Inhaltsverzeichnis

1 Was sind Mengen?

Mengen sind ein wichtiges und grundlegendes Konzept in der Mathematik. Sie werden Ihnen im Studium immer wieder begegnen.

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von Objekten, die Elemente von M genannt werden. Prinzipiell könnten Mengen beliebige Elemente enthalten (etwa Knöpfe, Haustiere, Zahlen), in der Regel handelt es sich aber um mathematische Objekte, zum Beispiel um Zahlen.

Betrachten wir als Beispiel die Menge, deren Elemente die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 sind. Diese wird in der Form $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ geschrieben – um die Elemente werden geschweifte Klammern gemacht. Mengen werden oft mit Großbuchstaben bezeichnet, etwa $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Bei einer Menge kommt es auf die Reihenfolge, in der die Elemente hingeschrieben werden, nicht an; so sind beispielsweise die Mengen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $\{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7\}$ gleich. Dass dies so ist, liegt an folgender Vereinbarung, die wir gleich als Merkregel formulieren:

1.1 Merkregel: Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn jedes Element aus M auch in N liegt und umgekehrt jedes Element in N auch in M liegt.

Wie ist es aber hier? Sind $\{1, 1, 2, 3, \}$ und $\{1, 2, 3\}$ gleich? Ja, diese Mengen sind gleich, denn jedes Element aus der Menge $\{1, 1, 2, 3\}$ liegt in $\{1, 2, 3\}$ und umgekehrt liegt jedes aus $\{1, 2, 3\}$ in $\{1, 1, 2, 3\}$. Allgemein gilt:

1.2 Merkregel: Kommt in einer Menge ein Element mehrfach vor, so ist diese Menge dieselbe wie die, in der das Element nur einmal vorkommt.

In einer Menge schreibt man daher ein Element nur ein Mal hin; dann sind alle Elemente verschieden.

Zusammenfassend können wir festhalten:

1.3 Zusammenfassung: Eine Menge ist eine nicht geordnete Zusammenfassung verschiedener Elemente.

Wenn M eine Menge und a ein Element aus M ist, dann schreibt man dafür $a \in M$ und sagt dafür „a ist ein Element von (oder aus) M“.

1.1 Wie Mengen beschrieben werden

Nehmen wir mal an, wir hätten die Aufgabe, selbst eine Menge zu definieren, also anzugeben, welche Elemente zu dieser Menge gehören und welche nicht. Wie macht man so etwas? Natürlich gibt es keine allgemeingültige Antwort auf diese Frage, denn das hängt ja von der speziellen Situation ab. Aber machen wir ein Beispiel:

1.4 Beispiel: Nehmen wir an, wir möchten die Menge aller durch 3 teilbaren *ganzen Zahlen* beschreiben. Diese Menge werden wir im Folgenden mit M_3 bezeichnen. Es gibt unendlich viele durch 3 teilbare Zahlen, also können wir sie nicht alle hinschreiben und Klammern darum machen. Aber wir können uns mit Pünktchen helfen, etwa so:

$$M_3 = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}.$$

Durch die Pünktchen-Schreibweise haben wir dabei darauf gesetzt, dass diejenigen, die unsere Beschreibung von M_3 lesen, das Bildungsgesetz schon verstehen werden, und das ist hier vermutlich auch der Fall. Manchmal ist so eine Auflistung aller Elemente oder eine selbsterklärende Pünktschreibweise schlicht nicht möglich, und dann versucht man, die Elemente durch Eigenschaften, die sie besitzen müssen, zu beschreiben. Dabei verwendet man folgenden formalen Aufbau: Nach der sich öffnenden Klammer schreibt man zunächst, aus welchem größeren Kontext die Elemente stammen sollen. Etwa, ob es *natürliche Zahlen*, ganze Zahlen, oder Zahlen aus einem anderen Zahlbereich sind. Dann folgt ein senkrechter Strich $|$, der als „für die gilt“ gelesen wird. Nach dem senkrechten Strich kommt dann die Charakterisierung der Elemente, und abeschlossen wird das Ganze durch eine schließende Klammer $\}$. In unserem Beispiel für die Menge M_3 etwa:

1.5 Beispiel:

$$M_3 = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \text{ ist durch 3 teilbar}\}.$$

Gelesen wird das als „M_3 ist die Menge aller ganzen Zahlen k, für die gilt, dass k durch 3 teilbar ist.

Was Sie hier sehen ist einfach ein in Formeln ausgedrückter umgangssprachlichet Text, und auf diese Weise werden in der Mathematik nahzu alle Mengen beschrieben.

1.6 Aufgabe: Beschreiben Sie die folgende Menge ohne Pünktchen-Schreibweise:

1. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\}$
2. $\{1, 4, 9, 16, 25 \ldots\}$

Lösung:

1. $\{n \in \mathbb{N} | \, n \text{ ist ungerade}\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} | \, n \text{ ist Quadratzahl}\}$

1.7 Zusammenfassung: Mengen werden in der Regel durch eine Charakterisierung ihrer Elemente beschrieben.

1.2 Mächtigkeit von Mengen und die leere Menge

Falls eine Menge M nur endlich viele Elemente enthält, so sagen wir, dass M eine endliche Menge ist. Die Anzahl ihrer Elemente wird die Mächtigkeit von M genannt und mit $|M|$ bezeichnet. Zwei endliche Mengen, die gleich viele Elemente besitzen, heißen gleichmächtig.

1.8 Beispiel: Die Mengen

$$M = \{3, 4, 5, 6, 7\} \text{ und } F = \{\text{rot}, \text{grün}, \text{gelb}, \text{blau}, \text{weiß}\}$$

sind endliche Mengen. Es sind $|M| = 5$ und $|F| = 5$, also haben beide Mengen die Mächtigkeit 5, sind also gleichmächtig.

Ein Spezialfall einer endlichen Menge ist die sogenannte **leere Menge**. Diese Menge enthält kein einziges Element, und sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Es ist $|\emptyset| = 0$.

Falls M unendlich viele Elemente enthält, so sagen wir, dass M eine **unendliche** Menge ist. Man sagt dann auch, dass die Mächtigkeit von M unendlich ist. Für den Begriff „unendlich“ gibt es eine mathematische Abkürzung, nämlich ∞, und wenn man formal ausdrücken will, dass die Mächtigkeit von M unendlich ist, schreibt man $|M| = \infty$.

1.9 Beispiel: Da es unendlich viele *natürliche Zahlen* gibt, gilt $|\mathbb{N}| = \infty$.

Der Begriff der Gleichmächtigkeit von Mengen, den wir für endliche Mengen kennen gelernt haben, lässt sich für unendliche Mengen nicht so einfach verallgemeinern.

1.10 Zusammenfassung: Der Begriff der Mächtigkeit $|M|$ einer Menge M drückt aus, wie viele Elemente M enthält. Dabei gilt

- $|\emptyset| = 0$
- $|M| = n$, falls M endlich ist und n Elemente enthält
- $|M| = \infty$, falls M eine unendliche Menge ist.

1.3 Teilmengen und echte Teilmengen

Wenn M und N Mengen sind, und wenn jedes Element aus M auch in N liegt, dann sagt man, dass M eine **Teilmenge** von N ist und schreibt dafür $M \subseteq N$. Manchmal wird auch die Schreibweise $M \subset N$ verwendet. Gilt $M \subseteq N$, so sagt man auch, dass N eine **Obermenge** von M ist.

1.11 Beispiel: Hier einige Beispiel für Teilmengen:

- $\{2, 4, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\{2, 4, 6\} \subseteq \mathbb{N}$
- $\{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ist gerade}\} \subseteq \mathbb{N}$
- $M \subseteq M$ gilt für jede Menge M.
- $\emptyset \subseteq M$ gilt für jede Menge M.

Wenn $M \subseteq N$ gilt, und wenn es in N Elemente gibt, die nicht schon in M liegen, dann sagen wir, dass M eine echte Teilmenge von N ist. Dafür schreibt man $M \subsetneq N$, manchmal wird auch die Schreibweise $M \subset N$ verwendet.

1.12 Beispiel: Hier einige Beispiele für echte Teilmengen:

- $\{2, 4, 6\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\{2, 4, 6\} \subsetneq \mathbb{N}$
- $\{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ist gerade}\} \subsetneq \mathbb{N}$
- $\emptyset \subsetneq M$ gilt für jede Menge M, die mindestens ein Element enthält.

Warnung:
Vorsicht: Um die (echte) Teilmengenbeziehung zwischen Mengen auszudrücken, sind verschiedene mathematische Bezeichnungen üblich.

1.4 Durchschnitt und disjunkte Mengen

Wenn M und N Mengen sind, dann kann es sein, dass es Elemente gibt, die sowohl in M als auch in N liegen. Solche Elemente werden im sogenannten Durchschnitt von M und N zusammengefasst, und dieser wird mit $M \cap N$ bezeichnet und „M geschnitten N“ ausgesprochen. Formal ist der Durchschnitt wie folgt definiert:

1.13 Definition: Der Durchschnitt $M \cap N$ von zwei Mengen M und N ist die Menge

$$M \cap N = \{a \mid a \in M \text{ und } a \in N\}.$$

1.14 Beispiel: Hier einige Beispiele für Durchschnitte von Mengen.

- Seien $M = \{1, 3, 5, 8\}$ und $N = \{3, 7, 8, 12\}$. Dann ist $M \cap N = \{3, 8\}$.
- Ist $M = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$ und $N = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq 0\}$, so ist $M \cap N = \{0\}$.
- Es ist $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

1.15 Aufgabe: Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen für alle Mengen M und N wahr sind.

- Wenn M und N unendliche Mengen sind, dann ist auch $M \cap N$ eine unendliche Menge.
- Wenn $M \cap N$ eine unendlichen Menge ist, dann sind M und N unendliche Mengen.
- Wenn M eine endliche und N eine unendliche Menge ist, dann ist $M \cap N$ eine endliche Menge.
- Wenn $M \cap N = M$ ist, dann ist M eine Teilmenge von N.

