

## 릴레이 피드백을 이용한 개선된 PID 제어기 자동동조 기법

### Modified Method for Auto-tuning of PID Controller Using Relay Feedback

\*신창훈\*, 윤명현\*, 정학영\*

\*한국전력공사 전력연구원

(Tel: 042-865-5759, Fax: 042-865-5104, E-mail: hoony@kepri.re.kr)

**Abstract** Various auto-tuning methods using relay feedback are presented recently. They are composed of the consecutive procedures identifying Nyquist critical point using relay feedback and designing PID controller by one point of Nyquist plot mapping. This paper suggests a strategy to get the knowledges of Nyquist critical point and the neighborhood point of it using relay feedback. The parameters of PID controller are established by dominant pole approximation based on these knowledges. Designers can make use of the damping ratio as a time domain specification. So design flexibilities are taken in view of stability and performance of the system response considering practical system condition.

**Keywords** Process Control, PID Control, Relay Feedback

#### 1. 서론

최근 다양한 현대 제어이론이 등장하여 이를 이용한 제어가 상용화 되어 그 영역을 점차 확대해 나가고 있음에도 불구하고 일반 산업현장에서는 여러 가지 측면에서 많은 장점을 갖고 있는 PID 제어기가 널리 사용되고 있다. PID 제어기는 구조가 간단하고 각종 프로세스에 적용하기 쉬우므로 적은 비용으로 대량생산이 가능하다. 그리고 하드웨어적으로 안정된 구조를 갖추고 있으며 계통별로 격리된 구조로 설치되기 때문에 프로세스 사고시 타계통에 대한 과급효과를 최소화할 수 있다. 특히 요즘은 디지털 기술을 대폭 채용하여 제어성능의 향상, 다양한 운전 편의기능의 추가 및 신뢰도의 증가가 이루어지고 있다.

다만 프로세스에 대한 제어기의 파라미터를 조정하는 과정이 쉽지 않기 때문에 현장 운전원들은 많은 어려움을 겪고 있다. 프로세스 건설후 상당기간 동안 운전원들은 반복적인 시운전을 통하여 적절한 PID 파라미터를 결정한다. 그 후에도 운전원들은 프로세스의 설계변경 및 노후화에 따른 프로세스의 고유특성 변경에 대처하기 위해 계속 제어 파라미터 조정의 부담을 안고 있다. 따라서 프로세스에 적합한 최적 파라미터를 구하기까지 많은 노력이 요구되는바 이 과정을 자동적으로 처리하기 위한 자동동조에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다.

자동동조에 관한 연구는 다양한 방법으로 전개되어 왔으며 크게 Nyquist 선도의 한점에 관한 정보를 이용하는 방법과 system identification을 이용하는 방법 등이 있다. Nyquist 선도의 임계점(critical point)에는 시스템의 임계이득(critical gain)과 임계주파수(critical frequency)에 관한 정보가 포함되어 있다. Zeigler와 Nichols<sup>[8]</sup>는 이들 정보로부터 간단하게 PID 제어기의 파라미터를 계산해내는 방법을 제시하였으나 설정치 추종 응답성능에 일정한 진

동성분을 포함하고 있기 때문에 실제 프로세스 운전에서 적용하려면 파라미터의 미세조정이 선행되어야 한다. Astrom과 Hagglund<sup>[1]</sup>는 릴레이 피드백과 Describing 함수 해석법<sup>[3]</sup>을 이용하여 임계점에 관한 정보를 계산하였으며 이득여유도(gain margin) 및 위상여유도(phase margin)를 설계사양으로 제시하고 파라미터를 계산하는 식을 도출하였다.

본 논문은 릴레이 피드백을 이용한 개선된 PID 제어기의 자동동조 기법을 다루고 있다. 기존의 릴레이 피드백을 이용한 자동동조 기법은 Nyquist 선도의 임계점에 관한 정보를 추출하고 이를 이용하여 PID 제어기의 파라미터를 계산하는 일련의 과정으로 이루어져 있고, 개선된 자동동조 기법에서는 릴레이 요소와 임의의 지연요소를 조합하여 임계점 및 임계점에 인접한 다른 한점에 대한 정보를 추출함으로써 PID 제어기의 파라미터를 계산한다. 이 기법은 시간영역 설계사양으로 감쇠율(damping ratio)을 사용하고 있으며, 제어기 설계시 프로세스 응답의 안정도 및 성능을 충분히 고려할 수 있는 장점이 있다.

