gian vector con. Nói riêng, nếu $W_1, W_2 \leq V$ thì $W_1 \cap W_2 \leq V$.

Chứng minh: Xem sách (Trang 163).

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

Một dẫn nhập

Công thức đường thẳng ở toán phổ thông



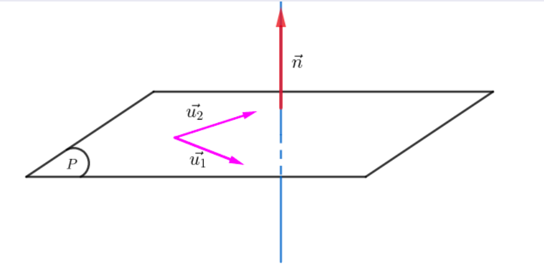
$$(\Delta):\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Như vậy, 1 điểm (x, y, z) thuộc đường thẳng có vectorchỉchỉ phương $a = (a_1, a_2, a_3)$ luôn có dạng $(x, y, z) = \alpha a$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

Một dẫn nhập

Công thức mặt phẳng ở toán phổ thông



Như vậy, 1 điểm (x, y, z) thuộc mặt phẳng có cặp vector chỉ phương u_1 và u_2 luôn có dạng $(x, y, z) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ với $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Chú ý

Một số kết quả trong chương này có thể đúng cho tập vô hạn như cơ sở vô hạn, tập sinh vô hạn,... Tuy nhiên, trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ tập trung và thường giả thiết các tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính hữu hạn. Sinh viên cần chú ý khi đọc các sách khác.

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

3.1. Định nghĩa.

Cho không gian vector V trên K và $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$. Ta nói u là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nếu
$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ với $\alpha_i \in K$.

Ví dụ. Xét $\mathbb{R}^3$ và $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0)$ và $u = (0,0,2)$ và $v = (1,2,3)$. Khi đó,

1. u là tổ hợp tuyến tính của u_1 và u_2 vì
$u = (0,0,2) = 2(1,1,1) + (-2)(1,1,0) = 2u_1 - 2u_2$.
2. Giả sử $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Leftrightarrow (1,2,3) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2, 0) \Leftrightarrow (1,2,3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1)$. Suy ra $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ và $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$.vô nghiệm. Suy ra v không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2.

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

Chú ý.

Cho $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$.

1. Cho 0_V luôn là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vì $0_V = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n$.
2. Nếu u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_k$ với $k \leq n$ thì u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vì $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k + 0u_{k+1} + \cdots + 0u_n$.
3. Nếu u và v là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$ thì $\alpha u + \beta v$ cũng là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
4. u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$ khi và chỉ khi phương trình $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ có nghiệm $\alpha_i \in K$.

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

3.2. Định lý.

Cho $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^m$. Khi đó, $u \in \mathbb{R}^m$ là u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$ khi và chỉ khi hệ pttt có ma trận mở rộng $(u_1^t u_2^t \cdots u_n^t | u^t)$ có nghiệm. Hơn nữa, nếu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là nghiệm của hệ trên thì $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$.

Tóm tắt phương pháp kiểm tra một vector có là tổ hợp tuyến tính của một tập các vector khác không.

Cho $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^m$ và $u \in \mathbb{R}^m$.

1. **Bước 1.** Lập hệ pttt có ma trận mở rộng $(u_1^t u_2^t \cdots u_n^t | u^t)$ (đây là hệ pttt có m phương trình, n ẩn)
2. **Bước 2.** Giải hệ (xem Chương 2).
3. **Bước 3.** Biện luận.
   1. Nếu hệ vô nghiệm thì u không là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
   2. Nếu hệ có nghiệm thì u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Nếu $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ là nghiệm của hệ thì

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Ví dụ

Tiếp theo là một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Xét xem $u = (4,3,5)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1,2,5), u_2 = (1,3,7), u_3 = (-2,3,4)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - 5d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Hệ vô nghiệm vì

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = -5.$$

Vậy u **không** là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 - 3d_3 \\ d_2 - 5d_3}]{\frac{-1}{7} d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2, 1)$.

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Dạng biểu diễn của u là $\boldsymbol{u = u_1 + 2u_2 + u_3}$.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Xét xem $u = (4, 3, 10)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 5), u_2 = (1, 3, 7), u_3 = (-2, 3, 4)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - 5d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nghiệm của hệ là

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (9 + 9t, -5 - 7t, t) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3, và dạng biểu diễn của u là

$$u = (9 + 9t)\, u_1 + (-5 - 7t)\, u_2 + t\, u_3.$$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1 = (1,1,1,1);\ u_2 = (2,3,-1,0);\ u_3 = (-1,-1,1,1).$$

Tìm điều kiện để vectơ $u = (a,b,c,d)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Giải. Lập

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & -3 & 2 & c-a \\ 0 & -2 & 2 & d-a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 2 & -4a+3b+c \\ 0 & 0 & 2 & -3a+2b+d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 2 & -4a+3b+c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{array}\right).$$

Để u là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 thì hệ có nghiệm, nghĩa là

$$\boldsymbol{a - b - c + d = 0}.$$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1);\ u_2 = (1, 3, 2);\ u_3 = (3, 8, 5);\ u_4 = (2, 7, 5).$$

Tìm điều kiện để vectơ $u = (a, b, c)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3, u_4.

Đáp án. $a - b + c = 0$

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1, 3);\ u_2 = (2, 3, 2, -2);\ u_3 = (5, 8, 5, -1).$$

Tìm điều kiện để vectơ $u = (a, b, c, d)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Đáp án. $-a + c = 0$ và $13a - 8b + d = 0$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ.(tự làm) Xét xem $u = (5, 7, -2, 5)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, -1, 2), u_2 = (-2, 1, -1, 1), u_3 = (1, 3, -1, 2)$ hay không?

Đáp án. $u = u_1 - u_2 + 2u_3$.

Ví dụ.(tự làm) Xét xem $u = (-1, 4, -1)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$u_1 = (-2, 3, 1); u_2 = (2, -1, -1); u_3 = (1, 0, -1); u_4 = (2, 1, -1)$$

hay không?

Đáp án. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1 - t, -1 - 2t, 3, t)$. Suy ra

$$u = (1 - t)u_1 + (-1 - 2t)u_2 + 3u_3 + tu_4.$$

Ví dụ.(tự làm) Xét xem $u = (7, 3, 0, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (3, 1, 1, 2), u_2 = (2, 1, 1, 2), u_3 = (2, 1, 0, -1)$ hay không?

Đáp án. u không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

3.3. Định lý.

Cho không gian vector V trên K và $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$. Khi đó,

$$W = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \mid \alpha_i \in K\},$$

gồm tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của A, là không gian vector con của V.

Ta nói W *sinh bởi* $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ hay $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *sinh ra* W và $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là *tập sinh* của W.

Ví dụ

Ví dụ 1.

