



# Specialeafhandling

Valder Østergaard Fredens

## Aldring og $r^*$ : Tid til et vendepunkt?

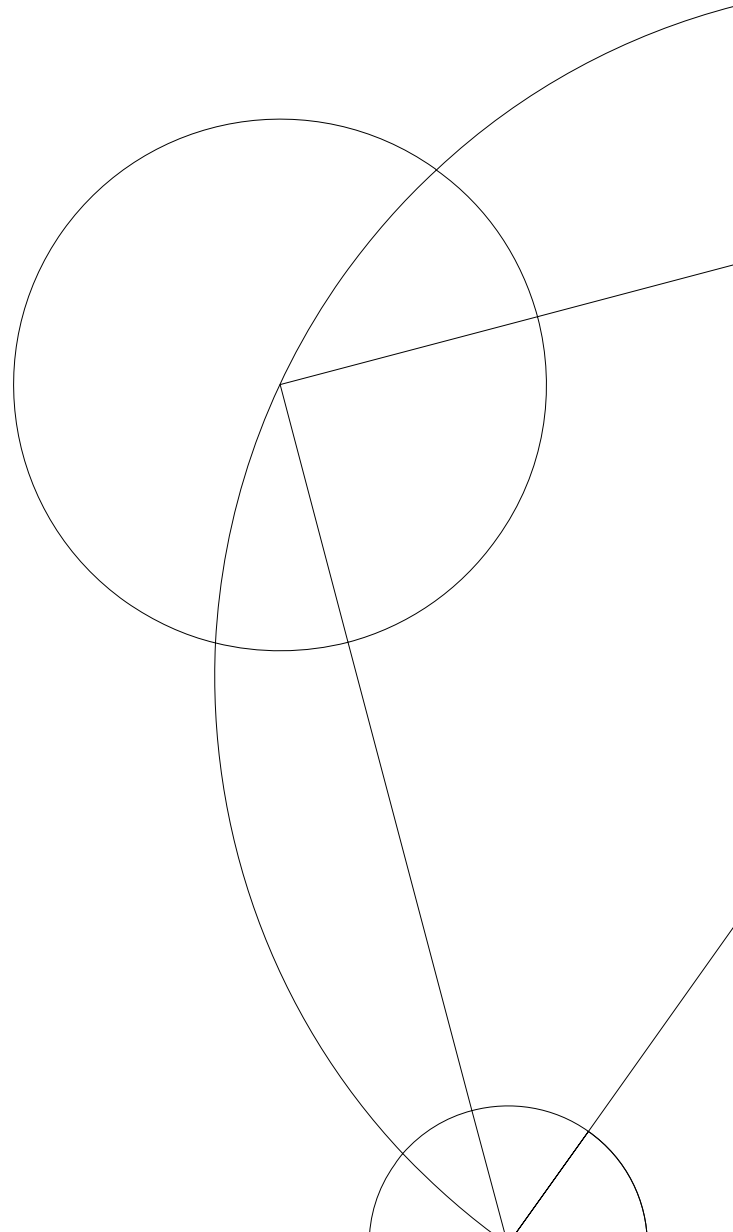
Et kvantitativt simulationsstudie af den naturlige realrente i USA

Vejleder: Søren Hove Ravn

Afleveringsdato: 19. december 2024

ECTS: 30

Anslag: 143.700



## Abstract

This thesis investigates the relationship between aging and the natural real interest rate. Since the 1980s, real interest rates in advanced economies have steadily declined, reaching historically low levels before the onset of the COVID-19 pandemic. This prolonged downward trend coincided with significant demographic shifts, including rising life expectancy and declining fertility rates, contributing to an aging population and an increasing old-age dependency ratio. Extensive literature highlights a negative correlation between aging and the natural real interest rate. This thesis seeks to examine this relationship further by employing a large-scale overlapping generations (OLG) model calibrated to the U.S. economy. In particular, the thesis attempts to quantify and verify the hypothesis put forward by Goodhart and Pradhan who predict a rebound in the natural real interest rate due to dissaving among large elderly cohorts and mounting pressures on public expenditures.

The thesis finds that aging, composed of rising life expectancy and declining fertility rates, have contributed to a decline in the natural real interest rate of more than 1.5 percentage points since 1970. The analysis further reveals that the baby boomer generation born after World War II has placed a distinct downward pressure on the natural interest rate as they have accumulated savings for retirement and since gradually exited the labor force. The model predicts a minor turning point in the natural interest rate after 2025 as the downward pressure from the baby boomer cohorts subsides, generating a temporary increase in the growth rate of the labor force. Meanwhile, a rising dependency ratio is expected to increase expenditures on pensions and healthcare, which will exert upward pressure on the natural interest rate, whether financed through higher taxes or public debt. Depending on the extent to which public expenditures will rise, it is more likely that the natural real interest rate will settle at a higher level than pre-pandemic norms. In the short to medium term, the thesis thus supports Goodhart and Pradhan's prediction that the natural real interest rate is set for a rebound. Over the longer term, however, it finds that potential continued increases in life expectancy and further declines in fertility will reintroduce downward pressure on the natural real interest rate, consistent with the existing literature. It thus rejects the notion that a permanently elevated natural real interest rate is imminent due to dissaving by retirees. Instead, it confirms that rising public expenditures will remain a critical driver of upward pressure on the natural real interest rate.

This thesis, by examining the specific effects of the baby boomer generation and the impact of aging on public expenditures, thereby provides a more nuanced perspective on the narrative that demographic trends are inevitably linked with falling interest rates and secular stagnation.

Department of Economics  
University of Copenhagen

## Forord

Jeg ønsker at udtrykke min taknemmelighed over for de personer, der har støttet mig gennem specialeforløbet. Først og fremmest vil jeg takke min vejleder, Søren Hove Ravn, for sin værdifulde og kvalificerede vejledning. Tak også til Rasmus Klitte Andersen, Oliver Á Rógvi og Thomas Bernt Henriksen for deres gode råd og input. Dernæst en særlig tak til Andrea Papetti for sin vilje til at indgå i faglige diskussioner.<sup>1</sup>

Økonomisk Institut  
Københavns Universitet

---

<sup>1</sup>Denne afhandling indeholder ingen tekst genereret af kunstig intelligens.

# Indhold

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>3</b>
1.1	De fire mekanismer . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Litteraturgennemgang</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>En simpel OLG-model</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Modelbeskrivelse</b>	<b>17</b>
4.1	Befolkning og arbejdsudbud . . . . .	17
4.2	Husholdningerne . . . . .	18
4.3	Produktion . . . . .	21
4.4	Staten . . . . .	24
4.5	Dynamisk efficiens . . . . .	25
4.6	Løsning af modellen . . . . .	26
4.7	Steady state . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Data og kalibrering</b>	<b>28</b>
5.1	Demografiske data . . . . .	28
5.1.1	Fertilitet . . . . .	28
5.1.2	Dødelighed . . . . .	29
5.2	Økonomiske data . . . . .	30
5.3	Kalibrering af parametre . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Analyse</b>	<b>32</b>
6.1	Hovedresultater . . . . .	33
6.2	Dekomponering . . . . .	35
6.2.1	Effekt af babyboomet . . . . .	38
6.3	Investeringer og opsparing . . . . .	39
6.4	Økonomisk vækst . . . . .	41
6.5	Husholdningernes adfærd . . . . .	42
6.6	Eksperimenter . . . . .	44
6.6.1	Simulering af G&P's hypotese . . . . .	47
6.7	Robusthed . . . . .	49
6.8	Alternative fremskrivninger . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Diskussion</b>	<b>55</b>
7.1	Kommer der et vendepunkt? . . . . .	55
7.2	Evaluering af G&P's hypotese . . . . .	56
7.3	USA som åben økonomi . . . . .	58

7.4 Fremadrettede perspektiver . . . . .	59
<b>8 Konklusion</b>	<b>61</b>
<b>Litteraturliste</b>	<b>66</b>
<b>Datakilder</b>	<b>67</b>
<b>Appendiks A: Udledninger bag simpel OLG-model</b>	<b>68</b>
<b>Appendiks B: Udledninger bag kvantitativ OLG-model</b>	<b>77</b>
<b>Appendiks C: Supplerende resultater</b>	<b>86</b>
<b>Appendiks D: Supplerende data</b>	<b>91</b>
<b>Appendiks E: Kode og kontakt</b>	<b>96</b>

# 1 Indledning

Siden den industrielle revolution har stadig flere lande gennemgået en demografisk transition, hvor fertiliteten og dødeligheden i store træk er faldet. I alle avancerede økonomier ligger fødselsraterne nu under det niveau, der kræves for at opretholde befolkningen uden indvandring. Sammen med stigningen i levealderen betyder det, at afhængighedsforholdet, også kendt som forsørgerbyrden, mellem ældre og yngre vokser. Siden midten af 1980'erne har realrenterne været faldende i samtlige udviklede økonomier. I løbet af 2010'erne frem til 2022 havde flere økonomier negative renter, hvilket gav anledning til diskussioner om sekulær stagnation og likviditetsfælder. Denne tendens, som ifølge de fleste økonomer afspejlede et vedvarende fald i den naturlige rente, blev dog brudt efter covid-19-pandemien. Siden 2022 er realrenterne steget markant, da centralbankerne har reageret på udbruddet af inflation efter pandemien. Hvorvidt denne stigning kun er et kortsigtet fænomen, eller om realrenterne vil stabilisere sig på et permanent højere niveau end før pandemien, er et relevant spørgsmål. Hvis renterne forbliver høje, vil det afspejle, at den underliggende strukturelle rente, også kaldet den *naturlige* rente, har ændret sig. Hvis den naturlige rente stiger, vil det bl.a. øge låneomkostningerne for stater langt ud i fremtiden og påvirke holdbarheden af de offentlige finanser.

Flere faktorer driver udviklingen i den naturlige rente, heriblandt demografi. Demografiske processer kan betragtes som en eksogen faktor for økonomiske variable, og demografiske data og fremskrivninger er generelt forbundet med en lav grad af usikkerhed. Dette gør demografiske variable til et oplagt udgangspunkt i forsøget på at forklare den langsigtede makroøkonomiske udvikling.<sup>2</sup>

Dette speciale har til formål at afdække sammenhængen mellem aldring og den naturlige rente. Ved at simulere en kvantitativ OLG-model kalibreret til den amerikanske økonomi finder specialet, at den demografiske udvikling har lagt et nedadgående pres på den naturlige rente siden 1970. Specialet bekræfter dermed størstedelen af den relaterede litteratur, som viser, at en stigende forventet levetid og faldende vækstrate i arbejdsstyrken samlet set sænker den naturlige rente. Samtidig udgør specialet et unikt bidrag ved inden for rammerne af en kvantitativ model at efterprøve, om den demografiske udvikling fremover kan føre til et vendepunkt i den naturlige rente, som foreslået af Goodhart og Pradhan (2020). Analysen viser, at de store kohorter født efter 1945, også kendt som babyboomer-generationen, har lagt et særligt nedadgående pres på den naturlige rente siden 1990'erne. Eftersom dette negative pres forventes at aftage, konkluderer specialet, at der er udsigt til et vendepunkt i den naturlige rente mellem 2025 og 2042. I det omfang de offentlige udgifter i form af pensions- og sundhedsydelser til ældre samtidig vil stige, vil dette lægge et yderligere opadgående pres på den naturlige rente. Specialets resultater indebærer derfor, at realrenterne på mellemlang sigt næppe vil vende tilbage til de lave niveauer, der var gældende før 2022. Dermed afvises det, at USA, og sandsynligvis andre avancerede økonomier, på grund af demografiske faktorer uundgåeligt er fanget i sekulær stagnation.

---

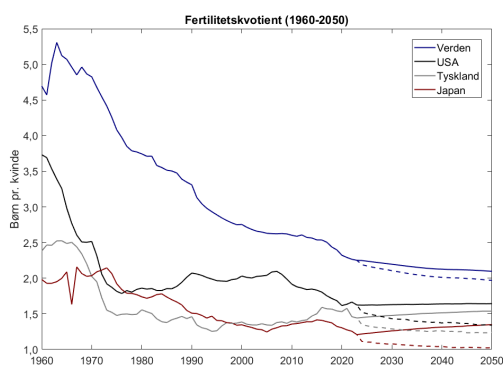
<sup>2</sup>Andre faktorer omfatter bl.a. produktivitetsvækst og globale kapitalstrømme (Barrett m.fl., 2023).

Specialet tager udgangspunkt i USA, der som verdens største økonomi og obligationsmarked er særligt relevant for renteudviklingen i resten af verden. Derudover er karakteren af den demografiske transition i USA sammenlignelig med andre udviklede økonomier. Specialets resultater er dermed også relevante i en europæisk og dansk kontekst.

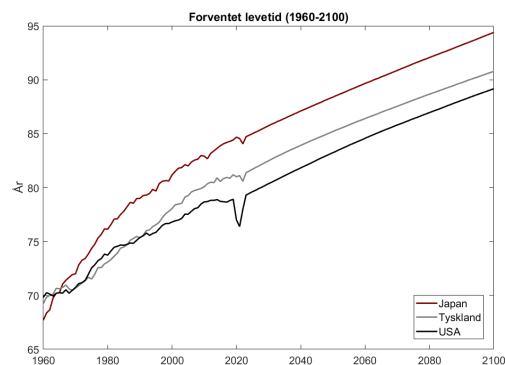
Fertiliteten har været faldende i både USA og resten af verden siden 1960'erne, jf. figur 1a. I USA har fertiliteten historisk ligget højere end i andre udviklede økonomier, men er siden 2007 faldet yderligere og lå i 2023 på 1,62 børn per kvinde. I FN's befolkningsfremskrivning for USA lægges der i mellemscenariet til grund, at fertilitetskvoteienten brat vil holde op med at falde og vil stabilisere sig på 1,65. Forestiller man sig derimod, at den faldende tendens vil fortsætte, er FN's nedre 80 pct.-konfidensinterval tilsyneladende et mere plausibelt bud. Her forventes fertilitetskvoteienten at stabilisere sig på under 1,30 frem mod 2100.

Samtidig er dødeligheden faldet (se figur 2a), hvilket har givet udslag i en højere forventet levetid. I USA er den forventede levealder steget fra knap 71 år i 1970 til 79,3 år i 2023. Denne tendens har været næsten uafbrudt på nær under covid-19-pandemien, som ramte USA særligt hårdt, jf. figur 1b. Den forventede levealder forventes at fortsætte sin stigende tendens, således at den i 2050 når 83,2 år og 89,2 år i 2100. I andre udviklede økonomier er tendensen endnu stærkere. Den faldende fertilitet og stigende forventede levetid har resulteret i et højere afhængighedsforhold mellem ældre og populationen i den arbejdsdygtige alder. I 2023 var der i USA 30 pct. over 65 år i forhold til antallet af personer mellem 20 og 64 år. I 2050 vil forholdet være over 40 pct., og i 2100 vil det være mellem 54 og 72 pct. afhængig af, hvordan fertiliteten udvikler sig, jf. figur 2b.

Figur 1: Fertilitet (a) og forventet levetid (b).

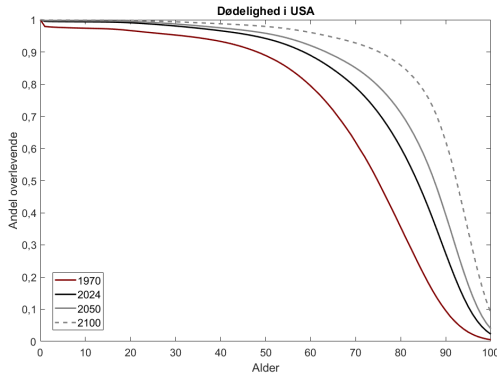


(a) Samlet fertilitet 1960-2050. Fremskrivning fra mellemscenariet efter 2023. De stiplede linjer viser fremskrivningen fra det 80 pct. nedre konfidensinterval. Kilde: FN (2024).

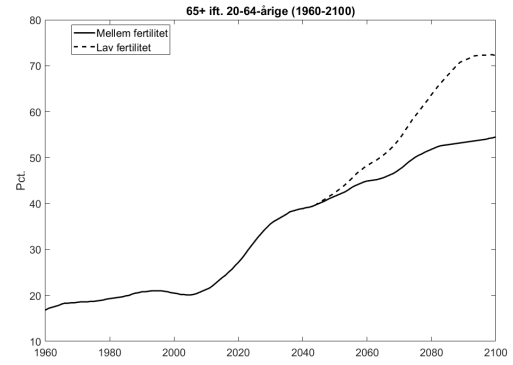


(b) Forventet levetid 1960-2100. Defineret som den gennemsnitlige levetid for en nyfødt givet dødeligheden for hver alder i det givne år. Vægtet gennemsnit for begge køn. Fremskrivninger fra mellemscenariet efter 2023. Kilde: FN (2024).

Figur 2: Dødelighed (a) og afhængighedsforhold (b)



(a) Ubetingede overlevelseskurver i USA. Alder angivet på førsteaksen. 2024, 2050 og 2100 er baseret på FN's fremskrivninger. Kilde: FN (2024) og egne beregninger.



(b) Antallet af 65+-årige ift. 20-64-årige i USA 1960-2100. Fremskrivning efter 2023. I mellemscenariet forventes det, at fødselsraten stabiliser sig på 1,65, mens det lave scenarie antager en fødselsrate på ca. 1,15 børn per kvinde. Kilde: FN (2024).

### Definition og identifikation af den naturlige realrente

Den naturlige rente defineres som den risikofri realrente, der skaber en langsigtet ligevægt mellem udbud og efterspørgsel efter opsparing.<sup>3</sup> Der sondres i øvrigt mellem begreberne den *naturlige* rente og den *neutrale* rente.<sup>4</sup> Distinktionen følger af denne relation, jf. Platzer m.fl. (2022); den nominelle rente  $i_t$  bestemt af centralbanken kan deles op i tre komponenter, jf. (1)<sup>5</sup>: den neutrale realrente  $r_t^{n*}$ , den forventede inflation  $E_t[\pi_{t+1}]$  samt en pengepolitisk komponent  $MP_t$ , der bestemmes af centralbanken afhængig af hvor restriktiv pengepolitikken skal være. Centralbanken har kun direkte kontrol over den pengepolitiske komponent, mens den ingen indflydelse har på den neutrale realrente.

$$i_t = r_t^{n*} + E_t[\pi_{t+1}] + MP_t. \quad (1)$$

Den neutrale realrente kan opdeles i en langsigtet, strukturel komponent og en kortsigtet, cyklisk komponent, således at  $r_t^{n*} = r_t^{s*} + \zeta_t$ , hvor  $r_t^{s*}$  er den strukturelle komponent, mens  $\zeta_t$  er den cykliske komponent, så at  $\zeta_t = 0$  i en konjunkturneutral situation. Den neutrale rente er det niveau for realrenten, der sikrer, at den faktiske økonomiske aktivitet bliver lig den potentielle aktivitet, hvor den potentielle aktivitet er defineret som den, der harmonerer med en stabil pris- og lønudvikling i fravær af transitoriske chok og nominelle stivheder (Papetti, 2021a). Den naturlige realrente er det langsigtede niveau for den neutrale realrente og vil derfor per definition bevæge sig langsomt og ikke være påvirket af cykliske udsving (Platzer m.fl., 2022). I dette

<sup>3</sup>Begrebet går tilbage til Wicksell (1936), og i litteraturen anvendes også *ligevægtsrenten* eller den *wicksellianske* rente om den naturlige rente.

<sup>4</sup>Denne distinktion anvendes ikke nødvendigvis i den øvrige litteratur, hvor det ofte ses, at de to begreber forveksles.

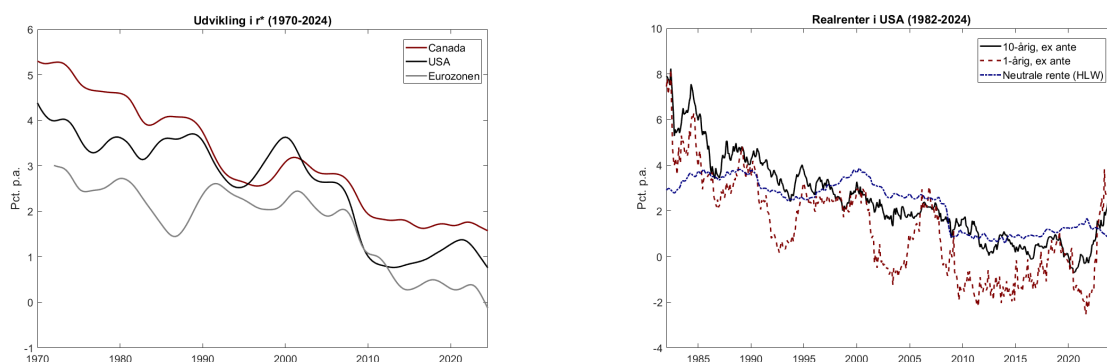
<sup>5</sup>Modsat centralbankrenten vil markedsrenterne yderligere indeholde en risikopræmie, der afhænger af løbetid og låntagerens kreditværdighed mm.



speciale anvendes begrebet den *naturlige realrente* om den strukturelle komponent i den neutrale realrente, som er specialets primære undersøgelsesgenstand. Yderligere anvendes definitionen  $r_t^* \equiv r_t^{s*}$  om den naturlige realrente. Begreberne *den naturlige realrente*, *den naturlige rente*,  $r^*$ , og hvis ikke andet er angivet, *renten*, anvendes synonymt.

Den naturlige rente er et teoretisk koncept og kan ikke måles præcist. Et hvert estimat af den naturlige rente er derfor forbundet med usikkerhed. Det ligger uden for dette speciales formål at estimere den naturlige rente økonometrisk. I stedet henvises der til estimerterne udarbejdet af Holston, Laubach og Williams (HLW) som empirisk mål for den neutrale rente i USA. I figur 3a vises udviklingen i den naturlige rente i USA, Canada og Eurozonen. Serierne fra HLW er udglattet med et HP-filter for at bortfiltrere den cykliske komponent (Hodrick og Prescott, 1997). Ifølge HLW er den naturlige realrente i USA faldet med over 3 pp mellem 1970-2024.<sup>6</sup>

Figur 3: Udvikling i  $r^*$  (a) og realrenter i USA (b)



(a) Udvikling i  $r^*$  1970-2024 (juli) i Canada, USA og Eurozonen. Udglattet med et HP-filter,  $\lambda = 100$ .

Kilde: Holston m.fl. (2024) og egne beregninger.

(b) Realrenter (ex ante) i USA 1982-2024 (juli). De 10-årige og 1-årige realrenter er beregnet ved at dividere den effektive rente på statsobligationer med den forventede inflation. Månedlige gennemsnit. Kilde: FRED (2024c), Holston m.fl. (2024) og egne beregninger.

I figur 3b ses, at både de korte og lange realrenter i USA, her defineret som de effektive ex ante-realrenter på hhv. 10-årige og 1-årige statsobligationer, har været faldende siden starten af 1980'erne indtil 2021, hvorefter de er steget kraftigt. Samme udvikling har gjort sig gældende i andre udviklede økonomier (se figur A14). Den neutrale rente estimeret af HLW har også været faldende gennem perioden og ligger tæt op ad den 10-årige realrente. En væsentlig undtagelse er i begyndelsen af 1980'erne, hvor den neutrale rente lå langt under de faktiske realrenter. Efter 2018 afviger den neutrale rente også markant fra de faktiske realrenter. HLW finder, at den neutrale rente er faldet siden ultimo 2021, hvilket er på samme tidspunkt som de faktiske realrenter begyndte at stige. Dette antyder umiddelbart, at stigningen i realrenterne efter covid-19-pandemien ikke er vedvarende. Estimerterne af den neutrale rente er dog forbundet med usikkerhed - særligt i forbindelse med vendepunkter og økonomiske stød (Ingholt m.fl., 2023).

<sup>6</sup>Der anvendes forkortelserne pp for procentpoint og bp for basispoint, hvor 1 pp består af 100 bp.

## 1.1 De fire mekanismer

Aldring er en konsekvens af faldende fertilitet, hvilket giver en lavere befolkningstilvækst, og lavere dødelighed, hvilket giver en højere forventet levetid. Effekten af aldring på renten kan opdeles i tre mekanismer (Carvalho m.fl., 2016). Hvis pensionssystemet er finansieret over indkomstskatten, optræder også en fjerde mekanisme (Papetti, 2021a):

1. Arbejdsudbud. En lavere befolkningstilvækst mindsker væksten i arbejdsstyrken, hvilket for en given beholdning af kapital medfører et højere kapital/arbejder-forhold. Dette sænker marginalproduktet på kapital, hvilket lægger et nedadgående pres på den naturlige rente.
2. Forventet levetid. En øget forventet levetid i form af en højere sandsynlighed for at overleve øger husholdningernes incitament til at spare mere op, da de har udsigt til længere tid på pension. Dette øger udbuddet af opsparing, hvilket lægger et nedadgående pres på den naturlige rente.
3. Afhængighedsforhold. Lavere befolkningstilvækst samt en øget forventet levetid medfører et højere afhængighedsforhold, idet antallet af pensionister i forhold til populationen i den arbejdsdygtige alder stiger. Da pensionister har en højere tilbøjelighed til at nedspare, medfører dette alt andet lige, at beholdningen af kapital falder, hvilket lægger et opadgående pres på den naturlige rente.
4. Pensionsudgifter. Hvis pensionssystemet er finansieret gennem indkomstskatter, vil aldring, for en given kompensationsgrad, øge presset på de offentlige finanser. Dette kræver alt andet lige, at skatten hæves. Et højere skattetryk vil fortrænge beholdningen af privat kapital, da husholdningernes evne til at spare op forringes. Dette lægger et opadgående pres på den naturlige rente.

Der er altså to mekanismer, hvorigennem aldring medfører en lavere naturlige rente, mens der er to mekanismer, der tilsiger det modsatte. Den samlede effekt af aldring på den naturlige rente afhænger af, hvilke af disse mekanismer, der dominerer.

For at undersøge hvordan den demografiske udvikling har påvirket den naturlige rente i USA, opstiller jeg en kvantitativ OLG-model<sup>7</sup> for en lukket økonomi med inspiration fra Eggertsson m.fl. (2019a). Med begrebet *kvantitativ* OLG-model hentydes der til specifikationen opført af Auerbach og Kotlikoff (1988), hvilket indebærer, at modellen indeholder samtlige etårige kohorter inden for et givet aldersinterval. Dette gør det muligt at tilpasse modellen til den empiriske aldersfordeling. Modellen adskiller sig bl.a. fra Eggertsson m.fl. (2019a), idet jeg udvider modellen til at inkludere 74 generationer og introducerer et skattefinansieret pensionssystem inspireret af Papetti (2021a).

---

<sup>7</sup>OLG er en forkortelse for *overlapping generations*. Begreberne OLG-model og livscyklusmodel anvendes synonymt.

## 2 Litteraturgennemgang

Interessen for sammenhængen mellem demografi og den naturlige rente blev styrket, da realrenterne i 2010'erne nåede historisk lave niveauer, herunder i mange lande negative, samtidig med at den aggregerede efterspørgsel forblev lav. Dette foranledigede en genopblussen af debatten om sekulær stagnation,<sup>8</sup> som beskriver en situation hvor investeringsefterspørgslen er kronisk for lav til at absorbere udbuddet af opsparing, idet  $r^* < 0$  (Summers, 2013, 2015).<sup>9</sup> Siden 2022 er realrenterne dog steget igen, og blandt andre Lawrence Summers, som selv var eksponent for genintroduktionen af begrebet i 2013, har siden udtalt, at der ikke længere er udsigt til sekulær stagnation, idet han bl.a. henviser til, at statsgælden i verden vokser, og at stigningstakten i den forventede levetid afmattes (Summers, 2023). På den anden side holder blandt andre Olivier Blanchard fast i, at udviklede økonomier stadig befinder sig i sekulær stagnation, da de underliggende strukturelle faktorer, herunder den demografiske udvikling, vil vare ved (Blanchard, 2023).

Eggertsson m.fl. (2019a) anvender en kvantitativ livscyklusmodel for en lukket økonomi med 56 generationer til at analysere, hvordan den demografiske udvikling i USA har påvirket realrenten med særligt henblik på sekulær stagnation. Deres hovedresultater viser, at den naturlige rente faldt med i alt 4,02 pp mellem 1970-2015. Heraf har den demografiske udvikling isoleret set forårsaget et fald på 3,76 pp, hvoraf 1,84 pp tilskrives faldende fertilitet, og 1,92 pp skyldes lavere dødelighed. Lavere produktivitetstvækst vurderes at have bidraget med et fald på 1,9 pp, mens højere statsgæld alt andet lige har øget den naturlige rente med 2,11 pp. De finder, at boomer-generationen lagde et opadgående pres på den naturlige rente mellem 1970-2000, mens de efterfølgende frem mod 2024 lagde et nedadgående pres på renten. Deres model viser et vendepunkt i renten mellem 2025-2040. De finder også, at et fald i lønandelen og den relative pris på kapital i mindre grad har bidraget til faldet i den naturlige rente. Da modellen på lang sigt forudsiger en negativ realrente, konkluderer de, at sekulær stagnation har udsigt til at være et vedvarende fænomen som følge af den demografiske udvikling. De forbinder den faldende lønandel med den højere profitrate, der er observeret i USA i perioden, hvilket de mener afspejler, at økonomien er blevet mindre konkurrencepræget. Denne udvikling har forårsaget en afkobling mellem renten og marginalproduktet på kapital. Mens begge er faldet som følge af faldet i den naturlige rente, har afkoblingen mellem dem muliggjort, at det gennemsnitlige afkast på kapital har ligget konstant (Eggertsson m.fl., 2021). I empirien ses dette ved, at renten på obligationer er faldet, mens afkastet på aktier og produktiv kapital har været konstant, hvis ikke stigende (Gomme m.fl., 2015). Andre peger på fremkomsten af ikke-fysisk kapital og øget aggregeret risiko (Farhi og Gourio, 2018) samt en stigning i efterspørgslen efter sikre aktiver (Del Negro m.fl., 2017; Del Negro m.fl., 2019) som forklaring på afkoblingen mellem renten og afkastet på kapital.

---

<sup>8</sup>Begrebet går oprindeligt tilbage til Hansen (1939) ifm. Den store depression i 1930'erne.

<sup>9</sup>Definitionen  $r^* < 0$  blev opstillet af Pigou (1943) som en formalisering af Alvin Hansens teori. Olivier Blanchard anvender definitionen  $r < g$ , hvor  $r$  er den risikofri realrente, og  $g$  er vækstraten i økonomien (Blanchard, 2023).

Papetti (2021a) anvender ligeledes en kvantitativ livscyklusmodel for en lukket økonomi til at analysere effekten af aldring på den naturlige rente i Eurozonen. Han finder, at demografiske faktorer har forårsaget et fald i den naturlige rente på 1,4 pp målt fra gennemsnittet i 1980'erne til 2030. Uden tilstedeværelsen af skattefinansierede pensioner ville realrenten være yderligere 50 bp lavere. Bidraget fra stigningen i den forventede levetid estimeres til -90 bp, mens bidraget fra den lavere fertilitet estimeres til -50 bp. Han undersøger også effekten af at hæve pensionsalderen, som han finder har en negligerbar effekt på realrenten. Han afviser Goodhart og Pradhans forudsigelse om, at aldring vil foranledige et vendepunkt i realrenterne grundet øgede pensionsudgifter. Ikke desto mindre viser hans model, at den naturlige realrente står til at vende sin nedadgående tendens efter 2030, hvorefter den vil stabilisere sig på et marginalt højere niveau - dog stadig 1 pp lavere end i 1980'erne. Papetti finder også lig Eggertsson m.fl. (2019a) og Gagnon m.fl. (2016), at den naturlige rente faldt brat omkring 2007 grundet demografi. Dette fald kan forklares ved, at relativt store årgange fra babyboomer-generationen her gik på pension, hvilket sænkede vækstraten i arbejdsstyrken. Dette mindskede investeringsefterspørgslen, hvilket dermed lagde et nedadgående pres på den naturlige rente, jf. mekanisme 1. At dette fald i realrenterne indtraf på samme tidspunkt som finanskrisen bidrog til, at renterne var særligt lave i 2010'erne, hvilket ifølge Papetti (2021a) og Gagnon m.fl. (2016) i sin samtid blev misforstået som værende udelukkende et cyklisk fænomen.

Gagnon m.fl. (2016) simulerer ligesom Eggertsson m.fl. (2019a) en kvantitativ OLG-model på USA som en lukket økonomi. De estimerer, at den naturlige realrente i USA faldt med knap 2 pp mellem 1980-2015, hvoraf 1,25 pp skyldtes demografiske faktorer. De undersøger også effekten på vækstraten i BNP per capita, som de ligeledes vurderer er faldet med 1,25 pp sammenlignet med 1980 på grund af demografi. De påpeger, at de store årgange født efter 1945 pressede renterne, lønningerne og væksten op i 1960-1980, da de indtrådte i arbejdsstyrken. Eftersom de selv fik færre børn, opstod der efterfølgende en demografisk dividende i form af et lavt afhængighedsforhold, hvilket understøttede den økonomiske vækst. Deres model viser, at faldet i den naturlige rente intensiveres efter år 2000, hvor også vækstraten i BNP per capita falder, idet årgangene fra boomer-generationen går på pension. Faldet i renten her var drevet af en stigning i kapital per arbejder (jf. mekanisme 1), hvilket skete på trods af, at opsparingsraten i samme periode faldt (jf. mekanisme 3). De finder, at fertiliteten, først og fremmest i kraft af babyboomer-generationen, har haft større betydning for udviklingen i den naturlige rente end stigningen i den forventede levetid. Dette resultat strider delvist imod Eggertsson m.fl. (2019a), Papetti (2021a) og Bielecki m.fl. (2020), som finder at stigningen i den forventede levetid, jf. mekanisme 2, har været den dominerende faktor bag faldet i den naturlige rente, om end lavere fertilitet stadig er en væsentlig faktor.

Carvalho m.fl. (2016), Carvalho m.fl. (2023) og Acedański og Włodarczyk (2018) finder derimod, at stigningen i den forventede levetid langt overgår betydningen af en faldende befolkningstilvækst. Dette resultat kan delvist tilbageføres til, at deres modeller er baseret på Gertler (1999), som anvender specifikationen introduceret af Blanchard (1985) og Yaari (1965). Denne

type OLG-model kan ikke opfange effekten af boomer-generationen og dens efterkommere, idet den kun indeholder en homogen gruppe af hhv. arbejdere og pensionister. Carvalho m.fl. (2016) analyserer et repræsentativt OECD-land som en lukket økonomi og finder, at den naturlige rente faldt med over 1,5 pp som følge af aldring mellem 1990-2014.

Carvalho m.fl. (2023) opstiller en OLG-model, hvor der indgår tre lande, der befinder sig i forskellige stadier i den demografiske transition: en lille økonomi med en ung befolkning, en lille økonomi med en gammel befolkning og resten af verden. De tre lande har forskellige grader af finansiel integration, således at der er ufuldkommen kapitalmobilitet. Dermed er deres model en hybrid mellem den fuldkomment lukkede økonomi som i Carvalho m.fl. (2016) og den fuldkomment åbne økonomi som i Ferrero (2010). De finder, at en højere grad af finansiel integration gør realrenten mere følsom over for udviklingen i udlandet, mens betydningen af indenlandske faktorer mindskes. Deres resultater viser, at realrenten faldt med over 2 pp i den globale økonomi mellem 1990-2020 som følge af aldring. I den unge økonomi er faldet knap 3 pp, mens realrenten faldt med 1,5 pp i den gamle økonomi. Uden finansiel integration ville realrenten i den gamle økonomi være lavere, mens den ville være højere i den unge økonomi. Mere åbenhed skaber således mere konvergens mellem forskellige økonomiers naturlige renter. Derudover finder de, at højere produktivitetsvækst, højere statsgæld eller en stigning i de offentlige udgifter giver en højere naturlig rente. Disse resultater stemmer med Rachel og Summers (2019), som finder, at den naturlige rente i OECD ville være faldet betydeligt mere mellem 1980-2018, havde det ikke været for stigningen i statsgælden og offentlige udgifter til pensioner i samme periode.

Krueger og Ludwig (2007) anvender en kvantitativ OLG-model for en åben økonomi på USA sammen med resten af OECD. De forudsiger, at realrenten i USA vil falde med 86 bp mellem 2005 og 2080 som følge af aldring. Hvis USA var en lukket økonomi, ville realrenten falde mindre (79 bp), eftersom aldringsprocessen i andre OECD-lande er mere fremskreden. Dette resultat bekræftes af Rachel og Summers (2019), som også finder, at den naturlige rente ville være højere i USA, hvis det var en lukket økonomi. Den beskedne forskel mellem de to estimater demonstrerer dog, at behandling af USA som en lukket økonomi ikke gør en væsentlig forskel på resultatet for udviklingen i renten.

Bielecki m.fl. (2020) analyserer Eurozonen som en åben økonomi med en kvantitativ OLG-model og finder, at den naturlige realrente faldt med 2 pp mellem 1985-2030. Heraf forklarer aldring to tredjedele eller over 1,3 pp, hvoraf lavere dødelighed forklarer ca. to tredjedele. De vurderer, at udviklingen ville have været omtrent uændret, hvis Eurozonen havde været en lukket økonomi, eftersom resten af verden har gennemgået en tilsvarende aldringsproces. De finder, at en højere pensionsalder har en beskedne, men positiv, effekt på den naturlige rente, mens lavere pensionsudgifter har en negativ effekt.

Litteraturen, der anvender strukturelle livscyklusmodeller, finder altså enstemmigt, at aldring lægger et nedadgående pres på den naturlige rente. Dette gælder, hvad end der betragtes en lukket eller åben økonomi. I lyset af at realrenterne var negative i adskillige udviklede økonomier efter finanskrisen, vurderer flere, at sekulær stagnation er et vedvarende og strukturelt

fænomen som følge af den demografiske udvikling (Gagnon m.fl., 2016; Eggertsson m.fl., 2019a). Meningerne er imidlertid mere delte i andre dele af litteraturen, hvor det afvises, at amerikansk og global økonomi var i sekulær stagnation (Hamilton m.fl., 2016; Gomme m.fl., 2015; Rogoff og Lo, 2015), og hvor sammenhængen mellem aldring og den naturlige rente udfordres (Hamilton m.fl., 2016; Goodhart og Pradhan, 2017).

Goodhart og Pradhan (2017, 2020) tilbyder en alternativ hypotese, idet de mener, at aldring fremover vil føre til en *højere* naturlig realrente. De afviser, at den forventede levetid er en drivende faktor bag udviklingen i den naturlige rente, og forklarer det hidtidige fald i realrenten som et ekstraordinært fænomen, der optrådte i kølvandet på, babyboomer-generationen sparede op til pension. I stedet vurderer de, at det stigende antal ældre vil føre til en lavere opsparingskvote, hvilket vil presse den naturlige rente op. Derudover påpeger de, at faldet i realrenterne mellem 1980-2015 blev forstærket af inklusionen af Kina og andre vækstøkonomier i den globale produktionskæde, hvilket fungerede som et positivt udbudschok, da det frigav arbejdskraft og kapital. Særligt Kinas høje opsparingsrate medførte et globalt overskud af opsparing, der bl.a. blev investeret i amerikanske statsobligationer.<sup>10</sup>

Ifølge Goodhart og Pradhan (G&P) er dette positive udbudschok imidlertid nu overstået, da udviklingslande som Kina også er blevet ældre og rigere. Samtidig bliver befolkningen i avancerede økonomier endnu ældre, hvormed afhængighedsforholdet vil stige yderligere. De forudsiger, at både de lange realrenter, inflationen og reallønnen vil stige, og at uligheden vil falde.<sup>11</sup> De udtrykker bekymring over, at perioden med lave renter har medført en høj ophobning af statsgæld, som bliver sværere at servicere, når renterne stiger, og når udgifterne til ældre vokser. En vigtig præmis for deres argument er, at sundheds- og pensionsydelse leveret af det offentlige ikke vil blive forringet på grund af politisk pres fra de ældre. Dette vil øge de offentlige udgifter og dermed føre til højere skatter og mere statsgæld, hvilket presser den naturlige rente op. Ligeledes afviser de, at pensionsalderen vil hæves, da det heller ikke vil være politisk muligt. De vedkender, at aldring også vil dæmpe investeringsefterspørgslen, men argumenterer for, at udbuddet af opsparing vil falde relativt mere, hvorfor den naturlige rente vil stige. De afviser det meste af OLG-litteraturen, herunder Gagnon m.fl. (2016), som de ikke mener giver en retvisende beskrivelse af husholdningers adfærd og lægger for lidt vægt på globale faktorer såsom overskuddet af opsparing fra Kina. Ikke desto mindre kan G&P's hypotese inden for rammerne af en neoklassisk OLG-model oversættes til, at mekanisme 3 og 4 vil overskygge mekanisme 1 og 2, således at aldring på sigt medfører en højere naturlig rente. I analysen vil jeg teste G&P's hypotese med udgangspunkt i de fire mekanismer som teoretisk grundlag samt kvantificere effekten af, at de offentlige udgifter til ældre stiger.