#### 2. 시스템 정보추출

Astrom 등<sup>[1]</sup>은 플랜트를 모델링하지 않고 시스템의 임계주파수(critical frequency)와 임계이득(critical gain)을 측정하여 PID 제어기의 자동동조에 응용하였다. 즉, 시스템 Nyquist 선도의 임계점(critical point)을 구하기 위해 릴레이 피드백을 이용하였으며 이 방법은 시스템을 모델링할 필요없이 실제 시스템으로부터 간단한 실험을 통하여 정보를 입수할 수 있는 장점이 있다.

본 논문에서 다루고 있는 PID 제어기 자동동조 기법을 적용하기 위해서는 Nyquist 선도의 임계점과 그에 인접한 다른 한점의 정보가 필요하다. 그림 1과 같이 임계점에

대한 정보는 기존 릴레이 피드백을 사용함으로써 구할 수 있으며, 임계점 근방의 인접점에 대한 정보는 임의의 지연요소를 추가함으로써 구할 수 있다.

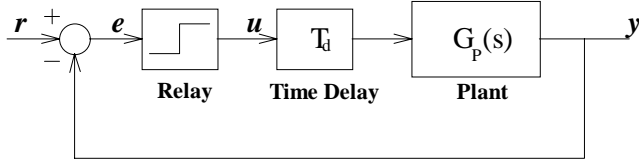


그림 1. 릴레이를 이용한 시스템 정보추출  
Fig. 1. System Information extraction from relay feedback

우선 지연요소  $T_d = 0$  으로 두고 릴레이 피드백 실험을 수행한다. 실험결과로부터 Nyquist 선도의 임계이득 ( $K_c$ )과 임계주파수 ( $\omega_c$ )는 아래식과 같이 구할 수 있다. 여기서  $d$ 는 릴레이 진폭,  $h$ 는 프로세스 출력진폭이고  $T_c$ 는 프로세스 출력의 주파수이다.

$$K_c = \frac{4d}{\pi h}, \quad \omega_c = 2\pi \frac{1}{T_c} \quad (1)$$

이것은 Nyquist 선도의 임계점을 표현하고 있으며 이를 직교 실수평면상의 한점으로 다시 표현하면

$$K_c G_p(\omega_c) = -1 \quad (2)$$

로부터

$$G_p(\omega_c) = -\frac{1}{K_c} \quad (3)$$

이므로  $G_p(j\omega_c) = a_1 + jb_1$  라 두면

$$a_1 = -\frac{1}{K_c}, \quad b_1 = 0 \quad (4)$$

이다.

다음으로 지연요소  $T_d = \delta > 0$  로 두고 릴레이 피드백 실험을 수행한다. 실험결과로부터 새롭게 구하여지는 임계이득과 임계주파수는 아래와 같다.

$$K_c' = \frac{4d'}{\pi a'}, \quad \omega_c' = 2\pi \frac{1}{T_c'} \quad (5)$$

마찬가지로 이것에 대한 직교 실수평면상의 위치를 표현하면

$$K_c' G_p(\omega_c') = -1 \quad (6)$$

로부터

$$G_p(\omega_c') = -\frac{1}{K_c'} \quad (7)$$

이다. 여기서 지연시간  $T_d$  로 인한  $G_p(j\omega_c')$ 의 각을 고려하면

$$\arg|G_p(j\omega_c')| - \tan^{-1}(T_d \omega_c') = -\pi \quad (8)$$

으로부터

$$\arg|G_p(j\omega_c')| = -\pi + \tan^{-1}(T_d \omega_c') \quad (9)$$

이므로  $G_p(j\omega_c') = a_2 + jb_2$  라 두면

$$a_2 = \frac{1}{K_c} \cos \{ \arg |G_p(j\omega_c')| \} \quad (10_a)$$

$$b_2 = \frac{1}{K_c} \sin \{ \arg |G_p(j\omega_c')| \} \quad (10_b)$$

이다. 위와 같이 릴레이 피드백을 이용하여 식 (4)와 (10) 으로부터 시스템 Nyquist 선도의 임계점과 그에 인접한 다른 한점을 직교 실수좌표의 형태로 표현할 수 있다.