Lösung:

- Falsch. Hier ein Gegenbeispiel: Seien $M = \{a \in \mathbb{Z} \,|\, a \geq 0\}$ und $N = \{a \in \mathbb{Z} \,|\, a \leq 0\}$. Wegen Wegen $|M| = |N| = \infty$ sind M und N unendliche Mengen, jedoch ist $M \cap N$ endlich, da $M \cap N = \{0\}$.
- Wahr. $M \cap N$ ist eine Teilmenge von M und $M \cap N$ ist eine Teilmenge von N. Also haben M und N mindestens so viele Elemente wie $M \cap N$. Daher folgt $|M| = \infty$ und $|N| = \infty$.

- Wahr. Sei $|M| = n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und $|N| = \infty$. Da $M \cap N$ eine Teilmenge von M ist, gilt $M \cap N \leq |M|$. Also ist $M \cap N$ endlich.
- Wahr.$M \cap N$ ist Teilmenge von N. Da $M \cap N = M$ nach Voraussetzung gilt, ist auch M Teilmenge von N.

1.16 Definition: Wenn M und N Mengen sind, die kein gemeinsames Element besitzen, dann sagt man, dass M und N disjunkt sind.

Für disjunkte Mengen M und N gilt immer $M \cap N = \emptyset$.

1.17 Beispiel: Die Mengen $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{7, 8, 9\}$ sind disjunkt.

1.5 Vereinigung

Elemente von zwei Mengen M und N können wir in einer neuen Menge zusammenfassen und erhalten so die Vereinigungsmenge $M \cup N$, ausgesprochen „M vereinigt N“. Formal definiert wird sie durch:

1.18 Definition: Die Vereinung $M \cup N$ von zwei Mengen M und N ist die Menge

$$M \cup N = \{a \mid a \in M \text{ und/oder } a \in N\}.$$

1.19 Beispiel: Hier zwei Beispiele für Vereinigungsmengen:

- Sind $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{2, 3, 4, 5\}$, so ist $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Es ist $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$.

1.20 Aufgabe: Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen für alle Mengen M und N wahr sind.

- Wenn $M \cup N$ eine unendlichen Menge ist, dann ist mindestens eine der Mengen M oder N unendlich.
- Wenn $N = \emptyset$ ist, dann ist $M \cup N = M$.
- Wenn $M \cup N = M$ ist, dann ist N die leere Menge.

Lösung:

- Wahr. Wir nehmen an, dass beide Mengen M und N endlich seien, also $|M| = m$ und $|N| = n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Da $M \cup N$ nur die Elemente enthält, die in M und/oder N enthalten sind, besitzt $M \cup N$ maximal $m+n$ Elemente. Es folgt $|M \cup N| \leq m+n$, also dass $M \cup N$ eine endliche Menge ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $M \cup N$ unendlich ist. Also war die Annahme, dass M und N endliche Mengen sind, falsch, und es ist mindestens eine der beiden Mengen unendlich.
- Wahr. Es ist $M \cup N = M \cup \emptyset = M$.
- Falsch. Sei beispielsweise $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{1\}$. Dann ist $M \cup N = \{1, 2, 3\} = M$ und $N \neq \emptyset$,

1.6 Komplementärmenge

Wenn wir aus einer Menge M Elemente entfernen wollen, so gibt es dafür auch eine formale Schreibweise, die hier eingeführt werden soll.

1.21 Definition: Seien M und N Mengen. Die Menge $M \setminus N$ ist definiert als

$$M \setminus N = \{m \in M \mid m \notin N\}.$$

Ausgesprochen wird $M \setminus N$ als „M ohne N“. Man nennt $M \setminus N$ das **Komplement** oder die **Komplementärmenge** zu N in M. Auch üblich ist die Bezeichnung Differenzmenge M ohne N.

1.22 Beispiel: Einige Beispiel für Komplementärmengen:

- Wenn M und N disjunkt sind (also $M \cap N = \emptyset$), dann ist $M \setminus N = M$, denn es gibt kein Element, das entfernt wird.
- Sind $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{2, 3, 4, 5\}$, so ist $M \setminus N = \{1\}$.
- Wenn M eine Teilmenge von N ist, dann ist $M \setminus N = \emptyset$.

1.7 Kartesisches Produkt

Sind zwei Mengen M und N gegeben, so kann daraus eine neue Menge konstruiert werden.

1.23 Definition: Seien M und N Mengen. Dann ist

$$M \times N = \{(m, n) \,|\, m \in M, n \in N\}$$

das kartesische Produkt von M und N (ausgesprochen "M kreuz N"). Die Elemente von $M \times N$ nennt man geordnete Paare.

1.24 Beispiel: Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{4, 5\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} M \times N &= \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\} \\ &= \{(m, n) \,|\, m \in \{1, 2, 3\}, n \in \{4, 5\}\} \\ &= \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}. \end{aligned}$$

Wir sehen, warum die Elemente geordnete Paare heißen, denn $(1, 4) \in M \times N$, aber $(4, 1) \notin M \times N$. Es kommt bei den Paaren also auf die Reihenfolge an. Das erste Element liegt in M, und das zweite in N.

1.25 Beispiel: Sei $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(n, z) \,|\, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ und $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ gilt.

Es gilt $(1, 3), (3, 1), (1, -3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, aber $(-3, 1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Beachten Sie bitte, dass in der Regel $M \times N \neq N \times M$ gilt. So ist zum Beispiel

$\{4, 5\} \times \{1, 2, 3\} = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\} \neq \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}$.

1.26 Aufgabe: Sei $M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \,\text{ist gerade}\}$ und $N = \{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \,\text{ist durch 3 teilbar}\}$. Wahr oder falsch?

- $(4, 6)$ liegt in $M \times N$.
- $(-2, 3)$ liegt in $M \times N$.
- $(2, -3)$ liegt in $M \times N$.
- $(6, 6)$ liegt in $M \times N$.
- $(6, -6)$ liegt in $M \times N$.
- $(6, 4)$ liegt in $M \times N$.
- $(3, -2)$ liegt in $M \times N$.

- $(-3, 2)$ liegt in $M \times N$.
- $(-6, 6)$ liegt in $M \times N$.

Lösung:

- Wahr.
- Falsch, denn $-2 \notin M$.
- Wahr.
- Wahr.
- Wahr.
- Falsch, denn $4 \notin N$.
- Falsch, denn $3 \notin M$ (und $-2 \notin N$).
- Falsch, denn $-3 \notin M$ (und $2 \notin N$).
- Falsch, denn $-6 \notin M$.

2 Zahlenmengen

2.1 Natürliche und ganze Zahlen

Die einfachsten Zahlen, die wir schon im Kindergarten kannten, sind die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Sie werden **natürliche Zahlen** genannt, und die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, also

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

In anderen Büchern, Texten, Kursen fangen die natürlichen Zahlen manchmal auch schon bei 0 an, also

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

In diesem Vorkurs ist die 0 aber nicht in den natürlichen Zahlen enthalten. Möchten wir sie in die Menge einschließen, schreiben wir

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Wir haben gelernt, mit ihnen zu rechnen (addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren), und auf die Rechenregeln, die auch in anderen Zahlbereichen gelten, werden wir später zu sprechen kommen. Aber spätestens, wenn wir anfangen, natürliche Zahlen zu subtrahieren, werden wir feststellen, dass die Welt der natürlichen Zahlen zu klein ist, wir brauchen auch die negativen Zahlen und die 0. Wir erweitern also den Zahlenbereich um mögliche Ergebnisse der Subtraktion und erhalten damit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

die so genannten **ganzen Zahlen**.

2.2 Rationale Zahlen

2.2.1 Wie und warum sie definiert sind

Neben der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation gilt die Division als vierte Grundrechenart. Wenn wir ganze Zahlen dividieren, ist das Ergebnis in der Regel keine ganze Zahl mehr. Wir erweitern daher den Zahlenbereich der ganzen Zahlen um die Ergebnisse der Division und erhalten die so genannten **rationalen Zahlen**, symbolisiert durch den Buchstaben $\mathbb{Q}$. Es ist

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}.$$

Dabei ist $\frac{a}{b}$ ein anderer Ausdruck für $a : b$, die Division von a durch b. Die rationalen Zahlen enthalten also alle Brüche $\frac{a}{b}$ deren Zähler a beliebig in $\mathbb{Z}$ und deren Nenner b eine beliebige ganze Zahl ist, die allerdings nicht 0 sein darf. Ist ein Bruch von der Form $\frac{a}{1}$, so gilt $\frac{a}{1} = a$, und es folgt, dass die ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen Zahlen sind.

2.2.2 Wie man sie hinschreibt

Als Sie in der Schule Bruchrechnung gelernt haben, hat man Ihnen vermutlich eingetrichtert, Sie müssten eine Zahl $\frac{a}{b}$ so umwandeln, dass sie in der Form „ganze Zahl gefolgt von Bruch, der kleiner als 1 ist" ist. Im Beispiel: $\frac{7}{2}$ war vermutlich die falsche Antwort, Sie hätten $3\frac{1}{2}$ hinschreiben müssen. Bitte gewöhnen Sie sich diese Schreibweise an der Uni so schnell wie möglich ab.