---

<sup>10</sup>Dette blev desuden beskrevet af den amerikanske centralbankchef Ben Bernanke som et globalt "savings glut" (Bernanke, 2005).

<sup>11</sup>Mens de fastholder, at aldring vil lægge et opadgående pres på den naturlige realrente, er de ambivalente omkring, hvorvidt de pengepolitiske og korte realrenter vil stige. Deres argument er, at centralbankerne grundet politiske begrænsninger ikke fuldbyrdet vil kunne bekæmpe inflationspresset, der følger af øgede offentlige udgifter og en faldende global arbejdsstyrke (Goodhart og Pradhan, 2020).

### 3 En simpel OLG-model

I dette afsnit anvendes en simpel OLG-model med to perioder og to generationer til at illustrere effekten af aldring på renten og investeringskvoten. Modellen beskrevet her kan således give et udgangspunkt til at forstå intuitionen bag resultaterne skabt af den kvantitative model anvendt i resten af specialet.<sup>12</sup>

I den simple OLG-model består økonomien af en generation af unge ( $j = 0$ ), der arbejder, og en generation af pensionister ( $j = 1$ ). Medlemmerne af den unge generation i den første periode vil selv blive pensionister i den næste periode, hvis de overlever. De unge arbejder, modtager løn, betaler skat, forbruger og sparer op til pension. De ældre arbejder ikke, modtager pension og forbruger opsparingen genereret af dem selv i perioden inden. Antallet af unge i periode  $t$  er givet ved  $N_{t,0}$ , og sandsynligheden for at overleve til næste periode, hvor de bliver pensionister, er givet ved  $s_t$ . Antallet af pensionister i den efterfølgende periode er dermed givet ved  $N_{t+1,1} = s_t N_{t,0}$ . En ung husholdning i periode  $t$  maksimerer nyttefunktionen:

$$U_t = \frac{(c_{t,0})^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}} + s_t \beta \cdot \frac{(c_{t+1,1})^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}},$$

hvor  $c_{t,0}$  er forbrug i den første periode, hvor husholdningen er ung, og  $c_{t+1,1}$  er forbruget i den næste periode, hvor husholdningen er pensionist. Parametrene  $\beta$  og  $\rho$  angiver hhv. diskonteringsfaktoren og den intertemporale substitutionselasticitet for forbrug. Husholdningerne udbyder deres arbejdskraft inelastisk i den første periode og modtager lønindkomsten  $w_t$ , hvoraf de beskattes med satsen  $\tau_t$ . De unge husholdninger i den første periode modtager derfor  $w_t(1-\tau_t)$  efter skat. I den anden periode, hvor husholdningerne er gået på pension, modtager de ydelsen  $d_{t+1}$ , som er finansieret via skatter på arbejdsindkomst på de unge i den anden periode. Pensionistens opsparing er givet ved  $a_{t+1,1}$  og genererer et afkast på  $r_{t+1}$  svarende til realrenten i samme periode. Aktiverne efterladt af dem, der ikke overlever til den anden periode, fordeles ligeligt mellem de overlevende pensionister. Budgetbetingelserne er givet ved:

$$\begin{aligned} c_{t,0} + a_{t+1,1} &= (1 - \tau_t)w_t \\ c_{t+1,1} &= \frac{a_{t+1,1}(1 + r_{t+1})}{s_t} + d_{t+1}. \end{aligned}$$

Det aggregerede arbejdsudbud er givet ved antallet af unge,

$$L_t = N_{t,0},$$

og produktionen er givet ved

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha},$$

hvor teknologien er givet ved  $A_t = (1 + g)^t A_0$ , som vokser med produktivitetsvæksten  $g$ , og deprecieringsraten er givet ved  $0 < \delta < 1$ . Faktorpriserne er dermed givet ved:

$$r_t = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} - \delta$$

---

<sup>12</sup>Modellen i dette afsnit er en modificeret udgave af den anvendt af Papetti (2021a, s. 5-8). Udlædningerne er vist i Appendiks A.

$$w_t = (1 - \alpha)A_t \tilde{k}_t^\alpha,$$

hvor  $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$  angiver kapital per effektiv arbejder.

Statens budgetbetingelse indebærer, at pensionsydelsen er givet ved:

$$d_{t+1} = \tau_{t+1} w_{t+1} \frac{(1 + n_{t+1})}{s_t},$$

hvor  $(1 + n_t) = \frac{N_{t+1,0}}{N_{t,0}}$  angiver vækstraten i antallet af unge og dermed arbejdsstyrken. Ved at antage en fast kompensationsgrad på  $\bar{d}$  følger det, at pensionsydelsen er givet ved:

$$d_t = \bar{d} w_t (1 - \tau_t).$$

Endelig gælder, at kapitalakkumulationen er givet ved:

$$K_{t+1} = N_{t,0} \cdot a_{t+1,1}$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t.$$

Disse kan omskrives til

$$(1 + n_t)A_{t+1}\tilde{k}_t = a_{t+1,1}$$

$$(1 + g)(1 + n_t)\tilde{k}_{t+1} = (1 - \delta)\tilde{k}_t + \tilde{i}_t,$$

hvor  $\tilde{i}_t = \frac{I_t}{A_t L_t}$  angiver bruttoinvesteringer per effektiv arbejder.

### Balanceret vækststi

På en balanceret vækststi, hvor kapital per effektiv arbejder er konstant, så  $\tilde{k}_t = \tilde{k}$  for alle  $t$ , kan virksomhedernes investeringsefterspørgsel ( $\iota^D$ ) og husholdningernes udbud af opsparing ( $\iota^S$ ) som funktion af renten  $r$  udtrykkes ved:

$$\iota^D = \alpha \frac{(1 + g)(1 + n) - (1 - \delta)}{r + \delta} \quad (2)$$

$$\iota^S = \left(1 - \frac{1 - \delta}{(1 + g)(1 + n)}\right) \left[ \frac{(1 - \tau)(1 - \alpha)\vartheta}{1 + \vartheta} - \frac{(1 + g)(1 + n)(1 - \alpha)\tau}{(1 + r)(1 + \vartheta)} \right], \quad (3)$$

hvor  $\iota = \frac{I}{Y}$  angiver bruttoinvesteringskvoten, og hvor  $\vartheta \equiv s\beta^\rho(1 + r)^{\rho-1}$ . Skattesatsen er givet ved:

$$\tau = \frac{\bar{d}}{\bar{d} + \frac{1+n}{s}}. \quad (4)$$

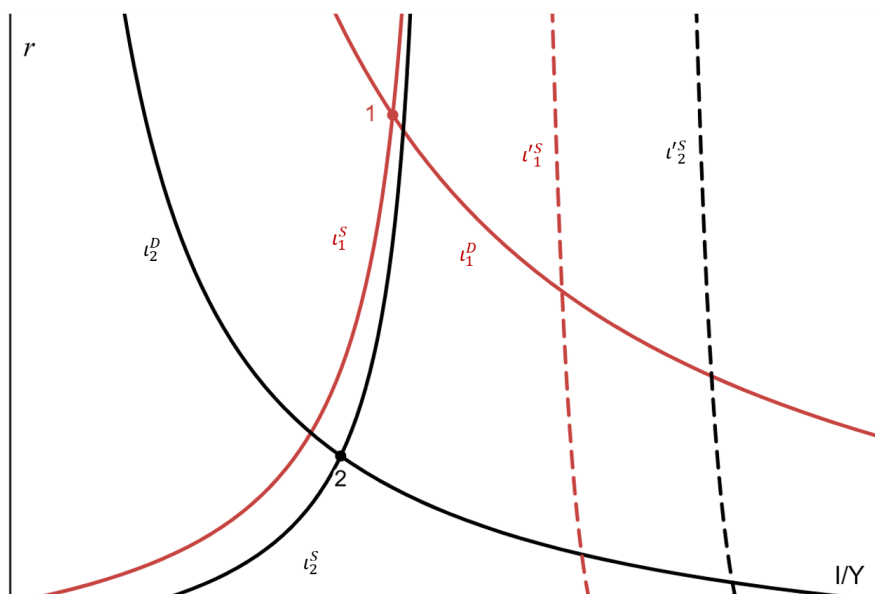
### Effekten af aldring

Aldring er kendetegnet ved, at fertiliteten falder, og at den forventede levetid stiger. Et fald i fertiliteten kan i modellen udtrykkes ved, at vækstraten i arbejdsstyrken  $n$  falder, mens en højere forventet levetid kan udtrykkes ved en stigning i sandsynligheden for at overleve givet ved  $s$ . På den balancerede vækststi er disse variable begge konstante. Effekten af aldring kan da afdækkes ved at sammenligne en økonomi, der går fra først at befinde sig i en stationær ligevægt, hvor



befolkningen er relativt ung, til senere at overgå til en stationær ligevægt, hvor befolkningen er blevet ældre. I figur 4 vises efterspørgsels- og udbudskurverne udtrykt i (2) og (3) under et scenarie, hvor økonomien rammes af et aldringsstød i form af, at vækstraten i arbejdsstyrken falder, og at den forventede levetid stiger. Det antages, at en periode varer 30 år, svarende til en generation. Derfor ganges de antagne vækstrater op, så de modsvarer den akkumulerede vækst over en 30-årig periode. Vækstraten i arbejdsstyrken falder fra 1,4 pct. til -0,8 pct. om året. Sandsynligheden for at overleve stiger fra 0,55 til 0,84.<sup>13</sup> Det antages endvidere, at produktivtetsvæksten falder fra 2 til 0,85 pct. om året. Derudover anvendes parameterværdierne  $\alpha = 0,33$ ;  $\beta = 0,975$ ;  $\rho = 0,95$ ;  $\delta = 0,957$  og  $\bar{d} = 0,5$ .

Figur 4: Effekten af aldring på kapitalmarkedet



Anm.: Investeringskvoten er angivet på førsteaksen, og renten på andenaksen. Kurverne viser hhv. investerings-efterspørgslen og udbudskurven for opsparing som givet i (2) og (3). De røde kurver repræsenterer den initiale balancerede vækststi, før økonomien rammes af aldringsstødet, mens de sorte kurver angiver ditto, efter stødet har indfundet sig. Punkt 1 angiver den initiale stationære ligevægt, mens punkt 2 angiver den stationære ligevægt efter aldringsstødet. De stiplede kurver angiver udbudskurverne uden pensioner, så  $\tau = 0$ . De anvendte parametre er angivet i tabel 1. Kilde: egne beregninger.

I eksemplet vist i figur 4 og tabel 1 fremgår det, at både renten og investeringskvoten falder. Dette gælder dog ikke, hvis skatten sættes lig nul, illustreret ved  $l'^S$ , hvor investeringskvoten stiger. Faldet i befolkningstilvæksten og produktivtetsvæksten sænker utvetydigt investerings-efterspørgslen givet i (2). Dette ses i figur 4 ved, at efterspørgselskurven rykker mod venstre, således at virksomhedernes efterspørgsel efter kapital bliver lavere for en given rente. Dette giver alt andet lige en lavere rente i ligevægt og er beskrevet under mekanisme 1.

På den anden side stiger udbuddet af opsparing for en given rente, hvilket illustreres ved,

<sup>13</sup> Disse værdier er valgt for illustrationens skyld og kan anses som et kompromis mellem stigningen i den forventede levetid og afhængighedsforholdet mellem 1970-2024 i USA.

Tabel 1: Aldringsstød i simpel OLG-model

Parameter	Ligevægt 1 (ung)	Ligevægt 2 (gammel)
$g$	0,82	0,28
$n$	0,52	-0,22
$s$	0,55	0,84
$\tau$	0,15	0,35
$r$	4,78	1,43
$I/Y$	0,16	0,13

Anm.:  $g$  og  $n$  angiver de akkumulerede vækstrater over en 30-årig periode. Renten  $r$  er omregnet til pct. p.a. Kilde: egne beregninger.

at udbudskurven rykker mod højre. Dette afspejler effekten af, at husholdningerne øger deres præference for at spare op, når den forventede levetid stiger, jf. mekanisme 2. Dette svarer i praksis til, at husholdningerne i lavere grad diskonterer fremtidig forbrug. Når udbudskurven samlet set rykker mod højre, vidner det om, at mekanisme 2 dominerer over mekanisme 3 og 4. I udtrykket for udbuddet af opsparing i (3) fremgår det, at en stigning i sandsynligheden for at overleve har modsatrettede effekter på opsparingsudbuddet, idet et højere afhængighedsforhold øger skatten givet i (4), hvilket alt andet lige fortrænger de unges mulighed for at spare op (jf. mekanisme 4). En stigning i skatten kan også frembringes af en højere kompensationsgrad, hvilket mindsker de unges incitament til at spare op, da behovet for at spare op selv mindskes (jf. mekanisme 2). Det kan ikke desto mindre vises, at en stigning i  $s$ , for en given skattesats, har en entydig positiv effekt på  $\iota^S$ , således at mekanisme 2 altid vil dominere over mekanisme 3 på en balanceret vækststi, når den forventede levetid stiger.<sup>14</sup> En stigning i den forventede levetid vil derfor alt andet lige medføre en lavere rente og en højere investeringskvote i ligevægt.<sup>15</sup>

En lavere befolkningstilvækst har samlet set en negativ påvirkning på opsparingsudbuddet. For det første medfører et fald i  $n$ , at der er færre unge til at spare op, hvilket sænker opsparingskvoten, jf. mekanisme 3. En lavere befolkningstilvækst indebærer også, at skatten stiger, da der er færre unge til at finansiere pensionerne. Dette har en negativ effekt på opsparingsudbuddet, jf. mekanisme 4. Hvis der ikke er noget pensionssystem, så skatten ikke stiger, vil den negative effekt på opsparingsudbuddet ved et fald i  $n$  være minimal, hvis ikke tæt på nul, da  $\frac{1-\delta}{(1+g)(1+n)} \ll 1$ .<sup>16</sup> Dette vidner om, at mekanisme 3 ikke kan forventes at være dominerende på en balanceret vækststi, da mekanisme 1 vil trække ligevægtsrenten i den modsatte retning.

<sup>14</sup>Se Appendiks A.

<sup>15</sup>Dette gælder stadig, når skattesatsen ikke holdes fast, hvilket fremgår af figur 4.

<sup>16</sup>Dette vil altid være tilfældet ved realistiske parameterværdier, eftersom en årlig depreciationsrate på f.eks. 10 pct. indebærer, at  $\delta = 1 - (1 - 0,1)^{30} = 0,96 \approx 1$  over en generation på 30 år.

## Ligevægt

En ligevægt mellem investeringsefterspørgslen givet i (2) og opsparingsudbuddet givet i (3) kan findes ved at sætte disse lig hinanden. Hvis  $\rho = 1$ , og  $\delta = 1$ , er en unik løsning givet ved:<sup>17</sup>

$$\iota = \frac{s\beta\alpha(1-\alpha)(1-\tau)}{(1+s\beta)\alpha + \tau(1-\alpha)}$$

$$r = \frac{\alpha}{\iota}(1+g)(1+n) - 1.$$

Det følger af eksemplet illustreret ved den simple OLG-model, at aldring, i form af et fald i befolkningstilvæksten  $n$  samt en stigning i sandsynligheden for at overleve givet ved  $s$ , samlet set påvirker renten negativt i den stationære ligevægt. Den hovedsaglige årsag er, at mekanisme 1 og 2 er dominerende, mens mekanisme 3 og 4 højest har en dulmende effekt på faldet i renten. Forklaringen er på den ene side, at en lavere befolkningstilvækst mindsker investeringsefterspørgslen, da marginalproduktet på kapital falder.<sup>18</sup> På den anden side medfører en højere forventet levetid, at husholdningerne vælger at spare mere op, da de har udsigt til længere tid på pension. Dette giver samlet set en lavere rente i ligevægt.

Effekten på investeringskvoten er derimod ikke entydig, da den både kan stige eller falde, afhængig af om investeringsefterspørgslen falder relativt mere eller mindre, end opsparingsudbuddet stiger. En nødvendig betingelse for, at investeringskvoten falder, er, at udbudskurven for opsparing har en positiv hældning i  $\iota, r$ -diagrammet, således at en stigning i renten er forbundet med en stigning i investeringskvoten. Dette vil være tilfældet, hvis indkomsteffekten domineres af substitutions- og velstandseffekten. Det viser sig i øvrigt, at produktivitetsvæksten  $g$  ikke påvirker investeringskvoten i ligevægt. En lavere produktivitetsvækst vil således alt andet lige medføre en lavere rente, men en uændret investeringskvote, på den balancerede vækststi.<sup>19</sup>

Eksemplet anvendt i dette afsnit viser desuden kun effekten af aldring, når økonomien befinder sig på en balanceret vækststi. Interaktionen mellem de fire mekanismer kan muligvis derfor godt afvige fra denne, når økonomien befinder sig i transitionen mellem to stationære ligevægte, således at mekanisme 3 og 4 midlertidigt kan være dominerende.

---

<sup>17</sup>Når  $\rho = 1$ , vil substitutions- og indkomsteffekten udligne hinanden. Dette giver en perfekt inelastisk udbudskurve for opsparing, hvis velstandseffekten er nul. Sidstnævnte vil være tilfældet i den simple OLG-model uden pensioner. Se Appendiks A.

<sup>18</sup>Faldet i investeringsefterspørgslen skyldes også faldet i  $g$ , som i modellen er uafhængig af demografiske faktorer. Det bør dog anses som plausibelt, at aldring har en negativ effekt på produktivitetsvæksten (Papetti, 2021a; Aksoy m.fl., 2019).

<sup>19</sup>Dette vil ikke nødvendigvis gælde i det generelle tilfælde, hvor  $\rho$  og  $\delta$  ikke er lig en.

## 4 Modelbeskrivelse

I dette afsnit beskrives modellen, som anvendes i specialet. Modellen er en modificeret udgave af den benyttet af Eggertsson m.fl. (2019a), som har baseret deres model på Auerbach og Kotlikoff (1988) og Ríos-Rull (1996).

### 4.1 Befolkning og arbejdsudbud

Økonomien i modellen består af et stort antal husholdninger med identiske nyttefunktioner. Husholdningerne indtræder i økonomien, når de er 25 år ( $j = 1$ ), hvorefter de arbejder, får børn, forbruger og deltager i de finansielle markeder. De dør senest ved alderen  $J$ . Den terminale alder sættes til at være 98 år, hvilket svarer til  $J = 74$  i modellen. Befolkningstilvæksten er bestemt af den samlede fertilitetskvote ( $\Gamma$ ). Individerne har en risiko for at dø stokastisk, før de når alderen  $J$ . Den betingede sandsynlighed for at overleve mellem alderen  $j$  og  $j + 1$  er givet ved  $s_j$ .<sup>20</sup> Den ubetingede sandsynlighed for at overleve til alderen  $j$  er givet ved  $su_j$ .<sup>21</sup> Den samlede befolkning, der er i live i periode  $t$ , er givet ved  $N_t$ , som er summen af antallet af husholdninger inden for hver alder,  $N_{j,t}$ . Befolkningstallet i en given etårig kohorte  $N_{j,t}$  er lig antallet af overlevende fra året inden.<sup>22</sup> Populationen af 25-årige er givet ved produktet af populationen af deres forældres generation og deres forældres fertilitetskvote i periode  $t - 25$ . Befolkningstallet i modellen vil således udvikle sig i henhold til:

$$N_t = \sum_{j=1}^J N_{j,t} \quad (5)$$

$$N_{j+1,t+1} = s_j N_{j,t}, \quad \text{for } j \in \{1, J-1\} \quad (6)$$

$$N_{1,t} = N_{1,t-25} \cdot \Gamma_{t-25}. \quad (7)$$

Befolkningsudviklingen er således bestemt af fertiliteten og alderen, hvor husholdningerne får børn. I steady state, for en given fertilitetskvote  $\Gamma$ , vil vækstraten  $n$  i populationen være givet ved:

$$n = \Gamma^{\frac{1}{25}} - 1. \quad (8)$$

I steady state vil hver generation således være  $(1 + n)$  gange større end den foregående. I steady state vil den samlede befolkning derfor være givet ved:

$$N = \sum_{j=1}^J N_j, \quad (9)$$

hvor

$$N_{j+1} = s_j \frac{N_j}{1 + n}, \quad \text{for } j \in \{1, J-1\}. \quad (10)$$

<sup>20</sup>De aldersspecifikke overlevelsessandsynligheder kan variere over tid,  $t$ . Men jeg undlader at tilføje fodtegn for  $t$  af hensyn til notation.

<sup>21</sup>Denne kan udregnes ved produktet af de betingede sandsynligheder:  $su_j = \prod_{m=1}^{j-1} s_m$ .

<sup>22</sup>Indvandring indgår ikke i modellen.

Ved at normalisere populationen af 25-årige i periode 1 til 1 vil det samlede befolkningstal i steady state i periode 1 være givet ved

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^J \frac{su_j}{(1+n)^{j-1}}}. \quad (11)$$

Hver husholdning har en identisk arbejdsproduktivitet for en given alder. Arbejdsproduktiviteten, eller humankapitalen, er givet ved  $hc_j$  og afhænger af alder. Husholdningerne modtager ingen lønindkomst, efter de er gået på pension. Pensionsalderen antages at være 67 år, hvilket svarer til  $j = 43$  i modellen. Lønindkomsten efter skat er derfor givet ved lønnen ganget med individets arbejdsproduktivitet  $hc_j$  og  $(1 - \tau_t)$ , hvor  $\tau_t$  er skattesatsen på lønindkomst. Humankapitalprofilen for 25-årige normaliseres til én, mens den for pensionister antages at være lig nul, således at  $hc_{j=1} = 1$  og  $hc_{j>42} = 0$ . Husholdningerne udbyder deres arbejdskraft inelastisk,<sup>23</sup> og det aggregerede arbejdsudbud i ligevægt er givet ved:

$$L_t = \sum_{j=1}^J N_{j,t} hc_j. \quad (12)$$

Arbejdsudbuddet er altså givet ved antallet af individer i den arbejdsdygtige alder ganget med deres respektive humankapitalprofil.

## 4.2 Husholdningerne

Husholdningerne får nytte af forbrug ( $c$ ) og af at videregive arv ( $x$ ). Nyttefunktionen for forbrug  $u(\cdot)$  er karakteriseret ved en konstant substitutionselasticitet (CES), hvor den intertemporale substitutionselasticitet er givet ved parameteren  $\rho$ . Det samme gælder for nyttefunktionen for arv  $v(\cdot)$ , hvor argumentet  $x$  angiver arv efterladt per efterkommer.

$$u(c_{j,t+j-1}) = \frac{(c_{j,t+j-1})^{1-\frac{1}{\rho}}}{1 - \frac{1}{\rho}} \quad (13)$$

$$v(x_{j,t+j-1}) = \frac{(x_{j,t+j-1})^{1-\frac{1}{\rho}}}{1 - \frac{1}{\rho}} \quad (14)$$

En husholdning med alderen  $j = 1$ , der indtræder i økonomien i periode  $t$ , maksimerer dermed sin samlede forventede nytte igennem livet givet ved

$$U_t = \sum_{j=1}^J su_j \cdot \beta^{j-1} \cdot u(c_{j,t+j-1}) + su_J \cdot \beta^{J-1} \cdot \mu \cdot v(x_{J,t+J-1}), \quad (15)$$

---

<sup>23</sup>Gertler (1999) viser, at et endogent bestemt arbejdsudbud i en model med en faldende vækstrate i arbejdsstyrken og stigende forventet levetid får agenterne til at øge arbejdsudbuddet. Denne adfærd er dog i strid med empirien for de fleste udviklede økonomier, herunder USA, jf. figur A10b (Carvalho m.fl., 2023; OECD, 2024a).

hvor  $\beta$  er husholdningernes diskonteringsfaktor for forbrug, og  $\mu$  er en diskonterings-parameter for nytten af arv, der efterlades, når husholdningen dør ved alderen  $J$ . Konstanten  $su_j$  angiver den ubetingede overlevelsessandsynlighed. Inklusion af arv i nyttefunktionen afspejler, at husholdningerne har et arvmotiv, hvilket påvirker deres opsparingsadfærd.<sup>24</sup>

Husholdningerne modtager arv givet ved  $q_{j,t}$  af deres bedsteforældre. Arv modtaget antages at være nul i alle perioder undtagen ved alderen  $k \equiv J - 49 = 25$  (49 år), hvilket svarer til alderen et år efter, ens bedsteforældre har nået den terminale alder  $J = 74$  (98 år) og er afdøde. Ligeledes vil der kun efterlades arv, hvis en husholdning har nået alderen  $J$ . Antagelsen om, at det er børnebørnene og ikke børnene, der arver, skyldes, at børnene selv vil være gået på pension, hvis deres forældre overlever til de bliver 98 år. For at gøre arvealderen mere realistisk lader jeg derfor børnebørnene arve i stedet.

Eftersom dødeligheden er stokastisk, vil ikke alle husholdninger overleve til de bliver  $J$  år, hvor de kan videregive arv. For at undgå at der opstår en stokastisk ulighed inden for hver generation, da nogle husholdninger vil modtage arv fra deres bedsteforældre, mens andre ikke vil, antages det, at alle generationer deltager i et marked, hvor de forsikrer sig mod at gå glip af arv. Ved den maksimale alder  $J$  vil alle overlevende medlemmer af hver kohorte pulje de aktiver, de planlægger at videregive som arv, og dele dem ligeligt mellem deres overlevende børnebørn. Således vil sammenhængen mellem arv givet (ved alderen  $J$ ) og arv modtaget af børnebørnene (ved alderen  $k$ ) i periode  $t$  være givet ved:

$$q_{k,t} = \frac{N_{J,t-1} \cdot x_{J,t-1} \cdot \Gamma_{t-J+26} \cdot \Gamma_{t-J+1}}{N_{k,t}}, \quad (16)$$

hvor  $q_{k,t}$  angiver arv modtaget af kohorten, der har alderen  $k = 25$  i periode  $t$ . Arven modtages året efter, bedsteforældrene er døde. Antagelsen om fordeling af arv er med til at gøre modellen mere realistisk, idet husholdningerne ellers ikke ville kunne arve, hvis deres forældre døde, før de fyldte 98 år, hvilket ville være tilfældet for flertallet af husholdningerne.

En husholdning med alderen  $j$  kan købe eller låne reale aktiver  $a_{j,t}$ , hvilke kan benyttes til forbrug eller opsparing. I periode  $t + 1$  vil aktiverne give et afkast på  $r_{t+1}^k$ , hvilket svarer til lejesatsen på kapital, og aktivet vil have en værdi efter depreciering på  $(1 - \delta)$ . Alle husholdninger deltager i annuitetsmarkeder med fuldkommen konkurrence. Hvis en husholdning dør, inden de fylder  $J$  år, vil de efterladte aktiver blive fordelt ligeligt mellem de overlevende husholdninger inden for den samme kohorte, således at hver overlevende husholdning modtager  $\frac{1-s_{j-1}}{s_{j-1}} a_{j,t}$ .

Husholdningerne i den arbejdsdygtige alder modtager indkomst fra virksomhedernes over-skud givet ved  $\Pi_{j,t}$ . Pensionisterne modtager i hver periode en pensionsydelse på  $d_t \cdot w_t$ , hvor  $d_t$  er kompensationsgraden i forhold til lønsatsen før skat. Pensionsydelsen udgør en konstant andel i forhold til lønniveauet efter skat:

$$d_t w_t = \bar{d}(1 - \tau_t) w_t. \quad (17)$$

---

<sup>24</sup>Uden et arvmotiv ville husholdningerne forbruge hele deres opsparing, inden de når den terminale alder. Dette er ikke realistisk, da individer i virkeligheden ikke med sikkerhed kan vide, hvornår de senest vil dø.

Budgetbetingelsen for en husholdning med alderen  $j$  i periode  $t$  er således:

$$\begin{aligned} c_{j,t} + a_{j+1,t+1} + \Gamma_{t-j+26} \cdot \Gamma_{t-j+1} \cdot x_{j,t} \\ = (1 - \tau_t)w_t h c_j + (1 - \tau_p)\Pi_{j,t} + d_t w_t \cdot \mathbb{1}\{j > 42\} \\ + (1 + r_t) \left( a_{j,t} + q_{j,t} + \frac{1 - s_{j-1}}{s_{j-1}} a_{j,t} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Husholdningerne i den arbejdsdygtige alder har mulighed for at optage lån med deres fremtidige indkomst som sikkerhed. Lånerestriktionen er givet ved:

$$a_{j,t} \geq -D_{j,t} \cdot w_{t+1} \cdot h c_{j+1}, \quad (19)$$

hvor  $0 < D < 1$  angiver loftet over, hvor stor en andel af ens indkomst, man kan belåne. Denne restriktion vil kun være bindende, hvis husholdningerne ønsker at forbruge mere, end de tjener i den pågældende periode. Husholdningens førsteordensbetingelser er givet ved:

$$\frac{1}{\beta} = \left( \frac{c_{j+1,t+1}}{c_{j,t}} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \cdot (1 + r_{t+1}) + \lambda_{j+1,t+1} \cdot \frac{(c_{j,t})^{\frac{1}{\rho}}}{su_j \beta^j} \quad (20)$$

og

$$x_{J,t+J-1} = \left( \frac{\Gamma_{t-J+1} \cdot \Gamma_{t-J+26}}{\mu} \right)^{-\rho} \cdot c_{J,t+J-1} \quad \text{for } J \in \{74\}, \quad (21)$$

hvor (20) er eulerligningen for forbrug, og (21) er optimalitetsbetingelsen for videregivelse af arv.<sup>25</sup> Det følger, at husholdningernes allokeringer er karakteriseret ved disse transitionelle dynamikker:

$$\begin{aligned} a_{j+1,t+1} &= \frac{(1 + r_t) \cdot a_{j,t}}{s_{j-1}} + (1 - \tau_t) \cdot w_t \cdot h c_j + (1 - \tau_p)\Pi_{j,t} - c_{j,t} \\ &\text{for } j \in \{1, \dots, 42\} \setminus \{24\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} a_{j+1,t+1+1} &= \frac{(1 + r_t) \cdot a_{j,t}}{s_{j-1}} + (1 - \tau_t) \cdot w_t \cdot h c_j + (1 - \tau_p)\Pi_{j,t} + q_{j+1,t+1} - c_{j,t} \\ &\text{for } j \in \{24\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_{j+1,t+1} &= \frac{(1 + r_t) \cdot a_{j,t}}{s_{j-1}} - c_{j,t} + d_t w_t \\ &\text{for } j \in \{43, \dots, 73\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} c_{j,t} &= \frac{(1 + r_t) \cdot a_{j,t}}{s_{j-1}} - \Gamma_{t-j+26} \cdot \Gamma_{t-j+1} \cdot x_{j,t} + d_t w_t \\ &\text{for } j \in \{74\}. \end{aligned} \quad (25)$$

---

<sup>25</sup>Se Appendiks B for udledning.

### 4.3 Produktion

Produktionen i modellen foretages af virksomheder, der producerer delvist forarbejdede varer, eller halvfabrikata, og opererer under fuldkommen konkurrence. Disse produkter købes og differentieres af en sektor af monopolvirksomheder, der konkurrerer monopolistisk, og som sælger de færdigt forarbejdede varer videre til forbrugerne med et avancetillæg.

#### Halvfabrikata

Der eksisterer en sektor af virksomheder, der under fuldkommen konkurrence producerer halvfabrikata, eller delvist forarbejdede varer (eng.: *intermediate goods*). Disse virksomheder sælger deres varer videre til prisen  $p_t^{int}/P_t$ . Virksomhederne opererer med en CES-produktionsfunktion og ansætter arbejdskraft til lønstasen  $w_t$  og lejer kapital til lejesatsen  $r_t^k$ . Substitutionselasticiteten mellem arbejdskraft og kapital er givet ved  $\sigma$ . Den repræsentative virksomhed maksimerer sin profit:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \Pi_t^{int} = \frac{p_t^{int}}{P_t} Y_t - w_t L_t - r_t^k K_t \quad (26)$$

under bibetingelse af produktionsfunktionen:

$$Y_t = \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \quad (27)$$

Den teknologiske vækst antages kun at påvirke produktiviteten på arbejdskraft givet ved  $A_t$ .<sup>26</sup> Denne vokser eksogent med vækstraten  $g_t^A$  i hver periode, så  $A_{t+1} = (1 + g_t^A)A_t$ . Førsteordensbetingelserne, der bestemmer efterspørgslen efter arbejdskraft og kapital, er givet ved:<sup>27</sup>

$$w_t = \frac{p_t^{int}}{P_t} (1-\alpha) A_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left( \frac{Y_t}{L_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \quad (28)$$

$$r_t^k = \frac{p_t^{int}}{P_t} \alpha \left( \frac{Y_t}{K_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (29)$$

Lejesatsen på kapital  $r_t^k$  er altså givet ved marginalproduktet på kapital ganget med prisen, som virksomhederne kan afsætte deres produktion til. Det følger af (36), at

$$r_t^k = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \cdot MPK,$$

hvor

$$MPK \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha \left( \frac{Y_t}{K_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Ligeledes gælder for lønsatsen, at

$$w_t = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \cdot MPL,$$

<sup>26</sup>Dette betyder, at den teknologiske vækst er Harrod-neutral, hvilket sikrer, at modellen konvergerer mod en balanceret vækststi (Romer, 2019, s. 10). Harrod-neutralitet er påkrævet for den generelle CES-produktionsfunktion, medmindre  $\sigma = 1$  (de la Fontejne, 2018).

<sup>27</sup>Se Appendiks B for udledning.



hvor  $MPL$  er marginalproduktet på arbejdskraft givet ved

$$MPL \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1 - \alpha) A_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left( \frac{Y_t}{L_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Det gælder desuden, at

$$\lim_{\theta_t \rightarrow \infty} r_t^k = MPK \quad (30)$$

og

$$\lim_{\theta_t \rightarrow \infty} w_t = MPL. \quad (31)$$

Den risikofri realrente er givet ved lejesatsen på kapital efter depreciering:

$$1 + r_t = 1 + r_t^k - \delta \Leftrightarrow r_t = r_t^k - \delta. \quad (32)$$

Af hensyn til notation skelnes der ikke mellem den nominelle og reale rente i modellen. I stedet anvendes kun den reale rente. Dette stemmer også overens med specialets formål, som er at undersøge den naturlige realrente. Da modellen ikke indeholder aggregeret risiko eller konjunkturudsving, vil realrenten givet i (32) være lig den naturlige realrente, jf. (1). Det følger af (29) og (36), at lejesatsen på kapital er givet ved

$$r_t^k = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \alpha \left( \frac{\tilde{y}_t}{\tilde{k}_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

hvor  $\tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t}$  og  $\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$  er hhv. produktion og kapital per effektiv arbejder. Dette udtryk kan omskrives til kun at være en funktion af  $\tilde{k}_t$ :

$$r_t^k = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \alpha \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1 - \alpha) \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot \tilde{k}_t^{\frac{-1}{\sigma}}. \quad (33)$$

Det gælder for alle  $\tilde{k}_t > 0$ , at

$$\frac{\partial r_t^k}{\partial \tilde{k}_t} < 0,$$

således at lejesatsen på kapital  $r_t^k$  og dermed renten  $r_t$  afhænger negativt af kapital per effektiv arbejder. Det følger, for et givet niveau i teknologi  $A_t$ , at en stigning i beholdningen af kapital per arbejder medfører et fald i lejesatsen på kapital og dermed renten. Intuitionen er, at en stigning i kapitalbeholdningen for en given arbejdsstyrke sænker marginalproduktet på kapital, hvilket giver en lavere rente i ligvægt. Det omvendte gælder, hvis kapital per (effektiv) arbejder falder.<sup>28</sup>

## Færdigvarer

Der eksisterer et kontinuum af monopolvirksomheder af type  $i$ , der producerer færdigvarer (eng.: *final goods*). Summen af monopolvirksomheder normaliseres til en. Virksomhederne opkøber halvfabrikata, differentierer omkostningsfrit varerne og videresælger dem til husholdningerne.

---

<sup>28</sup>Se Appendiks B.