### 3. 우세극점 근사화

폐루프 피드백 시스템에서 시스템의 응답은 폐루프 시스템의 극점과 영점에 의해 결정된다. 허수축에 가장 가까운 곳에 위치한 우세극점(dominant pole)  $p_1, p_2$ 는 시간 영역에서 가장 느린 감쇠율을 가지므로 시스템의 응답을 결정하는 가장 중요한 요소가 된다. 고전 제어이론에서는 제어시스템의 설계시 폐루프 시스템의 우세극점 배치를 고려한 제어기 설계기법이 일반화되어 있으며 이를 이용하여 시스템이 원하는 제어성능을 만족하도록 하고 있다.

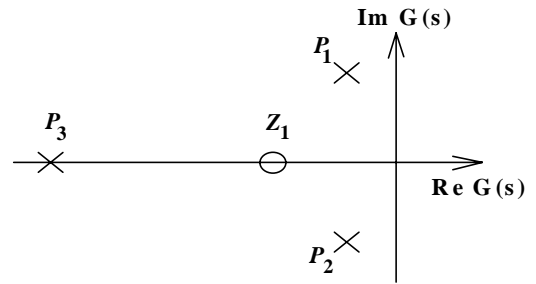


그림 2. 폐루프 시스템의 극점 및 영점 배치도  
Fig. 2. The configuration of poles and zeros

Nyquist 선도에서 임계점은 직교 실수평면에서 허수축 위에 배치된다. Astrom 등<sup>[2]</sup>은 임계점을 우세극점 근사화(dominant pole approximation)를 통하여 허수축에 근접한 극점의 형태로 나타내었다. 폐루프 전달함수의 극점은 다음과 같이 특성방정식으로부터 구할 수 있다.

$$1 + G_o(s) = 0 \quad (11)$$

이 식을  $s = j\omega$  에서 Taylor 급수 전개하면

$$1 + G_o(\sigma + j\omega) = 1 + G_o(j\omega) + j\sigma G_o'(j\omega) + \dots = 0 \quad (12)$$

이고, 여기서

$$G'(j\omega) = \frac{dG(j\omega)}{d\omega} \quad (13)$$

이다. 이식의 이차항 이상을 무시한 근사식으로부터 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$\sigma = j \frac{1 + G(j\omega)}{G'(j\omega)} \quad (14)$$

즉, 이 식은 시스템의 임계점을 허수축에 근접한 우세극점의 형태로 표현하였을 때  $\sigma$ 와  $\omega$ 의 관계를 나타낸다.

이때 전달함수의 미분항을 임계점과 임계점 근방의 인접점에서의 차분항으로 대체하면 이 식은 다음과 같이 재구성된다.

$$\sigma = \frac{G(j\omega_c) + 1}{G(j\omega_c) - G(j\omega_c')} j(\omega_c - \omega_c') \quad (15)$$

#### 4. PID 제어기 설계

다음과 같은 페루프 시스템을 고려한다.

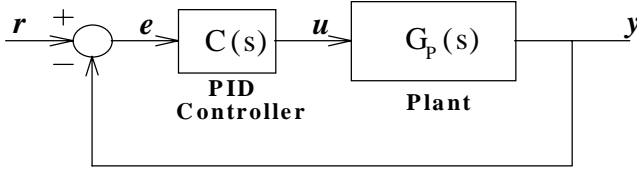


그림 3. PID 제어시스템의 기본구조  
Fig. 3. Typical PID control system

제어기 설계는 지정된 두 주파수  $\omega_c, \omega_c'$  에서 시스템 임계점과 그의 인접점으로부터 제어기를 사용하여 설계자가 지정하는 우세극점을 설계하는 일련의 과정에서 이루어진다. 여기서 설계자는 우세극점 근사화를 통하여 마련된 우세극점을 제동비의 형태로 나타내어 페루프 시스템의 우세극점을 지정할 수 있다.