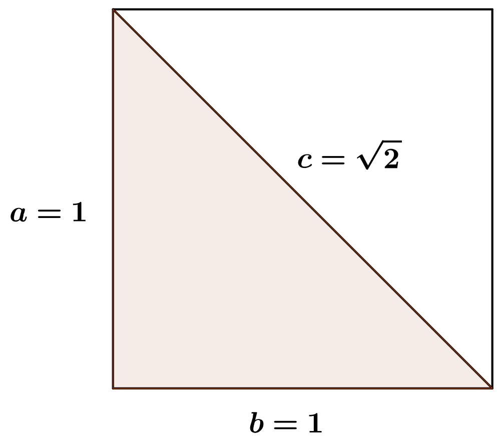
Warum? Dafür gibt es gleich mehrere Antworten.

- Die Schreibweise
$$a\frac{b}{c}, \text{ also im Beispiel } 3\frac{1}{2},$$
bedeutet nichts anderes als
$$a + \frac{b}{c}, \text{ also im Beispiel } 3 + \frac{1}{2}.$$
Bei der Schreibweise $a\frac{b}{c}$ wird also ein Pluszeichen unterdrückt. Kein mathematisch halbwegs sozialisierter Mensch würde ein Pluszeichen unterdrücken. Malpunkte ja, die lässt man weg wo immer das Weglassen nicht zur Verwirrung führt, aber doch keine Pluszeichen. Mit anderen Worten, Menschen mit Mathematikhintergrund werden die Zahl
$$a\frac{b}{c} \text{ reflexartig in } \frac{ab}{c}$$
übersetzen, in unserem Beispiel also $3\frac{1}{2}$ in $\frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$, wo aber doch $\frac{7}{2}$ gemeint war.
- Mathematik findet oft noch handschriftlich statt, etwa bei Klausuren oder an der Tafel. Wenn Sie nicht gerade eine perfekte Handschrift haben, ist die Schreibweise $a\frac{b}{c}$ sehr fehleranfällig.

2.3 Reelle Zahlen

2.3.1 Warum die rationalen Zahlen nicht ausreichen

Für das Rechnen im täglichen Leben reichen die rationalen Zahlen nicht aus. Als Beispiel: Gegeben sei ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Wie lang ist die Diagonale c?



Beispiel, bei dem die rationalen Zahlen nicht ausreichen

Wenden wir des Satz von Pythagoras an, lässt sich dieses Problem schnell lösen. Es ist $1^2 + 1^2 = 2$, also $c^2 = 2$ und wir bezeichnen die Zahl c als Wurzel aus 2, geschrieben $\sqrt{2}$. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Beweis gefällig?

Beweis:
Angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wir können a und b so wählen, dass $\frac{a}{b}$ ausgekürzt ist, dass also a und b keine gemeinsamen Teiler $\neq 1$ haben. Es folgt $2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $2b^2 = a^2$. Somit ist a^2 eine gerade Zahl, und es folgt, dass a selbst gerade sein muss, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade. Somit ist $2b^2 = a^2$ durch 4 teilbar, und es folgt, dass b^2 durch 2 teilbar ist. Dann muss aber wieder b durch 2 teilbar sein. Das ist aber ein Widerspruch, denn a und b dürfen nach unserer Annahme, dass $\frac{a}{b}$ ausgekürzt ist, keinen gemeinsamen Teiler haben. Es folgt, dass $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

Es gibt viele Zahlen – beispielsweise auch die Kreiszahl π – die nicht rational sind. Schon die Pythagoräer erkannten im 6. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung deshalb die Notwendigkeit, den engen Zahlbegriff der rationalen

Zahlen zu erweitern. Die moderne Mathematik hat dies mit der Erweiterung zum Bereich $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** geleistet. Dadurch erhielt der Grenzwertbegriff – ein zentraler Begriff der Analysis – ein festes Fundament.

2.3.2 Reelle Zahlen als Dezimalzahlen

Reelle Zahlen sind Dezimalzahlen. Sie lassen sich durch eine Abfolge von Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9, einen Dezimalkomma und ein Vorzeichen $+$ oder $-$, wobei ersteres meist weggelassen wird, darstellen.

Betrachten wir abstrakt die Zahl

$$a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \dots,$$

wobei die a's und b's Ziffern zwischen 0 und 9 sind. Die Ziffer a_0 bezeichnet die „Einer" der Zahl links vom Komma, a_1 die Zehner, a_2 die Hunderter und so weiter. Die Zahl links vom Komma ist

$$a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0 = 10^r a_r + 10^{r-1} a_{r_1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

Die Nachkommazahl $b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \dots$ ist

$$b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \dots = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_{k+1}}{10^{k+1}} + \dots$$

Man nennt die b's **Nachkommastellen**, und wenn die b's ab irgendeiner Stelle nur noch 0 sind, dann schreibt man die Nullen nicht mehr hin und sagt, dass es nur endlich viele Nachkommastellen gibt.

Zahlen, die nur endlich viele Nachkommastellen haben, sind etwa $-0,4$ oder $2,863$. Zu den Zahlen mit nur endlich vielen Nachkommastellen gehören auch die ganzen Zahlen, die gar keine Nachkommastellen haben.

Bei den reellen Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen unterscheidet man zwei Fälle, nämlich die sogenannten periodischen Dezimalzahlen und die, die nicht periodisch sind.

2.1 Definition: Reelle Zahlen, bei denen sich ab einer bestimmten Stelle nach dem Dezimalkomma eine Folge von einer oder mehr Ziffern immer wiederholt, nennt man **periodisch**. Die kleinste sich wiederholende Ziffernfolge wird die **Periode** der Zahl genannt, und die Anzahl der Ziffern in einer Periode heißt die **Periodenlänge**.

Um die periodischen Dezimalzahlen leichter aufschreiben zu können schreibt man die Periode nur einmal hin und setzt darüber einen Strich.

2.2 Beispiel: Beispiele für periodische Dezimalzahlen:

- $-0,3333\ldots$ ist periodisch. Die Zahl 3 wiederholt sich direkt nach dem Dezimalkomma. Die Periode ist 3, die Periodenlänge 1 und geschrieben wird die Zahl als $0,\overline{3}$.
- $6,678143143143143\ldots$ ist periodisch. Nach der dritten Nachkommastelle finden wir die Zahlenfolge 143, die sich immer wiederholt. Die Periodenlänge ist 3. Auch hier verwendet man an Stelle der Pünktchenschreibweise die Schreibweise $6,78\overline{143}$.

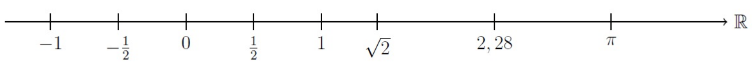
Es gibt auch reelle Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen, die nicht periodisch sind. Ein Beispiel:

2.3 Beispiel: Die Kreiszahl π, die für jeden Kreis das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser angibt, hat unendlich viele Nachkommastellen, und es gibt keine erkennbare Ordung ihrer Nachkommastellen. Es gibt sogar Wettbewerbe, bei denen immer weitere Nachkommastellen ausgerechnet werden; suchen Sie im Netz, welches der aktuelle Rekord ist. Obwohl man nicht alle Nachkommastellen von π kennt, weiß man, dass keine noch so große Periode auftreten kann. Allerdings ist das überhaupt nicht offensichtlich, sondern ein Ergebnis, das 1761 von Johann Heinrich Lambert beweisen wurde. In den folgenden Jahrhunderten hat man zwar einfachere Beweise für diese Tatsache gefunden, aber kompliziert ist es immer noch.

Die Menge der reellen Zahlen, also aller Dezimalzahlen, bezeichnet man mit $\mathbb{R}$.

2.3.3 Die Zahlengerade

In gewisser Hinsicht kann man sich eine reelle Zahl auch geometrisch vorstellen, nämlich als einen Punkt auf einer Geraden, die man die **Zahlengerade** nennt. Dabei müssen zwei Punkte dieser Zahlengeraden als 0 und 1 ausgezeichnet sein. Damit kann man die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen „aufzeichnen“. In der folgenden Skizze sind einige reelle Zahlen (als Strichmarkierungen, damit man sie sieht) eingezeichnet:



Zahlengerade

Man kann auch an ein nach beiden Seiten unendlich langes Maßband denken, dessen Markierung so fein ist, dass sie „beliebig genaue Ablesungen" gestattet.

Reelle Zahlen stellen sich so als Abstand vom Nullpunkt (von der Nullmarkierung) dar, wobei der Punkt 1 gerade den Abstand 1 hat. Punkte rechts von 0 werden als positive Zahlen und Punkte links von 0 als negative Zahlen interpretiert.

An der Zahlengerade kann man sich auch gut veranschaulichen, wann eine reelle Zahl größer oder kleiner als eine andere ist. Eine reelle Zahl a ist kleiner als eine reelle Zahl b, in Zeichen $a < b$, wenn a auf der Zahlengeraden links von b liegt. Umgekehrt ist a größer als b, in Zeichen $a > b$, wenn a rechts von b auf der Zahlengeraden liegt.

Die Zeichen $a \leq b$ bzw. $a \geq b$ bedeuten, dass a kleiner oder gleich b bzw. a größer oder gleich b ist.