Mængden af færdigvarer er givet ved et aggregat af de differentierede varer karakteriseret ved en konstant substitutionselasticitet  $\theta_t$ :

$$Y_t = \left[ \int_0^1 y_t^f(i)^{\frac{\theta_t-1}{\theta_t}} di \right]^{\frac{\theta_t}{\theta_t-1}}.$$

Disse virksomheder opererer under monopolistisk konkurrence og sætter priserne i hver periode. Efterspørgslen efter færdigvarer er givet ved:

$$y_t^f(i) = Y_t \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\theta_t}, \quad (34)$$

hvor  $\theta_t$  varierer over tid og er en parameter for virksomhedens markedsmagt. En stigning i  $\theta_t$  reducerer virksomhedens markedsmagt og mindsker dens avancetillæg i ligevægt, som er givet ved  $\theta_t/(\theta_t - 1)$ . Hver monopolvirksomhed anvender  $y_t^m$  halvfabrikata til at producere sine varer og følger en lineær produktionsteknologi givet ved  $y_t^f = y_t^m$ . Monopolisten vælger realprisen  $p_t(i)/P_t$  og indirekte mængden  $y_t^f$  for at maksimere sin reale profit under bibetingelse af (34):

$$\max_{\frac{p_t(i)}{P_t}} \Pi_t^f = \frac{p_t(i)}{P_t} y_t^f(i) - \frac{p_t^{int}}{P_t} y_t^f(i),$$

hvor  $p_t^{int}/P_t$  er prisen på halvfabrikata, hvilken monopolisten tager for givet. Optimalitetsbetingelsen for realprisen for virksomhedens varer er givet ved det tidsvarierende avancetillæg ganget med prisen på halvfabrikata:

$$\frac{p_t(i)}{P_t} = \frac{\theta_t}{\theta_t - 1} \frac{p_t^{int}}{P_t}. \quad (35)$$

Da monopolisterne betaler den samme pris for halvfabrikata, og da de alle følger den samme produktionsteknologi, og eftersom der ikke er nogen stivheder i prissætningen, gælder det, at  $p_t(i) = P_t$ , hvilket giver

$$\frac{p_t^{int}}{P_t} = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t}. \quad (36)$$

I ligevægt vil den aggregerede profit være lig:

$$\Pi_t = \frac{Y_t}{\theta_t}. \quad (37)$$

Overskuddet fra de monopolistisk konkurrerende virksomheder udloddes i forhold til husholdningernes lønindkomst, så at den enkelte husholdning før skat modtager

$$\Pi_{j,t} = hc_j \frac{\Pi_t}{L_t}. \quad (38)$$

I ligevægt vil den samlede udlodning være lig den samlede profit:

$$\frac{Y_t}{\theta_t} = \sum_{j=1}^J N_{j,t} \Pi_{j,t}. \quad (39)$$

## Kapitalakkumulation

Den aggregerede kapitalbeholdning  $K_t$  udvikler sig i henhold til:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t, \quad (40)$$

hvor  $\delta$  er deprecieringsraten, og  $I_t$  er bruttoinvesteringerne. Beholdningen af kapital i periode  $t$  er givet ved summen af husholdningernes aktiver fratrukket statsgælden  $B_t$ , som er ejet af husholdningerne i form af obligationer:<sup>29</sup>

$$K_t = \sum_{j=1}^J N_{j,t} \frac{a_{j,t}}{s_{j-1}} - B_t. \quad (41)$$

Det følger af (40) og (41), at bruttoinvesteringerne er givet ved:

$$\begin{aligned} I_t &= K_{t+1} - (1 - \delta)K_t \\ &= \sum_{j=1}^J N_{j,t} a_{j+1,t+1} - B_{t+1} - (1 - \delta) \left( \sum_{j=1}^J (N_{j,t} a_{j,t} / s_{j-1}) - B_t \right). \end{aligned} \quad (42)$$

## 4.4 Staten

Staten forbruger en fast andel af BNP  $g_t$  og kan akkumulere gæld. Statens budgetbetingelse er givet ved:

$$B_{t+1} = b_{t+1}Y_{t+1} = g_t Y_t + (1 + r_t)b_t Y_t + E_t - T_t, \quad (43)$$

hvor  $b_t$  angiver statens gældskvote målt i forhold til BNP. Skatteindtægterne er givet ved  $T_t \equiv \tau_t w_t L_t + \tau_p \Pi_t$ , således at den samlede skatteopkrævning kommer fra indkomstskat på løn og profit.  $E_t$  angiver de samlede pensionsudgifter og er givet ved

$$E_t \equiv \sum_{j=43}^J d_t w_t \cdot N_{j,t}. \quad (44)$$

For at simulere modellen antages finanspolitikken at være specificeret ved en eksogen proces af statens forbrug ( $g_t$ ) og gældskvoten ( $b_t$ ) i forhold til BNP. Indkomstskatten  $\tau_t$  vil da blive bestemt endogen, så statens budgetbetingelse overholdes. Følgende definitioner anvendes:

$$G_t \equiv g_t Y_t + r_t b_t Y_t + E_t, \quad (45)$$

$$F_t \equiv \frac{b_{t+1}Y_{t+1} - b_t Y_t}{G_t},$$

---

<sup>29</sup>Da husholdningerne allokerer deres aktiver en periode før, er den samlede beholdning af aktiver i periode  $t$  givet ved de individuelle aktiver  $a_{j,t}$  ganget med befolkningen i den pågældende kohorte, der var i live i periode  $t - 1$ , som er givet ved  $N_{j-1,t-1} = N_{j,t}/s_{j-1}$ . Statsgælden trækkes fra, da den ikke indgår i beholdningen af produktiv kapital.

$$B_t \equiv b_t Y_t, \quad (46)$$

hvor  $G_t$  er statens udgifter i periode  $t$ ,  $F_t$  er statens underskud målt i forhold til udgifterne i periode  $t$ , og  $B_t$  er statens gæld i periode  $t$ . Statens budgetbetingelse overholdes, således at

$$\begin{aligned} T_t &\equiv \tau_t \cdot w_t L_t + \tau_p \Pi_t = G_t(1 - F_t) = G_t - \Delta B_{t+1} \\ \Leftrightarrow \tau_t &= \frac{1}{w_t L_t} (G_t - b_{t+1} Y_{t+1} + b_t Y_t - \tau_p \Pi_t). \end{aligned} \quad (47)$$

Det vil sige, at skattesatsen på lønindkomst  $\tau_t$  tilpasses, så alle statens udgifter dækkes efter udstedelse af statsgæld samt indkrævning af skat på profit.

### Aggregerede definitioner

Den aggregerede ressourcebetingelse er givet ved

$$Y_t = L_t w_t + r_t^k K_t + \Pi_t = C_t + I_t + g_t Y_t. \quad (48)$$

Lønandelen er givet ved den aggregerede lønindkomst divideret med bruttoindkomsten:

$$LS_t \equiv \frac{L_t w_t}{L_t w_t + r_t^k K_t + \Pi_t}. \quad (49)$$

Forbrugskvoten er givet ved

$$\frac{C_t}{Y_t} = \frac{\sum_{j=1}^J N_{j,t} c_{j,t}}{L_t w_t + r_t^k K_t + \Pi_t}. \quad (50)$$

Husholdningernes disponible nettoindkomst er givet ved

$$Y_t^{disp} \equiv Y_t - T_t - \delta K_t + E_t + r_t B_t, \quad (51)$$

og husholdningernes nettoopsparingskvote er givet ved

$$\mathcal{O}_t \equiv \frac{Y_t^{disp} - C_t}{Y_t^{disp}}. \quad (52)$$

Den samlede forbrugsgæld er givet ved

$$\mathcal{F}_t \equiv \sum_{j=1}^{j=41} N_{j,t} \cdot a_{j,t} \cdot \mathbf{1}\{a_{j,t} < 0\}. \quad (53)$$

## 4.5 Dynamisk efficiens

Økonomien er dynamisk inefficient, hvis investeringerne overstiger afkastet på kapital, svarende til  $I > MPK \cdot K$  (Abel m.fl., 1989). Kriteriet for dynamisk efficiens er således, at  $I < MPK \cdot K$ , hvor  $I$  er bruttoinvesteringerne,  $MPK$  er marginalproduktet på kapital, og  $K$  er beholdningen af kapital. Lejesatsen på kapital i modellen er givet ved  $r_t^k = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \cdot MPK$ , jf. (29), hvor  $\frac{\theta_t - 1}{\theta_t}$  er den inverse af monopolistens avancetillæg. Dette forhold afspejler en antagelse om ufuldkommen

konkurrence i produktionen, hvilket medfører, at lejesatsen på kapital konsekvent ligger under marginalproduktet på kapital. Eftersom realrenten i modellen er givet ud fra lejesatsen på kapital, kan der godt opstå en situation, hvor renten er negativ, men hvor marginalproduktet på kapital (efter depreciering) stadig er positivt. Økonomien kan således godt være dynamisk efficient, selvom renten er negativ. Antagelsen om ufuldkommen konkurrence gør dermed modellen i stand til at simulere en økonomi i sekulær stagnation (dvs.  $r^* < 0$ ), uden at modellen samtidig risikerer at blive dynamisk inefficient (Eggertsson m.fl., 2019a).

## 4.6 Løsning af modellen

En kompetitiv generel ligevægt er givet ved sekvensen af husholdningernes allokeringer:

$\{\{c_{j,t}, a_{j,t}, \Pi_{j,t}, q_{j,t}, x_{j,t}\}_{j=1}^J\}_{t=0}^\infty$ , en sekvens af aggregerede variable  $\{Y_t, K_t, L_t, \Pi_t, E_t\}_{t=0}^\infty$ , en sekvens af prisvariable  $\{w_t, r_t^k, r_t, \frac{p_t^{int}}{P_t}\}_{t=0}^\infty$ , en sekvens af variable for staten  $\{\tau_t\}_{t=0}^\infty$ , samt en sekvens af eksogene processer  $\{\{N_{j,t}, g_t^A, g_t, b_t, d_t\}_{j=0}^J\}_{t=0}^\infty$ , der overholder følgende betingelser:

1. Husholdningerne maksimerer deres forbrug og efterladelse af arv givet ved (15) under bibetingelserne (18) og (19). Løsningen af husholdningernes maksimeringsproblem er givet ved (20) og (21).
2. Allokeringen af aktiver overholder budgetbetingelsen (18), hvor  $a_1 = 0$ .
3. Profitten fra virksomhederne fordeles blandt husholdningerne proportionalt til deres arbejdsindkomst i henhold til (38).
4. Arv modtaget er lig arv efterladt i henhold til (16).
5. Bruttonationalproduktet er givet ved produktionsfunktionen (27).
6. Den samlede befolkning er givet ved summen af de enkelte kohorter, jf. (5).
7. Det aggregerede arbejdsudbud er givet ved (12).
8. Den aggregerede profit er givet ved (37).
9. Der er fuldkomne faktormarkeder, således at (28), (29) og (32) gælder.
10. Prisen på halvfabrikata er givet ved (36).
11. Pensionsydelsen er givet ved (17).
12. Pensionsudgifterne er givet ved (44).
13. Staten overholder sin budgetbetingelse givet ved (47).
14. Kapitalmarkederne clearer, så at (41) gælder.

## 4.7 Steady state

Modellen starter og slutter i steady state, som er en stationær ligevægt, hvor de eksogene variable forbliver konstante. Startåret sættes til at være 1970, mens slutåret sættes til at være 200 år senere, i år 2170. I mellemprioden skal ligningerne løses for alle de endogene variable, inklusive optimalitetsbetingelsen for forbrug og arv for alle generationer. Siden modellen starter i steady state, får husholdningerne et chok i periode 2, hvor den forventede bane for de eksogene variable ændrer sig, herunder fertiliteten, dødeligheden, produktivitetsvæksten mm. I en given periode planlægger husholdningerne først, hvor mange aktiver de vil have i næste periode, og justerer deres forbrug og opsparing derefter.

I steady state er modellen givet ud fra de samme definitioner som før, men hvor alle variable er konstante over tid justeret for vækstraten i teknologi ( $g^A$ ) og befolkningstilvæksten ( $n$ ). På den balancerede vækststi vil de aggregerede variable vokse med  $(1 + g^A)(1 + n)$ , mens de økonomiske variable per indbygger, herunder lønsatsen, vil vokse med  $(1 + g^A)$ . I den stationære ligevægt er der  $4 \cdot J + 13$  ubekendte.  $J$  kohorters forbrug  $c_j$ ,  $J$  nettoaktiver  $a_j$ ,  $J$  udbytter af virksomhedernes profiler  $\Pi_j$ ,  $J$  kohorter  $N_j$ , en variable for arv givet  $x$ , en variable for arv modtaget  $q$ , aggregeret produktion  $Y$ , aggregeret kapital  $K$ , aggregeret arbejdsudbud  $L$ , aggregeret profit  $\Pi$ , lønsatsen  $w$ , lejesatsen på kapital  $r^k$ , renten  $r$ , prisen på halvfabrikata  $\frac{p^{int}}{P}$ , skattesatsen på lønindkomst  $\tau$ , kompensationsgraden  $d$  og pensionsudgifterne  $E$ . Der er således  $4 \cdot J + 13$  ligninger:<sup>30</sup>

1.  $(J - 1)$  eulerligninger, (A.55)
2. (1) ligning for arv givet, (A.56)
3. (1) ligning for arv modtaget, (A.60)
4.  $(J)$  ligninger for de intertemporale budgetbetingelser, (A.58), (A.59), (A.61) og (A.62)
5.  $(J)$  ligninger for fordeling af profit, (A.65)
6. (1) ligning for en husholdnings initiale beholdning af aktiver, (A.57)
7.  $(J)$  ligninger for befolkningen, (10) og (A.54)
8. (1) ligning for den aggregerede produktion, (A.70)
9. (1) ligning for kapitalbeholdningen, (A.80)
10. (1) ligning for det aggregerede arbejdsudbud, (A.78)
11. (1) ligning for den aggregerede profit, (A.72)
12. (1) ligning for lønsatsen, (A.68)
13. (1) ligning for avancetillægget, (A.66)

---

<sup>30</sup>Ligningerne er vist i Appendiks B.

14. (1) ligning for lejesatsen på kapital, (A.69)
15. (1) ligning for realrenten, (A.71)
16. (1) ligning for statens budgetbetingelse, (A.76)
17. (1) ligning for kompensationsgraden, (A.81)
18. (1) ligning for de samlede pensionsudgifter, (A.82)

Modellen løses i Matlab med udvidelsen Dynare. Via numerisk optimering udregner programmet steady state i start- og slutåret samt den mellemliggende transition. Der antages perfekt forudseenhed (eng.: *perfect foresight*), således at agenterne har fuld kendskab til udviklingen i de eksogene processer.<sup>31</sup> Modellen kan desuden ikke løses analytisk grundet lånerestriktionen givet i (19) (Eggertsson m.fl., 2019b).

## 5 Data og kalibrering

Der tages udgangspunkt i 1970, da der indtrådte en række strukturelle skift i økonomien på dette tidspunkt. For det første var det her, at de store kohorter fra boomer-generationen fødte efter Anden Verdenskrig indtrådte i arbejdsstyrken. For det andet accelererede den demografiske transition, idet fertiliteten og dødeligheden faldt yderligere som følge af sociale forandringer og medicinske fremskridt. For det tredje var det også i 1970'erne, at produktivitetsvæksten dalede og indfandt sig på et permanent lavere niveau sammenlignet med årtierne inden. For det fjerde aftog væksten i reallønnen, mens lønandelen faldt, og profitraten steg (Eggertsson m.fl., 2019a).

### 5.1 Demografiske data

#### 5.1.1 Fertilitet

Der anvendes den samlede fertilitetskvote, som måler antal børn født per kvinde inden for et givet år.<sup>32</sup> Jeg beregner et glidende 5-årigt gennemsnit for at udglatte eventuelle udsving i fertiliteten, så befolkningsudviklingen i modellen bliver mindre følsom over for antagelsen om, at husholdningerne får børn som 25-årige, jf. (7). Jeg dividerer den udglattede serie med to, så fertilitetskvote i modellen ( $\Gamma_t$ ) angiver antal børn født per person i periode  $t$ . Data for 1950-2100 er hentet fra FN's database, hvor data efter 2023 er baseret på FN's fremskrivninger fra juli 2024 (FN, 2024). Data for 1943-1950 er hentet fra Center for Disease Control (CDC, 2023). Selvom simulationen først begynder i 1970, er kendskab til fertiliteten inden nødvendig, da agenterne i modellen først indtræder i økonomien som 25-årige.

<sup>31</sup>Antagelsen om perfekt forudseenhed kan diskuteres, men er påkrævet for at løse modellen. En alternativ antagelse, hvor agenterne i hver periode bliver overrasket over udviklingen i eksogene processer såsom den demografiske udvikling, ville dog næppe være mere realistisk.

<sup>32</sup>Den samlede fertilitet beregnes som summen af antal levende fødsler per 1.000 kvinder i 5-årige aldersintervaller ganget med 5 (CDC, 2023).

I baseline antages fertiliteten at konvergere mod 1,64 børn per kvinde ( $\Gamma = 0,82$ ), hvilket svarer til gennemsnittet for 2019-2023. Dette er ikke langt fra den senest observerede værdi i 2023 på 1,62 børn per kvinde. Ifølge FN's fremskrivning vil fertiliteten i USA forblive på ca. 1,65 frem mod 2100 i mellemscenariet, som er det scenarie, de anser for mest sandsynligt. FN's mellemscenarie er altså næsten identisk med et scenarie, hvor fertilitetskvotienten forbliver konstant resten af dette århundrede. Tager man dog i betragtning, at fertiliteten i USA samt i resten af verden længe har været faldende, jf. figur 1a, kan det fremstå plausibelt, at denne tendens vil fortsætte. I analysen vil jeg i alternative simulationer anvende fremskrivninger fra FN's nedre 80 pct.-konfidensinterval samt det lave scenarie.<sup>33</sup> Her forventes fertilitetskvotienten at stabilisere sig på hhv. 1,30 og 1,15 børn per kvinde frem mod 2100.

Grundet antagelsen i modellen om, at hver kohorte kun får børn på et og samme tidspunkt, vil hver kohorte, der fødes, være direkte proportional med fødselsraten og størrelsen på deres forældres kohorte. Dette medfører, at størrelsesforholdene mellem kohorterne forbliver intakte, således at der opstår "ekkoeffekter" i befolkningsudviklingen. I virkeligheden vil sådanne ekko-effekter gradvist forsvinde, eftersom kvinder inden for en given kohorte får børn ved forskellige aldre. For at undgå overdreven persistens i disse demografiske ekkoeffekter, justerer jeg på fertiliteten i perioden 2004-2043, hvilket træder i kraft i modellen 25 år senere. Dette indebærer, at den antagne fertilitet i 2004-2017 ligger under den faktiske fertilitet, mens den i 2018-2043 ligger over.<sup>34</sup>

### 5.1.2 Dødelighed

Data for dødelighed er hentet fra FN's overlevelsestavler for begge køn samlet. Overlevelsessandsynlighederne har jeg beregnet ud fra antallet af overlevende i en hypotetisk kohorte på 100.000 individer, der er fyldt  $j$  år, angivet  $I(j)$ .<sup>35</sup> Den betingede sandsynlighed for at overleve mellem alderen  $j$  og  $j + 1$  beregnes da som  $s_j = I(j + 1)/I(j)$ . Den ubetingede sandsynlighed for at overleve til alderen  $j$  er givet ved  $su_j = I(j)/100000$ . Denne er også givet ved produktet af de betingede sandsynligheder, så  $su_j = \prod_{m=1}^{j-1} s_m$ . Overlevelsessandsynlighederne er indekseret, så  $su_1 = s_0 = 1$ , dvs. ingen dør, før de fylder 25 år. Data for dødelighed efter 2023 er baseret på FN's seneste fremskrivninger (FN, 2024). Overlevelseskurverne for udvalgte år er vist i figur 2a.

Dødeligheden i årene 2020-2022 fastsættes til niveauet fra 2019 på grund af overdødeligheden under covid-19-pandemien.<sup>36</sup> I modellen antages det, at den forventede levetid forbliver konstant efter 2024. Denne antagelse er til dels påkrævet for at frembringe en overgang til den balancerede vækststi inden 2100. Dels er den også med til at sikre en mere realistisk udvikling i afhængighedsforholdet, idet modellen grundet fravær af indvandring ellers vil overvurdere afhæn-

<sup>33</sup>FN's lave scenarie er givet ved fertilitetskvotienten i mellemscenariet fratrukket 0,5.

<sup>34</sup>Denne metode afspejler Eggertsson m.fl. (2019a). Se figur A9 i Appendiks D.

<sup>35</sup>De hypotetiske kohorter er beregnet af FN og er givet ved  $I(j + 1) = I(j) \cdot \exp(-m(j))$ , hvor  $m(j)$  er den empirisk observerede dødsrate for alderen  $j$ .

<sup>36</sup>Dette påvirker ikke resultaterne i nævneværdig grad.



gighedsforholdet på lang sigt, jf. figur 5. Desuden er det omdiskuteret, hvorvidt den forventede levetid vil fortsætte med at stige i samme takt, som den historisk har gjort (Olshansky m.fl., 2024). I afsnit 6.8 simuleres modellen under alternative fremskrivninger for fertiliteten og den forventede levetid.

## 5.2 Økonomiske data

**Produktivitet:** Der anvendes data for totalfaktorproduktiviteten i USA justeret for kapacitetsudnyttelse udarbejdet af Fernald (2024). Da data er karakteriseret af cykliske udsving, udglattes serien med et HP-filter ( $\lambda = 10$ ) fra 1948-2023. Værdien sættes til 0,85 pct. efter 2020, hvilket svarer til gennemsnittet for 2000-2020. Produktivitetsvæksten i steady state i 1970 sættes til 2 pct., hvilket ca. svarer til gennemsnittet for 1960-1970. Udviklingen i produktiviteten er vist i figur A11.<sup>37</sup>

**Statsgæld:** Data for statsgæld som andel af bruttonationalproduktet er hentet fra Federal Reserve (FRED, 2024d). Dataserien omfatter al gæld, som den amerikanske forbundsstat skylder individer, virksomheder, stater, kommuner, centralbanker og udenlandske stater (Fiscal Data, 2024) og er vist i figur A13a. I modellen sættes statens gældskvote  $b_t$  lig de 5-årige glidende gennemsnit mellem 1972-2021. For 1970 og 1971 er værdien sat til 35 pct., og efter 2022 antages statsgælden at ligge konstant på 120 pct. af BNP.

**Offentligt forbrug:** Data for de offentlige forbrugsudgifter er hentet fra Bureau of Economic Analysis og dækker over forbrugsudgifter eksklusive bruttoinvesteringer, overførsler og renteudgifter (BEA, 2024b). Den offentlige forbrugskvote har været svagt faldende i perioden, idet den er gået fra 18 pct. i 1970 til 13,4 pct. af BNP i 2023, jf. figur A13b.<sup>38</sup> I modellen sættes statens forbrugskvote  $g_t$  fast til gennemsnittet for 1970-2022 på 15,54 pct. Data for nominelt BNP er hentet fra Federal Reserve (FRED, 2024d).

**Humankapital:** Data for den aldersspecifikke arbejdsindkomst er hentet fra National Transfer Accounts (NTA, 2017). Humankapitalprofilen  $hc_j$  for husholdningerne i den arbejdsdygtige alder i modellen sættes lig de indekserede data fra NTA, hvor  $hc_1 = 1$ , så indkomsten for 25-årige normaliseres til 1. Humankapitalprofilen antages af være konstant over tid og er vist i figur A12.

**Pensionsalder:** Pensionsalderen sættes til 67 år ( $j = 43$  i modellen), da dette er alderen, man i USA har ret til fuld pension i form af *Social Security* (SSA, 2024a).<sup>39</sup> Således vil  $hc_j = 0$  for  $j > 42$ , så de pensionerede husholdninger ikke modtager nogen lønindkomst.

<sup>37</sup>Anvendelse af data for væksten i totalfaktor- i stedet for arbejdstimeproduktiviteten er et metodisk valg, der kan diskuteres. Dette valg er dog konsistent med lignende studier, herunder Eggertsson m.fl., 2019a. Se de la Fontejne (2018) for en diskussion af, hvordan produktivitetsvækst i CES-funktioner bør behandles.

<sup>38</sup>Mens den offentlige forbrugskvote i USA har været svagt faldende, har de samlede offentlige udgifter været svagt stigende som andel af BNP, jf. figur A13b.

<sup>39</sup>Den gennemsnitlige pensionsalder i USA er lavere, da mange amerikanere trækker sig tilbage fra arbejdsmarkedet, før de fylder 67 år (Munnell, 2015). Dette forhold er dog allerede afspejlet i indkomstprofilen, idet den falder efter 50-årsalderen (se figur A12 ).

### 5.3 Kalibrering af parametre

Parametrene  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\mu$  og  $D$  kalibreres til at matche en række empiriske momenter i steady state. Dette opnås ved at minimere de kvadrerede afvigelser mellem de simulerede og empiriske momenter.<sup>40</sup>

Kapitalandelen  $\alpha$  kalibreres til at genskabe et forhold mellem bruttoinvesteringer og BNP på 21,7 pct. i steady state i periode 1, hvilket svarer til det glidende 5-årige gennemsnit i 1970 (FRED, 2024d).

Diskonteringsfaktoren  $\beta$  kalibreres således, at renten i steady state i periode 1 bliver lig ca. 4,3 pct., hvilket svarer til den naturlige realrente i USA i 1970 - beregnet som den udglattede værdi af HLW's estimator, jf. figur 3a.

Parameteren for markedsmagt  $\theta$  kalibreres til at matche en lønandel på 63 pct. i den første periode, hvor simulationen starter i steady state, og 56 pct. i den sidste periode, hvor økonomien slutter i steady state. Disse andele svarer til de 5-årige glidende gennemsnit for lønandelen i USA i hhv. 1970 og 2023 (BLS, 2024). Dette giver to kalibrerede parameterværdier for  $\theta$ : en for steady state i periode 1 og en for steady state i den terminale periode. For perioden 1971-2022 interpoleres  $\theta_t$  lineært mellem disse to værdier, således at den vil være tidsvarierende i denne periode. Efter 2023 holdes den konstant på den terminale steady state-værdi.

Gældsloftet  $D$  kalibreres i forhold til det 5-årige glidende gennemsnit for mængden af privat forbrugsgæld som andel af BNP i 1970 (2,2 pct.) og 2015 (12,3 pct.) (FRED, 2024a).<sup>41</sup> Dette resulterer i to kalibrerede parameterværdier:  $D_1$  og  $D_T$  for steady state i hhv. periode 1 og den terminale periode  $T$ . Det antages endvidere, at  $D_{j,t}$  stiger over tid, men forbliver konstant hele livet for hver kohorte. Således kan ældre kohorter i et givet år i mindre grad belåne deres fremtidige lønindkomst end yngre kohorter.  $D_{j,t+1}$  sættes lig de lineært interpolerede værdier mellem de kalibrerede værdier  $D_1$  og  $D_T$ . Dette indebærer, at  $D_{j,t+1} = \min\left(D_{j,t} + \frac{D_T - D_1}{42}, D_T\right)$  og  $D_{j,t} = D_{j-1,t-1}$ . Dette er med til at skabe en mere jævn forbrugscyklus for husholdningerne i modellen, hvilket passer bedre med empirien. I steady state vil gældsloftet være ens for alle individer i den arbejdsdygtige alder, så  $D_j = D_{j+1}$  for  $j \in \{1, \dots, 41\}$ .

Parameteren for arv  $\mu$  kalibreres til at matche et forhold mellem arv modtaget og BNP på 0,6 pct. i den terminale steady state.<sup>42</sup>

Den intertemporale substitutionselasticitet for forbrug sættes til  $\rho = 0,95$ . Denne parameterværdi er udvalgt efter, hvad der skaber den mest realistiske forbrugscyklus for individerne i modellen og er i overensstemmelse med den øvrige litteratur. Jeg vælger  $\rho < 1$ , da mikroøkonometriske studier finder, at  $0 < \rho < 1$  (Havranek m.fl., 2013; Hall, 1981).<sup>43</sup>

<sup>40</sup>Kalibreringen foretages i Dynare vha. optimeringsproceduren `fmincon`, som finder de bedste parameterværdier for at matche empiriske momenter. Funktionen justerer parametrene iterativt under givne begrænsninger og stopper, når forskellen mellem modellens resultater og målene minimeres tilstrækkeligt.

<sup>41</sup>Der tages udgangspunkt i 2015 i stedet for 2023, da det passer bedre med den øvrige kalibrering.

<sup>42</sup>Der findes ingen officiel statistik på overførsel af arv i USA. Alvaredo m.fl. (2015) estimerer, at andelen ligger mellem 5 og 10 pct. Modellen er dog ikke i stand til at genskabe dette, uden at det forstyrrer de øvrige resultater.

<sup>43</sup>I den øvrige litteratur anvendes ofte,  $\rho = 1$ . Se Appendiks A.

Substitutionselasticiteten mellem arbejdskraft og kapital, givet ved parameteren  $\sigma$ , sættes lig 0,6. Denne parameterværdi afspejler en antagelse om, at kapital og arbejdskraft i højere grad er komplementær end substitutter. Gechert m.fl. (2022) finder i et metastudie, at  $0,3 < \sigma < 0,9$ , hvorved midterpunktet er  $\sigma = 0,6$ .<sup>44</sup>

Deprecieringsraten fastsættes til  $\delta = 0,10$ , hvilket er en standardværdi ved årlige frekvenser.<sup>45</sup>

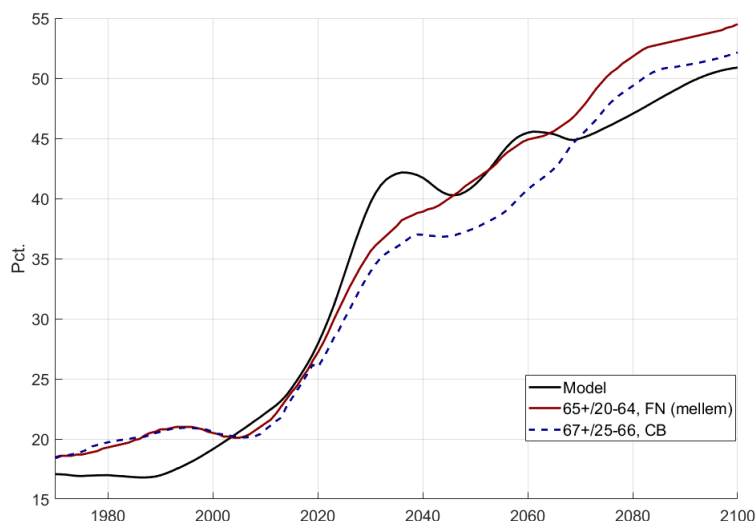
Kompensationsgraden efter skat sættes lig  $\bar{d} = 0,505$ , hvilket svarer til kompensationsgraden efter skat i USA i 2022 (OECD, 2022). Kompensationsgraden før skat er da givet ved  $d_t = \bar{d}(1 - \tau_t)$ .

## 6 Analyse

I dette afsnit præsenteres hovedresultaterne fra simuleringen af modellen samt en række forskellige eksperimenter og robusthedstjek. Hvis ikke andet er angivet, kommer de præsenterede resultater fra modellen som beskrevet i afsnit 5.

Først illustreres modellens evne til at afspejle den empiriske udvikling i afhængighedsforholdet, lønandelen samt mængden af forbrugsgæld i forhold til BNP. I figur 5 vises udviklingen i

Figur 5: Afhængighedsforhold: model vs. data (1970-2100)



Anm.: Figuren viser udviklingen i afhængighedsforholdet i modellen sammenlignet med data (fremskrivninger efter 2023). I modellen er afhængighedsforholdet defineret som populationen af 67+-årige ift. 25-66-årige. Kilde: FN (2024), CB (2023) og egne beregninger.

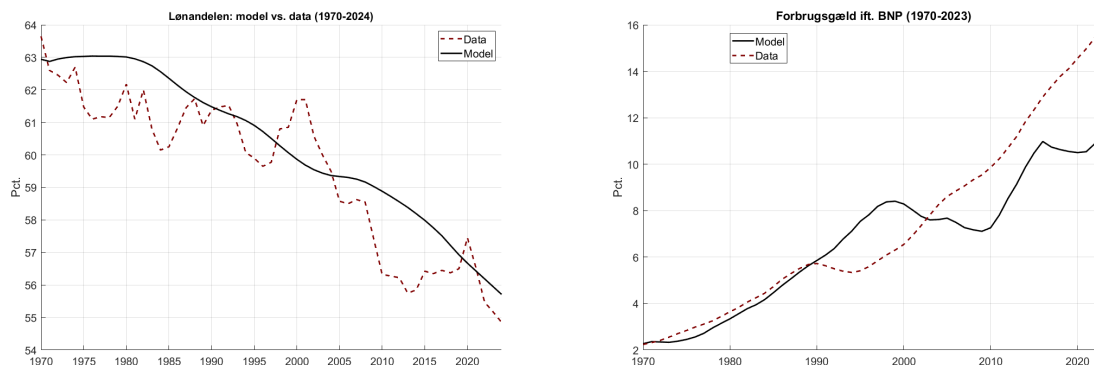
afhængighedsforholdet i modellen sammenlignet med data. Der sammenlignes både med data for forholdet mellem 65+-årige og 20-64-årige samt 67+-årige og 25-66-årige, hvor sidstnævnte

<sup>44</sup>I den øvrige litteratur anvendes ofte, at  $\sigma = 1$  (Eggertsson m.fl., 2019b; Papetti, 2021a).

<sup>45</sup>Lignende værdier anvendes bl.a. af Bielecki m.fl. (2020), Papetti (2021a) og Carvalho m.fl. (2023)

svarer til definitionen anvendt i modellen. Afhængighedsforholdet i modellen afviger fra data, idet den demografiske proces i modellen givet ved ligning (6) og (7) antager en konstant fødealder og er uden indvandring. Før 2002 er afhængighedsforholdet i modellen lavere, hvilket skyldes, at aldersfordelingen i den første periode er givet ved (10). Ikke desto mindre følger modellen den empiriske udvikling tæt. I perioden 2003-2024 er afhængighedsforholdet i modellen næsten identisk med empirien.

Figur 6: Lønandel og forbrugsgæld



Anm.: Figuren viser udviklingen i lønandelen (venstre) og forbrugsgælden som andel af BNP (højre) sammenlignet med data. Data for forbrugsgælden er udglattet med et 5-årigt glidende gennemsnit. Kilde: BLS (2024), FRED (2024a) og egne simuleringer.

Figur 6 viser udviklingen i lønandelen (venstre) givet i (49) og den private forbrugsgæld (højre) givet i (53) i pct. BNP. Det fremgår, at modellen evner at genskabe en lønandel, som er faldende i perioden, samt en privat gældskvote, som er stigende. Efter 2002 er gældskvoten i modellen lavere end i empirien, hvilket følger af kalibreringen af parameteren  $D_T$  beskrevet i afsnit 5.3. Husholdningernes adgang til forbrugslån har dog kun en mindre betydning for de økonomiske variable, herunder renten, hvilket vises i afsnit 6.2.

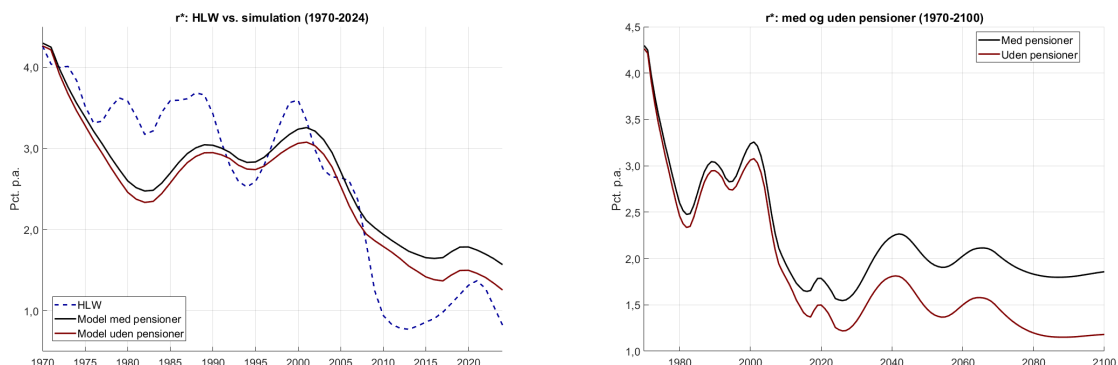
## 6.1 Hovedresultater

I figur 7 til venstre vises udviklingen i den simulerede rente i baseline hhv. med og uden skattefinansierede pensioner mellem 1970-2024. I begge simulationer er parametrene kalibreret til at matche de samme empiriske momenter beskrevet i afsnit 5.3, herunder at den naturlige realrente i 1970 er 4,3 pct. Parameterværdierne er vist i tabel A1 i Appendiks C.

I simulationen uden pensioner falder renten mere (3,01 pp), end når der er pensioner med (2,73 pp). Dette resultat er forventet, jf. mekanisme 4, idet skattefinansierede pensioner fortrænger privat opsparing. I begge tilfælde falder renten frem mod 1990 mere end i HLW.<sup>46</sup> Efter hhv. 2000 og 2008 ligger de simulerede renter over HLW. I 2024 er den simulerede  $r^*$  hhv. lig 1,57 pct. med pensioner og 1,26 pct. uden pensioner. Estimatet fra HLW er 0,82 pct. i 2024. At de

<sup>46</sup>Dette skyldes bl.a. antagelsen af perfekt forudseenhed, hvilket initialt giver *front loading*-effekter i modellen.

Figur 7:  $r^*$  i 1970-2024 og 1970-2100.



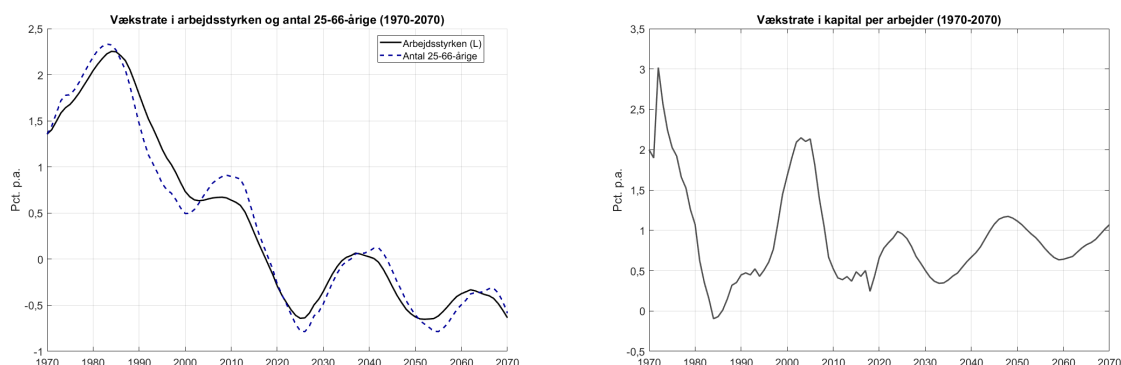
Anm.: Figuren til venstre viser udviklingen i den naturlige realrente ( $r^*$ ) i 1970-2024 i modellen hhv. med (sort) og uden (rød) pensioner sammenlignet med estimatet af  $r^*$  af HLW (blå, stiplet). Figuren til højre viser den simulerede rente hhv. med og uden pensioner frem mod 2100. Kilde: Holston m.fl. (2024) og egne simuleringer.

simulerede renter ligger over HLW's estimat kan eventuelt tilskrives globale faktorer, der ikke er medtaget i modellen, herunder at USA som debitoration er destination for opsparingsoverskud fra andre økonomier (se afsnit 7.3 og figur A17). Ikke desto mindre følger de simulerede renter HLW tæt, både hvad angår det samlede fald i perioden og udsvingene undervejs.

I figur 7 til højre vises udviklingen i den simulerede  $r^*$  frem mod 2100. Betydningen af offentligt finansierede pensioner bliver gradvist større, efterhånden som befolkningen bliver ældre. I modellen *med* pensioner stiger skattesatsen  $\tau_t$  fra 25,3 pct. i 1970 til 30,3 pct. i 2024, hvilket er sammenligneligt med den effektive skattesats på arbejdsindkomst i USA i 2023 på 29,9 pct. (OECD, 2023). På lang sigt stiger  $\tau_t$  til 34,5 pct. I modellen *uden* pensioner stabiliserer skattesatsen sig på 23,4 pct. I begge tilfælde forekommer der et vendepunkt i den naturlige rente efter hhv. 2025 og 2055 som følge af den demografiske udvikling. Her stiger den naturlige rente med hhv. 68 bp (med pensioner) og 54 bp (uden pensioner) mellem 2024 og 2042. Efter 2080 stabiliserer den naturlige rente sig på hhv. 1,86 pct. (med pensioner) og 1,18 pct. (uden pensioner), hvor omkring den vil forblive i den langsigtede stationære ligevægt. I simulationen *uden* pensioner svarer dette til omtrent det samme niveau som i 2024 (1,26 pct.), mens den naturlige rente i simulationen *med* pensioner bliver højere end i 2024 (1,57 pct.) i den stationære ligevægt. Da vendepunktet optræder både med og uden et skattefinansieret pensionssystem, og eftersom alle eksogene variable er konstante efter 2023 (på nær fertiliteten, jf. afsnit 5.1.1), kan det konkluderes, at vendepunkterne skyldes den demografiske udvikling via mekanisme 1 og 3. Pensioner er dog med til at forstørre vendepunktet, hvilket skyldes mekanisme 4.

Udviklingen i renten afspejles i vækstraten i arbejdsudbuddet og beholdningen af kapital per arbejder, som vises i figur (8). Her fremgår det, at vækstraten i arbejdsstyrken stiger efter 2025, mens vækstraten i kapital per arbejder falder. Når en stigning i vækstraten i arbejdsstyrken foranlediger en stigning i renten, afspejler det, at arbejdsudbuddet påvirker investeringsefterspørgslen og dermed renten som beskrevet i mekanisme 1. Når vendepunktet efter 2055 er mindre

Figur 8: Vækstrate i arbejdsstyrken ( $L_t$ ) og kapital per arbejder ( $k_t$ )



Anm.: Figuren til venstre viser den årlige vækstrate i arbejdsstyrken givet i (12) samt antallet af individer i den arbejdsdygtige alder. Figuren til højre viser den årlige vækstrate i kapital per arbejder beregnet ved at dividere (41) med (12). Bemærk at kapital per arbejder adskiller sig fra kapital per *effektiv* arbejder, som er givet ved  $\tilde{k}_t = k_t/A_t$ . Kilde: egen simulering.

end vendepunktet efter 2025, skyldes det udfasningen af ekkoeffekterne fra boomer-generationen og dens efterkommere (se afsnit 5.1.1). I modellen er disse ekkoeffekter fuldt til stede indtil 2029. Det er derfor sandsynligt, at vendepunktet efter 2025 er mere udtalt i modellen, end hvad der vil være tilfældet i virkeligheden.