인접한 두 주파수  $\omega_c, \omega_c'$  에서 플랜트 전달함수의 값을 표현하면

$$G_P(j\omega_c) = a_1 + jb_1 \quad (16\_a)$$

$$G_P(j\omega_c') = a_2 + jb_2 \quad (16\_b)$$

이다. 여기서 두 주파수는 임계주파수와 임계주파수의 근방값이다. PID 제어기의 전달함수는

$$G_C(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right] \quad (17)$$

이며, PID 제어기의 적분시간( $T_i$ )와 미분시간( $T_d$ )의 관계를 다음과 같이 두면

$$T_d = \alpha T_i \quad (18)$$

$$G_C(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{sT} + s\alpha T \right] \quad (19)$$

로 표현된다. 제어기와 플랜트로 구성된 개루프 전달함수는

$$G_O(j\omega) = G_C(j\omega) + G_P(j\omega) \quad (20)$$

이고, 두 주파수에서 다음의 값을 가진다고 가정한다.

$$G_O(j\omega_c) = G_R(j\omega_c) G_P(j\omega_c) = c_1 + jd_1 \quad (21\_a)$$

$$G_O(j\omega_c') = G_R(j\omega_c') G_P(j\omega_c') = c_2 + jd_2 \quad (21\_b)$$

식 (14)에서 표현한 우세극점의 주파수가  $\omega_c$  라고 가정

하고, 이차 시스템의 제동비와 우세극점의 자연주파수와 의 관계는

$$\sigma = \frac{\zeta\omega_c}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (22)$$

이므로 식 (15)와 (22)로부터

$$\frac{G_O(j\omega_c) - G_O(j\omega_c')}{G_O(j\omega_c) + 1} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \frac{j(\omega_c - \omega_c')}{\omega_c} = j\rho \quad (23)$$

이며, 여기에 식 (21)의 값을 대입하면

$$\frac{c_1 - c_2 + j(d_1 - d_2)}{c_1 + 1 + jd_1} = j\rho \quad (24)$$

$$c_1 - c_2 + \rho d_1 = 0 \quad (25)$$

$$d_1 - d_2 - \rho(c_1 + 1) = 0 \quad (26)$$

이다. 식 (24), (25)와 (26)으로부터 적분시간  $T_i$ 와 비례이득  $K_p$ 를 구하면

$$T_i = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (27)$$

$$\text{여기서 } A = \alpha\rho a_1\omega_c + ab_2\omega_c' \quad (28\_a)$$

$$B = a_1 - a_2 \quad (28\_b)$$

$$C = -\left(\frac{\rho a_1}{\omega_c} + \frac{b_2'}{\omega_c'}\right) \quad (28\_c)$$

이고

$$K_p = \frac{\rho}{m_1 - m_2 - \rho a_2} \quad (29)$$

$$\text{여기서 } m_1 = a_2(\alpha\omega_2 T_i - \frac{1}{\omega_2 T_i}) \quad (30\_a)$$

$$m_2 = a_1(\alpha\omega_1 T_i - \frac{1}{\omega_1 T_i}) + b_1 \quad (30\_b)$$

이다. 미분시간  $T_d$ 는 식 (18)로부터 직접 구할 수 있다.

#### 5. 모의실험

제시된 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 다음과 같은 프로세스 모델을 설정하고 모의실험을 수행하였다.

$$G_1(s) = \frac{1}{1+10s} e^{-2s} \quad (31)$$

$$G_2(s) = \frac{2.5}{(1+20s)^2} e^{-1.5s} \quad (32)$$

2장에서 기술한 바와 같이 각 프로세스에 대해 릴레이 피드백을 이용하여 Nyquist 선도의 임계점 및 인접점에 대한 정보를 추출하였다. 여기서 임의의 지연요소  $T_d$ 는 두 프로세스 모두 0.1초로 지정하였다. 추출된 프로세스 정보는 표 1과 같다.

표 1. 프로세스 정보

Table 1. Process Information

	$K_c$	$w_c'$	$K_c'$	$w_c'$	angle (rad)	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
$G_1(s)$	5.54	0.92	6.37	0.80	-3.06	-0.18	0	-0.16	-0.01
$G_2(s)$	8.49	0.23	7.49	0.21	-3.12	-0.12	0	-0.13	-0.003

추출된 프로세스 정보를 이용하여 각 프로세스에 대해 Ziegler-Nichols 계산법과 제시된 방법을 이용하여 PID 파라미터를 계산하고 설정치 추종성능 및 외란억제 효과를 비교하였다.