1. Xét không gian vector $\mathbb{R}^3$. Đặt $\mathbb{A} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$. Vì $(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ với $x,y,z \in \mathbb{R}$ nên $\mathbb{A}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.
2. Một cách tổng quát, Đặt $\mathbb{A} = \{e_1 = (1,0,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Vì $(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ với $x_i \in \mathbb{R}$ nên $\mathbb{A}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^n$.
3. Xét không gian vector $\mathbb{R}^3$. Đặt $\mathbb{B} = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}$. Với $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ta có $(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1) = (x-y)u_1 + (y-z)u_2 + zu_3$ nên $\mathbb{B}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ.

Ví dụ 2. Tìm một tập sinh của không gian vector con $P = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Ta có phương trình $x + y + z = 0$ có nghiệm
$\begin{cases} x = -y - z = -a - b \\ y = a, a \in \mathbb{R} \\ z = b, b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Suy ra $P = \{(-a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-a, a, 0) + (-b, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{au_1 + bu_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ với $u_1 = (-1, 1, 0)$ và $u_2 = (-1, 0, 1)$.
Suy ra $A = \{u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (-1, 0, 1)\}$ là một tập sinh[a] của P.

---

[a] Theo cách nhìn của toán phổ thông, $u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (-1, 0, 1)$ là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng P.

Ví dụ.

Ví dụ 3. Tìm một tập sinh của không gian vector con $D = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0; x + 3y + z = 0\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Ta có hệ pttt $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$ có nghiệm (xem lại Chương 2)

$\begin{cases} x = 11a \\ y = -4a \\ z = a, a \in \mathbb{R} \end{cases}$. Suy ra

$D = \{(11a, -4a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(11, -4, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$
$= \{au \mid a \in \mathbb{R}\}$ $u = (11, -4, 1)$

Suy ra $A = \{u = (11, -4, 1)\}$ là một tập sinh[a] của D.

---

[a] Theo cách nhìn của toán phổ thông, $u = (11, -4, 1)$ là vector chỉ phương của đường thẳng D.

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

Ký hiệu

Cho V là không gian vector trên K và $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là tập hợp gồm n vector của V. Không gian vector con của V sinh bởi S được ký hiệu là $\langle S \rangle$ hoặc $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$

Nhận xét

Ta có

1. $u \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ khi và chỉ khi u có dạng $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ với $\alpha_i \in K$.
2. $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ là không gian vector con nhỏ nhất chứa S.

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

3.4. Định nghĩa

Cho không gian vector V trên K và $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ với $n \geq 1$.

1. Ta nói $u_1, u_2, \ldots, u_n$ là *phụ thuộc tuyến tính* nếu có $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ không đồng thời bằng 0 thỏa
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$
2. Ta nói $u_1, u_2, \ldots, u_n$ là *độc lập tuyến tính* nếu nó không phụ thuộc tuyến tính. Nghĩa là, chỉ có 1 bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$ thỏa
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V.$$

Bài 3. Tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

Chú ý và nhận xét

1. Nếu $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq V$ độc lập tuyến tính (đltt) thì tập con khác rỗng của A cũng đltt.
2. Nếu $A \subseteq V$ phụ thuộc tuyến tính (pttt) thì tập chứa A cũng pttt.
3. Không đltt là pttt và không pttt là đltt.
4. Tập khác rỗng chứa 0_V luôn pttt.
5. Tập $\{u \neq 0_V\}$ luôn đltt.

3.6. Mệnh đề

Một tập con khác rỗng của không gian vector là pttt nếu có một phần tử là tổ hợp tuyến tính các phần tử còn lại.

Chứng minh. Xem sách trang 155.

Ví dụ

Cho không gian $\mathbb{R}^3$ và 3 vector $a = (1, 2, 3)$; $b = (1, 0 - 1)$ và $c = (-1, 0, 1)$. Hỏi cặp vector nào đltt và cặp vector nào pttt [a].

[a] theo ngôn ngữ trong hình học giải tích 12 thì cặp vector đltt là cặp vector chỉ phương của một mặt phẳng và cặp vector pttt là cặp vector cùng phương hoặc song song

Ta có các cặp $\{a, b\}$; $\{a, c\}$ là đltt (tại sao?) và $\{b, c\}$ là pttt (tại sao?)

3.7. Hệ quả

Cho không gian $\mathbb{R}^m$ và tập $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$. Đặt $\overline{A} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ (một ma trận cấp $n \times m$ với các vector u_i viết thành các dòng) hoặc $\overline{A} = \begin{pmatrix} u_1^t & u_2^t & \cdots & u_n^t \end{pmatrix}$ (một ma trận cấp $m \times n$ với các vector u_i viết thành các cột). Khi đó, A là đltt khi và chỉ khi hạng $r(\overline{A}) = n$. Hơn thế nữa, nếu $\overline{A}$ vuông thì A đltt khi và chỉ khi $|\overline{A}| \neq 0$.

Thuật toán kiểm tra sự đltt trong $\mathbb{R}^m$

Cho không gian vector $\mathbb{R}^m$ và $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

1. **Bước 1.** Lập ma trận $\overline{A} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ hoặc $\overline{A} = \begin{pmatrix} u_1^t & u_2^t & \cdots & u_n^t \end{pmatrix}$.
2. **Bước 2.** Xác định hạng của $\overline{A}$ (đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang và hạng là số dòng khác không của ma trận bậc thang này).
    1. Nếu hạng $r(A) = n$ thì A đltt.
    2. Nếu hạng $r(A) < n$ thì A pttt.

Trong trường hợp $\overline{A}$ là ma trận vuông ($m = n$) thì ta có thể thế Bước 2 bằng các bước Bước 2'.

Bước 2'. Tính định thức $|\overline{A}|$.

1. Nếu $|\overline{A}| \neq 0$ thì A đltt.
2. Nếu $|\overline{A}| = 0$ thì A pttt.

Ví dụ

Cho không gian $\mathbb{R}^5$. Xét xem $A = \{u_1 = (1, 2, -3, 5, 1); u_2 = (1, 3, -13, 22, -1); u_3 = (3, 5, 1, -2, 5); u_4 = (2, 3, 4, -7, 4)\}$ đltt hay pttt?

1. Ta có $\overline{A} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3, & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$
2. Đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang $\overline{A} \rightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0, & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
Suy ra hạng của $\overline{A}$ là 2 nên A pttt.

Ví dụ

Tìm điều kiện $m \in \mathbb{R}$ để $A = \{u_1 = (2m+1, -m, m+1); u_2 = (m-2, m-1, m-2); u_3 = (2m-1, m-1, 2m-1)\}$ đltt trong $\mathbb{R}^3$.