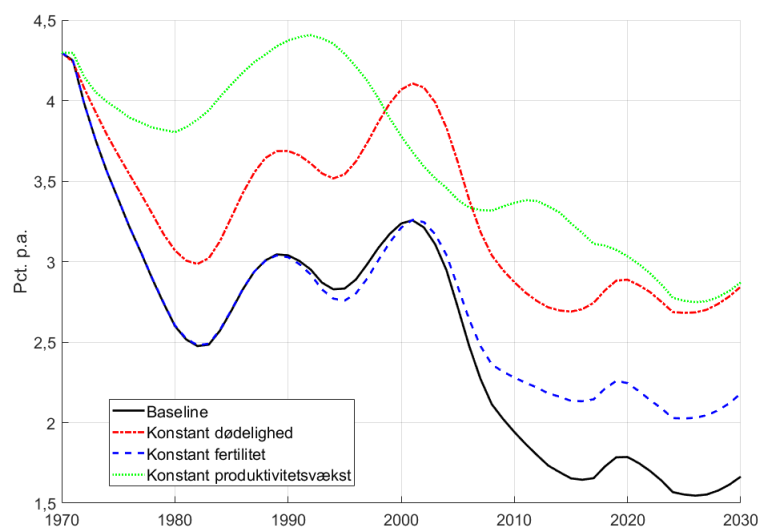
På intet tidspunkt bliver den naturlige realrente negativ. Modellen afviser derfor umiddelbart, at der skulle have været eller er udsigt til sekulær stagnation i amerikansk økonomi. Dette resultat er dog muligvis følsomt over for de antagne parameterverdier (jf. afsnit 6.7), udviklingen i de demografiske variable (jf. afsnit 6.8) samt antagelsen om en lukket økonomi (jf. afsnit 7).

## 6.2 Dekomponering

Det er ikke muligt at isolere de fire mekanismer fuldkomment, da fertiliteten og dødeligheden påvirker opsparingsadfærden og investeringsefterspørgslen gennem de fire mekanismer nævnt i afsnit 1.1 simultant. En lavere dødelighed har to modsatrettede effekter på den naturlige realrente. På den ene side medfører en højere forventet levetid en højere opsparingsrate blandt arbejdere (mekanisme 2), mens det på den anden side øger afhængighedsforholdet (mekanisme 3). En lavere fødselsrate har også modsatrettede effekter på den naturlige rente, da det medfører en reduktion i arbejdsstyrken (mekanisme 1) og et højere afhængighedsforhold (mekanisme 3). Fertiliteten påvirker ikke den forventede levetid, og dødeligheden blandt ældre påvirker ikke arbejdsudbuddet, medmindre pensionsalderen stiger. Både fertiliteten og dødeligheden kan påvirke skattetrykket og udgifterne til pension (mekanisme 4). Man kan ikke desto mindre deducere sig frem til, at såfremt en lavere dødelighed medfører en lavere realrente i ligevægt, må mekanisme 2 dominere mekanisme 3 og 4. Ligeledes gælder, at hvis et fald i fertiliteten leder til et fald i den naturlige realrente, må det afspejle, at mekanisme 1 dominerer mekanisme 3 og 4.

I figur 9 vises udviklingen i den naturlige realrente, når hhv. dødeligheden, fertiliteten og

Figur 9: Udvikling i  $r^*$ : Isolering af drivkræfter (1970-2030)



Anm.: Figuren viser udviklingen i den simulerede rente, når hhv. dødeligheden, fertiliteten og produktivitetsvæksten holdes konstante på niveauet i 1970. Kilde: egen simulering.

produktivtetsvæksten holdes konstante på niveauet i 1970. At fertiliteten holdes konstant efter 1970 indebærer, at babyboomet i 1946-1964 stadig er inkluderet. Det fremgår, at renten falder mindst, når enten dødeligheden eller produktivitetsvæksten holdes konstante, hvilket dermed afspejler, at udviklingen i disse faktorer har bidraget mest til faldet i den naturlige realrente siden 1970.

Scenariet med konstant fertilitet adskiller sig først fra baseline i 1990'erne, da der går 25 år, før agenterne indtræder i arbejdsstyrken. Ikke desto mindre fremgår det, at den naturlige rente ville have været højere efter år 2000, hvis fertiliteten ikke havde faldet siden 1970, hvilket dermed afspejler, at mekanisme 1 er stærkere end mekanisme 3. At stigningen i den forventede levetid, i form af en faldende dødelighed, isoleret set har lagt et nedadgående pres på den naturlige rente, vidner ligeledes om, at mekanisme 2 samlet set dominerer mekanisme 3 og 4. Med andre ord har effekten af, at vækstraten i arbejdsstyrken er faldet, samt at husholdningerne har øget deres præference for at spare mere op i forventning om at leve længere, været stærkere end effekten af, at afhængighedsforholdet og skattetrykket er steget. Dette resultat er forventet, jf. afsnit 3.

I alle fire scenarier optræder et mindre vendepunkt i den naturlige rente efter 2025. Dette skyldes, at de sidste store årgange fra babyboomet her er gået på pension, mens deres børnebørn indtræder i arbejdsstyrken. Dette medfører, at kapital per effektiv arbejder falder, da vækstraten i arbejdsstyrken stiger (jf. mekanisme 1), hvilket fremgår af figur 8. Samtidig opstår der isoleret set et negativt pres på opsparingskvoten, idet store årgange af pensionister nedsparer (jf. mekanisme 3). I afsnit 6.2.1 simuleres et scenarie, hvor babyboomet ikke fandt sted for at isolere effekten af dette, da den ekstraordinært høje fertilitet inden 1970 i sig selv har haft en effekt

på den efterfølgende økonomiske udvikling. Det bemærkes desuden, at arbejdsstyrken givet i (12) både afhænger af antallet af individer i den arbejdsdygtige alder samt af alderssammensætningen af arbejdsstyrken, eftersom humankapitalprofilen afhænger af alder. Udviklingen i den produktive arbejdsstyrke givet i (12) kan derfor på kort sigt afvige fra udviklingen i antallet af individer i den arbejdsdygtige alder. I afsnit 6.7 simuleres et scenarie, hvor humankapitalen er konstant for alle aldre i den arbejdsdygtige alder.

I tabel 2 vises vækstbidragene fra samtlige af de eksogene processer i modellen til ændringen i den naturlige rente mellem 1970-2024 på 2,73 pp (jf. figur 7, med pensioner). Vækstbidragene er beregnet ved at holde én eksogen variabel fast ad gangen. Jeg finder, at lavere dødelighed og fertilitet, lavere produktivitetsvækst og øget markedskoncentration har lagt et nedadgående pres på den naturlige rente, mens stigningen i både offentlig og privat gæld har lagt et opadgående pres. Vækstbidraget fra demografiske faktorer er sammenlagt -1,58 pp. Faldet i konkurrenceparameteren  $\theta_t$  medfører desuden, at renten falder mere end marginalproduktet på kapital (se figur A6). Således opstår der en afkobling mellem lejesatsen og afkastet på kapital, idet profitraten stiger, hvilket afspejler empirien (Gomme m.fl., 2015).

Vækstbidragene summerer ikke til det samlede fald på 2,73 pp af to årsager. For det første lader det sig ikke gøre at isolere effekten af de enkelte eksogene variable perfekt grundet interaktionseffekter i ligevægt. For det andet vil babyboomet, der fandt sted inden 1970, stadig påvirke økonomien efterfølgende, selvom de eksogene variable fastholdes fra 1970. Hvis alle de eksogene processer holdes konstante fra og efter 1970, falder den naturlige rente stadig mellem 1970 og 2024 som følge af babyboomet, jf. afsnit 6.2.1.

Tabel 2: Vækstbidrag fra eksogene variable (1970-2024)

Eksogen variable	$r^*$ i 2024 (pct.)	Bidrag (pp)
Dødelighed ( $s_j$ )	2,69	-1,12
Fertilitet ( $\Gamma_t$ )*	2,03	-0,46
Produktivitetsvækst ( $g_t^A$ )	2,78	-1,21
Statsgæld ( $b_t$ )	0,79	0,77
Konkurrence ( $\theta_t$ )	2,04	-0,48
Kreditloft ( $D_t$ )	1,37	0,20

Anm.: Kolonne 2 viser den simulerede rente i 2024, når den pågældende eksogene variabel holdes konstant på sin værdi i 1970. Vækstbidragene i kolonne 3 er beregnet ved at sammenligne med baseline, hvor renten er lig 1,57 pct. i 2024, svarende til et samlet fald på 2,73 pp fra 1970. Summen af vækstbidragene er ikke lig det samlede fald grundet interaktionseffekter samt effekten af babyboomet. \*Ekskl. babyboomet. Inkl. babyboomet er bidraget fra fertiliteten 1,11 pp, jf. afsnit 6.2.1. Kilde: egne beregninger.



### 6.2.1 Effekt af babyboomet

De store årgange født i perioden 1946-1964 har i sig selv haft en betydelig påvirkning på den økonomiske udvikling siden 1970. I figur 10 til venstre vises udviklingen i den naturlige rente under et hypotetisk scenarie, hvor alle eksogene processer holdes konstante fra og efter 1970, således at den eneste eksogene variation er den høje fertilitet før 1970.<sup>47</sup>

Faldet i renten mellem 1970-2024 er 62 bp. Mellem 1990-2024 overstiger det 1 pp. Det fremgår, at babyboomet lagde et opadgående pres på den naturlige rente mellem 1970-1990, hvorefter det har lagt et nedadgående pres frem til 2025. Efter 2025 stiger den naturlige rente igen, da det nedadgående pres aftager. Her vil de sidste store årgange fra boomer-generationen være pensioneret, mens børnebørnene indtræder i arbejdsstyrken.

En anden måde at isolere effekten af babyboomet på er at simulere et scenarie, hvor babyboomet ikke fandt sted, men hvor de eksogene variable stadig følger samme udvikling. I figur 10 til højre vises faldet i realrenten i et scenarie, hvor alle eksogene processer følger samme udvikling som i baseline, men hvor fertiliteten før 1970 sættes lig fertilitetskvote i 1970. Her fremgår det, at den naturlige realrente ville være faldet med 65 bp mindre end i baseline i 2024. Da den eneste forskel her er fraværet af babyboomet, er 65 bp således det mest præcise bud på, hvad effekten af babyboomet, alt andet lige, har været på udviklingen i den naturlige rente mellem 1970-2024. Dette estimat er også meget tæt på de 62 bp, som renten falder med i simulationen, hvor babyboomet er den eneste eksogene variation. I simulationen *uden* babyboomet optræder der ikke noget vendepunkt efter 2025.

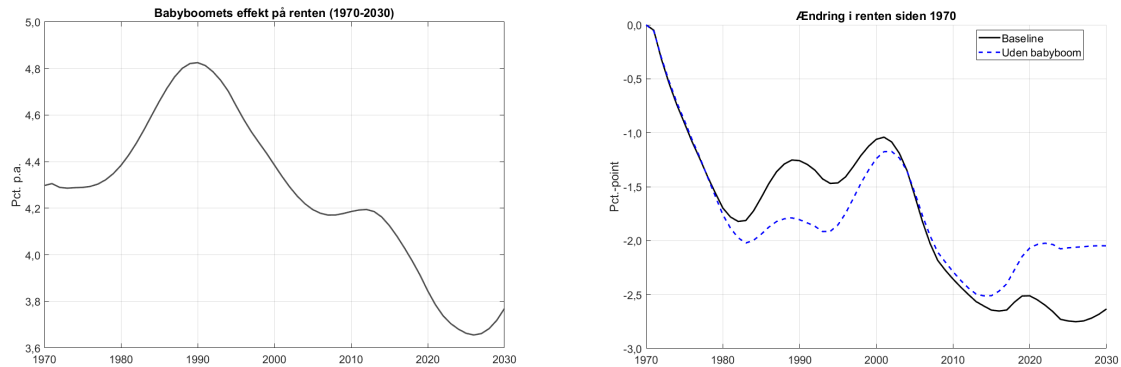
Når summen af vækstbidragene i tabel 2 summerer til mindre end det samlede fald, skyldes det således, at tilstedeværelsen af babyboomer-generationen i sig selv har lagt et nedadgående pres på den naturlige rente i perioden. Medregner man dette, bliver det samlede vækstbidrag fra fertiliteten dermed  $-0,46 - 0,65 = -1,11$  pp i stedet for  $-0,46$  pp. I så fald er bidraget fra fertiliteten nøjagtig lige så stort som bidraget fra ændringen i dødeligheden, hvilket er i overensstemmelse med Eggertsson m.fl. (2019a). Vækstbidraget fra demografiske faktorer bliver dermed  $-2,23$  pp i alt, når der tages højde for babyboomet.

I tabel A2 vises vækstbidragene fra hver af de eksogene variable under scenariet, hvor babyboomet ikke fandt sted. Det viser sig her, at de enkelte vækstbidrag næsten er identiske med resultaterne i tabel 2. Dette indikerer, at de isolerede bidrag fra udviklingen i de eksogene processer ikke er påvirket af interaktionseffekter fra babyboomet. Således understreges det, at en højere forventet levetid generelt set har en stærkere effekt end lavere fertilitet på den naturlige rente. Med andre ord finder jeg, at betydningen af mekanisme 2 har været størst blandt de fire mekanismer. Dette resultat er i overensstemmelse med den relaterede litteratur, herunder Papetti (2021a), Bielecki m.fl. (2020) og Carvalho m.fl. (2016).

---

<sup>47</sup>Der ses her bort fra, at babyboomet officielt sluttede i 1964.

Figur 10: Effekt af babyboomet



Anm.: Figuren til venstre viser udviklingen i renten, når alle eksogene variable holdes konstante i hele perioden bort set fra fertiliteten før 1970, således at babyboomet er den eneste eksogene variation. Figuren til højre viser faldet i renten hhv. med og uden babyboomet, og hvor de eksogene variable *ikke* holdes faste. De to figurer er derfor ikke direkte sammenlignelige. Kilde: egen simulering.

### 6.3 Investeringer og opsparing

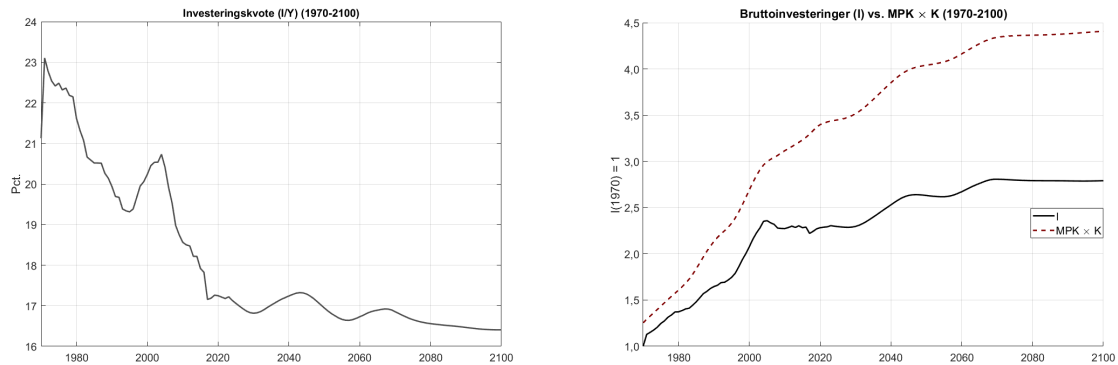
Figur 11 viser udviklingen i investeringerne i modellen. Figuren til venstre viser bruttoinvesteringerne, givet i (42), som andel af BNP. Figuren til højre viser udviklingen i bruttoinvesteringerne og kapitalen ganget med dets marginalprodukt. Hvis  $I_t < MPK_t \cdot K_t$ , hvilket er tilfældet i hele perioden, opfyldes kriteriet om dynamisk efficiens, jf. afsnit 4.5.

Det fremgår, at investeringskvoten er faldende igennem perioden, dog med midlertidige udsving undervejs. I 1970-1971 stiger investeringskvoten brat. Dette følger af modellens opbygning, idet agenterne får et chok i den første periode, hvor de får kendskab til den fremtidige udvikling i de eksogene processer, herunder stigningen i den forventede levetid. Når husholdningerne bl.a. bliver bekendte med, at den forventede levetid vil stige, øger de deres opsparingskvote. Dette medfører et fald i renten, hvilket øger efterspørgslen efter investeringer i ligevægt. Den høje investeringskvote varer dog ikke ved. Efter 1982 er investeringskvoten lavere end i 1970 og fortsætter med at falde indtil 1995. Når investeringskvoten på lang sigt falder, selvom husholdningernes præference for at spare op stiger, skyldes det, at investeringsefterspørgslen samtidig falder som følge af lavere produktivitetsvækst (se figur A11) og en aftagende tilvækst i arbejdsstyrken (se figur 8), hvor sidstnævnte er beskrevet i mekanisme 1. Mens stigningen i den forventede levetid alt andet lige burde øge investeringskvoten i ligevægt, trækker faldet i befolkningstilvæksten således i den modsatte retning (se figur A4).<sup>48</sup>

Den faldende investeringskvote afspejles i en faldende aggregeret privat opsparingskvote. Aldringen af befolkningen medfører i sig selv, at opsparingskvoten falder, idet pensionerede husholdninger har en lav, hvis ikke negativ, opsparingskvote. Den aggregerede opsparingskvote

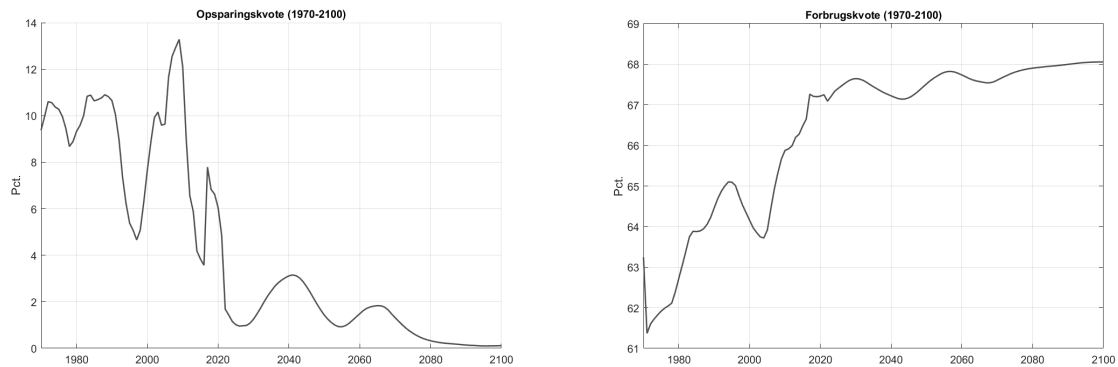
<sup>48</sup>Investeringskvoten falder også i modellen uden pensioner (se figur A4 (v.) i Appendiks C). Dette skyldes, at velstandseffekten stadig er tilstede i den udvidede model, hvilket ikke gælder i den simple model med to generationer beskrevet i afsnit 3.

Figur 11: Bruttoinvesteringer



Anm.: Figuren til venstre viser bruttoinvesteringerne som andel af BNP. Figuren til højre viser investeringerne og  $MPK_t \cdot K_t$ , hvor investeringerne i 1970 er indekseret til 1. Kilde: egen simulering.

Figur 12: Aggregeret opsparingskvote og forbrugskvote



Anm.: Figuren til venstre viser husholdningernes aggregerede nettoopsparingskvote målt i pct. af den disponible indkomst givet ved (52). Figuren til højre viser udviklingen i forbrugskvoten givet ved (50). Kilde: egen simulering.

for husholdningerne er vist i figur 12 til venstre. Mellem 1997-2009 stiger opsparingskvoten kraftigt som følge af, at boomer-generationen nærmer sig pensionsalderen.<sup>49</sup> Derudover stiger produktivitetsvæksten mellem 1993-2000 (jf. figur A11), hvilket også har en positiv effekt på opsparingskvoten i ligevægt, da det øger investeringsefterspørgslen (jf. figur 11). Efter 2009 falder opsparingskvoten igen, da de første kohorter fra boomer-generationen går på pension. Opsparingskvoten stiger efter 2025 på trods af, at andelen af pensionister vokser. Dette vidner om, at mekanisme 3 ikke er en relevant drivkraft bag vendepunktet i renten i denne periode.

På lang sigt konvergerer nettoopsparingskvoten mod en værdi svagt over nul, hvilket afspejler det forhold, at den aggregerede kapitalbeholdning på lang sigt vokser med  $(1+g^A)(1+n)-1 \approx 0^+$  på den balancerede vækststi (se afsnit 4.7).<sup>50</sup> Tilsvarende stiger den aggregerede forbrugskvote

<sup>49</sup>Udsvingene i den private opsparingskvote forstærkes i modellen af, at skattesatsen svinger kraftigt mellem 1970-2020. Se figur A7 i Appendiks C.

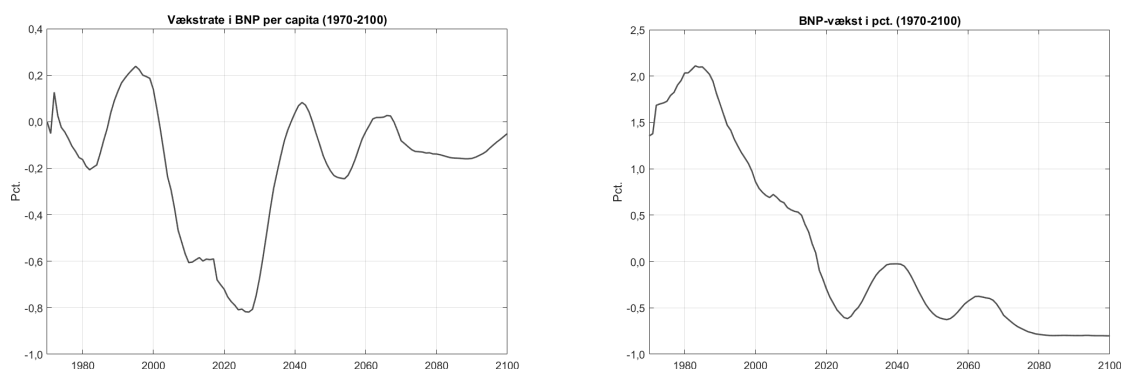
<sup>50</sup>Vækstraten er svagt positivt da  $|g^A| = 0,0085 > |n| = 0,008$  i steady state.

på lang sigt, jf. figur 12 til højre. Den faldende opsparingskvote stemmer overens med empirien, som ligeledes viser, at husholdningernes opsparingskvote i udviklede økonomier har været faldende siden 1970'erne. Samme tendens gør sig kun delvist gældende angående investeringskvoten, som i USA har ligget på omtrent samme niveau i perioden 1970-2023 (se figur A16). Denne diskrepans skyldes bl.a., at USA er nettomodtager af udenlandsk kapital, hvilket ikke er indfanget i modellen. I afsnit 7.3 diskuteres implikationerne af USA's status som åben økonomi for den naturlige rente.

## 6.4 Økonomisk vækst

I modellen er den økonomiske vækst primært bestemt af udviklingen i produktiviteten og befolkningen. På lang sigt vil den aggregerede produktion vokse med  $(1 + g^A)(1 + n)$ , mens kapital, forbrug og produktion per indbygger vil vokse med  $(1 + g^A)$ , jf. afsnit 4.7. Eftersom produktivtetsvæksten i modellen er eksogent givet, er modellen derfor ikke egnet til at afdække effekten af aldring på økonomisk vækst på lang sigt. Dette ændrer dog ikke på, at ændringer i befolkningstilvæksten og alderssammensætningen kan have en transitorisk effekt på den økonomiske vækst.

Figur 13: Aldring og økonomisk vækst



Anm.: Figuren til venstre viser den årlige vækstrate i BNP per capita. Figuren til højre viser den årlige vækstrate i BNP. I begge simulationer er produktivtetsvæksten sat lig nul. Kilde: egen simulering.

I figur 13 vises udviklingen i væksten i BNP per capita og BNP i modellen, hvor produktivtetsvæksten er sat lig nul for at isolere effekten af den demografiske udvikling på den økonomiske vækst. Det fremgår, at vækstraten i BNP per capita er negativ det meste af perioden, før den på lang sigt konvergerer mod nul. Mellem 1982-1995 er vækstraten stigende, og mellem 1987-2001 er den positiv. I 2024 er vækstraten -0,8 pct. Samlet set falder niveauet i BNP per capita med 11,25 pct. mellem 1970-2024. Dette svarer til et årligt vækstbidrag på -0,22 pp. Alt andet lige har den demografiske udvikling således lagt et nedadgående pres på den økonomiske vækst. I figur 13 til højre fremgår det, at væksten i den samlede produktion også har været faldende som følge af aldring. Vækstraten i BNP bliver dog først negativ efter 2018, hvorefter den på lang sigt

konvergerer mod vækstraten i befolkningen givet ved  $n = -0,8$  pct. Både hvad angår vækstraten i BNP og BNP per capita, er der midlertidige udsving undervejs som følge af demografiske effekter. Ligesom der optræder et vendepunkt i realrenten efter 2025 (jf. figur 7), forudsiger modellen også et vendepunkt i den økonomiske vækst på samme tidspunkt som følge af den demografiske udvikling.

## 6.5 Husholdningernes adfærd

I dette afsnit undersøges husholdningernes adfærd angående forbrug og opsparing. I figur 14 vises husholdningernes forbrugsmønster (venstre) og beholdning af aktiver (højre) fordelt efter alder i udvalgte år. Det fremgår, at husholdningerne har et stigende individuelt forbrug indtil 34-årsalderen, hvorefter de gradvist sænker deres forbrug for at spare op til pension. Dette mønster stemmer delvist overens med empirien, som også viser, at husholdningerne først har et voksende og dernæst faldende forbrug. Agenterne i modellen vælger dog at udglatte deres forbrug i højere grad, end hvad der er tilfældet i empirien.<sup>51</sup> Det viser sig også, at husholdningerne for en given alder udglatter deres forbrug mere over tid målt i forhold til deres forbrug som 25-årige. Dette resultat skyldes primært, at de ældre husholdninger øger deres opsparingskvote, når den forventede levetid stiger. En anden årsag er, at kreditloftet  $D_{j,t}$  øges mellem 1970-2024, hvilket giver de yngre husholdninger bedre mulighed for at fremrykke deres forbrug.<sup>52</sup> Dette afspejles også ved, at nettoaktiverne er negative for de yngre husholdninger i 2024 og 2070, men ikke i 1970. Mellem alderen 35 og 66 opbygger husholdningerne opsparing, mens de efter pensionsalderen begynder at nedspare. Efter 90-årsalderen vokser de overlevende husholdningers aktiver igen som følge af forsikringsmarkedet, hvor de afdødes aktiver fordeles ligeligt mellem de overlevende individer inden for samme kohorte. Derudover styrkes arvemotivet, når individerne nærmer sig den terminale alder.

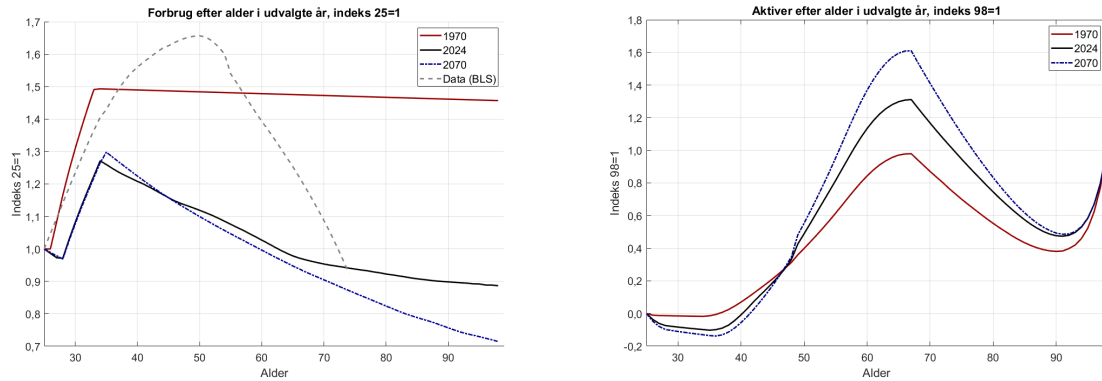
I figur 15 vises udviklingen i opsparingskvoten for udvalgte aldersgrupper i den arbejdsdygtige alder over tid. Det fremgår, at opsparingskvoten for 34-54-årige er stigende i den første del af perioden. Dette afspejler, at de reagerer på stigningen i den forventede levetid ved at spare mere op. På lang sigt bliver opsparingskvoten for 34- og 44-årige dog lavere end i 1970, mens det omvendte gør sig gældende for de 54- og 64-årige. På lang sigt viser det sig dermed, at de ældre husholdninger i den arbejdsdygtige alder øger deres opsparingskvote, mens opsparingskvoten for de yngre husholdninger forbliver uændret eller ligefrem falder. Sidstnævnte kan tilskrives, at de yngre husholdninger bliver mere kreditværdige over tid, hvilket får dem til at fremrykke deres forbrug, hvilket også ses i figur 14. Når de yngre husholdninger fortsætter med at fremrykke deres forbrug selv efter 2024, hvor kreditloftet  $D_{j,t}$  ikke længere øges, skyldes det, at reallønnen

---

<sup>51</sup>En højere  $\rho$  skaber et bedre match med data. Dette kræver dog, at  $\rho > 1$ , hvilket afvises af empirien (jf. afsnit 5.3). Se figur A3. Hvis modellen sammenlignes med estimaterne fra Gourinchas og Parker (1999), passer forbrugsprofilen bedre med data.

<sup>52</sup>Hvis kreditloftet  $D_{j,t}$  holdes fast, stemmer forbrugskurverne bedre med data. Forbrugskurverne passer også bedre med data i modellen uden pensioner. Se figur A2.

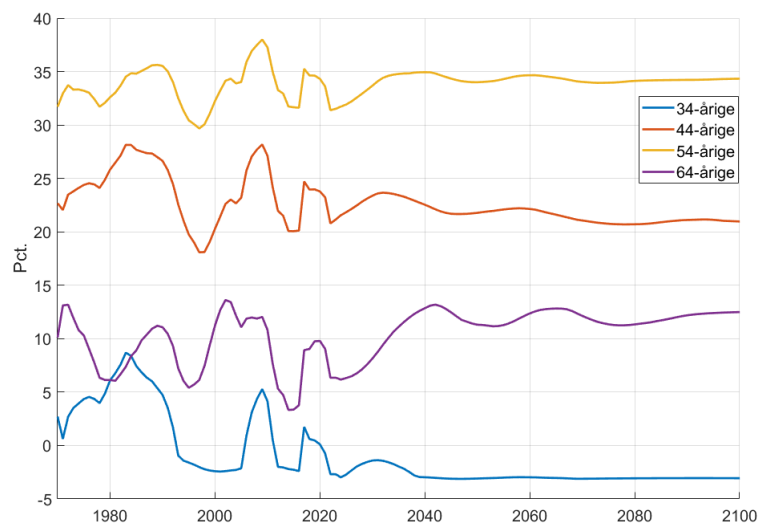
Figur 14: Forbrug og aktivbeholdning efter alder



Anm.: Figuren til venstre viser husholdningernes forbrug efter alder i udvalgte år, hvor forbruget for 25-årige er indekseret til 1. Der sammenlignes med interpolerede data fra BLS. Figuren til højre viser husholdningernes aktiver efter alder i udvalgte år, hvor aktiverne for 98-årige er indekseret til 1. Kilde: BLS (2023) og egne simuleringer.

$w_t$  stadig fortsætter med at stige, hvilket lemper lånerestriktionen, jf. (19). Hvis modellen simuleres, uden at kreditloftet stiger mellem 1970-2024, bliver husholdningernes forbrugscyklus mere realistisk sammenlignet med data, idet forbruget i højere grad følger indkomstprofilen (se figur A2). At udelade adgangen til kredit ville dog forhindre modellen i at genskabe stigningen i den private gældskvotefor forbrug, jf. figur 6. Desuden er effekten af stigningen i kreditloftet på den naturlige rente beskeden (20 bp), jf. tabel 2.

Figur 15: Opsparingskvotefor udvalgte aldersgrupper (1970-2100)



Anm.: Opsparingskvoten er angivet i procent af den disponible indkomst. Kilde: egne beregninger

I afsnit 6.2 blev det vist, at den stigende sandsynlighed for at overleve var en af de primære faktorer bag faldet i den naturlige realrente mellem 1970-2024, eftersom en stigende forventet

levetid øger husholdningernes incitament til at spare op, jf. mekanisme 2. Når husholdningernes opsparingskvote på trods af dette forhold ikke stiger mere, og for nogle aldersgrupper på lang sigt er faldende, skyldes det, at der optræder modsatrettede effekter i ligevægt. Ved en ændring i renten, som den enkelte husholdning tager for givet, påvirkes dennes allokering mellem forbrug og opsparing både af substitutions-, indkomsts- og velstandseffekten. Når  $\rho < 1$ , dominerer indkomsteffekten over substitutionseffekten, således at et fald i renten øger agentens tilskyndelse til at spare op. Eftersom modellen antager, at  $\rho = 0,95 < 1$ , burde indkomsteffekten derfor dominere, hvorfor husholdningernes opsparingskvote burde stige i forbindelse med en lavere rente. Når dette ikke viser sig at være tilfældet, skyldes det tilstedeværelsen af velstandseffekten, som trækker i samme retning som substitutionseffekten. Intuitionen er her, at en lavere rente alt andet lige øger nutidsværdien af individets fremtidige indkomst, hvilket mindsker incitamentet til at spare op.<sup>53</sup> Derudover medfører en lavere investeringsefterspørgsel også i selv, at ligevægtsrenten falder for en given investeringskvote (jf. afsnit 3).

## 6.6 Eksperimenter

I dette afsnit udføres en række eksperimenter som forsøg på at kvantificere Goodhart og Pradhans hypotese om, at den naturlige realrente står over for et vedvarende vendepunkt. Udover at ligevægtsrenten på markedet for opsparing i sig selv vil ændre sig som følge af den demografiske udvikling, argumenterer de for, at en række deraf afledte faktorer vil bidrage til en stigning i realrenten. For det første vurderer de, at de offentlige udgifter til pensioner og sundhedsudgifter vil stige, da der kommer flere ældre. Dette vil øge skattetrykket og statsgælden, hvilket vil føre til højere realrenter. For det andet mener de, også på baggrund af den demografiske udvikling, at lønandelen vil stige, da arbejdskraft bliver en mere knap ressource, hvilket vil styrke arbejdernes forhandlingsposition over for arbejdsgiverne (Goodhart og Pradhan, 2020).

Den første del kan i modellen overføres til, at henholdsvis pensionsudgifterne givet i (44), de offentlige udgifter givet i (45) samt statsgælden givet i (46) vil stige. I modellen vil pensionsudgifterne per automatik stige i takt med stigningen i afhængighedsforholdet. Denne del af hypotesen er således allerede inkorporeret, idet et øget antal pensionister vil medføre en stigning i statens udgifter til pensioner, hvormed også de samlede offentlige udgifter øges.

I figur 7 ses det, at der optræder et vendepunkt i renten efter 2025. Dette er dog ikke drevet af højere pensionsudgifter, eftersom vendepunktet også forekommer i simulationen uden pensioner. Renten bliver dog stadig permanent højere på lang sigt som følge af øgede pensionsudgifter. I modellen medfører voksende pensionsudgifter en højere skattesats, da statens budgetbetingelse givet i (47) skal overholdes. Dette lægger da et opadgående pres på den naturlige realrente, jf. mekanisme 4.

I modellen er statsgælden og de offentlige forbrugsudgifter som andel af BNP til gengæld givet eksogent. For at teste effekten af højere statsgæld og øgede sundhedsudgifter indfører jeg

<sup>53</sup>Se Appendiks A for en uddybning af betydningen af den intertemporale substitutionselasticitet.

et permanent stød til de eksogene variable  $b_t$  og  $g_t$ . Hypotesen om, at lønandelen vil stige, kan i modellen oversættes direkte til, at parameteren for konkurrence givet ved  $\theta_t$  stiger. Dette følger af, at en højere værdi af  $\theta_t$  mindsker virksomhedernes profit, da lønomkostningerne stiger, jf. (31). Jeg udfører også en simulation, hvor kompensationsgraden stiger, da dette er repræsentativt for et scenarie, hvor statens udgifter til overførsler stiger. Selvom det ikke hører med til G&P's hypotese, at kompensationsgraden vil stige, påpeger de, at den næppe heller vil falde, da dette ville være vanskeligt at gennemføre politisk. I modellen kan en øget kompensationsgrad ikke desto mindre anvendes som en proxy for stigende sundhedsudgifter eller andre former for overførsler til pensionister.

Resultaterne er vist i figur 16, hvor udviklingen i den naturlige realrente under de forskellige stød sammenlignes. Stødet til statsgælden er udført ved gradvist at lade statens gældskvote stige fra 120 pct. i 2024 til 200 pct. af BNP i 2040. I 2050 bliver realrenten 58 bp højere, og i 2100 er den 78 bp højere end i baseline.

Stødet til den offentlige forbrugskvote indfases mellem 2025-2050, hvor forbrugskvoten gradvist fordobles fra 15,5 pct. til 31 pct. af BNP. På lang sigt stiger renten og indfinder sig på et permanent højere niveau, men i perioden inden stødet introduceres, falder renten kraftigt. Dette resultat følger af, at agenterne i modellen har perfekt kendskab til udviklingen i de eksogene processer. Således forudser de i god tid, at statens forbrug vil vokse, hvilket vil føre til højere skatter. I lyset af dette øger de deres opsparing, inden stødet indtræffer, da de maksimerer deres nytte fordelt over hele deres levetid. Graden af denne respons er givetvis urealistisk, da husholdninger i virkeligheden kun har begrænset kendskab til eller interesse i udviklingen i de offentlige finanser langt ude i fremtiden. Ikke desto mindre medfører en vedvarende højere offentlig forbrugskvote stadigvæk en permanent højere rente på lang sigt. I 2100 er den naturlige realrente således 72 bp højere. Intuitionen er ligesom beskrevet i mekanisme 4, at højere skatter fortrænger privat opsparing.

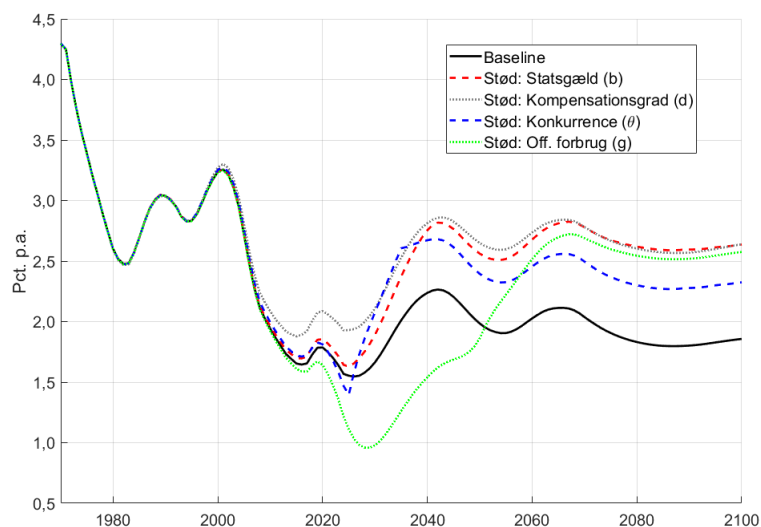
Stødet til konkurrenceparameteren  $\theta_t$  indføres ved at hæve den gradvist fra 3,99 til 6,95 mellem 2025-2035, således at  $\theta_t$  i 2035 er lig parameterværdien i 1970. Det fremgår, at realrenten stiger og indfinder sig på et permanent højere niveau på 47 bp over baseline. En stigning i  $\theta_t$  påvirker renten direkte, idet en højere  $\theta_t$  bringer lejesatsen tættere på marginalproduktet på kapital, jf. (30).