표 2. PID 파라미터

Table 2. PID Parameters

	프로세스	$\zeta$	$\alpha$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
Z-N	$G_1(s)$	-	-	4.021	3.90	0.94
	$G_2(s)$	-	-	3.352	6.33	0.63
제시된 방법	$G_1(s)$	0.3	0.1	5.093	13.50	3.24
	$G_2(s)$	0.6	0.2	8.781	22.69	4.54

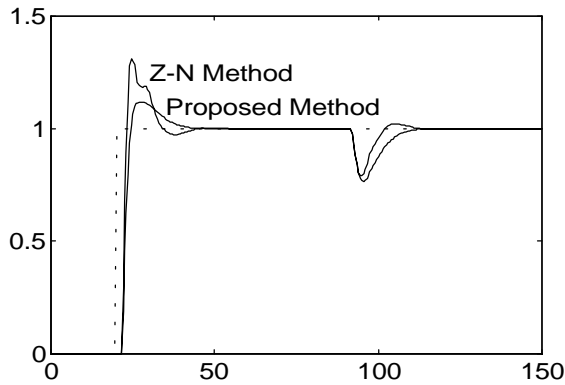
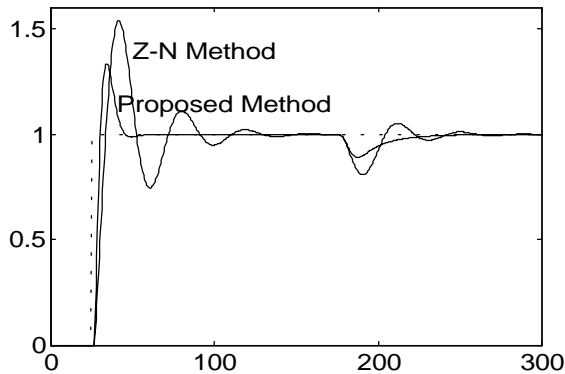
(a) 프로세스  $G_1(s)$ (b) 프로세스  $G_2(s)$ 

그림 4. 프로세스 응답  
fig. 4. Process response

## 6. 결론

본 논문에서는 릴레이 피드백을 이용한 개선된 PID 제어기의 자동동조 기법을 서술하였다. 제시된 방법에서는 릴레이 요소와 임의의 지연요소를 조합하여 시스템 Nyquist 선도의 임계점 및 임계점에 인접한 다른 한점에 대한 정보를 추출하였고 취득된 정보로부터 우세극점 근사화를 통하여 PID 제어기의 파라미터를 계산하였다.

이러한 일련의 과정들을 절차화함으로써 릴레이 피드백을 이용한 개선된 PID 제어기 자동동조 알고리즘을 구현할 수 있다. 제시된 방법은 시간영역 설계사양으로 감쇠율(damping ratio)를 사용함으로써 제어기 설계시 설계자가 프로세스 응답의 안정도 및 성능을 충분히 고려할 수 있는 장점이 있다. 설계된 PID 제어기는 Ziegler-Nichols 방법에 비해 설정치의 추종성능 및 외란 억제효과가 우수한 것으로 나타났다.

## 참고문헌

- [1] K. J. Astrom and T. Hagglund, "Automatic tuning of simple regulator with specifications on phase and amplitude margins," *Automatica*, vol. 20, pp. 645-651, 1984
- [2] K. J. Astrom and T. Hagglund, "Automatic Tuning of PID Controllers," Instrument Society of America, 1988
- [3] D. P. Atherton, "Nonlinear Control Engineering - Describing Function Analysis and Design," Van Nostrand Reinhold, London
- [4] C. C. Hang, K. J. Astrom and W. K. Ho, "Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula," *IEE Proceedings-D*, vol. 138, no. 2, pp. 111-118, 1991
- [5] C. C. Hang, K. J. Astrom and W. K. Ho, "Relay auto-tuning in the presence of static load disturbance," *Automatica*, 1993
- [6] A. Leva., "PID auto-tuning algorithm based relay feedback," *IEE Proceedings*, vol. 140, no. 5, pp. 328-338, 1990
- [7] M. Zhuang and D. P. Atherton, "Automatic tuning of optimum PID controllers," *IEE Proceedings*, vol. 140, no. 3, 1993
- [8] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum setting for automatic controllers," *Trans. ASME*, vol. 65, pp. 433-444, 1943