1. Ta có $\overline{A} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix}$.
2. Vì $\overline{A}$ vuông nên ngoài cách tính hạng, có thể tính định thức.

$$|\overline{A}| = \left|\begin{matrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2m+1 & -m \\ m-2 & m-1 \\ 2m-1 & m-1 \end{matrix}$$

$$= (2m+1)(m-1)(2m-1) + (-m)(m-2)(2m-1)$$
$$+(m+1)(m-2)(m-1) - (m+1)(m-1)(2m-1)$$
$$-(2m+1)(m-2)(m-1) - (-m)(m-2)(2m-1)$$
$$= m^3 - m = m(m-1)(m+1).$$

Vậy A là đltt khi và chỉ khi $|\overline{A}| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0, 1, -1$.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện. Dùng ma trận ghi mà các vector ghi theo kiểu cột

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập } A = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-d_2]{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4+\frac{1}{5}d_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có $r(A) = 3$. Suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3+d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $r(A) = 2 < 3$. Suy ra u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -1, 3)$; $u_2 = (0, 1, -1, 2)$; $u_3 = (1, 3, -1, 4)$ và $u_4 = (2, 6, -3, 9)$. Hỏi u_1, u_2, u_3,u_4 có phụ thuộc tuyến tính không? Nếu có hãy tìm biểu diễn của một vectơ nào đó qua các vectơ còn lại.

Giải. Xét hệ phương trình $AX = 0$ với $X = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)^\top$ và

$$A = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top\ u_4^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $r(A) = 3 < 4$. Do đó hệ có vô số nghiệm. Suy ra u_1, u_2, u_3, u_4 phụ thuộc tuyến tính. Hơn nữa nghiệm của hệ là

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-t, -t, -t, t).$$

Suy ra

$$-tu_1 - tu_2 - tu_3 + tu_4 = 0.$$

Ví dụ

$$-tu_1 - tu_2 - tu_3 + tu_4 = 0.$$

Chọn $t = -1$, ta có

$$u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0$$

Ta chọn u_4 biểu diễn qua các vectơ còn lại. Do đó

$$u_4 = u_1 + u_2 + u_3.$$

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 2)$; $u_2 = (1, 2, -1, 1)$; và $u_3 = (1, 3, -1, 4)$. Hỏi u_1, u_2, u_3 có độc lập tuyến tính không?

Đáp án. Có

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (2m + 1, -m, m + 1)$; $u_2 = (m - 2, m - 1, m - 2)$ và $u_3 = (2m - 1, m - 1, 2m - 1)$. Tìm điều kiện để u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Giải. Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix}$. Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1:=c_1-c_3} \begin{vmatrix} m & -m & m+1 \\ 0 & m-1 & m-2 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} m(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1).$$

Do đó u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính khi và chỉ khi

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ và } m \neq \pm 1.$$

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ

$$u_1 = (1,2,m);\ u_2 = (2,m+1,2) \text{ và } u_3 = (m,-2,1).$$

Tìm điều kiện để u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Đáp án. $m \neq \pm 1$.

Chú ý

Một số kết quả trong chương này có thể đúng cho tập vô hạn như cơ sở vô hạn, tập sinh vô hạn,... Tuy nhiên, trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ tập trung vào giả thiết các tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính hữu hạn. Sinh viên cần chú ý khi đọc các sách khác.

Bài 4. Cơ sở, số chiều và tọa độ

4.1. Định nghĩa

Cho không gian vector V trên K. Tập $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ được gọi là một *cơ sở* của V trên K nếu nó thỏa hai tính chất sau:

1. $V = \langle B \rangle$, tức là V sinh bởi B, hay mỗi phần tử $u \in V$ luôn có dạng $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ với $\alpha_i \in K$.
2. B độc lập tuyến tính.

n được gọi là *số chiều* của V và ký hiệu $\dim_K V = n$. Đôi khi ta viết gọn là $\dim V = n$.

Ví dụ

1. Cho không gian vector $\mathbb{R}^3$ trên $\mathbb{R}$. Chứng tỏ các tập hợp sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$:
a) $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$
b) $B = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,2); u_3 = (1,2,3)\}$

a). Ta có nếu $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thì (x, y, z) luôn biểu diễn thành tổ hợp các vector trong $\mathcal{B}$, cụ thể là
$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$, tức là $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{B} \rangle$.
Xét $\overline{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ luôn có hạng là 3 (bằng số vector của $\mathcal{B}$) nên $\mathcal{B}$ đltt.
Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

4.2. Chú ý

Không gian vector $\mathbb{R}^n$ luôn có:

1. Một cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0); e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \cdots; e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$. Cơ sở này được gọi là *cơ sở chính tắc*.
2. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Ví dụ

1. Cho không gian vector $\mathbb{R}^3$ trên $\mathbb{R}$. Chứng tỏ các tập hợp sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$:
a) $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$
b) $B = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,2); u_3 = (1,2,3)\}$

b) Với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ta xét hệ phương trình
$(u_1^t u_2^t u_3^t | u^t) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 2 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_1]{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_3]{d_1 \to d_1 - d_2}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2x-y \\ 0 & 1 & 0 & 2y-x-z \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right)$. Suy ra hệ này luôn có nghiệm [3]. Nên $\mathbb{R}^3 = \langle B \rangle$.
Hơn nữa, $\overline{B} = (u_1^t u_2^t u_3^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_1]{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ có hạng là 3 (= số vector của B) nên B đltt. Vậy B là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

[3]Một cách cụ thể, hệ này có nghiệm $\alpha_1 = 2x - y, \alpha_2 = 2y - x - z$ và $\alpha_3 = z - y$. Suy ra $(x,y,z) = (2x-y)u_1 + (2y-x-z)u_2 + (z-y)u_3$

Bài 4. Cơ sở, số chiều và tọa độ

4.3. Mệnh đề.

Cho V là không gian vector trên K. Nếu $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là hai cơ sở của V trên K thì $m = n$. Nói riêng, số chiều của một không gian vector là không đổi và không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở.

Chú ý (đã đề cập nhiều lần)

Trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ xét không gian vector có số chiều là hữu hạn.

4.4. Định lý.

Cho V là không gian vector trên K với $\dim V = n$. Giả sử $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq V$ (B có số vector bằng với số chiều của V). Khi đó, B là cơ sở khi và chỉ khi một trong hai điều [a] sau thỏa

1. $V = \langle B \rangle$
2. B độc lập tuyến tính.

---

[a] theo định nghĩa thì B phải thỏa cả hai điều kiện.

Ví dụ

Tìm điều kiện $m \in \mathbb{R}$ để $B = \{u_1 = (2m+1, -m, m+1); u_2 = (m-2, m-1, m-2); u_3 = (2m-1, m-1, 2m-1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ta chú ý rằng do $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ và B có 3 vector nên để tìm m là cơ sở, ta chỉ cần tìm m để B đltt.

Ta có $\overline{B} = \begin{pmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix}$.

Vì $\overline{B}$ vuông nên ngoài cách tính hạng, có thể tính định thức.

$|\overline{B}| = \left|\begin{matrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2m+1 & -m \\ m-2 & m-1 \\ 2m-1 & m-1 \end{matrix}$

$= (2m+1)(m-1)(2m-1) + (-m)(m-2)(2m-1) + (m+1)(m-2)(m-1)$
$-(m+1)(m-1)(2m-1) - (2m+1)(m-2)(m-1) - (-m)(m-2)(2m-1)$
$= m^3 - m = m(m-1)(m+1)$.