Stødet til kompensationsgraden indfases mellem 2025-2040, hvor den gradvist fordobles til  $\bar{d} = 1$ , således at pensionsydelsen bliver lig lønindkomsten efter skat. Det fremgår, at renten stiger og indfinder sig på et permanent højere niveau. Grundet husholdningernes forudseenhed stiger renten allerede inden, da udsigten til en højere pensionsydelse mindsker behovet for at spare op til pension selv. Denne stigning kan således ikke tilskrives mekanisme 4, men i stedet mekanisme 2, som dulmes af adgangen til offentligt finansierede pensioner. Effekten af en stigning i kompensationsgraden adskiller sig således fra effekten af en stigning i det offentlige forbrug, da husholdningerne reagerer forskelligt, selvom skattetrykket i begge tilfælde stiger.

Alle fire eksperimenter viser, at den naturlige rente vil stige på lang sigt. Havde man udført



Figur 16: Udvikling i  $r^*$  under forskellige stød



Anm.: Figuren viser udviklingen i  $r^*$  i perioden 1970-2100 under forskellige stød til udvalgte eksogene variable.  
Kilde: egen simulering

eksperimenterne i en model, hvor stødene indførtes som uforudsete chok, ville stigningen i renten givetvis være mere abrupt uden at være indledt med store udsving inden, som det særligt ses ved stødet til det offentlige forbrug, hvor renten først overstiger niveauet i baseline, efter stødet er fuldt indfaset. De langsigtede resultater er ikke desto mindre et validt bud på, hvordan ændringer i de pågældende variable vil påvirke renten i en langsigtet ligevægt.

### Stresstest: hæv $r^*$ med 1 procentpoint

Tabel 3 viser, hvor meget de pågældende eksogene variable skal ændre sig, for at den naturlige realrente stiger med 1 pp i steady state. I alle tilfælde kræver det en betydelig og givetvis urealistisk ændring. For eksempel skal kompensationsgraden overstige lønsatsen, og parameteren for avancetillægget skal nærme sig et niveau, der approksimerer fuldkommen konkurrence. En undtagelse er muligvis statens gældskvot. Her fremgår det, at en stigning fra 120 pct. til 221 pct. af BNP vil øge den naturlige rente med 1 pp. Dette svarer omtrent til, at en stigning i gældskvoten på 100 bp øger den naturlige rente med 1 bp. Samme effekt kan udledes af tabel 2. Dette resultat er i overensstemmelse med relaterede studier, der ligeledes finder, at en øget statsgæld lægger et opadgående pres på den naturlige rente (Rachel og Summers, 2019; Carvalho m.fl., 2023; Eggertsson m.fl., 2019a). Effekten er dog formentlig her undervurderet, da der ikke indgår nogen risikopræmie i modellen. I betragtning af at USA's statsgæld er vokset hastigt de seneste årtier (se figur A13a), samt at lande som Japan allerede har en statsgæld på over 200 pct. af BNP (TE, 2024), kan det ikke udelukkes, at dette scenarie vil udspille sig inden for dette århundrede. Desuden kan det ej heller udelukkes, at en kombination af en stigning i flere

af de eksogene variable vil indtræffe. I så fald fremstår det mindre usandsynligt, at eventuelle økonomiske stød, bl.a. som konsekvens af den demografiske udvikling, vil medføre en vedvarende højere naturlige realrente.

Tabel 3: Påkrævet ændring for at hæve  $r^*$  med 1 pp

Eksogen variabel	Baseline	Hypotetisk værdi
Fertilitet ( $\Gamma$ )	1,64	2,68
Kompensationsgrad ( $\bar{d}$ )	0,505	1,16
Konkurrence ( $\theta$ )	3,99	45
Produktivitetsvækst ( $g^A$ )	0,0085	0,018
Offentligt forbrug ( $g$ )	0,1554	0,358
Statsgæld ( $b$ )	1,20	2,21

Anm.: Tabellen viser, hvor meget de eksogene variable hver især skal ændre sig for at frembringe en stigning i  $r^*$  på 1 pp i steady state. Fertiliteten er angivet i antal børn født per kvinde. Kilde: egne beregninger.

### 6.6.1 Simulering af G&P's hypotese

Resultaterne i figur 16 og tabel 3 viser, at en række ændringer i de eksogene variable vil medføre en stigning i den naturlige rente, hvilket er i overensstemmelse med Goodhart og Pradhans teori. Hver for sig fremstår disse ændringer dog usandsynlige. I dette afsnit præsenteres et forsøg på at simulere en række mere sammensatte og eventuelt realistiske påbud på, hvordan G&P's hypotese kan modelleres. Dette kan gøres ved at lade flere af de eksogene variable ændre sig samtidigt samt ved at inkorporere offentlige udgifter til sundhed i modellen. Der opstilles i alt tre påbud på, hvordan G&P's hypotese kan simuleres. Resultaterne er vist i figur 17 og tabel 4.

USA adskiller sig fra en række andre udviklede økonomier ved at have en høj grad af privat finansiering af sundhedsydelser. Ikke desto mindre har man siden 1965 haft et statsligt sundhedsprogram, *Medicare*, der giver tilskud til ældres sundhedsudgifter (Wikipedia, 2024). I alle de tre scenarier udvides pensionssystemet i modellen til også at inkludere offentlige udgifter til Medicare. Dette gøres ved at hæve kompensationsgraden, således at pensionsydelsen både repræsenterer udbetalinger fra Social Security og sundhedsudgifter dækket af Medicare. Kompensationsgraden  $\bar{d}$  ganges hvert år med en faktor  $(1 + m_t)$ , hvor  $m_t$  er forholdet mellem statens udgifter til Medicare og Social Security i det pågældende år. Således vil ydelsen til pensionister givet i (17) ændres til  $d_t w_t = \bar{d}(1 + m_t)(1 - \tau_t)w_t$ .

Mellem 1970-2007 er udgifterne til Medicare vokset hurtigere end udgifterne til Social Security (se figur A19). Siden 2019 har forholdet mellem udgifterne dog stabiliseret sig. Derfor antages  $m_t$  at forblive på 0,768 efter 2022, hvilket er gennemsnittet for 2021-2023.<sup>54</sup> Dette indebærer, at

<sup>54</sup>Forholdet udglattes med et glidende 5-årigt gennemsnit. Data for statens udgifter til Social Security og Medicare er hentet fra Federal Reserve (FRED, 2024e).

$\bar{d}(1 + m_t) = 0,615$  i 1970, hvorefter den stiger gradvist til  $\bar{d}(1 + m_t) = 0,893$  i 2023. I scenarie 1 vil de offentlige udgifter til både pensioner og sundhed således vokse, i takt med at befolkningen bliver ældre - mens udgifterne til den enkelte pensionist, målt i forhold til den pågældende lønsats efter skat, antages at forblive konstant efter 2023.

Tabel 4: G&P's hypotese: tre scenarier

	Baseline	Scenarie 1	Scenarie 2	Scenarie 3
$\Delta r^*$ 2024-2040	0,67	0,85	1,08	0,97
$\Delta r^*$ 2024-2100	0,29	0,68	1,02	1,29
Statsgæld ( $b$ )	1,20	1,50	1,50	1,50
Konkurrence ( $\theta$ )	3,99	3,99	5,50	5,50
Kompensationsgrad ( $\bar{d}(1 + m)$ )	0,51	0,89	0,89	0,89
Kompensationsgrad, brutto ( $d$ )	0,33	0,51	0,52	0,46
Offentligt forbrug ( $g$ )	0,16	0,16	0,16	0,20
Skattesats ( $\tau$ ) i steady state	0,34	0,42	0,42	0,49
Ældreudgifter i pct. af BNP ( $E/Y$ )	5,17	7,98	8,80	7,84

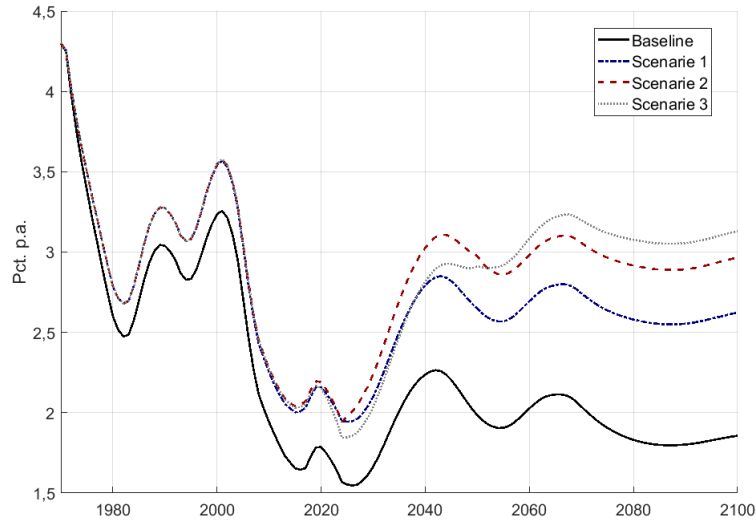
Anm.: Parameterværdierne er fra 2050 og frem. Ændringen i  $r^*$  er angivet i procentpoint. Skattesatsen og pensionsudgifterne er i steady state, hvilket omtrent svarer til 2100. I scenarie 1-3 inkluderer pensionsudgifterne  $E_t$  også udgifter til sundhed. Der er afrundet til to decimaler. Kilde: egne beregninger.

I det andet scenarie antages det yderligere, i tråd med G&P's hypotese, at lønandelen stiger. Dette modelleres ved at hæve parameteren  $\theta_t$  til 5,5 - midterpunktet mellem værdien i 1970 og 2024 - hvilket medfører, at lønandelen stiger fra 55,5 pct. i 2024 til 61 pct. i 2050, hvilket er ca. 2 pp lavere end i 1970, jf. figur 6.

I det tredje scenarie antages det endvidere, at den offentlige forbrugskvote stiger til 20 pct. af BNP mellem 2025-2050, hvilket svarer til en stigning i de offentlige forbrugsudgifter på 4,5 pct. af BNP. I dette scenarie vil de samlede offentlige udgifter dermed vokse mere end i de to første scenarier. Dette kunne være repræsentativt for en situation, hvor også sundhedsudgifterne målt per pensionist stiger. Dette kunne f.eks. følge af stigende forventninger til, hvad staten skal levere af ydelser, eller at omkostningerne til aflønning af sundhedspersonale stiger på grund af mangel på arbejdskraft.

I alle tre scenarier bliver renten højere på lang sigt sammenlignet med baseline. Dette resultat er forventet, jf. figur 16. I næsten hele perioden ligger renten i de tre scenarier over baseline, da den højere kompensationsgrad øger skattetrykket (jf. mekanisme 4) og mindsker husholdningernes incitament til at spare op (jf. mekanisme 2). I ingen af de tre scenarier vender renten dog tilbage til niveauet i 1970. I scenarie 3 stiger renten mindre end i scenarie 2 før 2050, hvilket skyldes husholdningernes reaktion på en fremtidig stigning i skattetrykket. Renten stiger stadig mest i scenarie 3 på lang sigt, da både kompensationsgraden og den offentlige forbrugskvote

Figur 17:  $r^*$  under G&P's tre scenarier



Anm.: Figuren viser udviklingen i  $r^*$  under de tre scenarier beskrevet i tabel 4. I alle simulationer er  $\beta$  rekalkuleret, så renten er lig 4,3 pct. i 1970. Kilde: egen simulering.

her stiger. Forskellen i forhold til scenarie 2 er dog beskeden, hvilket skyldes, at den højere skattesats alt andet lige reducerer udgifterne til pensioner og sundhed, som i modellen er koblet op på lønsatsen efter skat. Havde man i stedet modelleret pensions- og sundhedsydelsen til at være en fast andel af lønsatsen før skat, ville udgifterne og skattetrykket stige yderligere, hvilket via mekanisme 4 ville have øget det opadgående pres på renten. Grundet den højere skattesats i scenarie 3 bliver forholdet mellem  $E$  og  $Y$  højest i scenarie 2.

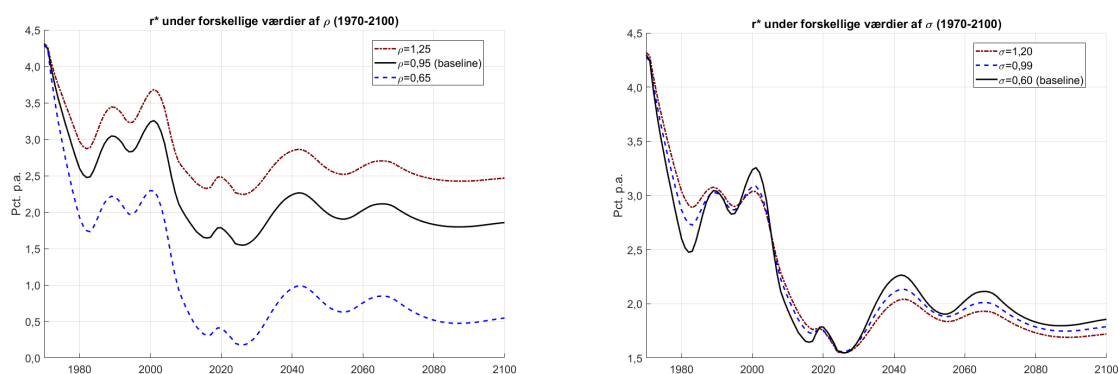
De samlede offentlige udgifter bliver dog stadig størst i scenarie 3. Forestiller man sig, at stigningen i  $g$  fra 0,1554 til 0,20 i scenarie 3 repræsenterer voksende sundhedsudgifter til ældre, vil de samlede udgifter til ældre i scenarie 3 udgøre 12,3 pct. af BNP i steady state eller efter 2100. Dette svarer nøjagtigt til de amerikanske myndighedernes eget estimat for 2098 (SSA, 2024b). I 2023 udgjorde udgifterne til Social Security og Medicare hhv. 4,9 og 3,6 pct. af BNP eller i alt 8,5 pct. (se figur A19). I baseline-modellen udgør pensionsudgifterne 3,4 pct. af BNP i 2023, hvilket er under de faktiske 4,9 pct. Denne forskel kan bl.a. tilskrives, at udgifter til Social Security i realiteten ikke kun omfatter pensionister over 66 år (SSA, 2024a). Ikke desto mindre taler dette for, at modellen i baseline undervurderer omfanget af sundheds- og pensionsudgifterne, mens scenarie 3 ikke kan afvises som et realistisk bud på udviklingen i disse på længere sigt.

## 6.7 Robusthed

I dette afsnit undersøges det, hvor følsom udviklingen i den simulerede rente er over for de antagne værdier for substitutionselasticiteterne for forbrug ( $\rho$ ) og produktion ( $\sigma$ ), humankapitalprofilen ( $hc_j$ ) og pensionsalderen.

Figur 18 viser den simulerede rente under forskellige parameterværdier for den intertemporale substitutionselasticitet for forbrug givet ved  $\rho$  og substitutionselasticiteten mellem kapital og arbejdskraft i produktionen givet ved  $\sigma$ . I alle tilfælde er modellen rekalibreret til at matche de samme momenter som beskrevet i afsnit 5.3. Den naturlige realrente falder, uagtet hvilken værdi parametrene  $\rho$  og  $\sigma$  antager. Graden af faldet i renten er dog følsomt over for værdien af  $\rho$ , idet en lavere intertemporal substitutionselasticitet intensiverer faldet i renten, mens det omvendte gælder for en højere parameterværdi af  $\rho$ . Dette følger af, at en lavere intertemporal substitutionselasticitet alt andet lige styrker indkomsteffekten over for substitutionseffekten, når renten ændrer sig.<sup>55</sup> Selv når  $\rho = 0,65$ , bliver renten ikke negativ. Det kan dog ikke udelukkes, at en endnu lavere parameterværdi af  $\rho$  ville medføre en negativ naturlig realrente mellem 2010-2025 eller på lang sigt.<sup>56</sup>

Figur 18:  $r^*$ : Forskellige værdier af  $\rho$  og  $\sigma$



Anm.: Figuren til venstre viser den simulerede rente under forskellige værdier af  $\rho$ . Figuren til højre viser udviklingen i renten under forskellige værdier af  $\sigma$ . I alle simulationer er modellen rekalibreret efter de samme momenter. Kilde: egen simulering.

Derimod viser det sig, at udviklingen i den simulerede rente er forholdsvis robust over for forskellige værdier af  $\sigma$ . En højere værdi af  $\sigma$  viser sig dog at have en udglattende effekt på udsvingene i renten, herunder graden af vendepunkterne i 2025 og 2055. Dette kan forklares med, at en højere substitutionselasticitet mellem produktionsfaktorerne gør det nemmere at substituere mellem arbejdskraft og kapital, når det ene input bliver relativt dyrere eller billigere end det andet (Papetti, 2021a). Dette betyder, at ændringer i arbejdsudbuddet har en mindre effekt på marginalproduktet på kapital, hvilket dermed gør renten mindre følsom over for udsving i vækstraten i arbejdsstyrken.<sup>57</sup>

Figur 19 viser udviklingen i den naturlige rente under forskellige antagelser om humankapitalprofilen (venstre) og pensionsalderen (højre). Eftersom arbejdsudbuddet både påvirkes af

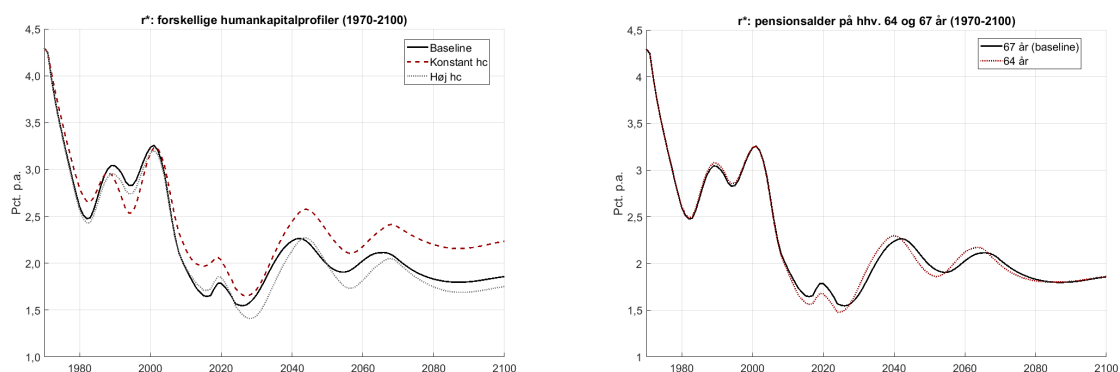
<sup>55</sup>Se Appendiks A.

<sup>56</sup>Modellen kunne ikke løses ved  $\rho < 0,60$ .

<sup>57</sup>Når renten bliver marginalt lavere på lang sigt i figur 18 (h.) ved en højere værdi af  $\sigma$ , skyldes det, at parameteren  $\alpha$  rekalibreres til en lavere værdi.

antallet af individer i den arbejdsdygtige alder og af humankapitalprofilen (jf. (12) og figur 8), kan sidstnævnte tænkes at have en selvstændig effekt på udviklingen i den naturlige rente. Der testes to forskellige scenarier for humankapitalprofilen, som sammenlignes med baseline: et hvor humankapitalen holdes konstant for alle aldre, og et hvor humankapitalen ikke falder efter 55-årsalderen. I baseline er humankapitalen voksende frem mod 40-årsalderen, hvorefter den stagnerer og falder efter 55-årsalderen (se figur A12).

Figur 19:  $r^*$ : humankapital og pensionsalder



Anm.: Figuren til venstre viser udviklingen i  $r^*$  under forskellige fordelinger for humankapitalprofilen. Figuren til højre viser udviklingen i  $r^*$ , hvor pensionsalderen er hhv. 64 år og 67 år (baseline). I alle simulationer er modellen rekalereret efter de samme momenter. Kilde: egen simulering.

I scenariet, hvor humankapitalen er konstant for alle aldre, således at  $hc_j = 1$  for alle  $j < 43$ , ligger renten højere end i baseline det meste af perioden, særligt på lang sigt. I 2100 ligger renten 38 bp højere. Når humankapitalprofilen holdes konstant, bliver det nedadgående pres på renten på lang sigt mindre. Efterhånden som arbejdsstyrken bliver ældre, vil en faldende humankapital for de ældre husholdninger i arbejdsstyrken svare til, at vækstraten i arbejdsstyrken falder, hvilket via mekanisme 1 lægger et nedadgående pres på renten. Denne effekt vil således ikke optræde, hvis humankapitalen er konstant for alle aldre. Det modsatte gør sig gældende i 1990'erne, hvor arbejdsstyrken midlertidigt bliver yngre, da de første kohorter født af baby-boomerne indtræder i arbejdsstyrken. En konstant humankapitalprofil medfører også, at de yngre husholdninger har ringere mulighed for at spare op, da de ikke oplever nogen fremgang i indkomsten. De ældre husholdninger får også et mindre incitament til at spare op, da de ikke oplever nogen nedgang i deres arbejdsindkomst.

I det andet scenarie holdes humankapitalen konstant efter 55-årsalderen ("høj hc" i figuren), således at lønindkomsten ikke falder for de ældre husholdninger. Det fremgår, at renten bliver marginalt lavere på lang sigt (11 bp). Dette følger af, at de ældre husholdninger formår at spare mere op, inden de går på pension. Dette øger beholdningen af opsparing, hvilket fører til en lavere rente, da kapital per arbejder stiger. Når effekten ikke er større, skyldes det, at en højere humankapital samtidig alt andet lige øger arbejdsudbuddet, hvilket via mekanisme 1 øger marginalproduktet på kapital og dermed renten. Dette vidner om, at eventuelle øko-

nomiske politikker, der har til hensigt at øge produktiviteten eller erhvervsfrekvensen blandt ældre, kun vil have en beskeden, men stadig negativ, effekt på den naturlige rente. Dette vil dog ikke nødvendigvis gælde, hvis pensionsalderen samtidig hæves. Hvis en stigende pensionsalder kombineres med en stigende produktivitet blandt ældre, f.eks. i form af “sund aldring”, svarer det i grænsen til, at den forventede levetid ikke påvirker agenternes opsparingsadfærd. I så fald vil den naturlige rente stige, da mekanisme 2 slukkes. En højere pensionsalder kombineret med en konstant eller stigende humankapital for ældre ville også øge renten via mekanisme 1, da det øger arbejdsudbuddet (Papetti, 2021a).

Figur 19 til højre viser den simulerede rente, hvor pensionsalderen antages at være 64 år i stedet for 67 år. Humankapitalprofilen for de arbejdende husholdninger ændres ikke. Eftersom mange amerikanere trækker sig tilbage, før de fylder 67 år (Munnell, 2015), og da man i USA kan få udbetalt en nedsat pensionsydelse, efter man er fyldt 62 år (SSA, 2024a), kan det derfor tænkes, at en lavere pensionsalder er mere repræsentativ. Det viser sig, at en lavere pensionsalder har en negligerbar effekt på renten i modellen. På lang sigt er der ingen forskel. Vendepunkterne omkring år 2025 og 2055 optræder dog et par år tidligere. Når effekten på renten ikke er større, skyldes det, at der optræder modsatrettede effekter i forbindelse med en ændring i pensionsalderen. En lavere pensionsalder indebærer på den ene side, at udgifterne til pensioner øges, hvilket via mekanisme 4 lægger et opadgående pres på den naturlige rente. På den anden side får agenterne kortere tid på arbejdsmarkedet og længere tid på pension, hvilket via mekanisme 2 lægger et nedadgående pres på renten. En lavere pensionsalder betyder også, at arbejdsstyrken reduceres, hvilket lægger et nedadgående pres på renten via mekanisme 1. Det omvendte ville gælde ved en stigning i pensionsalderen. Hvis pensionsalderen ændres, uden at modellen rekalkuleres, finder jeg, at en stigning i pensionsalderen på et år medfører en stigning i den naturlige rente på ca. 7 bp i steady state (se figur A5).

## 6.8 Alternative fremskrivninger

I dette afsnit undersøges udviklingen i den naturlige rente under forskellige antagelser angående udviklingen i fertiliteten og den forventede levetid. Der opstilles tre alternative scenarier. I det første alternative scenarie antages den forventede levetid at fortsætte med at stige frem mod 2100 med udgangspunkt i FN’s seneste fremskrivning. Fertilitetskvotienten antages at forblive på 1,64 ligesom i baseline, hvilket omtrent passer med FN’s mellemscenarie, jf. afsnit 5.

I det andet scenarie antages dødeligheden at forblive konstant på niveauet i 2024, men at fødselsraten vil falde til 1,15 børn per kvinde inden 2045, hvilket svarer til FN’s lave scenarie.

I det tredje scenarie antages både dødeligheden og fertiliteten at falde. Fertiliteten antages her at falde til 1,30 børn per kvinde inden 2045, hvilket omtrent svarer til FN’s nedre 80 pct.-konfidensinterval for den fremskrevne fertilitet. Der testes ikke for et scenarie, hvor fertiliteten stiger, eftersom dette i lyset af den seneste historiske udvikling ikke forekommer plausibelt.<sup>58</sup>

---

<sup>58</sup>Se figur 1a

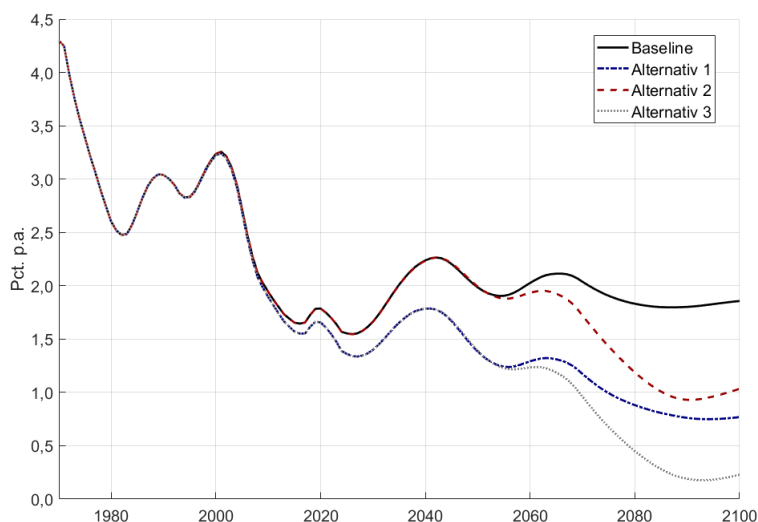
FN har desuden modtaget kritik for at have overvurderet udviklingen i fertiliteten i flere lande (Bricker og Ibbitson, 2019, s. 44-54).<sup>59</sup> Resultaterne er vist i tabel 5 og figur 20.

Tabel 5: Alternative fremskrivninger

	Baseline	Alternativ 1	Alternativ 2	Alternativ 3
$\Delta r^*$ 2024-2100	0,29	-0,62	-0,53	-1,16
Fertilitet efter 2045	1,64	1,64	1,15	1,30
Forventet levetid i 2100	79,5	89,2	79,5	89,2

Anm.: Ændringer i  $r^*$  er angivet i procentpoint. Fertiliteten er angivet i børn per kvinde. Den forventede levetid er angivet i antal år for nyfødte. Der er afrundet til to decimaler. Kilde: FN (2024) og egne beregninger.

Figur 20:  $r^*$ : alternative befolkningsfremskrivninger



Anm.: Figuren viser udviklingen i  $r^*$  under de alternative fremskrivninger beskrevet i tabel 5. Kilde: egen simulering.

I alle tre alternative scenarier falder den naturlige rente mellem 2024 og 2100. Dette er i sig selv et relevant resultat, idet baseline-modellen forudsiger en marginal stigning i den naturlige rente på lang sigt som følge af øgede pensionsudgifter, jf. afsnit 6.1. I det tredje scenarie falder renten med 1,16 pp og bliver næsten nul i 2100. I tråd med resultaterne fra afsnit 6.2 viser det sig således, at en stigende forventet levetid eller faldende fertilitet fører til en lavere naturlig rente, idet mekanisme 1 og 2 dominerer mekanisme 3 og 4. Det bemærkes endvidere, at renten bliver lavere end i baseline efter 2010 i de alternative scenarier, hvor den forventede levetid fortsætter med at stige. Dette resultat skyldes antagelsen om, at husholdningerne har perfekt kendskab

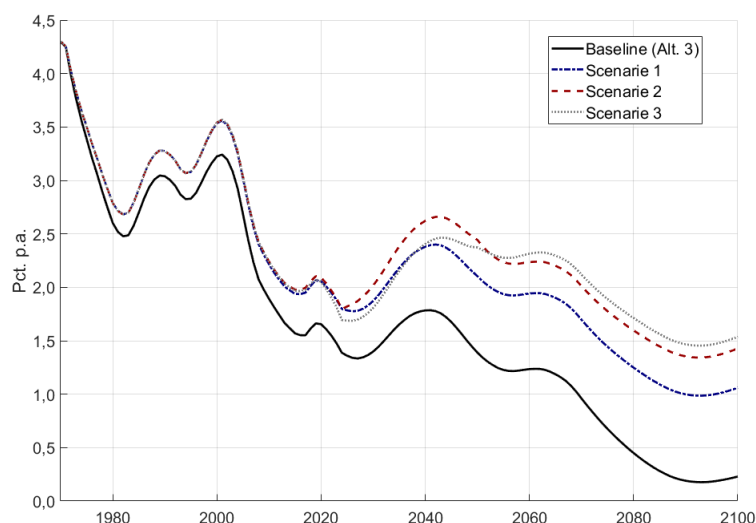
<sup>59</sup>I USA's tilfælde ses dette bl.a. ved, at FN nedskrev den langsigtede fertilitetskoefficient fra 1,72 i 2022- til 1,65 i 2024-fremskrivningen (FN, 2024).



til udviklingen i de eksogene processer, herunder den forventede levetid. I alle tre alternative scenarier opstår der stadig et midlertidigt vendepunkt i renten efter 2025.

Det følger, at stigningen i renten i scenarierne for G&P's hypotese vist i afsnit 6.6.1 muligvis i mindre grad vil gøre sig gældende, hvis den forventede levetid stiger, eller hvis fertiliteten falder yderligere. Derfor testes G&P's hypotese på ny ved at simulere renten i de tre scenarier beskrevet i afsnit 6.6.1 under den alternative befolkningsfremskrivning, hvor både dødeligheden og fertiliteten falder, beskrevet i tabel 5 (alternativ 3). Resultaterne vises i figur 21.

Figur 21:  $r^*$ : G&P's scenarier under alternativ 3



Anm.: Figuren viser udviklingen i  $r^*$  i alternativ 3 beskrevet i tabel 5 under scenarierne beskrevet i tabel 4. Ændring i  $r^*$  i basispoint mellem 2024-2040: 40 (baseline), 58 (scenarie 1), 83 (scenarie 2), 71 (scenarie 3). Kilde: egen simulering.

Det fremgår, at den naturlige rente i alle scenarier falder på lang sigt. Selv i det tredje scenarie bliver renten lavere i 2100 end i 2024 (16 bp). G&P's hypotese om, at den naturlige realrente vil stige og indfinde sig på et permanent højere niveau, bliver således afvist, hvis det forudsættes, at den forventede levetid stiger yderligere, og hvis fertiliteten fortsætter sin nedadgående tendens. Dette sker vel at mærke på trods af, at en yderligere stigning i den forventede levetid alt andet lige vil øge udgifterne til ældre. De alternative fremskrivninger ændrer dog ikke på, at vendepunktet i renten mellem 2025-2042 intensiveres under alle af de tre scenarier. Under den alternative fremskrivning stiger renten med 40 bp mellem 2024-2040 i baseline, mens renten stiger med 71 bp under scenarie 3, svarende til en forskel på 31 bp. På mellemlang sigt kan det derfor ikke udelukkes, at G&P's hypotese vil realiseres.

## 7 Diskussion

I dette afsnit diskuteres implikationerne og validiteten af resultaterne fra analysen. Derudover diskuteres modellens begrænsninger, samt hvilke aspekter der kunne være af forskningsmæssig interesse fremadrettet.

### 7.1 Kommer der et vendepunkt?

I modellen optræder der et vendepunkt i den naturlige realrente efter 2025, som fortsætter frem til 2042. Samme mønster gentager sig i mindre grad efter 2055. Dette resultat ses også i de dele af den relaterede litteratur, der anvender lignende modeller (jf. Papetti, 2021a; Eggertsson m.fl., 2019a; Bielecki m.fl., 2020). Disse udsving i renten forekommer i modellen som følge af demografiske ekkoeffekter af babyboomer-generationen og dens efterkommere. Når disse ekkoeffekter påvirker den naturlige realrente, skyldes det primært, at de forårsager udsving i vækstraten i arbejdsstyrken, hvilket påvirker investeringsefterspørgslen, jf. mekanisme 1. Effekten af at pensionerede husholdninger nedsparer, jf. mekanisme 3, kan ikke være den dominerende drivkraft bag vendepunkterne, idet investerings- og opsparingskvoten stiger efter hhv. 2025 og 2055, jf. figur 11 og figur 12.

I modellen udtræder de første kohorter fra boomer-generationen fra arbejdsmarkedet i 2012. Dette lægger et nedadgående pres på vækstraten i arbejdsstyrken mellem 2012-2025, jf. figur 8. Dette er en konsekvens af, at årgangene født efter 1945 indtræder i økonomien efter 1970 og går på pension som 67-årige 42 år senere. I virkeligheden forekom dette nedadgående pres formentlig et par år tidligere, idet mange går på pension, før de fylder 67 år. I så fald sammenfalder udviklingen i flere af modellens variable, herunder realrenten, vækstraten i arbejdsudbuddet og vækstraten i BNP, i nærmere grad med den empiriske udvikling i perioden, hvor finanskrisen indtraf. Empirisk set faldt vækstraten i arbejdsstyrken i USA kraftigt i 2007 (se figur A20).

Det kunne her tænkes, at ældre årgange, der nærmede sig pensionsalderen, valgte at udtræde af arbejdsstyrken tidligere end planlagt på grund af finanskrisen. I så fald kan det sandsynliggøres, at lavkonjunktoren i USA, og i resten af verden, efter 2008 blev forstærket af, at de store kohorter født efter Anden Verdenskrig trådte ud af arbejdsmarkedet, hvilket sænkede efterspørgslen. Dette lagde et nedadgående pres på den naturlige rente i 2010'erne, hvilket kan have været medvirkende til de lave realrenter observeret i denne periode. Vækstraten i arbejdsstyrken faldt også brat i 2020, da coronapandemien indtraf. Her kunne det ligeledes tænkes, at ældre årgange tæt på pensionsalderen valgte at træde ud af arbejdsstyrken før tid. Det kan således sandsynliggøres, at dynamikkerne mellem ændringer i arbejdsstyrken og den naturlige rente i modellen har gjort sig gældende i praksis.

Vendepunktet i modellen efter 2025 følger af, at størstedelen af husholdningerne født under babyboomet her er gået på pension, hvorledes det nedadgående pres på vækstraten i arbejdsstyrken, og dermed den naturlige rente, aftager. Samtidig vil deres efterkommere nå den arbejdsdygtige alder, hvilket medvirker til at øge vækstraten i arbejdsstyrken. I afsnit 6.2.1 blev det

vist, at babyboomet isoleret set har nedbragt den naturlige rente med 65 bp mellem 1970-2024. Dette afspejler størrelsen på vendepunktet mellem 2025-2042 på 68 bp i baseline.

Vendepunkterne i modellen er dog forbundet med usikkerhed, i det omfang modellen ikke tilstrækkeligt formår at simulere den faktiske demografiske udvikling. Dette er bl.a. tilfældet, eftersom modellen antager en fast fødealder og ekskluderer indvandring.<sup>60</sup> Antagelsen om, at agenterne først indtræder på arbejdsmarkedet som 25-årige er muligvis heller ikke retvisende. Dette skal dog opvejes mod, at der på den anden side heller ikke er nogen forsørgerbyrde fra børn og unge i modellen.

I figur 5 fremgår det, at udsvingene i afhængighedsforholdet er mere udtalte i modellen end i empirien. Det, der i modellen optræder som vendepunkter som følge af den demografiske udvikling, vil formentlig derfor være mindre udtalte i virkeligheden. Ikke desto mindre antyder dette, at der i løbet af de næste 20 år som minimum er udsigt til en opbremsning i den nedadgående tendens i den naturlige rente, som har gjort sig gældende siden 1970'erne. Det kan således være af interesse, om denne tendens vil fortsætte, eller om den vil aftage. Her fremgår det af hovedresultaterne, at den naturlige rente vil stabilisere sig på omkring de nuværende niveauer på lang sigt, på trods af at afhængighedsforholdet stiger (se figur 7). Dette resultat er dog følsomt over for de antagne befolkningsfremskrivninger. Hvis fødselsraten fortsætter med at falde, eller hvis den forventede levetid stiger yderligere, vil den naturlige rente ifølge modellen falde yderligere på lang sigt (se figur 20).

Modellen viser desuagtet, at stigende offentlige udgifter alt andet lige øger den naturlige rente og dermed har potentiale til at intensivere vendepunktet efter 2025. At de offentlige udgifter vil vokse som følge af stigende udgifter til ældre bør anses som sandsynligt. En samlet betragtning af analysens resultater lægger således til grund, at der frem mod 2040'erne er udsigt til et mindre vendepunkt i den naturlige realrente i USA. Stigningen vil dog formentlig ikke overstige 50 bp. Under alle omstændigheder taler dette dog for, at de pengepolitiske renter i USA, som i 2022-2023 blev hævet for at bekæmpe udbruddet af inflation, ikke vil vende tilbage til de lave niveauer observeret før coronapandemien. Tilsvarende vil formentlig også gælde i Eurozonen, idet udviklingen i den naturlige rente her i høj grad følger den i USA (se figur 3a).

## 7.2 Evaluering af G&P's hypotese

Goodhart og Pradhans hypotese om, at den naturlige realrente står over for et vendepunkt, kan inden for modellens rammer oversættes til, at mekanisme 3 og 4 vil trække renten op. Dette bliver som udgangspunkt afvist, idet mekanisme 1 og 2 generelt set viser sig at være dominerende. Dette resultat korroborerer den relaterede litteratur og bekræfter de teoretiske indsigter illustreret i afsnit 3. Tilsvarende drives vendepunktet efter 2025 af, at mekanisme 1 midlertidig går den modsatte retning, idet vækstraten i arbejdsstyrken stiger, og ikke af at ældre husholdninger nedsparer. G&P's argument om, at et fald i opsparingskvoten vil foranledige en stigning i den

---

<sup>60</sup>I 1970 var medianfødealderen i USA 26 år. I 2023 var den 30 år (FN, 2024).

naturlige rente, jf. mekanisme 3, bliver generelt afvist. Analysen giver dog G&P medhold i, at boomer-generationen har lagt et særskilt nedadgående pres på den naturlige rente siden 1990, samt at dette nedadgående pres er aftaget. I den forstand kan deres hypotese også beskrives via mekanisme 1. Dette er dog ikke i sig selv tilstrækkeligt til at frembringe en vedvarende stigning i den naturlige realrente.

G&P's hypotese fremstår derimod mere plausibel, hvis det forudsættes, at de offentlige udgifter vil stige. Her viser modellen, at højere offentlige udgifter øger den naturlige rente, og at dette gælder i højere grad, hvis også sundhedsudgifter også indgår i modellen. Dette gælder, uanset om udgifterne er finansieret over indkomstskat eller udstedelse af statsgæld, eftersom begge dele lægger et opadgående pres på den naturlige rente, da det fortrænger den private sektors evne til at akkumulere produktiv kapital. I scenarie 3, hvor de offentlige udgifter stiger mest - og som er det scenarie, der passer bedst med fremskrivningerne for disse - bliver den naturlige rente over 1 pp højere i 2100 i forhold til 2024.