2.3.4 Intervalle

Intervalle kann man sich als zusammenhängende Stücke auf der Zahlengeraden vorstellen. Dabei können die Endpunkte eines Intervalls zum Intervall gehören oder auch nicht; das führt zu den Begriffen eines offenen, halboffenen oder geschlossenen Intervalls. Genauer:

2.4 Definition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $a < b$.

- Das **abgeschlossene Intervall** von a nach b wird mit $[a, b]$ bezeichnet und ist definiert als
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ und } x \leq b\}.$$
- Das **links halboffene Intervall** von a nach b wird mit $(a, b]$ bezeichnet und ist definiert als
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ und } x \leq b\}.$$
- Das **rechts halboffene Intervall** von a nach b wird mit $[a, b)$ bezeichnet und ist definiert als
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ und } x < b\}.$$

- Das **offene Intervall** von a nach b wird mit (a, b) bezeichnet und ist definiert als
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ und } x < b\}.$$

Es gibt auch die so genannten „uneigentlichen“ Intervalle, die wir gleich definieren werden. Sie heißen uneigentlich, weil sie Symbole enthalten, die eigentlich keine reellen Zahlen sind, nämlich ∞ (unendlich) und $-\infty$ (minus unendlich).

2.5 Definition: Sei $a \in \mathbb{R}$.

- Das uneigentliche Intervall $[a, \infty)$ ist definiert als
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$
- Das uneigentliche Intervall (a, ∞) ist definiert als
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$$
- Das uneigentliche Intervall $-\infty, a]$ ist definiert als
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}.$$
- Das uneigentliche Intervall $-\infty, a)$ ist definiert als
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

Auf dem Zahlenstrahl werden Intervalle wie folgt visualisiert:

Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$

Das links halboffene Intervall $(a, b]$

Das rechts halboffene Intervall $[a, b)$

Das offene Intervall (a, b)

Das uneigentliche Intervall $[a, \infty)$

Das uneigentliche Intervall (a, ∞)

Das uneigentliche Intervall $(-\infty, a]$

Das uneigentliche Intervall $(-\infty, a)$

2.4 Beschränkte Mengen

Anschaulich ist wahrscheinlich klar, wann eine Teilmenge M der reellen Zahlen beschränkt ist. Hier kommt die offizielle Definition.

2.6 Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

- M ist nach oben beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt, so dass $m \leq S$ für alle $m \in M$ gilt.
- M ist nach unten beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt, so dass $m \geq S$ für alle $m \in M$ gilt.
- M ist beschränkt, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist. Es muss dann also reelle Zahlen S und S' geben, so dass $S' \leq m \leq S$ für alle $m \in M$ gilt.

Beispiel:

- Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist beschränkt, denn es gilt $a \leq x \leq b$ für alle $x \in [a, b]$.
- Ein offenes Intervall (a, b) ist ebenfalls beschränkt, denn es gilt $a \leq x \leq b$ für alle $x \in (a, b)$.
- Das uneigentliche Intervall $[a, \infty)$ ist nach unten beschränkt, denn es gilt $x \geq a$ für alle $x \in [a, \infty)$, es ist aber nicht nach oben beschränkt.
- Die Menge M der Quadratzahlen natürlicher Zahlen, also $M = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, ist nach unten beschränkt, denn es gilt $0 \leq x$ für alle $x \in M$. Sie ist nicht nach oben beschränkt.

2.7 Bemerkung: Um nachzuweisen, dass eine Menge nach oben (oder unten) beschränkt ist, muss eine reelle Zahl S angegeben werden, so dass $x \leq S$ (oder $x \geq S$) für alle $x \in M$ gilt. In der Regel können sehr viele verschiedene S dafür gewählt werden.

Beispiel:
Sei $M = [1, 2]$. Dann ist M nach oben beschränkt, denn $x \leq 2$ für alle $x \in M$. Wir können also $S = 2$ wählen. Es ist aber auch $x \leq 3$ für alle $x \in M$. Die Wahl von $S = 3$ wäre also auch korrekt gewesen.

2.5 Irrationale Zahlen

Die rationalen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen. Wenn wir die aus den reellen Zahlen herausnehmen, erhalten wir die sogenannten **irrationalen** Zahlen. Für die gibt es keine spezielle Bezeichnung, man schreibt für diese Menge einfach $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Oben hatten wir die reellen Zahlen als die Menge der Dezimalzahlen definiert; damit muss also jede rationale Zahl, also jeder Bruch, auch eine Dezimalzahl sein. Nehmen wir an, jemand käme mit einer Dezimalzahl zu uns und würde uns bitten, zu entscheiden (und diese Entscheidung zu begründen), ob diese Zahl auch als Bruch geschrieben werden kann oder ob sie irrational ist. Geht das? Was – wenn das geht – unterscheidet Dezimalzahlen, die irrational sind, von Dezimalzahlzahlen, die als Bruch geschrieben werden können? Das geht, und wie das geht, erfahren Sie jetzt.

2.5.1 Umrechnung von Brüchen in Dezimalzahlen

Die rationalen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen. Da wir die reellen Zahlen als die Menge der Dezimalzahlen definiert hatten, muss also jede rationale Zahl, also jeder Bruch, auch eine Dezimalzahl sein. Um diese Zahl zu bestimmen, benutzen wir, dass der Bruchstrich nur eine andere Schreibweise für die Division des Zählers durch den Nenner ist. Dies geschieht mittels schriftlicher Division, an die ich in einigen Beispielen wiederholen möchte. Selbst wenn Sie der Meinung sind, dass schriftliche Division in Zeiten von Taschenrechnern und Computern ein überflüssiges Relikt der Vergangenheit sind, schauen Sie sich die folgenden Beispiele an, denn sie legen den Finger auf ein interessantes Phänomen, auf das wir im Anschluss zu sprechen kommen.

2.8 Beispiel: Welche Dezimalzahl korrespondiert zum Bruch $\frac{341}{16}$? Diese Frage können wir beantworten, indem wir 341 schriftlich durch 16 teilen. Dabei gehen wir von links nach rechts vor: Die kleinste Ziffernfolge von 341, die größer oder gleich 16 ist, ist 34. In 34 passt 16 zweimal, und es ist $2 \cdot 16 = 32$. Wir notieren 2 rechts vom Gleichheitszeichen, schreiben 32 unter 34 und subtrahieren 32 von 34. Das Ergebnis 2 ist der Rest, wenn wir 34 durch 16 mit Rest teilen. Bisher sieht das wie folgt aus (den Rest werde ich im folgenden immer blau schreiben):

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 3 & 4 & 1 & : & 1 & 6 & = & 2 \\
- & 3 & 2 & & & & & & \quad \text{Ergebnis von } 2 \cdot 16 = 32 \\
\hline
 & & 2 & & & & & & \quad \text{Rest der Division von 34 durch 16}
\end{array}$$

Der Rest 2 ist kleiner als 16. Jetzt holen wir die 1 von oben runter (Zahlen, die wir von oben runter holen, werde ich im Folgenden rot schreiben) und erhalten 21. Diese Zahl ist größer als 16, und wir wiederholen den ersten Schritt mit der Zahl 21,

$$
\begin{array}{cccccccccl}
 & 3 & 4 & 1 & : & 1 & 6 & = & 21 & \\
- & 3 & 2 & & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{red}{1} & & & & & & \text{1 runtergeholt} \\
 & - & 1 & 6 & & & & & & \text{Ergebnis von } 1 \cdot 16 \\
\cline{3-4}
 & & & \textcolor{blue}{5} & & & & & & \text{Rest der Division von 21 durch 16}
\end{array}
$$

Wir haben jetzt alle Ziffern von 341 verbraucht, haben aber immer noch einen Rest. Um weitermachen zu können, denken wir uns die Zahl 341 als Dezimalzahl 341,0 und holen die Nachkomma-Null runter. Allerdings müssen wir dann auf der rechten Seite, der Ergebnisseite, ebenfalls ein Komma setzen. Danach geht es wie in den ersten beiden Schritten weiter.

$$
\begin{array}{cccccccccl}
 & 3 & 4 & 1 & : & 1 & 6 & = & 21,3 & \\
- & 3 & 2 & & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{red}{1} & & & & & & \\
 & - & 1 & 6 & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & \textcolor{blue}{5} & \textcolor{red}{0} & & & & & \text{0 runtergeholt} \\
 & & - & 4 & 8 & & & & & \text{Ergebnis von } 3 \cdot 16 \\
\cline{4-5}
 & & & & \textcolor{blue}{2} & & & & & \text{Rest der Division von 50 durch 16}
\end{array}
$$

Jetzt passiert nichts Neues mehr, und wir machen wie gehabt weiter bis der Rest 0 ist. Damit erhalten wir eine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 3 & 4 & 1 & : & 1 & 6 & = & 2 & 1 & , & 3 & 1 & 2 & 5 \\
- & 3 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{red}{1} & & & & & & & & & & & \\
 & - & 1 & 6 & & & & & & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & \textcolor{blue}{5} & \textcolor{red}{0} & & & & & & & & & & \\
 & & - & 4 & 8 & & & & & & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{red}{0} & & & & & & & & & \\
 & & & - & 1 & 6 & & & & & & & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & & \textcolor{blue}{4} & \textcolor{red}{0} & & & & & & & & \\
 & & & & - & 3 & 2 & & & & & & & & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & \textcolor{blue}{8} & \textcolor{red}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & - & 8 & 0 & & & & & & & \\
\cline{7-8}
 & & & & & & & \textcolor{blue}{0} & & & & & & &
\end{array}
$$

In diesem Beispiel ist der Bruch eine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen. Dass es nur endlich viele Nachkommastellen gibt, liegt daran, dass der Rest bei den nacheinander ausgeführten Divisionen mit Rest irgenwann 0 ist. Das muss allerdings nicht immer so sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