Kéo theo B là đltt khi và chỉ khi $m \neq 0, 1, -1$. Vậy với $m \neq 0, 1, -1$ thì B là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

4.5. Định lý

Cho V là không gian vector trên K có $\dim V = n$ và $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subseteq V$. Khi đó,

1. Nếu $m < n$ thì B không là tập sinh của V. Thêm vào đó, nếu B đltt thì $B \cup \{u\}$ cũng đltt với $u \notin \langle B \rangle$. Hơn thế nữa, ta có thể bổ sung vào B một số vector sao cho $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của V.
2. Nếu $m > n$ thì B không đltt (tức là, B pttt). Thêm vào đó, nếu B là tập sinh của V, tức là mỗi phần tử của V là một tổ hợp tuyến tính của B, thì ta có thể loại bỏ một số phần tử của B sao cho $B' = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}\}$ là cơ sở của V.

Ví dụ

Cho không gian $\mathbb{R}^3$ và $B = \{u_1 = (1,2,3); u_2 = (4,5,6)\}$. Chứng tỏ B đltt và tìm $u_3 \in \mathbb{R}^3$ sao cho $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Ta có $\overline{B} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ có hạng là 2 nên B đltt.

Tiếp theo, ta tìm một vector $u_3 \notin \langle B \rangle$.

Xét $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ và hệ phương trình $(u_1^t u_2^t | u^t) =$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & b \\ 3 & 6 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & -6 & c-3a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right).$$ Vậy

$u \in \langle B \rangle$ khi và chỉ khi $a - 2b + c = 0$.

Vậy, ta chọn $u_3 = (1,0,0)$ thì $u_3 \notin \langle B \rangle$. Kéo theo $B' = \{u_1 = (1,2,3); u_2 = (4,5,6); u_3 = (1,0,0)\}$ đltt nên nó là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

4.6. Định lý và Định nghĩa

Cho V là không gian vector trên K với $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở. Khi đó, với $u \in V$, tồn tại **duy nhất** bộ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ sao cho $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$. Đặt $[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Ta gọi $[u]_B$ là *tọa độ* của u theo cơ sở B.

Chú ý. Do B có thể viết theo cách $B = \{u_2, u_1, \ldots, u_n\}$ nên $u = \alpha_2 u_2 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ và có thể viết $[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Để tránh trường hợp này, ta luôn cố định thứ tự biểu diễn của B và thường được gọi là *cơ sở được sắp*.

Ví dụ

Cho không gian vector $\mathbb{R}^3$ và
$\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$ và
$B = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,2); u_3 = (1,2,3)\}$.

Xét $u = (-1,-2,3)$
a) Tính $[u]_{\mathcal{B}}$
b) Chứng tỏ B là cơ sở và tính $[u]_B$.

a) Giả sử $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Khi đó $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \Leftrightarrow$
$(-1,-2,3) = (\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3)$
$\Leftrightarrow (-1,-2,3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Suy ra $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$ và
$\alpha_3 = 3$.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.7. Mệnh đề.

Cho không gian vector $\mathbb{R}^n$ và cơ sở chính tắc $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0); e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \cdots ; e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$. Khi đó, $[x]_{\mathcal{B}} = x^t$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, tức là, $[(x_1, x_2 \ldots, x_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Cho không gian vector $\mathbb{R}^3$ và
$B = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,2); u_3 = (1,2,3)\}$.

Xét $u = (-1,-2,3)$
b) Chứng tỏ B là cơ sở và tính $[u]_B$.

Giả sử $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Khi đó

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \Leftrightarrow (-1,-2,3) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, 2\alpha_3, 3\alpha_3)$
$\Leftrightarrow (-1,-2,3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3)$. Suy ra

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = -2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 3 \end{cases}$$

. Ma trận hóa hệ này, ta được

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_1]{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_3]{d_1 \to d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Suy ra

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -6 \\ \alpha_3 = 5 \end{cases}$$

Vậy $[u]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Thuật toán tìm $[u]_B$ trong $\mathbb{R}^n$

Cho không gian $\mathbb{R}^n$ và $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Giả sử $u \in \mathbb{R}^n$

1. Bước 1. Lập ma trận mở rộng $(u_1^t u_2^t \dots u_n^t | u^t)$.
2. Bước 2. Đưa $(u_1^t u_2^t \dots u_n^t | u^t)$ về dạng bậc thang rút gọn $(J_A | B')$. Ta biết chắc ma trận này có dạng $(J_A | B') = (I_n | B')$.
3. Khi đó, $[u]_B = B'$.

Cho không gian vector $\mathbb{R}^3$. Giả sử $B = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,2); u_3 = (1,2,3)\}$ và $u = (-1,-2,3)$. Tính $[u]_B$.

Ta có $(u_1^t u_2^t u_3^t | u^t) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_1]{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_3]{d_1 \to d_1 - d_2}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$. Vậy $[u]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ
$$u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,3,1), u_3 = (2,5,3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ th eo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Hơn nữa số vectơ của $\mathcal{B}$ bằng $\dim \mathbb{R}^3$ nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Với $u = (a,b,c)$, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4a-b-c \\ 0 & 1 & 0 & -a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & -a+c \end{array}\right).$$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a - b - c \\ -a + b - c \\ -a + c \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho

$$u_1 = (1, 2, 1, 2);\ u_2 = (-1, -1, 2, 1);\ u_3 = (-2, -2, 3, 1).$$

Gọi W là không gian sinh bởi u_1, u_2, u_3.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện để $u \in W$, sau đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Hướng dẫn. b) Để $u \in W$ thì u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Ta xét hệ phương trình

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & x \\ 2 & -1 & -2 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 2 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & -x + y \\ 0 & 1 & 0 & 8x - 5y + 2z \\ 0 & 0 & 1 & -5x + 3y - z \\ 0 & 0 & 0 & -x - z + t \end{array}\right).$$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Như vậy để $u \in W$ thì $-x - z + t = 0$. Hơn nữa

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y \\ 8x - 5y + 2z \\ -5x + 3y - z \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,1,1), u_3 = (2,1,3))$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1 = (2,5,-2), v_2 = (1,3,-2), v_3 = (-1,-2,1))$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}_2}$?

Đáp án. $[u]_{\mathcal{B}_2} = (10 \quad -4 \quad 18)^\top$.

Bài 4. Cơ sở, số chiều và tọa độ

4.8. Định lý

Cho không gian vector V trên có n chiều và sơ sở B. Giả sử $u, v \in V$ và $\alpha \in K$. Khi đó, $[u + \alpha v]_B = [u]_B + \alpha[v]_B$.