Hvis både dødeligheden og fertiliteten falder yderligere, vil den naturlige rente ifølge modellen dog stadig falde på lang sigt selv under det mest generøse scenarie for stigningen i de offentlige udgifter (se figur 21). Dette skyldes primært, at agenterne reagerer på en stigende forventet levetid ved at spare mere op (jf. mekanisme 2), men også at efterspørgslen falder, når arbejdsstyrken skrumper (jf. mekanisme 1). Angående førstnævnte forhold er G&P sig kritiske over for den teoretiske opbygning af konventionelle livscyklusmodeller, som de ikke mener formår at beskrive husholdningernes faktiske adfærd (Goodhart og Pradhan, 2020, s. 77-79). I det omfang de har ret i denne kritik, fremstår deres hypotese desto mere plausibel, eftersom analysen finder, i tråd med relaterede studier, at den forventede levetid er den stærkeste kanal, hvorigennem aldring påvirker den naturlige rente. Ikke desto mindre bliver vendepunktet i den naturlige rente efter 2025 intensiveret i simulationerne af G&P's hypotese, uagtet hvilken befolkningsfremskrivning der lægges til grund. Hvis både dødeligheden og fertiliteten falder yderligere, stiger renten stadig med 18-43 bp mere mellem 2024-2040 i forhold til baseline (se figur 21). Dette taler for, at der vil komme et opadgående pres på den naturlige realrente på mellemlang sigt. I det omfang vendepunktet i renten efter 2025 i baseline har en positiv bias, kunne 20-40 bp således være et mere konservativt bud på vendepunktets størrelse.

Analysen bekræfter også, at en stigning i lønandelen øger den naturlige rente. I modellen frembringes en højere lønandel ved at antage en reduktion i markedsconcentrationen og dermed profitraten. Her fremstår G&P's forudsigelse mere spekulativ og kan ikke verificeres inden for modellens rammer, idet parameteren for markedsconcentration er givet eksogent. I skrivende stund er der dog ikke umiddelbart tegn på, at lønandelen i USA vil vende sin nedadgående tendens, idet den var historisk lav i 2024 (se figur 6).

Generelt set viser modellen, at en lavere vækstrate i arbejdsstyrken lægger et nedadgående pres på den naturlige rente, da det sænker investeringsefterspørgslen (jf. mekanisme 1), mens effekten på opsparingsudbuddet er negligerbar (jf. mekanisme 3). Modellen afviser derfor entydigt, at en skrumpende arbejdsstyrke alene skulle kunne øge den naturlige rente.

### 7.3 USA som åben økonomi

Modellen i dette speciale er begrænset af, at den betragter USA som en lukket økonomi, hvilket forhindrer den i at opfange påvirkningen fra globale faktorer. Det er dog tvivlsomt, om en model udvidet til den åbne økonomi ville have frembragt substantielt anderledes resultater. Årsagen findes i, at den demografiske udvikling i USA har været sammenlignelig med den i andre avancerede økonomier, idet de har gennemgået en tilsvarende aldringsproces (se figur 1b og figur A15). Dette har været medvirkende til, at den naturlige realrente også har været faldende i andre udviklede lande (se figur 3a og figur A14).

De studier, der ved brug af livscyklusmodeller afdækker udviklingen i den naturlige rente, finder således, at det kun har en begrænset effekt på resultaterne, om økonomien antages at være lukket eller åben (Krueger og Ludwig, 2007; Bielecki m.fl., 2020). For USA's vedkommende er der ikke desto mindre evidens for, at den naturlige rente ville have været højere, hvis økonomien var lukket, idet den amerikanske befolkning er yngre end i andre udviklede lande (Krueger og Ludwig, 2007; Rachel og Summers, 2019). I så fald kan dette være medvirkende til at forklare, at specialets baseline-estimat på den naturlige realrente i 2024 ligger over HLW (jf. figur 7).

I teorien burde en aldrende og åben økonomi øge sin nettoformue over for udlandet, idet den øgede opsparing investeres i yngre økonomier med en højere naturlig rente. Dette har dog ikke været tilfældet for USA, som siden 1980'erne har haft en negativ betalingsbalance (se figur A17) samt en stabil udvikling i bruttoinvesteringssknoten (se figur A16). Dette forhold er ikke i modstrid med, at den naturlige rente er faldet i USA som følge af aldring, idet andre udviklede lande også har øget sin opsparing som følge af den demografiske udvikling. Omfanget af USA's fald i nettoudlandsformuen er dog af sådan en karakter, at den næppe alene kan forklares af, at andre avancerede økonomier har investeret deres opsparingsoverskud i USA.

I stedet bør man tage i betragtning, at også vækstøkonomier, herunder først og fremmest Kina, har ophobet store opsparingsoverskud, som særligt er blevet investeret i USA siden 1990'erne. Dette fænomen blev beskrevet som en global "overflod af opsparing" af den amerikanske centralbankchef i 2005 (Bernanke, 2005) og udgør desuden en vigtig hjørnesteen i G&P's hypotese (Goodhart og Pradhan, 2020). Dette globale overskud af opsparing har dermed lagt et nedadgående pres på den naturlige rente - både i USA og i resten af verden - som ikke kan forklares af aldringen af befolkningerne i avancerede økonomier. Dette har i USA givet udslag i en negativ betalingsbalance, samtidig med at det har understøttet de indenlandske bruttoinvesteringer, som har ligget stabilt siden 1970, mens husholdningernes opsparingskvote har været faldende (se figur A16).

Specialet finder, at aldring lægger et nedadgående pres på investerings- og opsparingskvoten i ligevægt (se afsnit 6.3), hvilket skyldes, at investeringsefterspørgslen falder som følge af en lavere vækstrate i arbejdsstyrken. Når dette kun delvist afspejles i empirien, kan det således tilskrives USA's status som debitoration, idet udlandet investerer mere i USA end omvendt. I en åben økonomi behøves investeringerne nemlig ikke udelukkende at være finansieret af indenlandsk

opsparing.

Eftersom kvantitative livscyklusmodeller udvidet til den åbne økonomi ofte behandler udlandet som et gennemsnit af andre udviklede lande, såsom OECD (jf. Krueger og Ludwig, 2007; Bielecki m.fl., 2020), formår de ikke at opfange effekten af dette globale opsparingsoverskud, som primært udsprang fra Kina og andre lande, der ikke betegnes som avancerede økonomier. Et oplagt forslag fremadrettet ville derfor være at opstille en kvantitativ model med heterogene økonomier karakteriseret af at være i forskellige stadier økonomisk og demografisk.<sup>61</sup>

G&P vurderer, at opsparingsoverskuddet fra vækstøkonomier står til at ophøre, hvilket vil presse den naturlige rente i Vesten og resten af verden op. Selv hvis dette skulle blive tilfældet, er det er dog ikke entydigt, hvorvidt dette vil lægge et op- eller nedadgående pres på den naturlige rente globalt. Aldringen af befolkningerne i vækstøkonomier vil nemlig i sig selv medføre, at den naturlige rente også her falder, jf. dette speciales resultater.<sup>62</sup>

## 7.4 Fremadrettede perspektiver

I det omfang stigende offentlige udgifter kan øge den naturlige rente, er udviklingen i disse en yderst relevant faktor. I lyset af at staternes gældskvoter og budgetunderskud er historisk høje i flere avancerede økonomier, herunder særligt i USA, understøtter dette udsigten til, at den naturlige rente vil stige, eller at den som minimum ikke vil falde yderligere, på mellemlang sigt.<sup>63</sup>

Såfremt der derudover er udsigt til produktivitetsstigninger, eksempelvis båret af kunstig intelligens, styrkes grundlaget for, at den naturlige rente vil stige. Det omvendte vil derimod gælde, hvis produktivitetsvæksten vil falde. Det overlades derfor til andre studier nærmere at undersøge sammenhængen mellem aldring og produktivitet og den naturlige rente. Mens aldring historisk set i avancerede økonomier har været sammenfaldende med en aftagende produktivitetsvækst (Aksoy m.fl., 2019; Papetti, 2021a), er det ikke givet på forhånd, at denne sammenhæng vil gælde fremover. Dette kunne tænkes at være tilfældet, hvis mangel på arbejdskraft øger incitamentet til at investere i øget automatisering (Acemoglu og Restrepo, 2017). Det er desuden i sig selv omdiskuteret, hvorvidt produktivitetsvæksten påvirker den naturlige rente (Hamilton m.fl., 2016). I en neoklassisk model som anvendt i dette speciale er denne sammenhæng imidlertid givet intrinsisk (se afsnit 3).

Specialet finder desuden, at den naturlige realrente forbliver positiv på tværs af samtlige specifikationer og scenarier, hvormed det konsekvent afvises, at amerikansk økonomi har været eller har udsigt til at være i strukturel sekulær stagnation. I så fald har dette væsentlige pengepolitiske implikationer, idet det udfordrer det teoretiske grundlag for ukonventionel pengepolitik i

---

<sup>61</sup>Se evt. Auclert m.fl. (2024).

<sup>62</sup>Papetti (2021b) estimerer, at Kinas betalingsbalance vil blive negativ efter 2030, men at nettoudlandsformuen vil forblive positiv. Han vurderer ligeledes, at aldring i Indien på sigt vil lægge et nedadgående pres på den naturlige rente globalt.

<sup>63</sup>Se figur A18 i Appendiks D.

form af negative renter og kvantitative lempelser, som blev retfærdiggjort med henvisning til, at den naturlige realrente var negativ - heriblandt i Eurozonen og Danmark (Adolfson og Pedersen, 2019). Niveauet i renten i modellen bør dog fortolkes med forsigtighed, da det er sensitivt over for kalibreringen af parametrene. Renteniveauet blev kalibreret med udgangspunkt i HLW, som er Federal Reserves foretrukne kilde. Disse estimater er dog forbundet med store konfidensintervaller og har været genstand for kritik (Buncic, 2020; Goodhart og Pradhan, 2020).

Eftersom analysen er begrænset til USA, kan specialet heller ikke afvise, at andre avancerede økonomier har befundet sig i sekulær stagnation. Selve usikkerheden forbundet med estimeringen af niveauet i den naturlige realrente bør dog i sig selv give anledning til debat, eftersom det kan medføre signifikante økonomiske konsekvenser at orkestrere pengepolitiske indgreb på et usikkert og potentielt fejlagtigt grundlag. Mens den naturlige rente som koncept har været hovedgenstand i dette speciale, tages der således desuagtet forbehold for, at anvendeligheden af dette begreb i praksis kan være begrænset.

## 8 Konklusion

Dette speciale undersøgte, hvordan aldring påvirker den naturlige realrente. Ved at simulere en kvantitativ OLG-model med 74 generationer, finder specialet, at den naturlige realrente er faldet med over 1,5 procentpoint mellem 1970-2024 i USA som følge af aldring. De primære drivkræfter består i, at en højere forventet levetid øger husholdningernes incitament til at spare op til pension, samt at en lavere befolkningstilvækst sænker investeringsefterspørgslen.

Analysen finder derudover, at babyboomer-generationen har lagt et særskilt nedadgående pres på den naturlige rente siden 1990'erne - svarende til over 60 basispoint siden 1970 - idet store årgange har sparet op til pension og siden gradvist udtrådt af arbejdsstyrken. I kraft af at dette nedadgående pres forventes at aftage, finder specialet, at der er udsigt til et transitorisk vendepunkt i den naturlige rente efter 2025 frem mod 2042, idet vækstraten i arbejdsudbuddet midlertidigt stiger, hvilket øger investeringsefterspørgslen. Samtidig vil udgifterne til ældre i form af pensioner og sundhedsydelse fortsætte med at stige, hvilket vil lægge et opadgående pres på den naturlige rente, hvad end disse udgifter finansieres gennem skattestigninger eller udstedelse af statsgæld. Mens størrelsen på vendepunktet formentlig vil være begrænset, vil dette under alle omstændigheder have implikationer for både finans- og pengepolitik, da det i sig selv er relevant, om der er udsigt til en periode med svagt stigende frem for faldende realrenter. Grundet størrelsen på den amerikanske økonomi vil en stigning i den naturlige rente her også have konsekvenser for resten af verden.

På lang sigt finder analysen dog, at den naturlige rente vil genoptage sin nedadgående tendens, såfremt den forventede levetid stiger yderligere, eller hvis fertiliteten fortsætter med falde. De dertil stigende offentlige udgifter kan dog modvirke det nedadgående pres, som aldring påfører den naturlige rente. Forvaltningen af dette udgiftspres vil derfor spille en afgørende rolle for renteutviklingen fremadrettet. Resultaterne understøtter således delvist Goodhart og Pradhans hypotese om, at den naturlige rente vil stige, men afviser at dette opadgående pres er drevet af et fald i opsparingskvoten. Dermed afvises det også, at demografiske faktorer i sig selv skulle kunne føre til en vedvarende stigning i den naturlige rente på lang sigt.

Mens afhandlingen bekræfter den eksisterende litteratur i, at aldring overordnet set fører til en lavere naturlig rente, understreger det samtidig relevansen af at tage højde for heterogene demografiske strukturer samt endogene effekter på de offentlige finanser. Således er specialet med til at nuancere paradigmet om, at den demografiske udvikling nødvendigvis er forbundet med faldende renter, og tilbyder en mere differentieret forståelse af de makroøkonomiske implikationer af aldring.



## Litteraturliste

- Wicksell, K. (1936). *Interest and Prices*. Macmillan; Company Limited.
- Hansen, A. H. (1939). Economic Progress and Declining Population Growth. *The American Economic Review*, 29(1), 1–15. Hentet 15. august 2024, fra <http://www.jstor.org/stable/1806983>
- Pigou, A. C. (1943). The Classical Stationary State. *The Economic Journal*, 53(212), 343–351. Hentet 28. september 2024, fra <http://www.jstor.org/stable/2226394>
- Yaari, M. E. (1965). Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer. *The Review of Economic Studies*, 32(2), 137–150. Hentet 28. september 2024, fra <http://www.jstor.org/stable/2296058>
- Hall, R. E. (1981). Intertemporal Substitution in Consumption. *National Bureau of Economic Research*. Hentet 10. september 2024, fra [https://www.nber.org/system/files/working\\_papers/w0720/w0720.pdf](https://www.nber.org/system/files/working_papers/w0720/w0720.pdf)
- Blanchard, O. J. (1985). Debt, Deficits, and Finite Horizons. *Journal of Political Economy*, 93(2), 223–247. Hentet 28. september 2024, fra <http://www.jstor.org/stable/1832175>
- Auerbach, A. J., & Kotlikoff, L. J. (1988). *Dynamic Fiscal Policy*. Cambridge University Press. Hentet 20. august 2024, fra <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:154614732>
- Abel, A. B., Mankiw, N. G., Summers, L. H., & Zeckhauser, R. J. (1989). Assessing Dynamic Efficiency: Theory and Evidence. *The Review of Economic Studies*, 56(1), 1–19. Hentet 10. september 2024, fra <http://www.jstor.org/stable/2297746>
- Ríos-Rull, J.-V. (1996). Life-Cycle Economies and Aggregate Fluctuations. *The Review of Economic Studies*, 63(3), 465–489. Hentet 20. august 2024, fra <http://www.jstor.org/stable/2297891>
- Hodrick, R. J., & Prescott, E. C. (1997). Post-War U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*.
- Gertler, M. (1999). Government debt and social security in a life-cycle economy. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 50, 61–110. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-2231\(99\)00022-6](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-2231(99)00022-6)
- Gourinchas, P.-O., & Parker, J. A. (1999 juli). *Consumption Over the Life Cycle* (Working Paper Nr. 7271) (s. 37). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w7271>
- Bernanke, B. S. (2005). The Global Saving Glut and the U.S. Current Account Deficit. *The Federal Reserve Board*. Hentet 28. september 2024, fra <https://www.federalreserve.gov/boarddocs/speeches/2005/200503102/>
- Krueger, D., & Ludwig, A. (2007). On the consequences of demographic change for rates of returns to capital, and the distribution of wealth and welfare. *Journal of Monetary Economics*, (54), 49–87. <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2006.12.016>

- Ferrero, A. (2010). A structural decomposition of the U.S. trade balance: Productivity, demographics and fiscal policy. *Journal of Monetary Economics*, 57(4), 478–490. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2010.04.004>
- Havranek, T., Horvath, R., Irsova, Z., & Rusnak, M. (2013). Cross-Country Heterogeneity in Intertemporal Substitution. (2013/11). Hentet 10. september 2024, fra [https://ideas.repec.org/p/fau/wpaper/wp2013\\_11.html](https://ideas.repec.org/p/fau/wpaper/wp2013_11.html)
- Summers, L. H. (2013). IMF Fourteenth Annual Research Conference in Honor of Stanley Fischer. *IMF*. Hentet 28. september 2024, fra <https://larrysummers.com/imf-fourteenth-annual-research-conference-in-honor-of-stanley-fischer/>
- Alvaredo, F., Garbinti, B., & Piketty, T. (2015). On the Share of Inheritance in Aggregate Wealth: Europe and the USA, 1900–2010. *Economica*. Hentet 19. oktober 2024, fra <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/ecca.12233>
- Gomme, P., Ravikumar, B., Ravikumar, B., & Rupert, P. (2015). Secular Stagnation and Returns on Capital. *Economic Synopses*, (19). Hentet 28. september 2024, fra <https://ssrn.com/abstract=2652119>
- Munnell, A. H. (2015). The average retirement age: An update. *Center for Retirement Research at Boston College*. Hentet 9. oktober 2024, fra <https://dlib.bc.edu/islandora/object/bc-ir:103786/datastream/PDF/view/>
- Rogoff, K., & Lo, S. (2015). Secular stagnation, debt overhang and other rationales for sluggish growth, six years on. *BIS Working Papers*. Hentet 30. september 2024, fra <https://www.bis.org/publ/work482.htm>
- Summers, L. H. (2015). Reflections on Secular Stagnation. *Julius-Rabinowitz Center, Princeton University*. Hentet 28. september 2024, fra <https://larrysummers.com/2015/02/25/reflections-on-secular-stagnation/>
- Carvalho, C., Ferrero, A., & Nechio, F. (2016). Demographics and real interest rates: Inspecting the mechanism. *European Economic Review*, 88, 208–226. <https://doi.org/10.1016/j.euroecorev.2016.04.002>
- Gagnon, E., Johannsen, B. K., & Lopez-Salido, D. (2016). Understanding the New Normal: The Role of Demographics. *FEDS Working Paper*, (No. 2016-080). Hentet 28. september 2024, fra <http://dx.doi.org/10.17016/FEDS.2016.080>
- Hamilton, J. D., Harris, E. S., Hatzius, J., & West, K. D. (2016). The Equilibrium Real Funds Rate: Past, Present, and Future. *IMF Economic Review*, 64(4), 660–707. Hentet 11. september 2024, fra <http://www.jstor.org/stable/45212125>
- Acemoglu, D., & Restrepo, P. (2017). Secular Stagnation? The Effect of Aging on Economic Growth in the Age of Automation. *American Economic Review*, 107(5), 174–79. <https://doi.org/10.1257/aer.p20171101>
- Del Negro, M., Giannone, D., Giannoni, M. P., & Tambalotti, A. (2017). Safety, liquidity, and the natural rate of interest. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2017(1), 235–316.

- Goodhart, C., & Pradhan, M. (2017). Demographics Will Reverse Three Multi-Decade Global Trends. *BIS Working Paper*, (656). <https://ssrn.com/abstract=3015065>
- Acedański, J., & Włodarczyk, J. (2018). Demographics, retirement age, and real interest rates in Poland. Hentet 28. september 2024, fra <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.26462.54089>
- de la Fontejne, M. R. (2018). Why the concept of Hicks, Harrod, Solow neutral and even non-neutral augmented technical progress is flawed in principle in any economic model [se s. 21 og 23]. *Munich Personal RePEc Archive*.
- Farhi, E., & Gourio, F. (2018 oktober). *Accounting for Macro-Finance Trends: Market Power, Intangibles, and Risk Premia* (Working Paper Nr. 25282). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w25282>
- Adolfson, J., & Pedersen, J. (2019). Den naturlige realrente i Danmark er faldet. *Danmarks Nationalbank*. <https://www.nationalbanken.dk/da/viden-og-nyheder/publikationer-og-taler/arkiv-publikationer/2019/den-naturlige-realrente-i-danmark-er-faldet>
- Aksoy, Y., Basso, H. S., Smith, R. P., & Grasl, T. (2019). Demographic Structure and Macroeconomic Trends. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 11(1), 193–222. <https://doi.org/10.1257/mac.20170114>
- Bricker, D., & Ibbitson, J. (2019). *Empty Planet: The Shock of Global Population Decline*. Robinson.
- Del Negro, M., Giannone, D., Giannoni, M. P., & Tambalotti, A. (2019). Global trends in interest rates. *Journal of International Economics*, 118, 248–262. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2019.01.010>
- Eggertsson, G. B., Mehrotra, N. R., & Robbins, J. A. (2019a). A Model of Secular Stagnation: Theory and Quantitative Evaluation. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 11(1), 1–48. <https://doi.org/10.1257/mac.20170367>
- Eggertsson, G. B., Mehrotra, N. R., & Robbins, J. A. (2019b). Online Appendix for A Model of Secular Stagnation: Theory and Quantitative Evaluation. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 11(1), 1–48. <https://doi.org/10.1257/mac.20170367>
- Rachel, L., & Summers, L. H. (2019 august). *On Secular Stagnation in the Industrialized World*. <https://doi.org/10.3386/w26198>
- Romer, D. (2019). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill Education.
- Bielecki, M., Brzoza-Brzezina, M., & Kolasa, M. (2020). Demographics and the natural interest rate in the euro area. *European Economic Review*, 129, 103535. <https://doi.org/10.1016/j.euroecorev.2020.103535>
- Buncic, D. (2020). On Measuring the Natural Rate of Interest. *Stockholm University*.
- Goodhart, C., & Pradhan, M. (2020). The Resurgence of Inflation; The Determination of (Real) Interest Rates During the Great Reversal. I *The Great Demographic Reversal: Ageing Societies, Waning Inequality, and an Inflation Revival* (s. 69–99). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-42657-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-42657-6_6)

- Eggertsson, G. B., Robbins, J. A., & Wold, E. G. (2021). Kaldor and Piketty's facts: The rise of monopoly power in the United States. *Journal of Monetary Economics*, 124, s. 19–38. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2021.09.007>
- Papetti, A. (2021a). Demographics and the natural real interest Rate: historical and projected paths for the euro area. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 132, 104209. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2021.104209>
- Papetti, A. (2021b). Population aging, relative prices and capital flows across the globe. *Temì di discussione*, 1333. <https://doi.org/10.32057/0.TD.2021.1333>
- Swarbrick, J. (2021). Occasionally Binding Constraints in Large Models: A Review of Solution Methods. *Canadian Economic Analysis Department*, s. 8. <https://doi.org/10.34989/sdp-2021-5>
- Gechert, S., Havranek, T., Irsova, Z., & Kolcunova, D. (2022). Measuring capital-labor substitution: The importance of method choices and publication bias. *Review of Economic Dynamics*, 45, 55–82. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.red.2021.05.003>
- Platzer, J., Tietz, R., & Lindé, J. (2022). Natural versus neutral rate of interest: Parsing disagreement about future short-term interest rates. *Centre for Economic Policy Research*. Hentet 10. september 2024, fra <https://cepr.org/voxeu/columns/natural-versus-neutral-rate-interest-parsing-disagreement-about-future-short-term>
- Barrett, P., Koch, C., Natal, J.-M., Noureldin, D., & Platzer, J. (2023). *IMF World Economic Outlook 2023*. Den internationale valutafond. Hentet 10. september 2024, fra <https://www.imf.org/-/media/Files/Publications/WEO/2023/04/English/ch2.ashx>
- Blanchard, O. J. (2023). Secular stagnation is not over. *Peterson Institute for International Economics*. Hentet 28. september 2024, fra <https://shorturl.at/yc4VU>
- Carvalho, C., Ferrero, A., Mazin, F., & Nechio, F. (2023). Demographics and Real Interest Rates Across Countries and Over Time. *Federal Reserve Bank of San Francisco*.
- Crescentini, A., & Giri, F. (2023). Dynare replication of “A Model of Secular Stagnation: Theory and Quantitative Evaluation” by Eggertsson et al. (2019). *Economic Inquiry*. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/ecin.13185>
- Hasell, J. (2023). Measuring inequality: what is the Gini coefficient? *Our World in Data*. Hentet 18. november 2024, fra <https://ourworldindata.org/what-is-the-gini-coefficient>
- Ingholt, M. M., Spange, M., Larsen, R. B., & Thinggaard, S. H. (2023). Realrenter i lyset af inflation og højere offentlig gæld. *Analyse, Danmarks Nationalbank*.
- Summers, L. H. (2023). Summers and Blanchard debate the future of interest rates. *Peterson Institute for International Economics*. Hentet 28. september 2024, fra <https://t.ly/QIUPY>
- Auclert, A., Malmberg, H., Martenet, F., & Rognlie, M. (2024 december). *Demographics, Wealth, and Global Imbalances in the Twenty-First Century* (Working Paper Nr. 29161). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w29161>

Olshansky, S. J., Willcox, B. J., Demetrius, L., & Beltrán-Sánchez, H. (2024). Implausibility of radical life extension in humans in the twenty-first century. *Nature Aging*. <https://doi.org/10.1038/s43587-024-00702-3>

## Datakilder

NTA. (2017). Labor Income, 2011, USA. *National Transfer Accounts*. Hentet 30. oktober 2024, fra <https://www.ntaccounts.org/web/nta/show>

OECD. (2022). Net pension replacement rates. *Women, USA*. Hentet 31. oktober 2024, fra <https://t.ly/0DzZc>

BLS. (2023). Consumer Expenditure Surveys, 2023, Tabel 1300. *U.S. Bureau of Labor Statistics*.

CB. (2023). Population Projections, Total, All races. Macrobond: *U.S. Census Bureau*.

CDC. (2023). National Center for Health Statistics. *Center for Disease Control*. Hentet 2. oktober 2024, fra <https://www.cdc.gov/nchs/data/statab/t991x07.pdf>

OECD. (2023). Tax wedge, % of labor cost. *USA*. Hentet 15. november 2023, fra <https://t.ly/Aewet>

BEA. (2024a). Macrobond: Net Lending or Net Borrowing; U.S. Net International Investment Position; Gross Domestic Product. *U.S. Bureau of Economic Analysis*.

BEA. (2024b). National Income and Product Accounts: Tabel 3.1, linje 21: Consumption expenditures. *U.S. Bureau of Economic Analysis*. Hentet 31. oktober 2024, fra <https://t.ly/kPY52>

Bloomberg. (2024). Seriekoder: GTJP1Y, GTDEM2Y, GTCAD1Y, GTGBP2Y, GTFRF2Y, GB12, JNCPIYOY, ECCPDEYY, EHPICA, UKRPCJYR, FRCPEECY, CPI YOY.

BLS. (2024). Macrobond: uslama6899, uslama6901. *U.S. Bureau of Labor Statistics*.

Fernald, J. G. (2024). A Quarterly, Utilization-Adjusted Series on Total Factor Productivity (annual, dtfp\_util). *FRBSF Working Paper 2012-19*. Hentet 7. oktober 2024, fra <https://www.johnfernald.net/TFP>

FN. (2024). World Population Prospects 2024. *United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2024)*. Hentet 10. september 2024, fra <https://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/>

FRED. (2024a). Macrobond: usbank0105 (nonrevolving consumer debt). *Federal Reserve System*.

FRED. (2024b). Seriekode: CLF16OV. *Federal Reserve Bank of St. Louis*. Hentet 30. november 2024, fra <https://fred.stlouisfed.org/>

FRED. (2024c). Seriekoder: DGS10, DGS1, EXPINF10YR, EXPINF1YR. *Federal Reserve Bank of St. Louis*. Hentet 10. september 2024, fra <https://fred.stlouisfed.org/>

FRED. (2024d). Seriekoder: GFDEGDQ188S, GDP, GCE, USAGFCFQDSMEI. *Federal Reserve Bank of St. Louis*. Hentet 31. oktober 2024, fra <https://fred.stlouisfed.org/>

FRED. (2024e). Seriekoder: W823RC1, W824RC1. *Federal Reserve Bank of St. Louis*. Hentet 13. november 2024, fra <https://fred.stlouisfed.org/>

- Holston, K., Laubach, T., & Williams, J. C. (2024). Measuring the Natural Rate of Interest. *Federal Reserve Bank of New York*. Hentet 4. december 2024, fra <https://www.newyorkfed.org/research/policy/rstar>
- IMF. (2024). World Economic Outlook [General government gross debt; General government net lending/borrowing]. *International Monetary Fund*. Hentet 6. december 2024, fra <https://www.imf.org/en/Publications/WEO/weo-database/2024/October/download-entire-database>
- OECD. (2024a). Average annual hours actually worked. *OECD Employment and Labour Market Statistics*. <https://doi.org/https://doi.org/10.1787/data-00303-en>
- OECD. (2024b). Macrobond: Gross Domestic Product - Expenditure Approach, Gross Capital Formation, Total, Current Prices. *OECD Economic Outlook*.
- OECD. (2024c). Macrobond: Net Saving Ratio of Households & Non-Profit Institutions Serving Households, Estimate, Calendar Adjusted, SA. *OECD Economic Outlook*.
- SSA. (2024a). Social Security Administration. *Full Retirement and Age 62 Benefit By Year of Birth*. Hentet 31. oktober 2024, fra <https://www.ssa.gov/benefits/retirement/planner/agereduction.html>
- SSA. (2024b). Social Security Administration. *A Summary of the 2024 Annual Reports*. Hentet 30. november 2024, fra <https://www.ssa.gov/OACT/TRSUM/index.html>
- TE. (2024). Japan General Government Gross Debt to GDP. *Trading Economics*. Hentet 8. november 2024, fra <https://tradingeconomics.com/japan/government-debt-to-gdp>
- Fiscal Data. (2024). Debt to the Penny. *The Department of the Treasury and the Bureau*. Hentet 8. oktober 2024, fra <https://fiscaldata.treasury.gov/datasets/debt-to-the-penny/debt-to-the-penny>
- WID. (2024). USA, Gini-coefficients, adults, equal split. *World Inequality Database*. Hentet 2. november 2024, fra <https://wid.world/data/>
- Wikipedia. (2024). Medicare (United States). *Wikipedia: The Free Encyclopedia*. Hentet 13. november 2024, fra [https://en.wikipedia.org/wiki/Medicare\\_\(United\\_States\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Medicare_(United_States))

## Appendiks A: Udledninger bag simpel OLG-model

En ung husholdning født i periode  $t$  maksimerer nyttefunktionen:

$$U_t = \frac{(c_{t,0})^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}} + s_t \beta \cdot \frac{(c_{t+1,1})^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}},$$

underlagt budgetbetingelserne:

$$c_{t,0} + a_{t+1,1} = (1 - \tau_t)w_t \quad (\text{A.1})$$

$$c_{t+1,1} = \frac{a_{t+1,1}(1 + r_{t+1})}{s_t} + d_{t+1}. \quad (\text{A.2})$$

Husholdningens optimeringsproblem kan da opstilles ved at indsætte budgetbetingelserne i  $c_{t,0}$  og  $c_{t+1,1}$  i nyttefunktionen:

$$U_t = \frac{1}{1-\frac{1}{\rho}} \left[ ((1 - \tau_t)w_t - a_{t+1,1})^{1-\frac{1}{\rho}} + s_t \beta \left( \frac{a_{t+1,1}(1 + r_{t+1})}{s_t} + d_{t+1} \right)^{1-\frac{1}{\rho}} \right].$$

Førsteordensbetingelsen findes ved at differentiere mht.  $a_{t+1,1}$ :

$$\frac{\partial U_t}{\partial a_{t+1,1}} = -((1 - \tau_t)w_t - a_{t+1,1})^{-\frac{1}{\rho}} + s_t \beta \left( \frac{a_{t+1,1}(1 + r_{t+1})}{s_t} + d_{t+1} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{1 + r_{t+1}}{s_t}.$$

Udtrykkene for  $c_{t,0}$  og  $c_{t+1,1}$  indsættes tilbage:

$$\frac{\partial U_t}{\partial a_{t+1,1}} = -(c_{t,0})^{-\frac{1}{\rho}} + s_t \beta (c_{t+1,1})^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{1 + r_{t+1}}{s_t}.$$

Førsteordensbetingelsen sættes lig nul for at udlede eulerligningen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_t}{\partial a_{t+1,1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (c_{t,0})^{-\frac{1}{\rho}} &= s_t \beta (c_{t+1,1})^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{1 + r_{t+1}}{s_t} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{c_{t+1,1}}{c_{t,0}} \right)^{\frac{1}{\rho}} &= \beta(1 + r_{t+1}) \\ \Leftrightarrow (c_{t+1,1})^{\frac{1}{\rho}} &= \beta(1 + r_{t+1})(c_{t,0})^{\frac{1}{\rho}} \\ \Leftrightarrow c_{t+1,1} &= \beta^\rho (1 + r_{t+1})^\rho c_{t,0}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Produktionen er Cobb-Douglas og er givet ved:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha},$$

hvorved faktorpriserne er givet ved førsteordensbetingelserne mht. kapital og arbejdskraft:

$$\begin{aligned} r_t + \delta &= \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} \\ \Leftrightarrow r_t + \delta &= \alpha K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} \\ \Leftrightarrow r_t + \delta &= \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} \\ \Leftrightarrow r_t &= \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} - \delta, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

og

$$\begin{aligned}
w_t &= \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} \\
&\Leftrightarrow w_t = K_t^\alpha (1 - \alpha) A_t^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} \\
&\Leftrightarrow w_t = (1 - \alpha) A_t \left( \frac{K_t}{A_t L_t} \right)^\alpha \\
&\Leftrightarrow w_t = (1 - \alpha) A_t \tilde{k}_t^\alpha,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

hvor  $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ .

Pensionsydelsen er givet ved:

$$d_{t+1} = \tau_{t+1} w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{s_t} \tag{A.6}$$

$$d_t = \bar{d} w_t (1 - \tau_t). \tag{A.7}$$

Kapitalakkumulationen er givet ved:

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta) K_t$$

$$K_{t+1} = N_{t,0} \cdot a_{t+1,1},$$

hvor

$$\begin{aligned}
I_t &= K_{t+1} - (1 - \delta) K_t \\
&\Leftrightarrow \frac{I_t}{A_t L_t} = (1 + g)(1 + n_t) \frac{K_{t+1}}{A_t(1 + g)L_t(1 + n_t)} - (1 - \delta) \frac{K_t}{A_t L_t} \\
&\Leftrightarrow \frac{I_t}{A_t L_t} = (1 + g)(1 + n_t) \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} - (1 - \delta) \frac{K_t}{A_t L_t} \\
&\Leftrightarrow \tilde{i}_t + (1 - \delta) \tilde{k}_t = (1 + g)(1 + n_t) \tilde{k}_{t+1}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{i}_t = (1 + g)(1 + n_t) \tilde{k}_{t+1} - (1 - \delta) \tilde{k}_t, \tag{A.9}$$

hvor  $\tilde{i}_t = \frac{I_t}{A_t L_t}$ , og

$$\begin{aligned}
K_{t+1} &= N_{t,0} \cdot a_{t+1,1} = L_t \cdot a_{t+1,1} \\
&\Leftrightarrow a_{t+1,1} = \frac{K_{t+1}}{L_t} \\
&\Leftrightarrow \frac{a_{t+1,1}}{A_{t+1} L_{t+1}} = \frac{\tilde{k}_{t+1}}{L_t} \\
&\Leftrightarrow a_{t+1,1} = \tilde{k}_{t+1} A_{t+1} \frac{L_{t+1}}{L_t} \\
&\Leftrightarrow a_{t+1,1} = (1 + n_t) A_{t+1} \tilde{k}_{t+1}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$



## Husholdningernes opsparingsudbud

Husholdningernes udbudskurve for opsparing kan udledes ved først at isolere  $a_{t+1,1}$  i (A.1), indsætte denne i (A.2) og dernæst anvende (A.3):

$$\begin{aligned} c_{t+1,1} &= \frac{((1 - \tau_t)w_t - c_{t,0})(1 + r_{t+1})}{s_t} + d_{t+1} \\ &\Leftrightarrow \beta^\rho(1 + r_{t+1})^\rho c_{t,0} = \frac{((1 - \tau_t)w_t - c_{t,0})(1 + r_{t+1})}{s_t} + d_{t+1}. \end{aligned}$$

Ved at indsætte (A.6) i  $d_{t+1}$  og isolere  $c_{t,0}$ , fås:

$$\begin{aligned} \beta^\rho(1 + r_{t+1})^\rho c_{t,0} &= \frac{((1 - \tau_t)w_t - c_{t,0})(1 + r_{t+1})}{s_t} + \tau_{t+1}w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{s_t} \\ &\Leftrightarrow c_{t,0} \left( \beta^\rho(1 + r_{t+1})^\rho + \frac{1 + r_{t+1}}{s_t} \right) = \frac{(1 - \tau_t)w_t(1 + r_{t+1})}{s_t} + \tau_{t+1}w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{s_t} \\ &\Leftrightarrow c_{t,0} \left( \frac{s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^\rho + (1 + r_{t+1})}{s_t} \right) = \frac{(1 - \tau_t)w_t(1 + r_{t+1})}{s_t} + \tau_{t+1}w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{s_t} \\ &\Leftrightarrow c_{t,0}(s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^\rho + (1 + r_{t+1})) = (1 - \tau_t)w_t(1 + r_{t+1}) + \tau_{t+1}w_{t+1}(1 + n_t) \\ &\Leftrightarrow c_{t,0}(s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1} + 1) = (1 - \tau_t)w_t + \tau_{t+1}w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{1 + r_{t+1}} \\ &\Leftrightarrow c_{t,0} = \frac{(1 - \tau_t)w_t}{1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}} + \frac{\tau_{t+1}w_{t+1}(1 + n_t)}{(1 + r_{t+1})(1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1})} \\ &\Leftrightarrow c_{t,0} = \frac{1}{1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}} \left[ (1 - \tau_t)w_t + \tau_{t+1}w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{1 + r_{t+1}} \right]. \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

Dette udtryk indsættes i (A.1):

$$a_{t+1,1} = (1 - \tau_t)w_t - c_{t,0} \quad (\text{A.12})$$

$$= (1 - \tau_t)w_t - \frac{1}{1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}} \left[ (1 - \tau_t)w_t + \tau_{t+1}w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{1 + r_{t+1}} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$= (1 - \tau_t)w_t \frac{s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}}{1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}} - \frac{\tau_{t+1}w_{t+1}(1 + n_t)}{(1 + r_{t+1})(1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1})}. \quad (\text{A.14})$$

Udtrykket for lønsatsen givet i (A.5) indsættes:

$$a_{t+1,1} = (1 - \tau_t)(1 - \alpha)A_t \tilde{k}_t^\alpha \cdot \frac{s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}}{1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}} - \frac{\tau_{t+1}(1 - \alpha)A_{t+1} \tilde{k}_{t+1}^\alpha(1 + n_t)}{(1 + r_{t+1})(1 + s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1})}.$$

Herfra indsættes (A.10) på venstresiden, hvorefter der isoleres for  $\tilde{k}_{t+1}$ . Af hensyn til notation defineres  $\vartheta_t \equiv s_t \beta^\rho(1 + r_{t+1})^{\rho-1}$ :

$$\begin{aligned} (1 + n_t)A_{t+1} \tilde{k}_{t+1} &= (1 - \tau_t)(1 - \alpha)A_t \tilde{k}_t^\alpha \cdot \frac{\vartheta}{1 + \vartheta} - \frac{\tau_{t+1}(1 - \alpha)A_{t+1} \tilde{k}_{t+1}^\alpha(1 + n_t)}{(1 + r_{t+1})(1 + \vartheta)} \\ &\Leftrightarrow \tilde{k}_{t+1} = \frac{(1 - \tau_t)(1 - \alpha) \tilde{k}_t^\alpha \cdot \vartheta}{(1 + g)(1 + n_t)(1 + \vartheta_t)} - \frac{\tau_{t+1}(1 - \alpha) \tilde{k}_{t+1}^\alpha}{(1 + r_{t+1})(1 + \vartheta_t)}. \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Investeringskvoten, som grundet antagelsen om en lukket økonomi er lig bruttoopsparingskvoten, er givet ved (A.8) divideret med  $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$ :

$$\iota_t \equiv \frac{I_t}{Y_t} = \frac{\tilde{i}_t}{\tilde{y}_t} = \frac{(1 + g)(1 + n_t) \tilde{k}_{t+1} - (1 - \delta) \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^\alpha}. \quad (\text{A.16})$$

Investeringerne, målt i enheder per effektiv arbejder, udtrykkes da ved at gange med  $(1+g)(1+n_t)$  og trække  $(1-\delta)\tilde{k}_t$  fra på begge sider af (A.10). Dernæst divideres med  $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$  for at udtrykke investeringskvoten:

$$\begin{aligned}
\tilde{i}_t &= (1+g)(1+n_t)\tilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{k}_t \\
&= \frac{(1-\tau_t)(1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha \cdot \vartheta_t}{1+\vartheta_t} - \frac{\tau_{t+1}(1-\alpha)\tilde{k}_{t+1}^\alpha(1+g)(1+n_t)}{(1+r_{t+1})(1+\vartheta_t)} - (1-\delta)\tilde{k}_t \\
&\Leftrightarrow \frac{(1+g)(1+n_t)\tilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^\alpha} \\
&= \frac{(1-\tau_t)(1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha \cdot \vartheta_t}{\tilde{k}_t^\alpha(1+\vartheta_t)} - \frac{\tau_{t+1}(1-\alpha)\tilde{k}_{t+1}^\alpha(1+g)(1+n_t)}{\tilde{k}_t^\alpha(1+r_{t+1})(1+\vartheta_t)} - \frac{(1-\delta)\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^\alpha} \\
&\Leftrightarrow \iota_t = \frac{(1-\tau_t)(1-\alpha) \cdot \vartheta_t}{1+\vartheta_t} - \frac{\tau_{t+1}(1-\alpha)\tilde{k}_{t+1}^\alpha(1+g)(1+n_t)}{\tilde{k}_t^\alpha(1+r_{t+1})(1+\vartheta_t)} - (1-\delta)\tilde{k}_t^{1-\alpha}. \tag{A.17}
\end{aligned}$$

På en balanceret vækststi, hvor  $\tilde{k}_t = \tilde{k}$  for alle  $t$ , er investeringskvoten givet ved:

$$\iota = [(1+g)(1+n) - (1-\delta)]\tilde{k}^{1-\alpha}. \tag{A.18}$$

Ved at evaluere (A.17) på en balanceret vækststi opnås via (A.18):

$$\iota = \frac{(1+g)(1+n)\tilde{k} - (1-\delta)\tilde{k}}{\tilde{k}^\alpha} = \frac{(1-\tau)(1-\alpha) \cdot \vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)} - (1-\delta)\tilde{k}^{1-\alpha}.$$

Herfra isoleres  $\tilde{k}$  og dernæst  $\iota$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+g)(1+n)\tilde{k} - (1-\delta)\tilde{k}}{\tilde{k}^\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}^{1-\alpha} = \frac{(1-\tau)(1-\alpha) \cdot \vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)} \\
&\Leftrightarrow \iota \left( 1 + (1-\delta)\tilde{k}^{1-\alpha} \cdot \frac{\tilde{k}^\alpha}{(1+g)(1+n)\tilde{k} - (1-\delta)\tilde{k}} \right) = \frac{(1-\tau)(1-\alpha) \cdot \vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)} \\
&\Leftrightarrow \iota \left( 1 + \frac{(1-\delta)\tilde{k}}{(1+g)(1+n)\tilde{k} - (1-\delta)\tilde{k}} \right) = \frac{(1-\tau)(1-\alpha) \cdot \vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)} \\
&\Leftrightarrow \iota \left( 1 + \frac{1-\delta}{(1+g)(1+n) - (1-\delta)} \right) = \frac{(1-\tau)(1-\alpha) \cdot \vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)} \\
&\Leftrightarrow \iota \left( \frac{(1+g)(1+n)}{(1+g)(1+n) - (1-\delta)} \right) = \frac{(1-\tau)(1-\alpha) \cdot \vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)} \\
&\Leftrightarrow \iota = \left( 1 - \frac{1-\delta}{(1+g)(1+n)} \right) \left[ \frac{(1-\tau)(1-\alpha)\vartheta}{1+\vartheta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)} \right].
\end{aligned}$$

Ved at indsætte  $\vartheta = s\beta^\rho(1+r)^{\rho-1}$ , er udbudskurven dermed som funktion af renten  $r$  givet ved:

$$\iota^S = \left( 1 - \frac{1-\delta}{(1+g)(1+n)} \right) \left[ \frac{(1-\tau)(1-\alpha)s\beta^\rho(1+r)^{\rho-1}}{1+s\beta^\rho(1+r)^{\rho-1}} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+s\beta^\rho(1+r)^{\rho-1})} \right]. \tag{A.19}$$

Det fremgår af (A.19), at opsparingsudbuddet afhænger positivt af en stigning i  $s$ , når skattesatsen  $\tau$  holdes konstant:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \iota^S}{\partial s} \right|_{\tau=\bar{\tau}} &= \left. \frac{\partial \iota^S}{\partial \vartheta} \right|_{\tau=\bar{\tau}} \\
&= \mathcal{M} \left[ \frac{(1-\tau)(1-\alpha)(1+\vartheta) - (1-\tau)(1-\alpha)\vartheta}{(1+\vartheta)^2} - \frac{-(1+r)(1-\alpha)(1+g)(1+n)\tau}{((1+r)(1+\vartheta))^2} \right] \\
&= \mathcal{M} \left[ \frac{(1-\tau)(1-\alpha)(1+\vartheta) - (1-\tau)(1-\alpha)\vartheta}{(1+\vartheta)^2} + \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)^2} \right] \\
&= \mathcal{M} \left[ \frac{(1+r)(1-\tau)(1+\vartheta) - (1-\tau)\vartheta(1+r) + \tau(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+\vartheta)^2} \right] (1-\alpha), \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

hvor  $\mathcal{M} \equiv \left(1 - \frac{1-\delta}{(1+g)(1+n)}\right)$ . Det følger, at (A.20) er positiv, hvis:

$$\begin{aligned}
(1-\tau)(1+\vartheta)(1+r) + \tau(1+g)(1+n) &> (1-\tau)\vartheta(1+r) \\
\Leftrightarrow (1-\tau)(1+r) + \tau(1+g)(1+n) &> 0,
\end{aligned}$$

hvilket vil være gældende ved realistiske parameterværdier.

### Investerings efterspørgslen

Efterspørgselskurven på den balancerede vækststi udtrykkes ved at indsætte (A.18) i (A.4). Først isoleres  $\tilde{k}$  i (A.18):

$$\begin{aligned}
\iota &= [(1+g)(1+n) - (1-\delta)]\tilde{k}^{1-\alpha} \\
\Leftrightarrow \tilde{k}^{1-\alpha} &= \frac{\iota}{(1+g)(1+n) - (1-\delta)} \\
\Leftrightarrow \tilde{k}^{\alpha-1} &= \frac{(1+g)(1+n) - (1-\delta)}{\iota}.
\end{aligned}$$

Dette indsættes i (A.4) evalueret på den balancerede vækststi:

$$\begin{aligned}
r &= \alpha\tilde{k}^{\alpha-1} - \delta = \alpha \frac{(1+g)(1+n) - (1-\delta)}{\iota} - \delta \\
\Leftrightarrow r + \delta &= \alpha \frac{(1+g)(1+n) - (1-\delta)}{\iota} \\
\Leftrightarrow \iota^D &= \alpha \frac{(1+g)(1+n) - (1-\delta)}{r + \delta}, \quad (\text{A.21})
\end{aligned}$$

hvor (A.21) er investerings efterspørgslen udtrykt som funktionen af renten.

### Statens budgetbetegnelse

I den simple model går alle statens indtægter og udgifter til udbetaling af pensioner. Skattesatsen i ligevægt udledes ved at indsætte (A.6) i (A.7). Først isoleres  $\tau_{t+1}$  i (A.6):

$$\begin{aligned}
d_{t+1} &= \tau_{t+1}w_{t+1} \frac{1+n_t}{s_t} \\
\Leftrightarrow \tau_{t+1} &= \frac{d_{t+1}}{w_{t+1}} \cdot \frac{s_t}{1+n_t}. \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

Dette udtryk indsættes da i (A.7), som itereres en periode frem:

$$\begin{aligned}
d_{t+1} &= \bar{d}w_{t+1}(1 - \tau_{t+1}) \\
&= \bar{d}w_{t+1} \left( 1 - \frac{d_{t+1}}{w_{t+1}} \cdot \frac{s_t}{1 + n_t} \right) \\
&\Leftrightarrow d_{t+1} = \frac{1 + n_t}{1 + n_t + \bar{d}s_t} \cdot \bar{d}w_{t+1}.
\end{aligned}$$

Dette udtryk indsættes i (A.22):

$$\begin{aligned}
\tau_{t+1} &= \frac{1 + n_t}{1 + n_t + \bar{d}s_t} \cdot \bar{d}w_{t+1} \cdot \frac{1}{w_{t+1}} \cdot \frac{s_t}{1 + n_t} \\
&\Leftrightarrow \tau_{t+1} = \frac{s_t \bar{d}}{1 + n_t + s_t \bar{d}} \\
&\Leftrightarrow \tau_{t+1} = \frac{\bar{d}}{\bar{d} + \frac{1+n_t}{s_t}}.
\end{aligned}$$

På den balancerede vækststi vil skattesatsen være givet ved

$$\tau = \frac{\bar{d}}{\bar{d} + \frac{1+n}{s}}. \quad (\text{A.23})$$

## Ligevægt

En ligevægt på kapitalmarkedet på den balancerede vækststi findes ved at sætte (A.21) lig (A.19). En unik løsning er givet, hvis  $\delta = 1$ , og  $\rho = 1$ . I så fald vil efterspørgslen være givet ved:

$$\iota^D = \alpha \frac{(1+g)(1+n)}{r+1}, \quad (\text{A.24})$$

og udbudskurven

$$\iota^S = \frac{(1-\tau)(1-\alpha)s\beta}{1+s\beta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{(1+r)(1+s\beta)}. \quad (\text{A.25})$$

En ligevægt udtrykt ved  $r$  er da givet ved at sætte (A.24) og (A.25) lig hinanden. Først isoleres  $(1+r)$  i (A.24):

$$1+r = \alpha \frac{(1+g)(1+n)}{\iota}.$$

Dette indsættes i (A.25):

$$\begin{aligned}
\iota &= \frac{(1-\tau)(1-\alpha)s\beta}{1+s\beta} - \frac{\tau(1-\alpha)(1+g)(1+n)}{\alpha(1+g)(1+n)(1+s\beta)} \cdot \iota \\
&= \frac{(1-\tau)(1-\alpha)s\beta}{1+s\beta} - \frac{\tau(1-\alpha)}{\alpha(1+s\beta)} \cdot \iota \\
&\Leftrightarrow \iota(1+s\beta) = (1-\tau)(1-\alpha)s\beta - \tau \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \iota \\
&\Leftrightarrow \iota \left( 1 + s\beta + \tau \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \right) = (1-\tau)(1-\alpha)s\beta \\
&\Leftrightarrow \iota = \frac{\alpha(1-\tau)(1-\alpha)s\beta}{\alpha + \alpha s\beta + (1-\alpha)\tau} = \frac{s\beta\alpha(1-\alpha)(1-\tau)}{(1+s\beta)\alpha + \tau(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

I ligevægt er renten og investeringskvoten dermed givet ved

$$r = \alpha \frac{(1+g)(1+n)}{\iota} - 1 \quad (\text{A.26})$$

$$\iota = \frac{s\beta\alpha(1-\alpha)(1-\tau)}{(1+s\beta)\alpha + \tau(1-\alpha)}. \quad (\text{A.27})$$

Det kan vises, at investeringskvoten  $\iota$  i ligevægt i (A.27) afhænger entydigt positivt af overlevessandsynligheden  $s$  for en given skattesats  $\tau$ :

$$\left. \frac{\partial \iota}{\partial s} \right|_{\tau=\bar{\tau}} = \frac{\beta\alpha(1-\alpha)(1-\tau)[(1+s\beta)\alpha + \tau(1-\alpha)] - s\beta\alpha(1-\alpha)(1-\tau)\alpha\beta}{[(1+s\beta)\alpha + \tau(1-\alpha)]^2}. \quad (\text{A.28})$$

Det gælder, at (A.28) er positiv, hvis:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \iota}{\partial s} \right|_{\tau=\bar{\tau}} > 0 &\Leftrightarrow \beta(1-\alpha)(1-\tau)[(1+s\beta)\alpha + \tau(1-\alpha)] > s\beta(1-\alpha)(1-\tau)\alpha\beta \\ &\Leftrightarrow (1+s\beta)\alpha + \tau(1-\alpha) > s\beta\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha + \tau(1-\alpha) > 0, \end{aligned}$$

hvilket altid er gældende for  $0 < \alpha < 1$  og  $\tau > 0$ . Det følger, at ligevægtsrenten i (A.26) afhænger negativt af en stigning i  $s$ . Det fremgår desuden af (A.27), at investeringskvoten i ligevægt ikke afhænger af befolkningstilvæksten  $n$  for en given skattesats, hvilket skyldes at  $\delta = 1$  (hvilket ikke er urealistisk over en 30-årig periode eller længere). Dette afspejler, at effekten af en lavere befolkningstilvækst gennem mekanisme 3 er fraværende i den stationære ligevægt. Da det samtidig er vist, at investeringskvoten afhænger entydigt positivt af en stigning i den forventede levetid (for en given skattesats), kan det konkluderes, at effekten af et højere afhængighedsforhold, beskrevet i mekanisme 3, ikke kan være dominerende på den balancerede vækststi.

### Intertemporal substitutionselasticitet

Den intertemporale substitutionselasticitet (IES) påvirker, hvordan forbrugerne afvejer allokeringen af forbrug mellem perioder. Den intertemporale substitutionselasticitet er givet ved krumningen på nyttefunktionen (Hall, 1981):

$$IES = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)c_t}.$$

Givet nyttefunktionen  $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}}$ , vil det sige, at

$$IES = -\frac{c_t^{-\frac{1}{\rho}}}{-\frac{1}{\rho}c_t^{-\frac{1}{\rho}-1}c_t} = \rho. \quad (\text{A.29})$$

Den intertemporale substitutionselasticitet er altså her konstant og givet ved parameteren  $\rho$ .<sup>64</sup> Det følger, at koefficienten for den relative risikoaversion er givet ved  $\frac{1}{\rho}$ . En høj IES, svarende her til en høj værdi af  $\rho$ , hvilket afspejler en lav relativ risikoaversion, betyder, at forbrugeren har en høj villighed til at udskyde forbrug, hvis dette forekommer rentabelt. Dette medfører, at forbrugeren opsparringsadfærd er mere følsom over for ændringer i renten. Det modsatte gælder for en lav værdi af  $\rho$ . Når  $\rho > 1$  vil substitutionseffekten dominere, således at en rentestigning alt andet lige får forbrugeren til at spare mere op og sænke forbruget. Omvendt vil indkomsteffekten dominere, når  $\rho < 1$ . Når  $\rho = 1$ , vil substitutions- og indkomsteffekten udligne hinanden.

I ligning (A.11) fremgår det, at forbruget for en ung husholdning i periode  $t$  er givet ved:

$$c_{t,0} = \frac{1}{1 + s_t \beta^\rho (1 + r_{t+1})^{\rho-1}} \left[ (1 - \tau_t) w_t + \tau_{t+1} w_{t+1} \cdot \frac{1 + n_t}{1 + r_{t+1}} \right].$$

Ved at definere indkomsten i periode  $t$  som  $y_t \equiv (1 - \tau_t) w_t$ , og indkomsten i periode  $t + 1$  som  $y_{t+1} \equiv \tau_{t+1} w_{t+1} (1 + n_t)$ , samt ved at sætte  $s_t = 1$ , kan dette udtryk omskrives til:

$$c_{t,0} = \frac{1}{1 + \beta^\rho (1 + r_{t+1})^{\rho-1}} \left[ y_t + \frac{y_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \right]. \quad (\text{A.30})$$

Det fremgår, at en ændring i renten kan påvirke forbruget, og dermed opsparingskvoten, tvetydigt, afhængig af, om  $\rho \geq 1$ , og størrelsen på den fremtidige indkomst  $y_{t+1}$ . Velstandseffekten er repræsenteret ved  $y_{t+1}$ , som tilbagediskonteres med  $1 + r_{t+1}$ . Hvis  $y_{t+1} = 0$ , vil der ikke være nogen velstandseffekt. Her vil en stigning i renten føre til en stigning i forbruget  $c_{t,0}$ , når  $\rho < 1$ , svarende til at indkomsteffekten dominerer. I så fald vil en stigning i renten medføre en lavere opsparingskvote, mens et fald i renten vil medføre en højere opsparingskvote. Omvendt gælder det, hvis  $\rho > 1$ , hvor substitutionseffekten dominerer. Hvis  $\rho = 1$ , vil substitutions- og indkomsteffekten udligne hinanden. I så fald påvirkes forbruget kun igennem velstandseffekten, og udtrykket for  $c_{t,0}$  reduceres til:

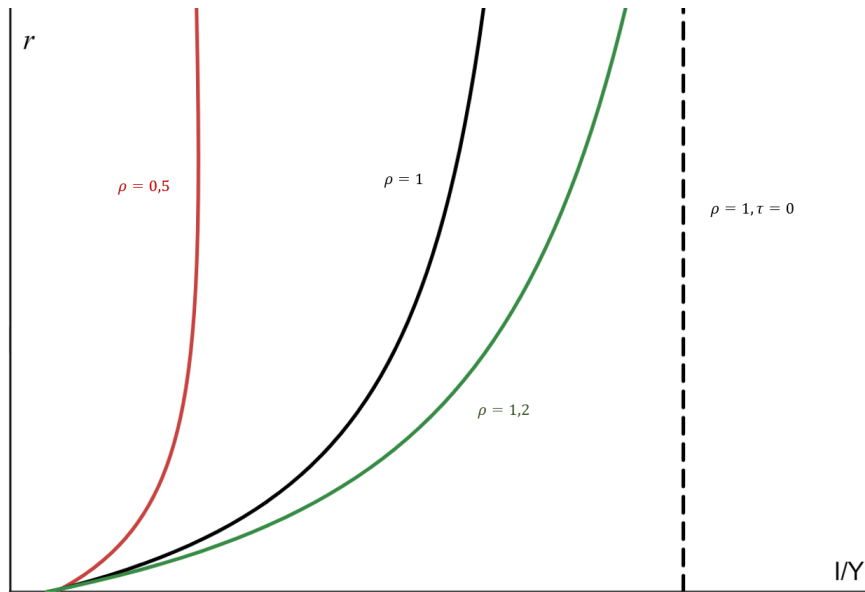
$$c_{t,0} = \frac{1}{1 + \beta} \left[ y_t + \frac{y_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \right].$$

Her ses det let, at en stigning i renten medfører et fald i forbruget i periode  $t$ , da nutidsværdien af den fremtidige indkomst falder. Omvendt vil et fald i renten medføre, at husholdningen vælger at øge sit forbrug og dermed mindske sin opsparingskvote. Velstandseffekten indebærer altså, at et fald i renten sænker husholdningernes opsparingskvote. Da velstandseffekten trækker i samme retning som substitutionseffekten, er det derfor plausibelt, at et fald i renten samlet set leder til en lavere opsparingskvote, hvis  $y_{t+1} > 0$ , selvom  $\rho < 1$ . Dette kan illustreres grafisk ved, at udbudskurven for husholdningernes bruttoopsparingskvote har en positiv hældning i et  $\iota, r$ -diagram, jf. figur A1.

Det fremgår af figur A1, at hældningen på udbudskurven er positiv, selv når  $\rho < 1$ , hvilket skyldes velstandseffekten. I den simple OLG-model bliver udbuddet perfekt inelastisk, hvis  $\tau = 0$ ,

<sup>64</sup>Afhængig af specifikationen på nyttefunktionen ses også i litteraturen, at  $IES \equiv \sigma = \frac{1}{\rho}$ . Nyttefunktionens specifikation i dette speciale betyder, at  $IES = \rho$  og ikke  $\frac{1}{\rho}$ . Bogstavet  $\sigma$  reserveres til substitutionselasticiteten i produktionsfunktionen.

Figur A1: Udbudskurver for opsparing ved forskellige værdier af  $\rho$



Anm.: Figuren viser husholdningernes udbud af bruttoopsparing givet i (A.19) ved forskellige værdier af  $\rho$ . Parametrene er sat til de samme værdier som i den simple model i ligevægt 1 (se tabel 1). Kilde: egen simulering.

og  $\rho = 1$ , da det indebærer, at husholdningerne ikke modtager pensioner, hvilket neutraliserer velstandseffekten. I så fald vil en stigning i opsparingsudbuddet uundgåeligt medføre en højere investeringskvote i ligevægt, selvom investeringsefterspørgslen falder. Dette vil dog ikke være tilfældet i den udvidede model med flere generationer, da der her stadig vil være en velstandseffekt uden skattefinansierede pensioner. Dette kan i den simple OLG-model eksemplificeres ved, at den fremtidige indkomst  $y_{t+1}$  i (A.30) ikke kun dækker over pensionsudbetalinger, men også fremtidig lønindkomst og kapitalindkomst. Dette er med til at forklare, hvorfor investeringskvoten også falder i modellen uden pensioner (se figur A4).

## Appendiks B: Udlædninger bag kvantitativ OLG-model

### Husholdningerne

En husholdning, der med alderen  $j = 1$  indtræder i økonomien i periode  $t$ , maksimerer nyttefunktionen:

$$\max_{\{c_{j,t+j-1}, x_{j,t+j-1}\}} U_t = \left( \sum_{j=1}^J su_j \beta^{j-1} u(c_{j,t+j-1}) \right) + su_J \beta^{J-1} \mu \cdot v(x_{j,t+j-1}) \quad (\text{A.31})$$

underlagt budgetbetingelsen:

$$\begin{aligned} c_{j,t} + a_{j+1,t+1} + \Gamma_{t-j+26} \cdot \Gamma_{t-j+1} \cdot x_{j,t} \\ = (1 - \tau_t) w_t h c_j + (1 - \tau_p) \Pi_{j,t} + d_t w_t \cdot \mathbb{1}\{j > 42\} \\ + (1 + r_t) \left( a_{j,t} + q_{j,t} + \frac{1 - s_{j-1}}{s_{j-1}} a_{j,t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

samt følgende bibetingelser:

$$a_{j,t} \geq -D_{j,t} \cdot w_{t+1} \cdot h c_{j+1} \quad (\text{A.33})$$

$$c_{j,t} \geq 0 \quad (\text{A.34})$$

$$a_{1,t} = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$a_{J+1,t+1} = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$q_{j,t} = \frac{N_{J,t-1} x_{J,t-1} \cdot \Gamma_{t-J+1} \cdot \Gamma_{t-J+26}}{N_{j,t}}, \quad (\text{A.37})$$

hvor:

$$su_j = \prod_{m=1}^{j-1} s_m$$

$$D_{j,t} \geq 0 \quad \text{for } j \leq 42$$

$$D_{j,t} = 0, \quad h c_j = 0, \quad \Pi_{j,t} = 0 \quad \text{for } j > 42$$

$$q_{j,t} = 0 \quad \text{for } j \neq J - 49$$



$$x_{j,t} = 0 \quad \text{for } j \neq J.$$

Betingelsen i (A.34) er ikke bindende og kan derfor udelades. Ved at indsætte nyttefunktionerne givet i (13) og (14) samt budgetbetingelsen i (A.32) kan maksimeringsproblemet givet alle betingelserne skrives op med lagrangeligningen:<sup>65</sup>

$$\begin{aligned} \max_{\{a_{j+1,t+j}, x_{j,t+j-1}, \lambda_{j,t+j-1}\}} \mathcal{L}_t = & \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho}} \left\{ \sum_{j=1}^J su_j \cdot \beta^{j-1} \right. \\ & \cdot \left[ -a_{j+1,t+j} - \Gamma_{t-j+1} \cdot \Gamma_{t-j+26} \cdot x_{j,t+j-1} + d_t w_t + (1 - \tau) w_t h c_j \right. \\ & \left. \left. + (1 - \tau_p) \Pi_{j,t+j-1} + (1 + r_t) \cdot \left( a_{j,t+j-1} + q_{j,t} + \frac{1 - s_{j-1}}{s_{j-1}} a_{j,t+j-1} \right) \right]^{1 - \frac{1}{\rho}} \right\} \\ & + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} \left\{ su_J \cdot \beta^{J-1} \mu [x_{J,t+J-1}]^{1 - \frac{1}{\rho}} \right\} \\ & + \sum_{j=1}^J \lambda_{j,t+j-1} (a_{j,t+j-1} + D_{j,t+j-1} w_{t+1} h c_{j+1}). \end{aligned}$$

Ved at differentiere med hensyn til  $a_{j+1,t+j}$ ,  $x_{j,t+j-1}$ , samt ved at tage hensyn til KKT-betingelserne (Karush-Kuhn-Tucker), fås førsteordensbetingelserne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{j+1,t+j}} = & -su_j \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} \\ & + su_{j+1} \beta^j (c_{j+1,t+j})^{-\frac{1}{\rho}} \frac{(1 + r_{t+1})}{s_j} \\ & + \lambda_{j+1,t+j} = 0 \end{aligned} \tag{A.38}$$

for  $j \in \{1, \dots, J-1\}$ ,

$$su_j \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} \cdot 0 = 0$$

for  $j \in \{J\}$ , og

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j,t+j-1}} = su_j \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} \cdot (-\Gamma_{t-j+1} \cdot \Gamma_{t-j+26}) + su_j \beta^{j-1} \mu (x_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} = 0 \tag{A.39}$$

for  $j \in \{J\}$ .

---

<sup>65</sup>Ligningen omskrives, så  $t$  bliver til  $t+j-1$  for  $a_{j,t}$  og  $x_{j,t}$ . Der abstraheres fra, at  $\lambda_{j,t+j-1}$  muligvis bør ganges med  $s_{j-1}$ . Dette har ingen implikationer for resultaterne.

Eulerligningen er da givet ud fra (A.38):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{j+1,t+j}} &= -su_j \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} + su_{j+1} \beta^j (c_{j+1,t+j})^{-\frac{1}{\rho}} \frac{(1+r_{t+1})}{s_j} \\
&+ \lambda_{j+1,t+j} = 0 \\
&\Leftrightarrow su_j \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} = su_{j+1} \beta^j (c_{j+1,t+j})^{-\frac{1}{\rho}} \frac{(1+r_{t+1})}{s_j} \\
&+ \lambda_{j+1,t+j} \\
&\Leftrightarrow \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} = \frac{su_{j+1}}{su_j s_j} \beta^j (c_{j+1,t+j})^{-\frac{1}{\rho}} (1+r_{t+1}) \\
&+ \lambda_{j+1,t+j} \frac{1}{su_j} \\
&\Leftrightarrow \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} = \frac{s_j}{s_j} \beta^j (c_{j+1,t+j})^{-\frac{1}{\rho}} (1+r_{t+1}) \\
&+ \lambda_{j+1,t+j} \frac{1}{su_j} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \left( \frac{c_{j+1,t+j}}{c_{j,t+j-1}} \right)^{-\frac{1}{\rho}} (1+r_{t+1}) + \lambda_{j+1,t+j} \frac{(c_{j,t+j-1})^{\frac{1}{\rho}}}{su_j \beta^j}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

for  $j \in \{1, \dots, J-1\}$ . Førsteordensbetingelsen for arv følger af (A.39) og er givet ved:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j,t+j-1}} &= 0 \\
&\Leftrightarrow su_j \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} \cdot (-\Gamma_{t-j+1} \cdot \Gamma_{t-j+26}) + su_j \beta^{j-1} \mu (x_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} = 0 \\
&\Leftrightarrow su_j \beta^{j-1} \mu (x_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} = su_j \beta^{j-1} (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \Gamma_{t-j+1} \cdot \Gamma_{t-j+26} \\
&\Leftrightarrow \mu (x_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} = (c_{j,t+j-1})^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \Gamma_{t-j+1} \cdot \Gamma_{t-j+26} \\
&\Leftrightarrow x_{J,t+J-1} = \left( \frac{\Gamma_{t-J+1} \cdot \Gamma_{t-J+26}}{\mu} \right)^{-\rho} \cdot c_{J,t+J-1}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

for  $J \in \{74\}$ .

KKT-betingelserne er givet ved:

$$\lambda_{j,t+j-1} (a_{j,t+j-1} + D_{j,t+j-1} \cdot w_{t+j} h c_{j+1}) = 0 \tag{A.42}$$

for  $j \in \{1, \dots, 42\}$  og

$$\lambda_{j,t+j-1} (a_{j,t+j-1}) = 0 \tag{A.43}$$

for  $j \in \{43, \dots, J\}$ .

Betingelserne fra (A.33), (A.42) og (A.43) kan sammenfattes til minimeringsproblemerne (jf. Crescentini og Giri, 2023; Swarbrick, 2021):

$$\min (\lambda_{j,t+j-1} a_{j,t+j-1} + D_{j,t+j-1} \cdot w_{j+1,t+j} h c_{j+1}) = 0 \tag{A.44}$$

for  $j \in \{1, \dots, 42\}$  og

$$\min (\lambda_{j,t+j-1}, a_{j,t+j-1}) = 0 \tag{A.45}$$

for  $j \in \{43, \dots, J\}$ .

## Virksomhederne

Virksomhederne, der producerer halvfabrikata, opererer under fuldkommen konkurrence og lejer kapital  $K_t$  på kapitalmarkedet til prisen  $r_t^k$ , hyrer arbejdskraft  $L_t$  til lønnen  $w_t$  og sælger deres produktion  $Y_t$  til monopolvirksomhederne til realprisen  $p_t^{int}/P_t$ , som de tager for givet. De maksimerer følgende profitfunktion:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \Pi_t^{int} = \frac{p_t^{int}}{P_t} Y_t - w_t L_t - r_t^k K_t$$

under bibetingelse af produktionsfunktionen:

$$Y_t = \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

Lagrangeligningen for virksomheden er dermed:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \mathcal{L}_t = \frac{p_t^{int}}{P_t} \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - w_t L_t - r_t^k K_t.$$

Ved at differentiere med hensyn til  $L_t$  og  $K_t$  fås førsteordensbetingelserne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial L_t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{p_t^{int}}{P_t} \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} (1-\alpha) A_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} - w_t &= 0 \\ \Leftrightarrow w_t &= \frac{p_t^{int}}{P_t} \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (1-\alpha) A_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} L_t^{\frac{-1}{\sigma}} \\ \Leftrightarrow w_t &= \frac{p_t^{int}}{P_t} (1-\alpha) (A_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left( \frac{Y_t}{L_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial K_t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{p_t^{int}}{P_t} \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} - r_t^k &= 0 \\ \Leftrightarrow r_t^k &= \frac{p_t^{int}}{P_t} \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \alpha K_t^{\frac{-1}{\sigma}} \\ \Leftrightarrow r_t^k &= \frac{p_t^{int}}{P_t} \alpha \left( \frac{Y_t}{K_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Monopolvirksomhedens profitmaksimeringsproblem er givet ved:

$$\max \Pi_t^f = \frac{p_t(i)}{P_t} y_t^f(i) - \frac{p_t^{int}}{P_t} y_t^f(i), \quad (\text{A.46})$$

under bibetingelsen af efterspørgslen

$$y_t^f = Y_t \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\theta_t}. \quad (\text{A.47})$$

Ved at indsætte (A.47) i (A.46) fås:

$$\Pi_t^f = \frac{p_t(i)}{P_t} Y_t \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\theta_t} - \frac{p_t^{int}}{P_t} Y_t \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\theta_t}. \quad (\text{A.48})$$

Optimalitetsbetingelsen udledes ved at differentiere med hensyn til prisen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_t^f}{\partial \frac{p_t(i)}{P_t}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \theta_t) \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\theta_t} Y_t + Y_t \theta_t \frac{p_t^{int}}{P_t} \left( \frac{p_t(i)}{P_t} \right)^{-\theta_t-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} &= \frac{p_t^{int}}{P_t} \frac{P_t}{p_t(i)} \\ \Leftrightarrow \frac{p_t(i)}{P_t} &= \frac{\theta_t}{\theta_t - 1} \frac{p_t^{int}}{P_t}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Det nominelle prisindeks er givet ved det vægtede geometriske gennemsnit af de nominelle priser på færdigvarer defineret på et kontinuum af differentierede varer i intervallet  $[0, 1]$ :

$$P_t = \left( \int_0^1 p_t(i)^{1-\theta_t} di \right)^{\frac{1}{1-\theta_t}}.$$

Eftersom monopolvirksomhederne er symmetriske og køber ind til de samme faktorpriser, sætter de identiske priser, så at  $p_t(i) = P_t$ :

$$\begin{aligned} P_t &= \left( \int_0^1 p_t(i)^{1-\theta_t} di \right)^{\frac{1}{1-\theta_t}} \\ &= \left( p_t(i)^{1-\theta_t} \int_0^1 di \right)^{\frac{1}{1-\theta_t}} \\ &= \left( p_t(i)^{1-\theta_t} \cdot 1 \right)^{\frac{1}{1-\theta_t}} \\ &= p_t(i) \\ &\Leftrightarrow P_t = p_t(i). \end{aligned}$$

Det følger dermed af (A.49), at

$$\begin{aligned} \frac{p_t(i)}{P_t} &= \frac{\theta_t}{\theta_t - 1} \frac{p_t^{int}}{P_t} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{\theta_t}{\theta_t - 1} \frac{p_t^{int}}{P_t} \\ \Leftrightarrow \frac{p_t^{int}}{P_t} &= \frac{\theta_t - 1}{\theta_t}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Ved at indsætte  $\frac{p_t^{(i)}}{P_t} = 1$  og (A.50) i (A.48) fås den aggregerede profit:

$$\begin{aligned}
\Pi_t &= Y_t - \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} Y_t \\
&= Y_t \left( 1 - \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \right) \\
&= Y_t \left( \frac{1}{\theta_t} \right) \\
&\Leftrightarrow \Pi_t = \frac{Y_t}{\theta_t}.
\end{aligned} \tag{A.51}$$

### Udledning af renten som funktion af $\tilde{k}_t$

Lejesatsen på kapital er givet ved marginalproduktet på kapital ganget med den inverse af monopolistens avancetillæg:

$$r_t^k = \frac{p_t^{int}}{P_t} \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \alpha \left( \frac{Y_t}{K_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{A.52}$$

Da produktionsfunktionen  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$  er homogen af 1. orden, gælder det, at  $c \cdot Y_t = c \cdot F(K_t, A_t L_t) = F(c \cdot K_t, c \cdot A_t L_t)$ . Denne regel udnyttes til at dividere  $Y_t$  og  $K_t$  med  $A_t L_t$ , så  $MPK = \alpha \left( \frac{Y_t}{K_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$  udtrykkes som funktion af produktion og kapital per effektiv arbejder:

$$\begin{aligned}
MPK &= \alpha \left( \frac{Y_t/A_t L_t}{K_t/A_t L_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&= \alpha \left( \frac{\tilde{y}_t}{\tilde{k}_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&= \alpha \left( \frac{\left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{\tilde{k}_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&= \alpha \left( \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \tilde{k}_t^{\frac{-1}{\sigma}} \\
&= \alpha \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot \tilde{k}_t^{\frac{-1}{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Det følger, at

$$r_t^k = \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} \alpha \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot \tilde{k}_t^{\frac{-1}{\sigma}}.$$

Udtrykket for  $MPK$  kan da differentieres mht.  $\tilde{k}_t$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial MPK}{\partial \tilde{k}_t} &= \frac{\alpha}{\sigma-1} \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{1}{\sigma-1}-1} \cdot \alpha \frac{\sigma-1}{\sigma} \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \cdot \tilde{k}_t^{\frac{-1}{\sigma}} \\
&\quad + \alpha \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot \left( -\frac{1}{\sigma} \tilde{k}_t^{\frac{-1}{\sigma}-1} \right) \\
&= \frac{\alpha^2}{\sigma} \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{1-(\sigma-1)}{\sigma-1}} \cdot \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1-\sigma-1}{\sigma}} \\
&\quad - \frac{\alpha}{\sigma} \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot \tilde{k}_t^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}} \\
&= \frac{\alpha^2}{\sigma} \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \tilde{k}_t^{\frac{-2}{\sigma}} \\
&\quad - \frac{\alpha}{\sigma} \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tilde{k}_t^{\frac{-1-\sigma}{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Det følger af  $r_t^k = \frac{\theta_t-1}{\theta_t} \cdot MPK$ , at

$$\frac{\partial r_t^k}{\partial \tilde{k}_t} = \frac{\theta_t-1}{\theta_t} \cdot \left[ \frac{\alpha^2}{\sigma} \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \tilde{k}_t^{\frac{-2}{\sigma}} - \frac{\alpha}{\sigma} \left( \alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tilde{k}_t^{\frac{-1-\sigma}{\sigma}} \right].$$

Det gælder, at  $\frac{\partial r_t^k}{\partial \tilde{k}_t} < 0$  for alle  $\tilde{k}_t > 0$ , når  $0 < \alpha < 1$  og  $\sigma > 0$ .