2.9 Beispiel: Welcher Dezimalzahl entspricht der Bruch $\frac{191}{495}$? Wir verwenden wieder schriftliche Division.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & 9 & 1 & : & 4 & 9 & 5 & = & 0 & , & 3 & 8 & 5 \\
- & & & 0 & & & & & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & 1 & 9 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
- & 1 & 4 & 8 & 5 & & & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 4 & 2 & 5 & 0 & & & & & & & & \\
 & - & 3 & 9 & 6 & 0 & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & 2 & 9 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 & & - & 2 & 4 & 7 & 5 & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & 4 & 2 & 5 & & & & & & &
\end{array}
$$

Zwar haben wir hier noch einen Rest, der nicht 0 ist, aber wir können trotzdem schon aufhören, denn es ist klar, wie es weitergehen wird. Die Begründung dafür ist, dass der Rest 425 oben schon einmal aufgetaucht ist. Es geht jetzt genauso weiter, wie nach dem Rest 425 oben. Das bedeutet, wir sind auf die Periode 85 gestoßen und es ist

$$\frac{191}{495} = 0,3\overline{85}.$$

Die beiden Phänomene ($\frac{a}{b}$ ist eine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen oder eine periodische Dezimalzahl), die wir in den Beispielen gesehen haben, beschreiben schon alles, was bei der Umrechnung eines Bruches in eine Dezimalzahl passieren kann. Es gilt nämlich allgemein:

2.10 Beobachtung: Eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ ist entweder eine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen oder eine periodische Dezimalzahl. Dabei fassen wir ganze Zahlen als Dezimalzahlen mit endlich vielen (nämlich keinen) Nachkommastellen auf.

Wollen Sie wissen, warum das so ist? Dann lesen Sie hier weiter:

Erläuterung:
Um eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ in eine Dezimalzahl umzurechnen, wird schriftlich dividiert. Dabei werden natürliche Zahlen durch b mit Rest dividiert.

Wird so ein Rest irgendwann 0, so bricht die Division an dieser Stelle ab, wir sind fertig und haben nur endlich viele Nachkommastellen. Wir müssen jetzt also nur überlegen, was passiert, wenn die Reste niemals 0 werden. Die Reste sind aber Zahlen zwischen 1 und b, und von solchen Zahlen gibt es nur endlich viele. Damit müssen sich die Reste irgendwann widerholen und dann mündet das Verfahren in eine Periode. Wir erhalten dann eine periodische Dezimalzahl.

2.5.2 Umrechnung periodischer Dezimalzahlen in Brüche

Eine Dezimalzahl $a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s$ mit nur endlich vielen Nachkommastellen (hier mit b_1 bis b_r bezeichnet) ist automatisch eine rationale Zahl, denn sie ist von der Form

$$a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s = a_r \dots a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_s}{10^s},$$

und eine Summe von Brüchen ist ein Bruch.

Wie ist es mit periodischen Dezimalzahlen? Sind die schon automatisch rationale Zahlen? Ja, aber das ist auf den ersten Blick gar nicht offensichtlich. Man kann eine periodische Dezimalzahl schematisch in einen Bruch überführen. Bevor ich das allgemein mache, kommt zunächst ein Beispiel, und zwar eines, das Sie schon gesehen haben.

2.11 Beispiel: Wir haben oben hergeleitet, dass der Bruch $\frac{191}{495}$ der Dezimalzahl $0,3\overline{85}$ entspricht. Nehmen wir an, wir wüssten das nicht, und jemand würde uns bitten, herzuleiten, dass die Dezimalzahl $0,3\overline{85}$ eine rationale Zahl ist, und fragen, welche rationale Zahl das sein könnte. Wir können wie folgt vorgenen:

- Wir multiplizieren die Zahl $0,3\overline{85}$ mit einer Zehnerpotenz so, dass eine Periode vor dem Dezimalkomma steht, also

  $$10^3 \cdot 0,3\overline{85} = 385,\overline{85}.$$

  Da sich die Ziffernfolge 85 unendlich oft wiederholt, steht hinter dem Komma immer noch $\overline{85}$.

- Jetzt multiplizieren wir $0,3\overline{85}$ so mit einer Zehnerpotenz, dass die Periode direkt nach dem Dezimalkomma beginnt, also

  $$10 \cdot 0,3\overline{85} = 3,\overline{85}.$$

- Jetzt ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 10^3 & \cdot & 0,3\overline{85} & = & 385 & , & \overline{85} \\ & - & (10^1 & \cdot & 0,3\overline{85}) & = & 3 & , & \overline{85} \\ \hline (10^3 & - & 10^1) & \cdot & 0,3\overline{85} & = & 382 & & \end{array}$$

- Wir rechnen die Klammer aus und erhalten

$$990 \cdot 0,3\overline{85} = 382.$$

- Zum Schluss teilen wir die Gleichung durch 990 und kürzen:

$$0,3\overline{85} = \frac{382}{990} = \frac{191}{495}.$$

Das, was wir gerade im Beispiel gemacht haben, machen wir jetzt allgemein. Sie müssen das Verfahren nicht auswendig lernen; es reicht, wenn Sie wissen, wie es gemacht wird. Bevor wir zur Sache gehen, eine Vereinbarung, wie wir im Folgenden periodische reelle Zahlen schreiben werden.

Sei $a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t}$ eine relle Zahl. Hier bezeichnet $a_r \dots a_0$ irgeneine $r+1$-stellige ganze Zahl, die vor dem Komma steht, zum Beispiel -17 oder 0, die $b_1, \dots, b_s$ bezeichnen die Nachkommastellen, die noch nicht zu der Periode gehören. Wenn die Periode direkt nach dem Dezimalkomma beginnt, gibt es keine b's. Die Zahl $p_1 \dots p_t$ ist die Periode. Im Beispiel oben ist $a = 0$, $b_1 = 3$ (mehr b's gibt es nicht) und $p_1p_2 = 85$.

2.12 Algorithmus: (Verfahren zur Überführung einer periodischen reellen Zahl in einen Bruch)

- Gegeben sei $a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t} \in \mathbb{R}$.
- Wir ignorieren das Vorzeichen und betrachten $a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t} \in \mathbb{R}$.

  Multipliziere $a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t}$ mit 10^{s+t}, wobei s die Anzahl der Nachkommastellen ist, die nicht zur Periode gehören, und t ist die Länge der Periode. Dies ergibt

  $$10^{s+t} \cdot (a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t}) = a_r \dots a_0 b_1 \dots b_s p_1 \dots p_t, \overline{p_1 \dots p_t}.$$

  Wenn dieser Schritt durchgeführt wurde, entsteht eine Zahl, bei der eine Periode noch vor dem Dezimalkomma steht, und dahinter beginnt die Periode, die sich unendlich oft wiederholt.

- Multipliziere $a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t}$ mit 10^s. Falls die Periode direkt hinter dem Dezimalkomma beginnt, setze $s = 0$ und beachte, dass $10^0 = 1$ ist. Wir erhalten

  $$10^s(a_1 \dots a_r, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t}) = a_r \dots a_0 b_1 \dots b_s, \overline{p_1 \dots p_t}.$$

  Nach diesem Schritt beginnt die Periode erstmalig hinter dem Dezimalkomma und wird dann unendlich oft wiederholt.

- Subtrahiere die beiden Gleichungen voneinander. Das ergibt:

  $$(10^{s+t} - 10^s)(a_r \dots a_0, b_1 \dots b_s\overline{p_1 \dots p_t}) = \\ a_r \dots a_0 b_1 \dots b_s p_1 \dots p_t - a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s.$$

  Bei dieser Subtraktion haben sich die Perioden auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gegenseitig aufgehoben, und rechts vom Gleichheitszeichen steht jetzt eine ganze Zahl. Links des Gleichheitszeichens steht die Zahl, die wir umrechnen wollten, allerdings mit dem Faktor $10^{s+t} - 10^s$.

- T Das Ergebnis (mit Vorzeichen) ist also

  $$\pm\frac{a_r \dots a_0 b_1 \dots b_s p_1 \dots p_t - a_r \dots a_0 b_1 \dots b_s}{10^{s+t} - 10^s}.$$

  Rechts steht der Bruch, dem die periodische Dezimalzahl entspricht.

2.13 Aufgabe: Stellen Sie $-12,345\overline{67}$ als Bruch dar.

Lösung:
Zunächst ignorieren wir das Minuszeichen und betrachten $12,345\overline{67}$. Es ist also $s = 3$ und $t = 2$ und damit $s + t = 5$. Dann ist:

$$10^5 \cdot 12,345\overline{67} = 1234567,\overline{67}$$

Außerdem ist

$$10^3 \cdot 12,345\overline{67} = 12345,\overline{67}$$

und damit $(10^5 - 10^3) \cdot 12,345\overline{67} = 1222222$, also

$$12,345\overline{67} = \frac{1222222}{99000} = \frac{611111}{49500}$$

und

$$-12,345\overline{67} = -\frac{611111}{49500}$$

2.5.3 Wie man rationale von irrationalen Zahlen unterscheidet

Die irrationalen Zahlen sind die in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, und wir hatten anfangs die Frage gestellt, ob die als Dezimalzahlen irgendetwas an sich haben, was die rationalen Zahlen nicht haben. Diese Frage können wir jetzt beantworten. Fassen wir nämlich noch einmal das zusammen, was wir in den letzten beiden Abschnitten gemacht haben:

2.14 Zusammenfassung: Es gilt:

- Ist $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, also $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, so ist $\frac{a}{b}$ eine Dezimalzahl, die nur endlich viele Nachkommastellen besitzt oder die periodisch ist.
- Ist x eine Dezimalzahl, die nur endlich viele Nachkommastellen besitzt oder die periodisch ist, so gibt es ganze Zahlen a und b mit $b \neq 0$ so, dass $x = \frac{a}{b}$ ist.