4.9. Định nghĩa (ma trận chuyển cơ sở)

Cho không gian vector V. Giả sử $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $B' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của V. Khi đó, *ma trận chuyển cơ sở* từ B sang B', ký hiệu là $(B \to B')$, được định nghĩa là

$$(B \to B') = ([u'{}_1]_B [u'{}_2]_B \ldots [u'{}_n]_B).$$

4.10. Định lý

Cho không gian vector V có n chiều. Giả sử A, B, C là ba cơ sở của V và $u \in V$. Khi đó,

1. $(A \to B)$ khả nghịch và $(A \to B)^{-1} = (B \to A)$. Nói riêng $(A \to A) = I_n$.
2. $(A \to C) = (A \to B)(B \to C)$.
3. $[u]_A = (A \to B)[u]_B$.

Ví dụ

Cho không gian vector $\mathbb{R}^3$ và
$\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$ và
$B = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,2); u_3 = (1,2,3)\}$.

Tính $(\mathcal{B} \to B)$, $(B \to \mathcal{B})$.

*) Ta có $(\mathcal{B} \to B) = ([u_1]_{\mathcal{B}}[u_2]_{\mathcal{B}}[u_3]_{\mathcal{B}}) = (u_1^t u_2^t u_3^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**) Ta có $(B \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải thích. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$
$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Thuật toán tìm ma trận chuyển cơ sở trong $\mathbb{R}^n$

Cho 2 cơ sở $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ và $B' = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\}$. Dưới đây là cách tìm ma trận chuyển cơ sở $(B \to B')$ từ B sang B'.

1. Lập ma trận $(\overline{B}|\overline{B}') = (u_1^t u_2^t \cdots u_n^t | u'^t_1 u'^t_2 \cdots u'^t_n)$.
2. Đưa ma trận về dạng $(I_n|P)$ bằng thuật toán Gauss-Jordan.
3. Khi đó, $(B \to B') = P$.

Ví dụ (kiểm tra lại ví dụ trước)

Cho không gian vector $\mathbb{R}^3$ và $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$ và $B = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,2); u_3 = (1,2,3)\}$.

Tính $(B \to \mathcal{B})$ và $(\mathcal{B} \to B)$.

*) Tính $(\mathcal{B} \to B)$. Ta có

$$(\overline{\mathcal{B}}|\overline{B}) = (e_1^t e_2^t e_3^t | u_1^t u_2^t u_3^t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = (I_3|P).$$ Suy ra

$$(\mathcal{B} \to B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**) Tính $(B \to \mathcal{B})$. Ta có $(\overline{B}|\overline{\mathcal{B}}) = (u_1^t u_2^t u_3^t | e_1^t e_2^t e_3^t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I_3|P).$$ Suy ra

$$(B \to \mathcal{B}) = P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$
$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra S độc lập tuyến tính. Hơn nữa $\dim \mathbb{R}^3 =$ số vectơ của S. Vậy S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Làm tương tự cho T.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Suy ra } (S \to T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

Ta có $[u]_S = (S \to T)[u]_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ví dụ (không phải là $\mathbb{R}^n$ mà là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$)

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1, 2, 2, 1), u_2 = (0, 2, 0, 1), u_3 = (-2, 3, -4, 1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

c) Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Giải.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $W = \langle \mathcal{B} \rangle$ nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

b) Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_B$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & a+2b-4d \\ 0 & 1 & 0 & -a-3b+7d \\ 0 & 0 & 1 & b-2d \\ 0 & 0 & 0 & -2a+c \end{array}\right).$$

Dựa vào hệ phương trình, ta thấy để $u \in W$ thì

$$-2a + c = 0.$$

Hơn nữa

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a+2b-4d \\ -a-3b+7d \\ b-2d \end{pmatrix}.$$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Ta thấy các vectơ v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $-2a + c = 0$ nên theo câu *b*), các vectơ này thuộc W.

Mặt khác, dễ thấy rằng $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của W (do $\dim W = |\mathcal{B}| = 3 = |\mathcal{B}'|$). Dùng kết quả ở câu *b*) ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Chú ý

Một số kết quả trong chương này có thể đúng cho tập vô hạn như cơ sở vô hạn, tập sinh vô hạn,... Tuy nhiên, trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ tập trung vào giả thiết các tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính hữu hạn. Sinh viên cần chú ý khi đọc các sách khác.

Chú ý

Một số kết quả trong chương này có thể đúng cho tập vô hạn như cơ sở vô hạn, tập sinh vô hạn,... Tuy nhiên, trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ tập trung vào giả thiết các tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính hữu hạn. Sinh viên cần chú ý khi đọc các sách khác.

Các không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ sẽ đề cập

1. Không gian con sinh bởi tập hợp và không gian con sinh bởi các dòng của ma trận.

Chú ý

Một số kết quả trong chương này có thể đúng cho tập vô hạn như cơ sở vô hạn, tập sinh vô hạn,... Tuy nhiên, trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ tập trung vào giả thiết các tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính hữu hạn. Sinh viên cần chú ý khi đọc các sách khác.

Các không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ sẽ đề cập

1. Không gian con sinh bởi tập hợp và không gian con sinh bởi các dòng của ma trận.
2. Không gian nghiệm của hệ pttt thuần nhất.

Chú ý

Một số kết quả trong chương này có thể đúng cho tập vô hạn như cơ sở vô hạn, tập sinh vô hạn,... Tuy nhiên, trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ tập trung vào giả thiết các tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính hữu hạn. Sinh viên cần chú ý khi đọc các sách khác.

Các không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ sẽ đề cập

1. Không gian con sinh bởi tập hợp và không gian con sinh bởi các dòng của ma trận.
2. Không gian nghiệm của hệ pttt thuần nhất.
3. Không gian con giao.
4. Không gian con tổng.

Chú ý

Một số kết quả trong chương này có thể đúng cho tập vô hạn như cơ sở vô hạn, tập sinh vô hạn,... Tuy nhiên, trong hạn vi chương trình, chúng ta chỉ tập trung vào giả thiết các tập sinh, độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính hữu hạn. Sinh viên cần chú ý khi đọc các sách khác.

Các không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ sẽ đề cập

1. Không gian con sinh bởi tập hợp và không gian con sinh bởi các dòng của ma trận.
2. Không gian nghiệm của hệ pttt thuần nhất.
3. Không gian con giao.
4. Không gian con tổng.

Trong bài này, không gian vector của chúng ta nếu không đề cập là không gian con của $\mathbb{R}^n$

I. Không gian con sinh bởi 1 tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

5.1. Định nghĩa

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Giả sử $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ là các dòng của A. Khi đó, không gian vector con $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$ của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi các dòng u_i của A được gọi là *không gian vector con sinh bởi các dòng* của A.

I. Không gian con sinh bởi 1 tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

5.1. Định nghĩa

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Giả sử $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ là các dòng của A. Khi đó, không gian vector con $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$ của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi các dòng u_i của A được gọi là *không gian vector con sinh bởi các dòng* của A.

5.2. Định lý

Cho $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Nếu A và B tương đương dòng, tức là $A \xrightarrow[\text{sơ cấp trên dòng}]{\text{một số phép biến đổi}} B$ thì không gian con sinh bởi các dòng của A bằng không gian sinh bởi các dòng của B.