### Ligninger i steady state

En balanceret vækststi er defineret som en stationær ligevægt, hvor de eksogene processer, herunder produktivitetsvæksten, fertiliteten og dødeligheden, er konstante. Således vil effektiv kapital, forbrug og indkomst per capita være konstante. I hhv. den første og sidste periode, hvor økonomien i modellen er i steady state, gælder følgende ligningssystem:<sup>66</sup>

$$\bar{N}_{1,1} = 1 \tag{A.53}$$

$$N_{j+1} = \frac{s_j N_j}{1+n} \quad \text{for } j \in \{1, J-1\} \tag{A.54}$$

$$\frac{1}{\beta} = \left( \frac{c_{j+1}}{c_j} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \cdot (1+r) + \lambda_{j+1} \frac{(c_j)^{\frac{1}{\rho}}}{su_j \beta^j} \quad \text{for } j \in \{1, J-1\} \tag{A.55}$$

$$x_j = \left( \frac{\Gamma^2}{\mu} \right)^{-\rho} \cdot c_j \quad \text{for } j \in \{J=74\} \tag{A.56}$$

$$a_j = 0 \quad \text{for } j \in \{1\} \tag{A.57}$$

$$a_{j+1} = \frac{(1+r)a_j}{s_{j-1}} + ((1-\tau)w \cdot hc_j + (1-\tau_p)\Pi_j)(1+g^A)^j - c_j \tag{A.58}$$

$$\text{for } j \in \{1, \dots, 42\} \setminus \{24\}$$

---

<sup>66</sup>Ligning (10) gælder kun i den første steady state i 1970 ( $t=1$ ). I den terminale steady state i 2170 ( $T=201$ ) sættes  $N_1$  til en lavere værdi, så den passer med den forudgående befolkningsudvikling. Størrelsen på de øvrige kohorter vil da være givet ud fra ligning (A.54).

$$a_{j+1} = \frac{(1+r)a_j}{s_{j-1}} + ((1-\tau)w \cdot hc_j + (1-\tau_p)\Pi_j + q_j)(1+g^A)^j - c_j \quad (\text{A.59})$$

for  $j \in \{24\}$

$$q_j = \frac{x_J \cdot \Gamma^2 \cdot N_J}{N_j} \quad \text{for } j \in \{25\} \quad (\text{A.60})$$

$$a_{j+1} = \frac{(1+r) \cdot a_j}{s_{j-1}} + dw(1+g^A)^j - c_j, \quad \text{for } j \in \{43, \dots, J-1\} \quad (\text{A.61})$$

$$c_j = \frac{(1+r) \cdot a_j}{s_{j-1}} - \Gamma^2 \cdot x_j + dw(1+g^A)^j, \quad \text{for } j \in \{J=74\} \quad (\text{A.62})$$

$$\min(\lambda_j, a_j + (D_j \cdot w \cdot hc_j) \cdot (1+g^A)^j) = 0, \quad \text{for } j \in \{1, \dots, 42\} \quad (\text{A.63})$$

$$\min(\lambda_j, a_j) = 0 \quad \text{for } j \in \{43, \dots, J\} \quad (\text{A.64})$$

$$\Pi_j = \frac{hc_j \cdot \Pi}{L} \quad \text{for } j \in \{1, \dots, 42\} \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{p^{int}}{P} = \frac{\theta - 1}{\theta} \quad (\text{A.66})$$

Jf. Eggertsson m.fl. (2019b) anvendes lønnen  $w$  i periode 1, hvor modellen starter i steady state, som numeraire  $A_{adj}$ . Dette tillader, at variablene i modellen kan sammenlignes med hinanden, idet de måles i enheder af reallønnen i steady state i periode 1.<sup>67</sup>

$$A_{adj} = \frac{p^{int}}{P} \cdot \left( \alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \cdot (A \cdot L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot (1-\alpha) A^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \cdot L^{\frac{-1}{\sigma}} \quad (\text{A.67})$$

$$w = \frac{\frac{p^{int}}{P} \cdot \left( \alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \cdot (A \cdot L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot (1-\alpha) A^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \cdot L^{\frac{-1}{\sigma}}}{A_{adj}} \quad (\text{A.68})$$

$$r^k = \frac{\frac{p^{int}}{P} \cdot \left( \alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(AL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot \alpha K^{\frac{-1}{\sigma}}}{A_{adj}} \quad (\text{A.69})$$

$$Y = \frac{\left( \alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(AL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{A_{adj}} \quad (\text{A.70})$$

$$r = r^k - \delta \quad (\text{A.71})$$

$$\Pi = \frac{Y}{\theta} \quad (\text{A.72})$$

$$F \cdot G = ((1+g^A) \cdot (1+n) - 1) \cdot B \quad (\text{A.73})$$

$$B = b \cdot Y \quad (\text{A.74})$$

$$G = g \cdot Y + r \cdot B + E \quad (\text{A.75})$$

$$\tau = \frac{G \cdot (1-F) - \tau_p \Pi}{w \cdot L} \quad (\text{A.76})$$

$$N = \sum_{j=1}^J N_j \quad (\text{A.77})$$

---

<sup>67</sup>Det følger, at  $w \equiv 1$  i 1970.

$$L = \sum_{j=1}^J N_j \cdot h c_j \quad (\text{A.78})$$

$$C = \sum_{j=1}^J N_j c_j / (1 + g^A)^j \quad (\text{A.79})$$

$$K = \sum_{j=1}^J \frac{N_j a_j}{s_{j-1} (1 + g^A)^j} - B \quad (\text{A.80})$$

$$d = \bar{d} \cdot (1 - \tau) w \quad (\text{A.81})$$

$$E = \sum_{j=43}^J dw \cdot N_j \quad (\text{A.82})$$



## Appendiks C: Supplerende resultater

Dette afsnit indeholder resultater fra analysen, der ikke er prioriteret medtaget i specialet af hensyn til relevans og plads.

Tabel A1: Parameterværdier i baseline

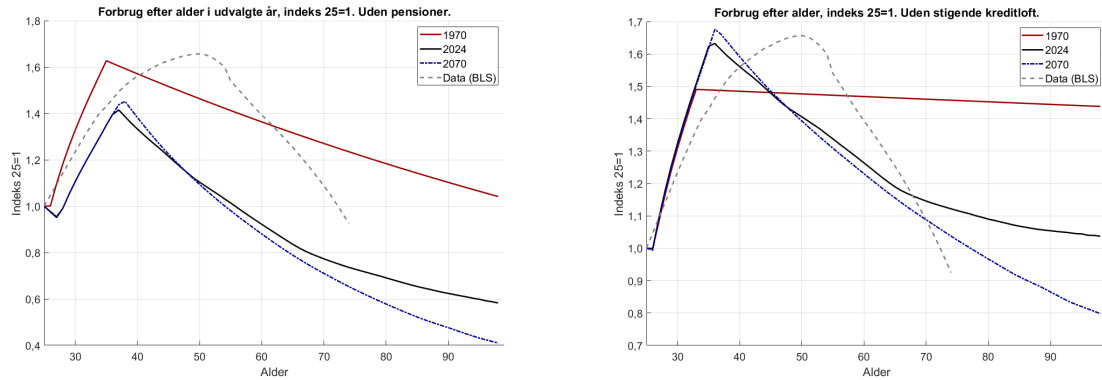
Parameter	Med pensioner	Uden pensioner
$\alpha$	0,3999	0,3999
$\beta$	0,9786	0,9720
$\mu$	13,400	23,449
$\theta_1$	6,9474	6,9476
$\theta_T$	3,9999	4,0768
$D_1$	0,1370	0,1164
$D_T$	0,7000	0,6086
$\bar{d}$	0,505	0

Tabel A2: Scenarie uden babyboom: isolering af drivkræfter (1970-2024)

Eksogen variable	$r^*$ i 2024 (pct.)	Bidrag (pp)
Dødelighed ( $s_j$ )	3,05	-1,12
Fertilitet ( $\Gamma_t$ )	2,36	-0,44
Produktivitetsvækst ( $g_t^A$ )	3,16	-1,23
Statsgæld ( $b_t$ )	1,13	0,80
Konkurrence ( $\theta_t$ )	2,43	-0,50
Kreditloft ( $D_t$ )	1,71	0,22

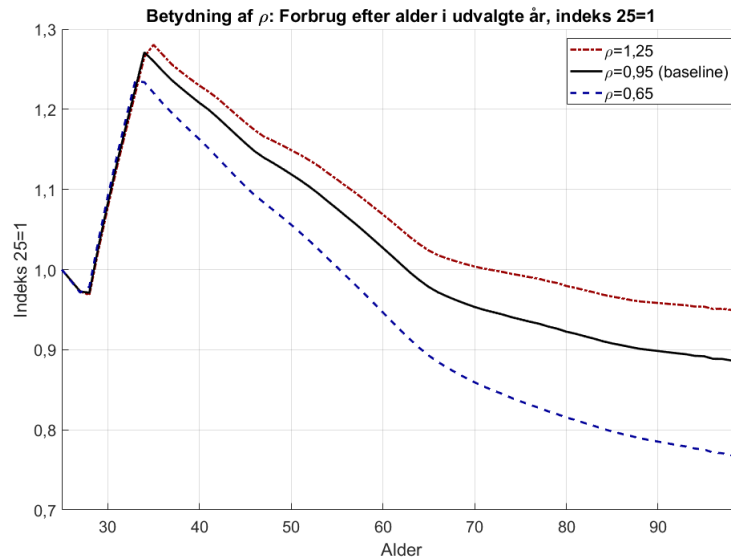
Anm.: Tabellen viser den simulerede rente i 2024, når den pågældende eksogene variabel holdes konstant på sin værdi i 1970. Vækstbidraget beregnes ved at sammenligne med baseline, *uden* at babyboomet fandt sted, hvor renten er lig 1,93 pct. i 2024, svarende til et samlet fald på 2,08 pp fra 1970 (hvor renten er 4 pct.). Summen af vækstbidragene er ikke lig det samlede fald grundet interaktionseffekter. Kilde: egne beregninger.

Figur A2: Forbrugsprofil uden pensioner (v.) og uden stigning i  $D_{j,t}$  (h.)



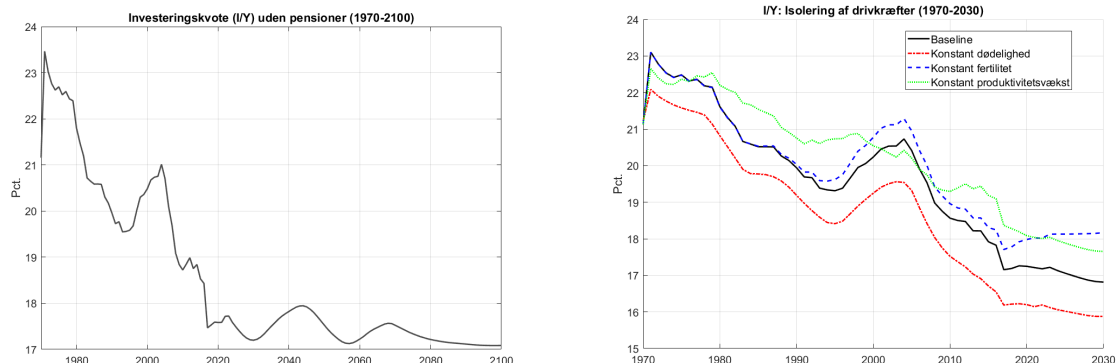
Anm.: Figuren til venstre viser forbrugskurverne for udvalgte år i modellen uden pensioner. Figuren til højre viser forbrugskurverne (med pensioner), hvor kreditloftet  $D_{j,t}$  holdes fast på niveauet i 1970. I alle simulationer er modellen rekalereret efter de samme momenter. Data fra BLS er beregnet vha. kubisk interpolation. Kilde: BLS (2023) og egne simuleringer.

Figur A3: Forbrugsprofil ved forskellige værdier af  $\rho$



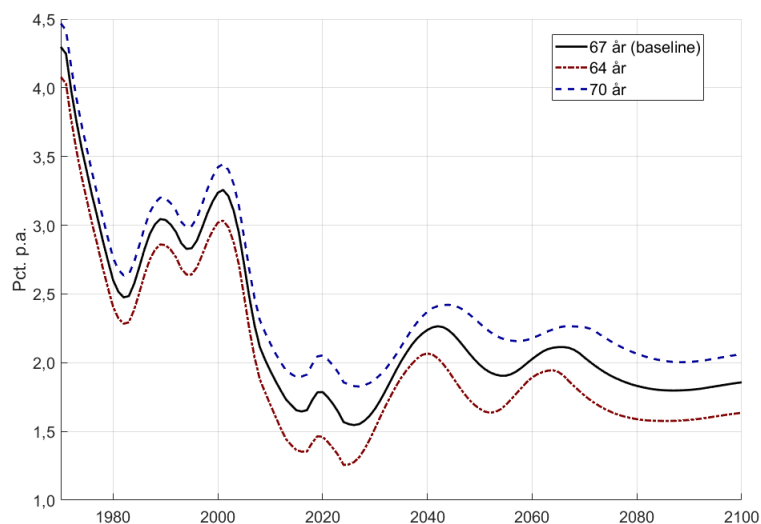
Anm.: Figuren viser forbrugsprofilen i modellen (med pensioner) i 2024 ved forskellige værdier af den intertemporale substitutionselasticitet  $\rho$ . I alle simulationer er modellen rekalereret efter de samme momenter. Kilde: egen simulering.

Figur A4: Investeringskvote uden pensioner (v.) og konstant eksogen variation (h.)



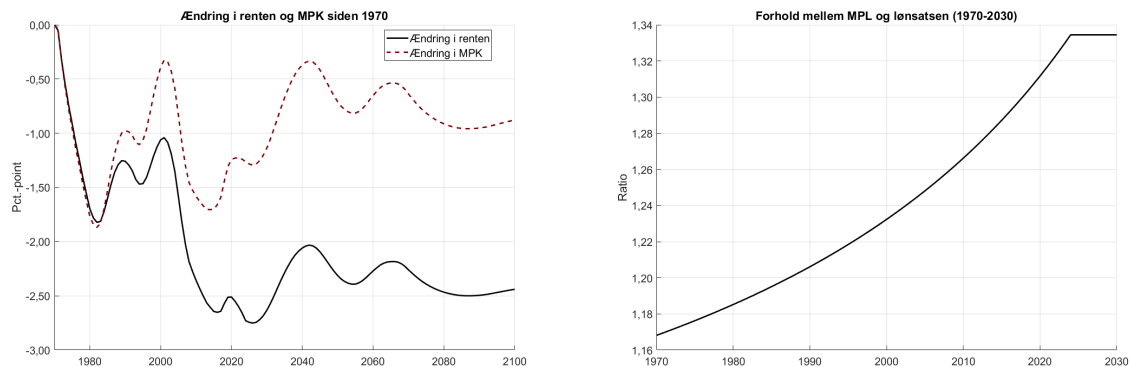
Anm.: Figuren til venstre viser investeringskvoten i modellen *uden* pensioner i pct. af BNP. Figuren til højre viser investeringskvoten i modellen *med* pensioner, hvor de enkelte eksogene variable holdes konstante på niveauet i 1970. Kilde: egen simulering.

Figur A5:  $r^*$  ved forskellige pensionsaldrer (1970-2100)



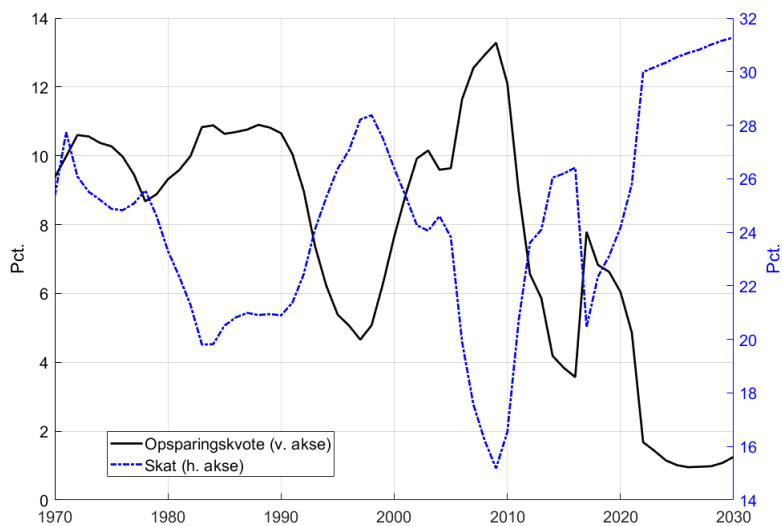
Anm.: Figuren viser udviklingen i den simulerede rente (med pensioner), når pensionsalderen er hhv. tre år lavere eller højere end i baseline. I alle tre simulationer anvendes den samme kalibrering, hvorfor renten ikke starter i samme punkt i 1970. I 2100 er  $r^*$  hhv. ca. 21 bp lavere/højere end i baseline. I simulationen, hvor pensionsalderen er 70 år, er  $hc_j$  for  $j \in \{43, 44, 45\}$  sat lig  $hc_{42}$ . Kilde: egen simulering.

Figur A6: Udvikling i faktorpriser og marginalproduktet på kapital (v.) og arbejdskraft (h.)



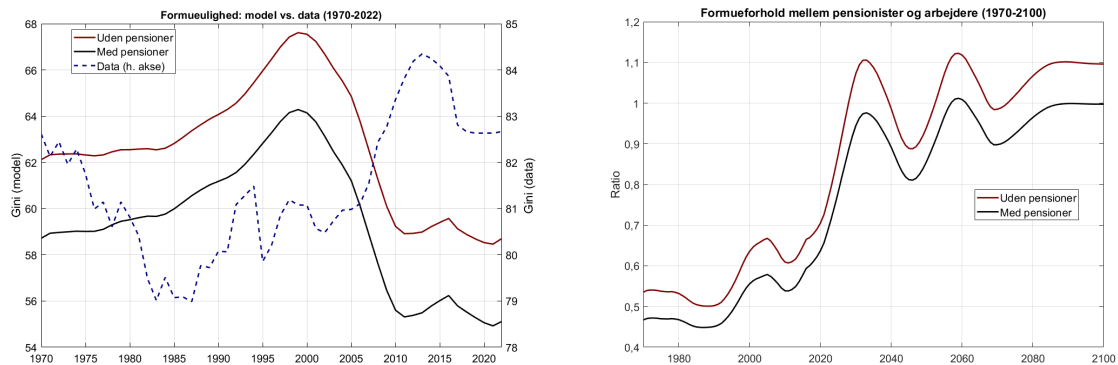
Anm.: Figuren til venstre viser den akkumulerede ændring i renten og marginalproduktet på kapital i baseline. Figuren til højre viser marginalproduktet på arbejdskraft divideret med lønsatsen. Kilde: egen simulering.

Figur A7: Husholdningernes opsparingskvote og skattesatsen (1970-2030)



Anm.: Figuren viser udviklingen i husholdningernes nettoopsparingskvote givet i (52) og skattesatsen  $\tau_t$ . Kilde: egen simulering.

Figur A8: Formueulighed



Anm.: Figuren til venstre sammenligner udviklingen i gini-koefficienten (ganget med 100) for formuefordelingen i modellen (v. akse) med data for USA (h. akse) i 1970-2022. Figuren til højre viser udviklingen i pensionisternes samlede formue i forhold til arbejdernes. Kilde: WID (2024) og egne beregninger.

Figur A8 (venstre) viser udviklingen i gini-koefficienten for formueuligheden i mellem 1970-2022.<sup>68</sup> Det viser sig, at formueuligheden stiger indtil 2000, hvorefter den falder og stabiliserer sig på et niveau, der er lavere end i 1970. I modellen med pensioner, bliver gini-koefficienten 55 i 2024 og 52 i 2100. I modellen uden pensioner bliver uligheden højere, da der her ikke er nogen omfordeling mellem arbejdere og pensionister. Udviklingen i uligheden i modellen stemmer delvist overens med empirien, som viser en stigende ulighed mellem 1985-2012. Det kan således ikke afvises, at noget af stigningen i uligheden i denne periode kan tilskrives demografiske faktorer. På lang sigt forudsiger modellen, at uligheden falder. Dette skyldes, at en større andel af befolkningen vil udgøres af pensionister, som har en mere homogen indkomstprofil. Samtidig vil andelen af yngre husholdninger falde, som er kendetegnet ved at have små eller negative nettoformuer. At uligheden falder på lang sigt stemmer med G&P, som ligeledes spår, at uligheden i indkomst vil falde som følge aldring. Deres forklaring bygger dog på den præmis, at lønandelen vil stige, da arbejdskraft bliver mere knap (Goodhart og Pradhan, 2020).<sup>69</sup> Ikke desto mindre viser modellen, at den demografiske udvikling i sig selv vil lægge et nedadgående pres på formueuligheden. Det bemærkes i øvrigt, at niveauet i uligheden i modellen er betydeligt lavere end i empirien, hvilket følger af antagelsen om identiske husholdninger.

I figur A8 til højre fremgår det, at pensionisternes formue målt i forhold til arbejdernes formue stiger igennem det meste af perioden. På lang sigt vil pensionisterne eje halvdelen af den samlede formue i økonomien. Dette står ikke i kontrast til, at uligheden samtidig falder, da en større del af befolkningen vil udgøres af pensionister.

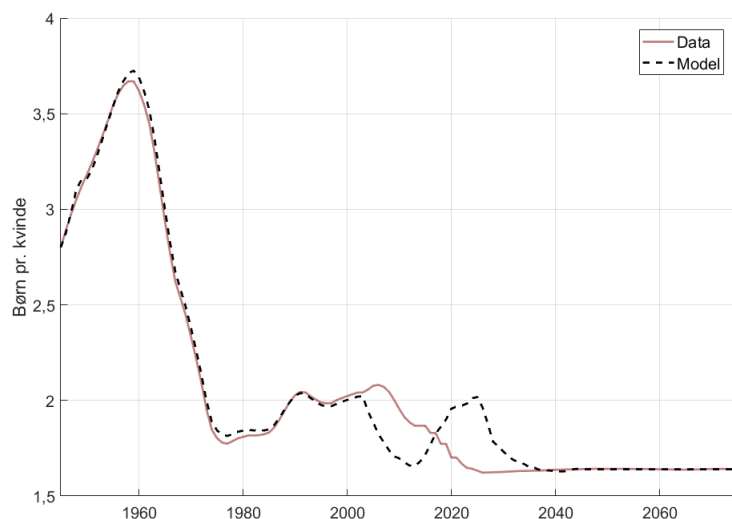
<sup>68</sup>Gini-koefficienten er beregnet med formlen beskrevet i Hasell (2023).

<sup>69</sup>I modellen har den faldende lønandel mellem 1970-2024 ingen effekt på uligheden blandt arbejdere, da virksomhedernes profit fordeles efter lønindkomsten, jf. (38).

## Appendiks D: Supplerende data

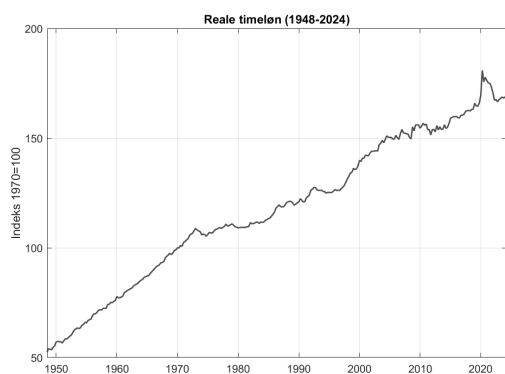
I dette afsnit vises forskellige data og empiri, hvoraf dele er anvendt i specialet, mens andre er inkluderet for referencens skyld.

Figur A9: Fertilitet

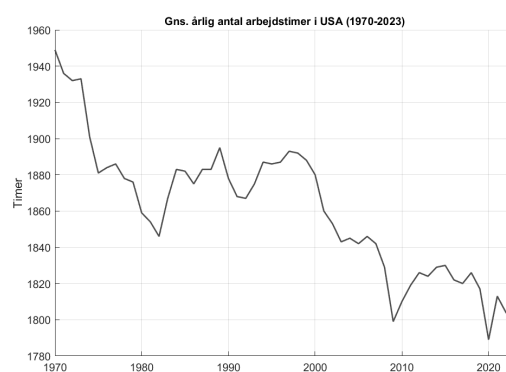


Anm.: Figuren viser fertilitetskvotienten i modellen (baseline) og sammenligner med data for USA 1945-2075. Fremskrivning fra FN's mellemscenarie efter 2023. Kilde: CDC (2023), FN (2024) og egne beregninger.

Figur A10: Realløn (a) og arbejdstimer i USA (b).

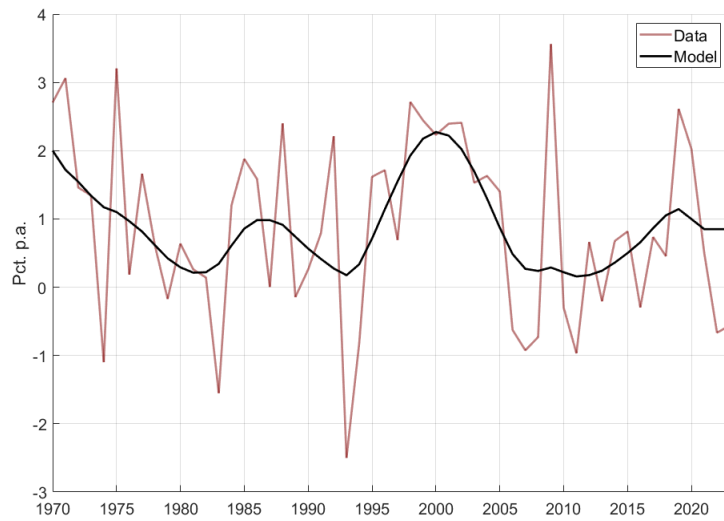


(a) Udvikling i den reale timeløn i USA 1948-2024K2. Indeks 1970=100. Kilde: BLS (2024).



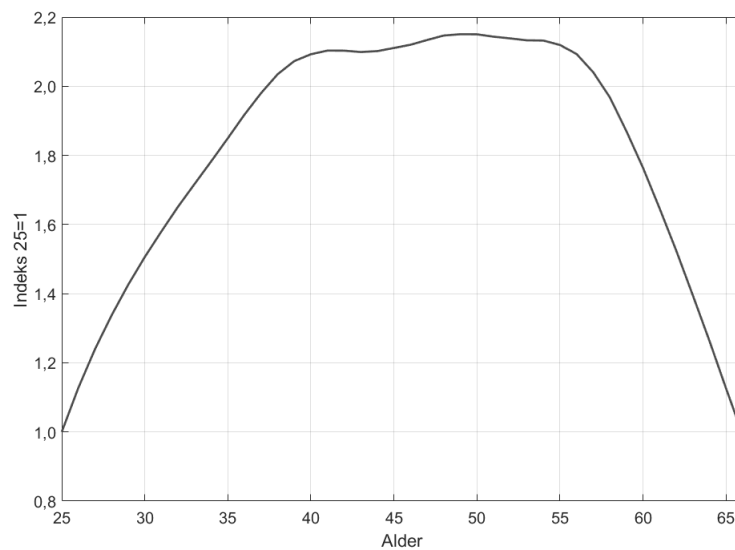
(b) Gennemsnitligt årlig antal arbejdstimer per arbejder i USA i 1970-2023. Kilde: OECD (2024a).

Figur A11: Produktivitetsvækst



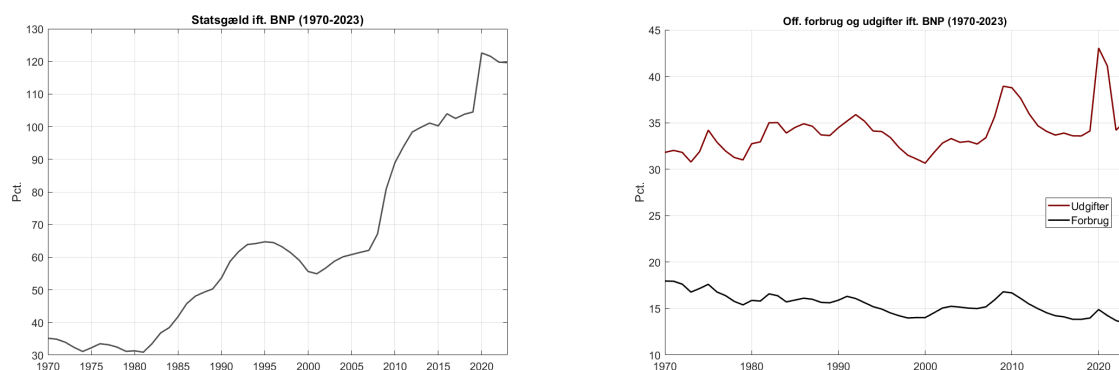
Anm.: Figuren viser den årlige produktivitetsvækst (TFP) i USA justeret for kapacitetsudnyttelse. I modellen udglattes denne med et HP-filter,  $\lambda = 10$ . Værdien i 1970 er sat til 2 pct., mens den er sat til 0,85 pct. efter 2020. Kilde: Fernald (2024) og egne beregninger.

Figur A12: Indkomstprofil efter alder



Anm.: Figuren viser humankapitalprofilen  $h_{c_j}$ . Data er baseret på den gennemsnitlige arbejdsindkomst (både lønmodtagere og selvstændige) efter alder i USA i 2011. Kilde: NTA (2017).

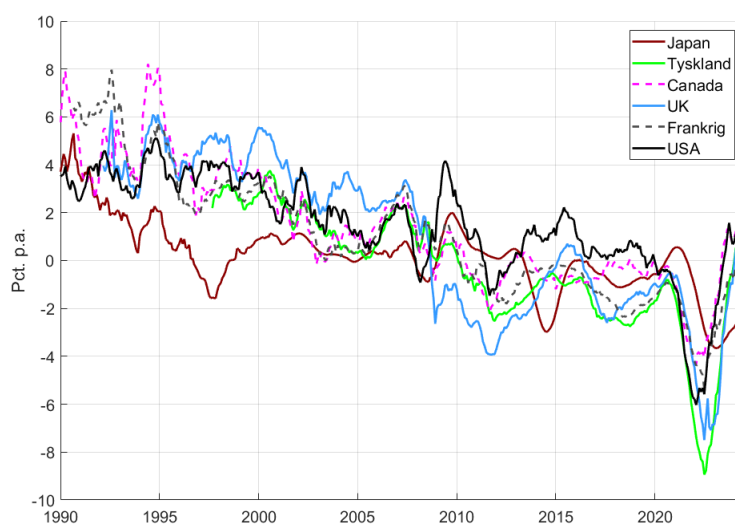
Figur A13: Statsgæld (a) og offentlige udgifter (b) i USA (1970-2023)



(a) Anm.: Viser den amerikanske statsgæld som andel af BNP. Omfatter al gæld forbundsstaten skylder offentligheden. Kilde: FRED (2024d), seriekode: GFDEGDQ188S.

(b) Anm.: Viser de samlede offentlige udgifter og forbrugsudgifter ekskl. investeringer, overførsler og renteudgifter som andel af BNP. Kilde: FRED (2024d), BEA (2024b) og egne beregninger.

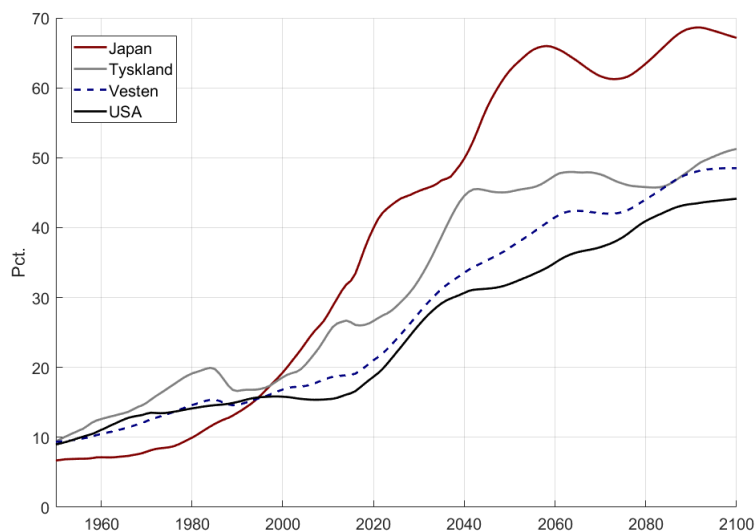
Figur A14: Realrenter i udviklede økonomier (1990-2024)



Anm.: 1-årige effektive realrenter på statsobligationer for Japan, Tyskland og USA. 2-årige effektive realrenter på statsobligationer for Canada, Frankrig og Storbritannien. Realrenterne er beregnet ved at subtrahere den udglattede inflation (HP-filter,  $\lambda = 100$ ) fra den nominelle rente. Seneste observation er fra juli 2024. Kilde: Bloomberg (2024) og egne beregninger.

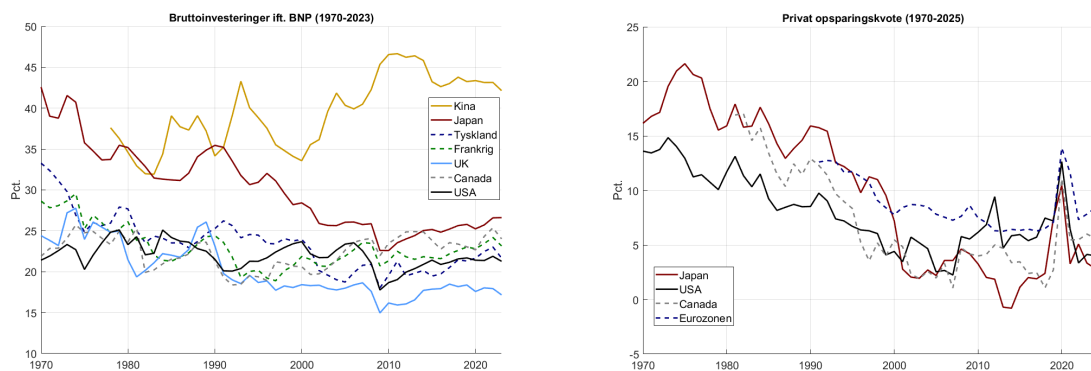


Figur A15: 70+-årige ift. 25-69-årige i udviklede økonomier (1950-2100)



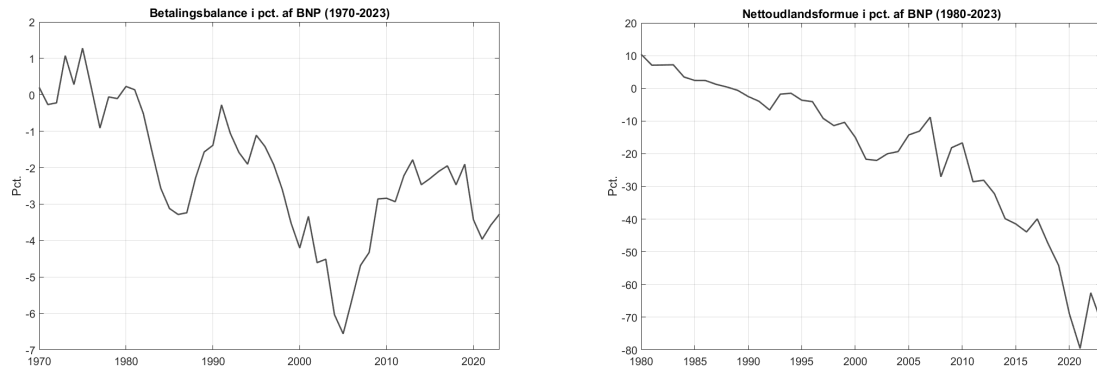
Anm.: Figuren viser afhængighedsforholdet mellem antallet af 70+-årige ift. antallet af 25-69-årige. Fremskrivning fra FN's mellemscenarie efter 2023. Vesten dækker over Nordamerika, Europa, Australien og New Zealand. Kilde: FN (2024).

Figur A16: Bruttoinvesteringer og opsparingskvote i udviklede økonomier



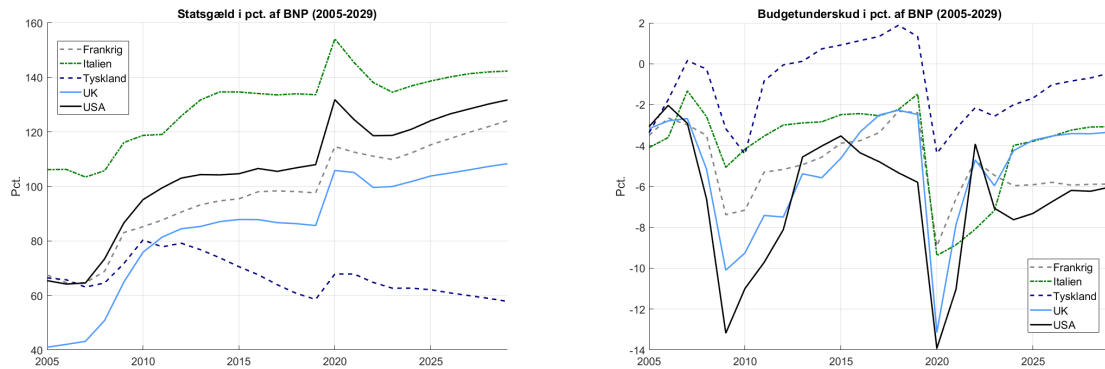
Anm.: Figuren til venstre viser bruttoinvesteringerne ift. BNP. Figuren til højre viser husholdningernes opsparingskvote målt ift. deres disponible indkomst. Prognose efter 2024. Kilde: OECD (2024b) og OECD (2024c).

Figur A17: USA's betalingsbalance og nettoudlandsformue



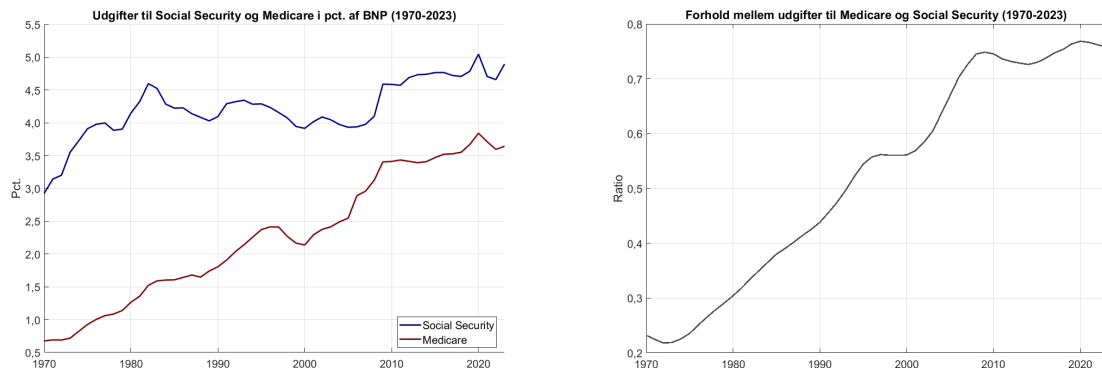
Anm.: Figuren til venstre viser udviklingen i USA's betalingsbalance i pct. af BNP. Figuren til højre viser udviklingen i USA's nettoudlandsformue i pct. af BNP. Kilde: BEA (2024a) og egne beregninger.

Figur A18: Statsgæld og budgetunderskud i avancerede økonomier



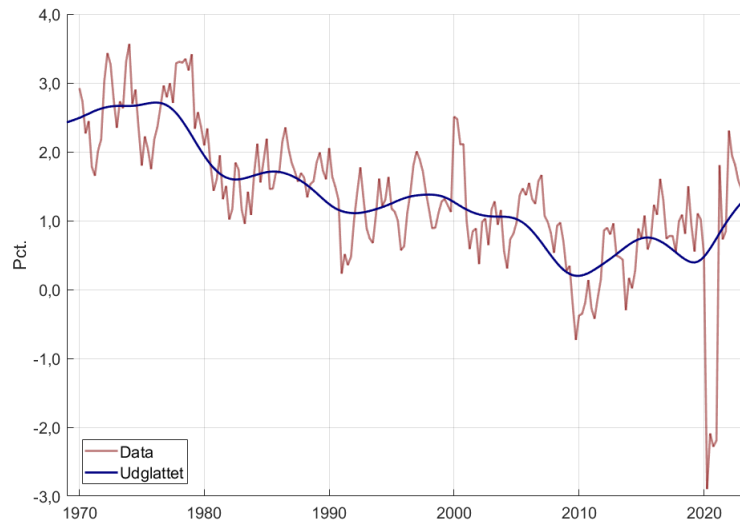
Anm.: Figuren til venstre viser bruttostatsskølden i pct. af BNP. Figuren til højre viser staternes budgetunderskud i pct. af BNP (nettolåntagning). Prognose efter 2023. Kilde: IMF (2024).

Figur A19: Udgifter til Social Security og Medicare ift. BNP



Anm.: Figuren til venstre viser de offentlige udgifter til Social Security og Medicare i pct. af BNP. Figuren til højre viser udgifterne til Medicare divideret med udgifterne til Social Security (glidende 5-årigt gennemsnit). Kilde: FRED (2024e) og egne beregninger.

Figur A20: Årlig vækstrate i arbejdsstyrken i USA (1970K1-2024K3)



Anm.: Figuren viser den årlige vækstrate i arbejdsstyrken i USA, både i original form og udglattet med et HP-filter ( $\lambda = 100$ ). Kilde: FRED (2024b) og egne beregninger.

## Appendiks E: Kode og kontakt

Modellen anvendt i specialet er simuleret i programmet Matlab med udvidelsen Dynare 6.0. Koden til at simulere modellen i baseline ligger tilgængelig på Github.<sup>70</sup> Koden er udarbejdet med udgangspunkt i Crescentini og Giri (2023). Spørgsmål angående specialet kan sendes til mailadressen valder@fredens.net.

---

<sup>70</sup>Se link: <https://github.com/mhz379/Speciale.git>