Damit haben wir unter den reellen Zahlen die rationalen identifiziert, und da die irrationalen die in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind, kennen wir auch die, nämlich:

2.15 Beobachtung: Die irrationalen Zahlen sind diejenigen Dezimalzahlen, die unendlich viele Nachkommastellen haben aber nicht periodisch sind.

2.6 Weitere Zahlenmengen

Wir haben bereits die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ kennen gelernt. Manchmal benötigt man Teilmengen dieser Mengen, die dann oft besondere Bezeichnungen haben. Diese variieren von Text zu Text und von Autor zu Autorin, aber wir stellen hier gängige Bezeichnungen vor, von denen man sich dann auch weitere ableiten kann.

Gesehen haben Sie schon

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Häufig verwendet werden auch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &= \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\} \\ \mathbb{R}^- &= \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\} \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_0^+ &= \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \\ \mathbb{R}_0^- &= \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\} \end{aligned}$$

Andere Schreibweisen dafür sind auch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{>0} &= \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \quad \mathbb{R}^{<0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}, \\ \mathbb{R}^{\geq 0} &= \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^{\leq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\}. \end{aligned}$$

3 Rechnen mit Zahlen

3.1 Rechnen mit ganzen Zahlen

Die einfachsten Zahlen, die wir schon im Kindergarten kannten, sind die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Sie werden **natürliche Zahlen** genannt, und die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Natürliche Zahlen können wir addieren und multiplizieren. Das Ergebnis ist dann wieder eine natürliche Zahl.

3.1.1 Rechenregeln für die Addition und Multiplikation

Wenn a und b natürliche Zahlen sind, dann gilt $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$. Eine solche Gesetzmäßigkeit nennt man in der Mathematik ein **Kommutativgesetz**, und als erste Regel zum Rechnen mit natürlichen Zahlen halten wir fest:

1. Rechenregel: Die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen sind kommutativ, das heißt, für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$.

Sind a, b und c natürliche Zahlen, so ist $(a + b) + c = a + (b + c)$. Um diese Formel würdigen zu können, muss ich zunächst etwas zum Gebrauch von Klammern sagen:

Klammerregel: Rechenoperationen, die durch Klammern eingeschlossen sind, sind stets zuerst auszuführen.

Die Formel $(a + b) + c = a + (b + c)$ besagt also: Es ist egal, ob wir erst $a + b$ ausrechnen und dann c addieren oder ob wir zuerst $b + c$ ausrechnen und das Ergebnis zu a addieren. Ein Zahlenbeispiel: Es ist $(2 + 3) + 5 = 5 + 5 = 10$, und es ist $2 + (3 + 5) = 2 + 8 = 10$. Auch die Multiplikation natürlicher Zahlen erfüllt diese Gesetzmäßigkeit, es gilt nämlich $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$. Eine solche Gesetzmäßigkeit nennt man in der Mathematik ein **Assoziativgesetz**, und wir halten unsere zweite Rechenregel fest:

2. Rechenregel: Die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen sind assoziativ, das heißt, für alle natürliche Zahlen a, b und c gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Da die Reihenfolge bei der Addition und bei der Multiplikation natürlicher Zahlen irrelevant ist, könnten wir auf das Setzen von Klammern bei der Addition und der Multiplikation natürlicher Zahlen verzichten. Es sind also

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \text{ und } a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Wenn wir Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen in einem Ausdruck mischen, dann können wir auf Klammern in der Regel aber nicht verzichten, denn Klammern geben ja gerade an, welche Rechenoperation zuerst ausgeführt werden muss. Ein Beispiel: Es ist $4 \cdot (2+5) = 4 \cdot 7 = 28$. Würden wir auf die Klammern verzichten, also $4 \cdot 2 + 5$ berechnen, so müssten wir erst $4 \cdot 2 = 8$ ausrechnen und dann 5 addieren, was 13 ergibt. Der Grund ist, dass irgendwann mal festgelegt wurde, dass Multiplikation und Division höherrangig als Addition und Subtraktion sind, also zuerst ausgeführt werden. Sie erinnern sich vermutlich an die Merkregel aus der Schule, die dies zusammenfasst:

Merkregel: Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

Die Kommutativgesetze und Assoziativgesetze regeln, wie Ausdrücke berechnet werden, in denen nur die Addition oder nur die Multiplikation auftreten. Das nächste Gesetz ist das so genannte **Distributivgesetz**. Es regelt das Zusammenspiel von Addition und Multiplikation.

3. Rechenregel: Für alle natürlichen Zahlen gilt das Distributivgesetz. Dieses besagt, dass

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ für alle } a, b, c \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Ein Beispiel: Es ist $4 \cdot (2 + 5) = 4 \cdot 7 = 28$, und $4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 8 + 20 = 28$, stimmt also.

Diese drei Rechenregeln sind alles, was wir für die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen brauchen, weitere Regeln lassen sich aus ihnen herleiten. Versuchen Sie es doch selbst einmal bei der folgenden Aufgabe.

3.1 Aufgabe: Leiten Sie aus den drei Rechenregeln oben folgende Regeln her. Geben Sie bei jedem Schritt an, welche Regel Sie verwenden.

1. Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt $a + b + c = c + b + a$.
2. Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
3. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ gilt $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$.

Lösung:

1. Es ist

$$\begin{aligned} a+b+c &= (a+b)+c \text{ mit dem Assoziativgesetz für die Addition} \\ &= (b+a)+c \text{ mit dem Kommutativgesetz für die Addition,} \\ &\quad \text{angewendet auf die Klammer} \\ &= c+(b+a) \text{ mit dem Kommutativgesetz für die Addition,} \\ &\quad \text{angewendet auf den Gesamtausdruck} \\ &= c+b+a \text{ mit dem Assoziativgesetz für die Addition.} \end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot c &= c\cdot(a+b) \text{ mit dem Kommutativgesetz für die Multiplikation} \\ &= c\cdot a + c\cdot b \text{ mit dem Distributivgesetz} \\ &= a\cdot c + b\cdot c \text{ mit dem Kommutativgesetz für die Multiplikation.} \end{aligned}$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot(c+d) &= (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d && \text{mit dem Distributivgesetz} \\ &= a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d && \text{mit zweimal Aufgabe 2} \end{aligned}$$

3.1.2 Subtraktion und negative Zahlen

Spätestens wenn wir anfangen, natürliche Zahlen zu subtrahieren, werden wir feststellen, dass die Welt der natürlichen Zahlen zu klein ist, wir brauchen auch die negativen Zahlen und die 0. Wir erweitern also den Zahlenbereich um mögliche Ergebnisse der Subtraktion und erhalten damit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \text{ die so genannten } \textbf{ganzen Zahlen}.$$

Die Addition und Multiplikation ganzer Zahlen erfüllen dieselben schönen Eigenschaften wie die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen. Es gilt nämlich:

Rechenregeln für die Addition und Multiplikation ganzer Zahlen:

1. Die Addition und Multiplikation ganzer Zahlen sind kommutativ, das heißt, für alle ganzen Zahlen a und b gilt $a+b=b+a$ und $a\cdot b = b\cdot a$.
2. Die Addition und Multiplikation ganzer Zahlen sind assoziativ, das heißt für alle ganzen Zahlen a, b und c gilt $(a+b)+c = a+(b+c)$ und $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

3. Für alle Zahlen für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, das Distributivgesetz.

Zu jeder ganzen Zahl a gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl b, sodass $a + b = 0$ gilt. Die Zahl b nennt man das **additive Inverse** zu a.

Betrachten wir Beispiele: Für $a = 3$ ist -3 das additive Inverse, denn $3 + (-3) = 0$. Für $a = -7$ ist 7 das additive Inverse, denn $-7 + 7 = 0$. Für $a = 0$ ist 0 das additive Inverse, denn $0 + 0 = 0$.

Ist a eine ganze Zahl, so bezeichnen wir das additive Inverse zu a mit $-a$. Zu $a = 3$ ist $-a = -3$, wie nicht anders erwartet. Zu $a = -7$ ist $-a = -(-7) = 7$, dazu gleich mehr. Zu $a = 0$ ist $-a = 0$, und 0 ist die einzige ganze Zahl a, die $a = -a$ erfüllt.

Rechenregeln für additive Inverse/Vorzeichenregeln:

1. Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $-(-a) = a$.
2. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $-(a + b) = (-a) + (-b)$.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.
4. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Beweis gefällig? Wenn ja, lesen Sie bitte weiter, wenn nein, überspringen Sie den Beweis und merken Sie sich die Regeln einfach nur.

Beweis:

1. Nach Definition ist $-(-a)$ diejenige ganze Zahl, die wir zu $-a$ addieren müssen um 0 zu erhalten. Da $(-a) + a = 0$ ist, hat a diese Eigenschaft. Es gilt also $-(-a) = a$, wie behauptet.
2. Nach Definition ist $-(a + b)$ diejenige ganze Zahl, die wir zu $a + b$ addieren müssen um 0 zu erhalten. Es ist $a + b + (-a) + (-b) = 0$, also $-(a + b) = (-a) + (-b)$, die Behauptung.
3. Hier sind zwei Aussagen zu zeigen, nämlich $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$ und $-(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. Machen wir uns also ans Werk. Nach Definition ist ist $-(a \cdot b)$ diejenige ganze Zahl, die wir zu $a \cdot b$ addieren müssen, um 0 zu erhalten. Es ist

$$\begin{aligned} a \cdot b + (-a) \cdot b &= (a + (-a)) \cdot b \text{ mit dem Distributivgesetz} \\ &= 0 \cdot b, \text{ denn } a + (-a) = 0 \\ &= 0, \text{ denn } 0 \cdot b = 0 \text{ für alle } b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0.$$

Somit sind $(-a) \cdot b$ und $a \cdot (-b)$ additive Inverse zu $a \cdot b$, und es folgt $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$, wie behauptet.