Thuật toán tìm cơ sở của không gian con sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho không gian vector $\mathbb{R}^n$ và m vector $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Thuật toán sau đây cho chúng ta một cơ sở của không gian con W sinh bởi $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Thuật toán tìm cơ sở của không gian con sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho không gian vector $\mathbb{R}^n$ và m vector $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Thuật toán sau đây cho chúng ta một cơ sở của không gian con W sinh bởi $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

1. Bước 1. Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ gồm các dòng là các vector.

Thuật toán tìm cơ sở của không gian con sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho không gian vector $\mathbb{R}^n$ và m vector $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Thuật toán sau đây cho chúng ta một cơ sở của không gian con W sinh bởi $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

1. Bước 1. Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ gồm các dòng là các vector.
2. Bước 2. Đưa A về dạng bậc thang R_A bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Thuật toán tìm cơ sở của không gian con sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho không gian vector $\mathbb{R}^n$ và m vector $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Thuật toán sau đây cho chúng ta một cơ sở của không gian con W sinh bởi $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

1. Bước 1. Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ gồm các dòng là các vector.
2. Bước 2. Đưa A về dạng bậc thang R_A bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.
3. Bước 3. Các dòng khác không của R_A tạo thành một cơ sở của W.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$ và $u_3 = (7, 8, 9)$.

a) Tìm một cơ sở S của W.
b) cho $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và tính $[u]_S$.
c) Cho $T = \{w_1 = (0, 1, 2), w_2 = (1, 0, -1)\}$. Chứng tỏ T cũng là cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(S \to T)$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$ và $u_3 = (7,8,9)$.

a) Tìm một cơ sở S của W.
b) cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và tính $[u]_S$.
c) Cho $T = \{w_1 = (0,1,2), w_2 = (1,0,-1)\}$. Chứng tỏ T cũng là cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(S \to T)$.

a). Ta có $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$ và $u_3 = (7,8,9)$.

a) Tìm một cơ sở S của W.
b) cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và tính $[u]_S$.
c) Cho $T = \{w_1 = (0,1,2), w_2 = (1,0,-1)\}$. Chứng tỏ T cũng là cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(S \to T)$.

a). Ta có $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Suy ra $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,-3,-6)\}$ là cơ sở của W (suy ra $\dim W = 2$).

Chú ý. Hiển nhiên, $\xrightarrow{d_2 \to \frac{-1}{3} d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$ và $u_3 = (7,8,9)$.

a) Tìm một cơ sở S của W.
b) cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và tính $[u]_S$.
c) Cho $T = \{w_1 = (0,1,2), w_2 = (1,0,-1)\}$. Chứng tỏ T cũng là cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(S \to T)$.

a). Ta có $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Suy ra $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,-3,-6)\}$ là cơ sở của W (suy ra $\dim W = 2$).

Chú ý. Hiển nhiên, $\xrightarrow{d_2 \to \frac{-1}{3} d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó, $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,2)\}$ cũng là cơ sở của W.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (4, 5, 6)$ và $u_3 = (7, 8, 9)$.

a) Đã có $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -3, -6)\}$ là cơ sở của W.
b) cho $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và tính $[u]_S$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$ và $u_3 = (7,8,9)$.

a) Đã có $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,-3,-6)\}$ là cơ sở của W.
b) cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và tính $[u]_S$.

b) Xét $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Ta xét hệ phương trình

$$(v_1^t v_2^t | u^t) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 2 & -3 & b \\ 3 & -6 & c \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & -6 & c-3a \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to \frac{-1}{3} d_2]{d_3 \to d_3 - 2d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{b-2a}{-3} \\ 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right).$$

Để $u \in W$ thì hệ trên có nghiệm $\Leftrightarrow a - 2b + c = 0$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi
$u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (4, 5, 6)$ và $u_3 = (7, 8, 9)$.

a) Đã có $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -3, -6)\}$ là cơ sở của W.
b) cho $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện để $u \in W$ và tính $[u]_S$.

b) Xét $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Ta xét hệ phương trình

$$(v_1^t v_2^t | u^t) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 2 & -3 & b \\ 3 & -6 & c \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -3 & b - 2a \\ 0 & -6 & c - 3a \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to \frac{-1}{3} d_2]{d_3 \to d_3 - 2d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{b-2a}{-3} \\ 0 & 0 & a - 2b + c \end{array}\right).$$

Để $u \in W$ thì hệ trên có nghiệm $\Leftrightarrow a - 2b + c = 0$.

Hơn nữa, khi $a - 2b + c = 0$ thì $[u]_S = \begin{pmatrix} a \\ \frac{b-2a}{-3} \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$ và $u_3 = (7, 8, 9)$.

a) Đã có $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -3, -6)\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c,)$. Nếu $a - 2b + c = 0$ thì $u \in W$ và $[u]_S = \begin{pmatrix} a \\ \frac{b-2a}{-3} \end{pmatrix}$.

c) Cho $T = \{w_1 = (0, 1, 2), w_2 = (1, 0, -1)\}$. Chứng tỏ T cũng là cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(S \to T)$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1,2,3), u_2 = (4,5,6)$ và $u_3 = (7,8,9)$.

a) Đã có $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,-3,-6)\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,)$. Nếu $a - 2b + c = 0$ thì $u \in W$ và $[u]_S = \begin{pmatrix} a \\ \frac{b-2a}{-3} \end{pmatrix}$.

c) Cho $T = \{w_1 = (0,1,2), w_2 = (1,0,-1)\}$. Chứng tỏ T cũng là cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(S \to T)$.

c). Ta có $w_1 = (0,1,2), w_2 = (1,0,-1) \in W$ vì $0 - 2.1 + 2 = 0$ và $1 - 2.0 + (-1) = 0$. Hơn nữa, $\overline{T} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có hạng là 2 nên T đltt. Hơn nữa, vì $\dim W = 2$ nên T là cơ sở của W.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1,2,3), u_2 = (4,5,6)$ và $u_3 = (7,8,9)$.

a) Đã có $S = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,-3,-6)\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,)$. Nếu $a - 2b + c = 0$ thì $u \in W$ và $[u]_S = \begin{pmatrix} a \\ \frac{b-2a}{-3} \end{pmatrix}$.

c) Cho $T = \{w_1 = (0,1,2), w_2 = (1,0,-1)\}$. Chứng tỏ T cũng là cơ sở của W và tìm ma trận chuyển cơ sở $(S \to T)$.

c). Ta có $w_1 = (0,1,2), w_2 = (1,0,-1) \in W$ vì $0 - 2.1 + 2 = 0$ và $1 - 2.0 + (-1) = 0$. Hơn nữa, $\overline{T} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có hạng là 2 nên T đltt. Hơn nữa, vì $\dim W = 2$ nên T là cơ sở của W.