4. Zum Beweis der Behauptung, dass $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ ist, benutzen wir das, was wir bereits bewiesen haben. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= a \cdot (-(-b)) \text{ mit dem, was in 3. bewiesen wurde} \\ &= a \cdot b \text{ mit dem, was in 1. bewiesen wurde.} \end{aligned}$$

$\square$

Die Aussagen 3 und 4 der Rechenregelnlassen sich wie folgt durch Merkregeln umschreiben, die Sie vielleicht in der Schule mit auf den Weg bekommen haben:

Merkregeln:

1. Minus mal Plus ist Minus, und Plus mal Minus ist Minus.
2. Minus mal Minus ist Plus.

Für alle ganzen Zahlen a und b gilt $a - b = a + (-b)$. Die Subtraktion in $\mathbb{Z}$ ist also gerade die Addition von additiven Inversen in $\mathbb{Z}$, und diese Beobachtung führt zu folgender Vereinbarung:

Vereinbarung:
An Stelle von $a + (-b)$ schreiben wir $a - b$.

Mit Hilfe dieser Vereinbarung lassen sich viele Ausdrücke vereinfachen, will sagen, ohne Klammern schreiben. Ein Beispiel: Nehmen wir an, wir sind im Eifer unserer Rechnungen auf das Ergebnis $a + (-b) + 3 \cdot (-a) - (-c)$ gestoßen, wobei $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sind. Diesen Ausdruck können wir ohne Klammern schreiben. Wenn wir das ganz ausführlich machen, gilt nämlich

$$\begin{aligned} a \quad + \quad & (-b) + 3 \cdot (-a) - (-c) \\ = \quad & a + (-b) + 3 \cdot (-a) + (-(-c)) \text{ (mit der Vereinbarung)} \\ = \quad & a + 3 \cdot (-a) + (-b) + (-(-c)) \text{ (mit dem Kommutativgesetz} \\ & \hspace{5cm} \text{für die Addition in } \mathbb{Z}) \\ = \quad & a + (-3) \cdot a - b + c \text{ (mit der Vereinbarung} \\ & \hspace{3cm} \text{und den Rechenregeln für additive Inverse)} \\ = \quad & a \cdot 1 + a \cdot (-3) - b + c \\ = \quad & a \cdot (1 + (-3)) - b + c \text{ (mit dem Distributivgesetz)} \\ = \quad & a \cdot (1 - 3) - b + c \text{ (mit der Vereinbarung)} \\ = \quad & a \cdot (-2) - b + c \text{ (mit Ausrechnen von } 1 - 3 = -2) \\ = \quad & -2 \cdot a - b + c (\text{ mit dem Kommutativgesetz der Multiplikation}). \end{aligned}$$

Vereinbarung:
Wenn es nicht irreführend ist, schreiben wir an Stelle von $a \cdot b$ nur ab.

Irreführend meint: Kein Mensch schreibt 23, wenn er $2 \cdot 3$ meint, weil das irreführend wäre.

Eine Fingerübung für Sie:

3.2 Aufgabe: Berechnen Sie:

1. $-3(5 + (-7)(-1)) + (-2) \cdot 5$
2. $-(17 + (-1)) \cdot (-1) \cdot 2 - (-3 + 5)(-1 - 1)$

Lösung:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned} -3(5 + (-7)(-1)) + (-2) \cdot 5 &= -3(5 + 7) + (-10) \\ &= -3 \cdot 12 - 10 \\ &= -36 - 10 \\ &= -46 \end{aligned}$$

2. und:

$$\begin{aligned}
-(17+(-1))\cdot(-1)\cdot 2 \quad - & \quad (-3+5)(-1-1) \\
= & \quad -(17-1)\cdot(-2)-2(-2) \\
= & \quad (-16)\cdot(-2)-(-4) \\
= & \quad 32+4=36
\end{aligned}$$

3.1.3 Division mit Rest

Wenn a und b ganze Zahlen sind, wobei $b \neq 0$ gelten soll, dann ist $\frac{a}{b}$ in der Regel keine ganze Zahl. Durch die Division verlassen wir also die Welt der ganzen Zahlen. Es gibt aber für $\mathbb{Z}$ eine andere Art der Division, die Sie vielleicht schon in der Grundschule (allerdings nur für natürliche Zahlen) kennen gelernt haben: die Division mit Rest.

3.3 Satz: Zu ganzen Zahlen a, b mit $b \neq 0$ gibt es ganze Zahlen m und r so, dass $a = mb + r$ und $r \geq 0$ und $r < |b|$ ist. Dabei bezeichnet $|b|$ den Betrag von b, also $|b| = b$, falls $b \geq 0$ und $|b| = -b$, falls $b < 0$ ist.

Man nennt r den Rest der Division von a durch b mit Rest.

3.4 Beispiele: (Divisionen von a durch b mit Rest)

- Sind $a = 18$ und $b = 5$, so ist $a = 3 \cdot 5 + 3$ und $0 \leq 3 < 5$. In diesem Fall ist 3 der Rest bei der Division von 18 durch 5 mit Rest.
- Sind $a = -73$ und $b = 11$, so ist $-73 = (-7) \cdot 11 + 4$ und $0 \leq 4 < 11$. Hier ist 4 der Rest bei der Division von -73 durch 11 mit Rest.
- Sind $a = 206$ und $b = -4$, so ist $206 = (-51)\cdot(-4)+2$ und $0 \leq 2 < |-4|$. Somit ist 2 der Rest bei der Division von 206 durch 4 mit Rest.
- Sind $a = -35$ und $b = -11$, so ist $-35 = (4)\cdot(-11)+9$ und $0 \leq 9 < |11|$. Es folgt, dass 9 der Rest bei der Division von -35 durch -11 mit Rest ist.

Im Beispiel konnte man die Zahlen m und r für die Division mit Rest gerade noch im Kopf ausrechnen. Doch wie bestimmt man sie, wenn a und b so groß werden, dass das nicht mehr funktioniert?

Dazu zunächst Folgendes zur Beruhigung: Die Division mit Rest von ganzen Zahlen wird in der Praxis nur selten benötigt. Sie ist sehr wichtig für die Theorie, man kann damit viele Eigenschaften ganzer Zahlen (z.B. in der Zahlentheorie) beweisen, aber man muss sie dafür nicht praktisch durchführen.

Wenn es doch einmal nötig ist, funktioniert es folgendermaßen: Gegeben a und b mit $b \neq 0$, bilde $\frac{a}{b}$ und schreibe diesen Bruch als Dezimalzahl:

$$\frac{a}{b} = \pm a_r \ldots a_0, b_1 \ldots b_r \ldots$$

Ist $a \geq 0$ und $b > 0$ dann ist $m = a_r \ldots a_0$ und $r = a - mb$.
Ist $a < 0$ und $b > 0$ dann ist $m = -a_r \ldots a_0 - 1$ und $r = a - mb$.
Ist $a \geq 0$ und $b < 0$ dann ist $-m = a_r \ldots a_0$ und $r = a - mb$.
Ist $a < 0$ und $b < 0$ dann ist $m = a_r \ldots a_0 + 1$ und $r = a - mb$.

Beispiele

- Seien $a = 14725$ und $b = 17$. Dann ist
$$\frac{a}{b} = \frac{14725}{17} = 866,1764706.$$
Wir setzen $m = 866$ und $r = 14725 - 866 \cdot 17 = 3$. Dann gilt also $14725 = 866 \cdot 17 + 3$ und $0 < 3 < |17|$, denn $|17| = 17$.

- Seien $-a = 14725$ und $b = 17$. Dann ist
$$\frac{a}{b} = -\frac{14725}{17} = -866,1764706.$$
Wir setzen $m = -867$ und $r = -14725 - (-867) \cdot (-17) = 14$, also $-14725 = (-867) \cdot 17 + 14$ und $0 < 14 < |17|$.

- Seien $a = 14725$ und $b = -17$. Dann ist
$$\frac{a}{b} = -\frac{14725}{17} = -866,1764706.$$
Wir setzen $m = -866$ und $r = 3$, denn $14725 = (-866) \cdot (-17) + 3$ und $0 < 3 < |-17| = 17$.

- Seien $-a = 14725$ und $b = -17$. Dann ist
$$\frac{a}{b} = \frac{14725}{17} = 866,1764706.$$
Wir setzen $m = 867$ und $r = (-14725) - 867 \cdot (-17) = 14$, denn $-14725 = 867 \cdot (-17) + 14$ und $0 < 14 < |-17|$.

3.5 Aufgabe: Führen Sie bei folgenden Zahlen die Division von a durch b mit Rest durch.

- $a = 56$, $b = -4$
- $a = -389$, $b = -5$
- $a = 389$, $b = -5$
- $a = -27$, $b = 6$.

Lösung

- Es ist$m = -14$ und $r = 0$.
- Es ist $m = 78$ und $r = 1$.
- Es ist $m = -77$ und $r = 4$.
- Es ist $m = -5$ und $r = 3$.