Áp dụng công thức $(S \to T) = ([w_1]_S \;\; [w_2]_S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-2.0}{-3} & \frac{0-2.1}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$ và $u_3 = (7, 8, 10)$.

a) Tìm một cơ sở S của W.
b) (tự làm)Tính $[u]_S$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$ và $u_3 = (7,8,10)$.

a) Tìm một cơ sở S của W.
b) (tự làm)Tính $[u]_S$.

a). Ta có $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Cho W là không gian vector con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$ và $u_3 = (7, 8, 10)$.

a) Tìm một cơ sở S của W.
b) (tự làm)Tính $[u]_S$.

a). Ta có $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Suy ra $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là đltt, nên $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở. Chú ý, ta có thể chọn $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -3, -6), v_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở của W (suy ra $\dim W = 3$).

Ví dụ. Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện để so sánh lại cách tính $(S \to T)$ với S, T là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và S, T là cơ sở không gian con của $\mathbb{R}^n$ (coi lại bài 4)

.

Ví dụ. Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện để so sánh lại cách tính $(S \to T)$ với S, T là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và S, T là cơ sở không gian con của $\mathbb{R}^n$ (coi lại bài 4)

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$$
$$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra S độc lập tuyến tính. Hơn nữa $\dim \mathbb{R}^3 =$ số vectơ của S. Vậy S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Làm tương tự cho T.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Suy ra } (S \to T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

Ta có $[u]_S = (S \to T)[u]_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Ví dụ (không phải là $\mathbb{R}^n$ mà là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$)

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện (luyện tập với cách chọn cơ sở là 3 vector của 3 dòng khác không của ma trận bậc thang).

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1,2,2,1), u_2 = (0,2,0,1), u_3 = (-2,3,-4,1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Giải.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $W = \langle \mathcal{B} \rangle$ nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

b) Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_\mathcal{B}$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & a+2b-4d \\ 0 & 1 & 0 & -a-3b+7d \\ 0 & 0 & 1 & b-2d \\ 0 & 0 & 0 & -2a+c \end{array}\right).$$

Dựa vào hệ phương trình, ta thấy để $u \in W$ thì

$$-2a + c = 0.$$

Hơn nữa

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a+2b-4d \\ -a-3b+7d \\ b-2d \end{pmatrix}.$$

Ví dụ

Một vài ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Ta thấy các vectơ v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $-2a + c = 0$ nên theo câu b), các vectơ này thuộc W.

Mặt khác, dễ thấy rằng $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của W (do $\dim W = |\mathcal{B}| = 3 = |\mathcal{B}'|$). Dùng kết quả ở câu b) ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

II. Không gian con của hệ pttt thuần nhất

Phần này, chúng ta từng đề cập một cách rời rạc trong Chương 3. Bây giờ chúng ta hệ thống lại.

II. Không gian con của hệ pttt thuần nhất

Phần này, chúng ta từng đề cập một cách rời rạc trong Chương 3. Bây giờ chúng ta hệ thống lại.

5.3. Định lý.

Tập hợp tất cả các nghiệm của hệ pttt thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$. Nó được gọi là *không gian nghiệm*. Hơn thế nữa, số nghiệm tự do là số chiều của không gian vector này.

Ví dụ

Tìm 1 cơ sở của không gian nghiệm W sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3.x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} .$$

Ma trân hóa hệ này, ta được $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$ nhưng ta ghi gọn là $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \to \frac{d_2}{-3}]{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Suy ra hệ pttt có nghiệm

$\begin{cases} x_1 = 0 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = 0 - 2x_3; \\ x_3 = a, a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -2a; \\ x_3 = a \end{cases}$ Vậy không gian nghiệm là

$W = \{(a, -2a, a) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, -2, 1) : a \in \mathbb{R}\} = \{au : a \in \mathbb{R}\}$ với $u = (1, -2, 1)$. Vậy W sinh bởi $\{u = (1, -2, 1)\}$. Hiển nhiên $\{u = (1, -2, 1)\}$ là đltt (tại sao?) nên $\{u = (1, -2, 1)\}$ cũng là cơ sở của W.

Ví dụ

Cho W là không gian nghiệm của hệ pttt sau $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

a. Tìm một cơ sở S của W.
b. Cho $u = (1, 1, 0, -2)$. Chứng tỏ $u \in W$ và tính $[u]_S$.

Ví dụ

Cho W là không gian nghiệm của hệ pttt sau $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

a. Tìm một cơ sở S của W.
b. Cho $u = (1, 1, 0, -2)$. Chứng tỏ $u \in W$ và tính $[u]_S$.

a. Ta tìm nghiệm của hệ pttt trên. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \to d_2 - d_1]{d_3 \to d_3 - d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 = a, a \in \mathbb{R}; \\ x_3 = 0; \\ x_4 = b, b \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -a - b \\ x_2 = a; \\ x_3 = 0 \\ x_4 = b \end{cases}$.

Vậy $W = \{(-a - b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Cách xác định 2 vector cơ sở của $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Cách 1. $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-a, a, 0, 0) + (-b, 0, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(-1, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Cách xác định 2 vector cơ sở của $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Cách 1. $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-a, a, 0, 0) + (-b, 0, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(-1, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{au_1 + bu_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ với $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ và $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$.

Cách xác định 2 vector cơ sở của $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Cách 1. $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-a, a, 0, 0) + (-b, 0, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(-1, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{au_1 + bu_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ với $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ và
$u_2 = (-1, 0, 0, 1)$.
Suy ra $S = \{u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 0, 0, 1)\}$ là cơ sở của W.

Cách xác định 2 vector cơ sở của $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Cách 1. $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-a, a, 0, 0) + (-b, 0, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(-1, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{au_1 + bu_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ với $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ và $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$.
Suy ra $S = \{u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 0, 0, 1)\}$ là cơ sở của W.

Cách 2. Chọn 2 bộ nghiệm cơ sở. Ứng với $a = 1, b = 0$ thì nghiệm cơ sở $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ và ứng với $a = 0, b = 1$ thì nghiệm cơ sở là $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$. Vậy $S = \{u_1, u_2\}$ là cơ sở như Cách 1.
Hoặc chọn $a = 1, b = 2$ và $a = 2, b = 1$ thì ta có hai vector nghiệm cơ sở tương ứng là $v_1 = (-3, 1, 0, 2)$ và $v_2 = (-3, 2, 0, 1)$. Khi đó, $S = \{v_1, v_2\}$ là cơ sở của W. Tuy nhiên, nếu cho 2 nghiệm ứng với $a = b = 1$ và $a = b = 2$ thì 2 nghiệm này không tạo thành cơ sở!!.

Cách xác định 2 vector cơ sở của $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Cách 1. $W = \{(-a-b, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-a, a, 0, 0) + (-b, 0, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(-1, 1, 0, 0) + b(-1, 0, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{au_1 + bu_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ với $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ và $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$.
Suy ra $S = \{u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 0, 0, 1)\}$ là cơ sở của W.

Cách 2. Chọn 2 bộ nghiệm cơ sở. Ứng với $a = 1, b = 0$ thì nghiệm cơ sở $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$ và ứng với $a = 0, b = 1$ thì nghiệm cơ sở là $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$. Vậy $S = \{u_1, u_2\}$ là cơ sở như Cách 1.
Hoặc chọn $a = 1, b = 2$ và $a = 2, b = 1$ thì ta có hai vector nghiệm cơ sở tương ứng là $v_1 = (-3, 1, 0, 2)$ và $v_2 = (-3, 2, 0, 1)$. Khi đó, $S = \{v_1, v_2\}$ là cơ sở của W. Tuy nhiên, nếu cho 2 nghiệm ứng với $a = b = 1$ và $a = b = 2$ thì 2 nghiệm này không tạo thành cơ sở!!. Vậy phải chọn a, b ra sao????

Ví dụ

Cho W là không gian nghiệm của hệ pttt sau $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

a. Ta đã tìm $S = \{u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 0, 0, 1)\}$ là một cơ sở của W.
b. Cho $u = (1, 1, 0, -2)$. Chứng tỏ $u \in W$ và tính $[u]_S$.

Ví dụ

Cho W là không gian nghiệm của hệ pttt sau $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

a. Ta đã tìm $S = \{u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 0, 0, 1)\}$ là một cơ sở của W.
b. Cho $u = (1, 1, 0, -2)$. Chứng tỏ $u \in W$ và tính $[u]_S$.

b. Chỉ cần kiểm tra $u = (1, 1, 0, -2)$ là nghiệm của hệ thì $u \in W$.
Ta tính $[u]_S$.
Ta xét hệ phương trình

$$(u_1^t u_2^t | u^t) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_4]{d_1 \to d_1 + d_2 + d_4} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Suy ra $[u]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

III. Không gian con giao

Kết quả sau đây đã được nói đến trong bài "không gian vector con". Tuy nhiên, để tiện theo dõi, ta phát biểu lại.

5.4. Định lý và định nghĩa

Giao của một họ các không gian vector con là một không gian vector con. Ta gọi không gian con này là không gian con giao (của họ các không gian vector). Nói riêng, nếu W_1, W_2 là hai không gian vector con của $\mathbb{R}^n$ thì $W_1 \cap W_2 = \{u \in \mathbb{R}^n : u \in W_1 \text{ và } u \in W_2\}$ là không gian vector con của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ trong bài giảng của TS. Lê Văn Luyện.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (1,2,1,1)$, $u_2 = (1,2,2,3)$, $u_3 = (2,4,3,4)$, $u_4 = (1,3,3,3)$, $u_5 = (0,1,1,0)$. Đặt $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $W_2 = \langle u_4, u_5\rangle$. Tìm cơ sở của không gian $W_1 \cap W_2$.

Giải. Giả sử $u = (x,y,z,t) \in W_1 \cap W_2$.

- Vì $u \in W_1$ nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

$$\left(u_1^\top \quad u_2^\top \quad u_3^\top \,\middle|\, u^\top\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 2 & 4 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 1 & 3 & 4 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & 0 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & x-2z+t \end{array}\right).$$

Ví dụ

Suy ra để $u \in W_1$ thì $-2x + y = 0$ và $x - 2z + t = 0$ (1)

- Vì $u \in W_2$ nên u là tổ hợp tuyến tính của u_4, u_5.

$$\left(u_4^\top \quad u_5^\top \mid u^\top\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -3x + y \\ 0 & 0 & -y + z \\ 0 & 0 & -3x + t \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in W_2$ thì $-y + z = 0$ và $-3x + t = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} -2x + y = 0; \\ x - 2z + t = 0; \\ -y + z = 0; \\ -3x + t = 0. \end{cases}$$

Ví dụ

Ma trận hóa hệ phương trình

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2-d_1 \\ d_4-3d_1}]{d_1-d_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3-d_2 \\ d_4-3d_2}]{\substack{-d_2 \\ d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2-2d_3 \\ d_4+6d_3}]{\substack{\frac{1}{3}d_3 \\ d_1+2d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x, y, z, t) = (\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a) \text{ với } a \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$. Suy ra $W_1 \cap W_2$ có cơ sở là

$$\{v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}.$$

IV. Không gian tổng

5.5. Định lý và định nghĩa

Cho W_1 và W_2 là hai không gian vector con của $\mathbb{R}^n$. Đặt $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$. Khi đó, $W_1 + W_2$ là không gian vector con của W.

IV. Không gian tổng

5.5. Định lý và định nghĩa

Cho W_1 và W_2 là hai không gian vector con của $\mathbb{R}^n$. Đặt $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$. Khi đó, $W_1 + W_2$ là không gian vector con của W.

5.6. Định lý

Cho W_1 và W_2 là hai không gian vector con của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Định lý. *Cho V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và W_1, W_2 là hai không gian con của V. Nếu $W_1 = \langle S_1 \rangle$ và $W_2 = \langle S_2 \rangle$ thì*

$$W_1 + W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1, 1);\ u_2 = (3, 6, 5, 7);\ u_3 = (4, 8, 6, 8);\ u_4 = (8, 16, 12, 16);$$

$$u_5 = (1, 3, 3, 3);\ u_6 = (2, 5, 5, 6);\ u_7 = (3, 8, 8, 9);\ u_8 = (6, 16, 16, 18).$$

Đặt $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ và $W_2 = \langle u_5, u_6, u_7, u_8 \rangle$. Tìm một cơ sở và xác định số chiều của mỗi không gian W_1, W_2 và $W_1 + W_2$?

Giải.

- Tìm cơ sở của W_1

Lập $A_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó W_1 có số chiều là 2 và một cơ sở của W_1 là

$$\{v_1 = (1,2,1,1); v_2 = (0,0,1,2)\}.$$

- Tìm cơ sở của W_2

Lập $A_2 = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 8 & 9 \\ 6 & 16 & 16 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó W_2 có số chiều là 2 và một cơ sở của W_2 là

$$\{v_3 = (1,3,3,3); v_4 = (0,1,1,0)\}.$$

- Tìm cơ sở của $W_1 + W_2$

Ta có $W_1 + W_2$ sinh bởi các vectơ

$$v_1 = (1,2,1,1); v_2 = (0,0,1,2); v_3 = (1,3,3,3); v_4 = (0,1,1,0).$$

Lập $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Suy ra $W_1 + W_2$ có số chiều là 3 và một cơ sở của $W_1 + W_2$ là

$$\{w_1 = (1,2,1,1); w_2 = (0,1,1,0); w_3 = (0,0,1,2)\}.$$

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các vectơ sau đây:

$$u_1 = (1,2,0,1);\ u_2 = (2,1,3,1);\ u_3 = (7,8,9,5);\ u_4 = (1,2,1,0),$$

$$u_5 = (2,-1,0,1);\ u_6 = (-1,1,1,1);\ u_7 = (1,1,1,1).$$

Đặt $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, W = \langle u_4, u_5, u_6, u_7 \rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con U, W và $U + W$?