3.2 Rechnen mit Brüchen

3.2.1 Rationale Zahlen

Neben der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation gilt die Division als vierte Grundrechenart. Wenn wir ganze Zahlen dividieren, ist das Ergebnis in der Regel keine ganze Zahl mehr. Wir erweitern daher den Zahlenbereich der ganzen Zahlen um die Ergebnisse der Division und erhalten die so genannten rationalen Zahlen, symbolisiert durch den Buchstaben $\mathbb{Q}$. Es ist

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}.$$

Die rationalen Zahlen enthalten also alle Brüche $\frac{a}{b}$ deren Zähler a beliebig in $\mathbb{Z}$ und deren Nenner b eine beliebige ganze Zahl ist, die allerdings nicht null sein darf. Ist ein Bruch von der Form $\frac{a}{1}$, so gilt $\frac{a}{1} = a$, und es folgt, dass die ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen Zahlen sind.

3.2.2 Umformen von Brüchen – erweitern und kürzen

Brüche können wir addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Wie das gemacht wird, werde ich jetzt zeigen.Bevor wir Brüche addieren, subtrahieren und multiplizieren, möchte ich daran erinnern, wie Brüche umgeformt werden können. Die Stichworte lauten Erweitern und Kürzen.

Erweitern von Brüchen: Multipliziert man Zähler und Nenner eines Bruchs mit derselben Zahl $s \neq 0$, so ändert sich der Wert des Bruchs nicht. In Formeln:

$$\text{Für alle } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ und alle } s \neq 0 \text{ gilt } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot s}{b \cdot s}.$$

Kürzen von Brüchen: Enthalten Zähler und Nenner eines Bruchs den gleichen von Null verschiedenen Faktor s, so kann man diesen in Zähler und Nenner streichen, ohne den Wert des Bruchs zu verändern. In Formeln:

$$\text{Es ist } \frac{a \cdot s}{b \cdot s} = \frac{a}{b} \text{ für alle } s \neq 0.$$

3.6 Aufgabe: Erweitern Sie die folgenden rationalen Zahlen so, dass beide den gleichen Nenner haben. Bemühen Sie sich, die Nenner so einfach wie möglich zu halten.

1. $-\frac{2}{27}$ und $\frac{5}{18}$
2. $\frac{13}{15}$ und $\frac{8}{21}$
3. 1 und $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich.

1. $\frac{24}{36}$, $-\frac{15}{27}$, $\frac{123}{6}$
2. $\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}$, mit $n \in \mathbb{N}$

Lösung:

- 1. Die Brüche $-\frac{4}{54}$ und $\frac{15}{54}$ haben den gleichen Nenner.
  2. Die Brüche $\frac{91}{105}$ und $\frac{40}{105}$ haben den gleichen Nenner.
  3. Es ist $1 = \frac{n}{n}$. Damit haben $\frac{n}{n}$ und $\frac{1}{n}$ den gleichen Nenner.
- 1. Gekürzt erhalten wir $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{9}$ und $\frac{41}{2}$
  2. Gekürzt erhalten wir $\frac{n+1}{n+3}$,

3.2.3 Addition und Subtraktion von Brüchen

Wenn wir zwei Brüche addieren oder subtrahieren wollen, müssen beide den gleichen Nenner haben. Ist dies der Fall, so gilt:

Addition/Subtraktion von Brüchen mit dem gleichen Nenner: Die Summe/Differenz von zwei Brüchen der Form $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ ist

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \text{ und } \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Brüche mit $b \neq d$, so müssen wir sie, bevor wir sie addieren/subtrahieren so erweitern, dass sie denselben Nenner haben. Diesen Vorgang nennt man **Brüche gleichnamig machen**. Ohne viel nachzudenken geht das ganz einfach: Wir erweitern $\frac{a}{b}$ mit d (dem Nenner von $\frac{c}{d}$), und wir erweitern $\frac{c}{d}$ mit b (dem Nenner von $\frac{a}{b}$). Dann gilt $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$, also $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Analog funktioniert die Subtraktion. Fassen wir zusammen:

Addition/Subtraktion von Brüchen: Seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in $\mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ und } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Diese Art des Gleichnamigmachens funktioniert prinzipiell immer, ist aber oft nicht sinnvoll. Ein Beispiel: Wenn wir $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ berechnen wollen, dann werden wir sicher nicht $\frac{1}{2}$ mit 4 und $\frac{1}{4}$ mit 2 erweitern, sondern wir werden $\frac{1}{2}$ mit 2 erweitern und das Ergebnis $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ erhalten.

3.7 Aufgabe: Berechnen Sie

1. $-\frac{2}{27} + \frac{5}{18}$
2. $\frac{13}{15} - \frac{8}{21}$
3. $1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Gleichnamig haben Sie diese Brüche bereits in der vorigen Aufgabe gemacht.

Lösung

1. Es ist
$$-\frac{2}{27} + \frac{5}{18} = -\frac{4}{54} + \frac{15}{54} = \frac{11}{54}$$
2. Es ist
$$\frac{13}{15} - \frac{8}{21} = \frac{91}{105} - \frac{40}{105} = \frac{51}{105} = \frac{17}{35}$$
3. Es ist
$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

3.2.4 Multiplikation von Brüchen

Die Multiplikation erfolgt nach dem Schema „Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner". In Formeln:

Multiplikation von Brüchen: Seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in $\mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Da wir die ganzen Zahlen als rationale Zahlen mit Nenner 1 interpretieren können, folgt aus dieser Vorschrift:

Multiplikation von Brüchen mit ganzen Zahlen: Sei $a \in \mathbb{Z}$, und sei $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

3.2.5 Division von Brüchen

Die Division von Brüchen ist auch nicht viel komplizierter als die Multiplikation. Dazu brauchen wir noch einen Begriff. Zu einem Bruch $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ nennen wir $\frac{b}{a}$ den **Kehrbruch** oder **Kehrwert** von $\frac{a}{b}$. Wenn wir einen Bruch mit seinem Kehrbruch multiplizieren, so erhalten wir als Ergebnis 1. Aus diesem Grund nennt man den Kehrbruch $\frac{b}{a}$ zu einem Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a \neq 0$ auch das **multiplikative Inverse** zu $\frac{a}{b}$. Dann gilt

Division von Brüchen:
Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem multiplikativen Inversen (=Kehrbruch) des Bruchs multipliziert. In Formeln:

$$\text{Für alle } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \text{ mit } c \neq 0 \text{ gilt } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Subtraktion und Division von Brüchen lassen sich wieder durch Addition und Multiplikation ausdrücken. Zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ bezeichnen wir – analog zu den Zahlen in $\mathbb{Z}$ – mit $-\frac{a}{b}$ diejenige Zahl, die wir zu $\frac{a}{b}$ addieren müssen um 0 zu erhalten. Wieder nennt man $-\frac{a}{b}$ das **additive Inverse** zu $\frac{a}{b}$.

3.8 Aufgabe: Zeigen Sie, dass $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ gilt.

(Hinweis: Dazu müssen Sie zeigen, dass $\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = 0$ und $\frac{a}{b} + \left(\frac{a}{-b}\right) = 0$ gilt.)

Lösung

Mit der Addition von Brüchen ist

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{a-a}{b}=\frac{0}{b}=0$$

Also ist $\frac{-a}{b}$ das additive Inverse von $\frac{a}{b}$.

Außerdem gilt

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{-b}\right)=\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{-(-b)}\right)\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{a-a}{b}=\frac{0}{b}=0$$

Also ist $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$ das additive Inverse von $\frac{a}{b}$.

Die Subtraktion ist nichts anders als die Addition von additiven Inversen, als Formel:

$$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\left(-\frac{a}{b}\right).$$

Die Division durch einen Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a\neq 0$ ist die Multiplikation mit dem multiplikativen Inversen $\frac{b}{a}$ zu $\frac{a}{b}$, als Formel:

$$\frac{c}{d}:\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{a},\ \text{für alle}\ \frac{c}{d},\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\ \text{mit}\ a\neq 0.$$

Eine Division durch 0 ist nicht möglich. Mit der Konvention, Subtraktion und Division als Addition (additiver Inverser) und Multiplikation (multiplikativer Inverser) zu schreiben, gelten wieder die allgemeinen Rechenregeln für $\mathbb{Q}$, wie wir sie bereits für $\mathbb{Z}$ kennen:

Rechenregeln für $\mathbb{Q}$:

- **Kommutativgesetze:** Für alle $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ gilt:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\ \text{und}\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

- **Assoziativgesetze:** Für alle $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ gilt:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\ \text{und}\ \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

- **Distributivgesetz:** Für alle $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ gilt:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

3.3 Rechnen mit reellen Zahlen

3.3.1 Wurzeln

Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $a > 0$. Dann gibt es genau eine positive reelle Zahl b, sodass $b^2 = a$ ist. Diese Zahl b bezeichnet man mit $\sqrt{a}$, gesprochen „Wurzel aus a“. Für $a = 0$ ist $0^2 = 0$, und man definiert $\sqrt{0} = 0$.

Merkregel: Wurzeln sind nur für Zahlen ≥ 0 definiert, und $\sqrt{a} > 0$ für alle $a > 0$.

Es ist $\sqrt{4} = 2$. Obwohl auch $(-2)^2 = 4$ ist, ist -2 **keine** Wurzel aus 4, denn es wird verlangt, dass die Wurzel einer positiven Zahl positiv ist. In den seltensten Fällen ist eine Wurzel aus einer natürlichen oder rationalen Zahl wieder eine rationale Zahl. Ein Beispiel haben Sie oben schon gesehen, als wir über die reellen Zahlen gesprochen haben. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Man kann über die reellen Zahlen sogar noch mehr zeigen:

Eine wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$:
Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und sei $p \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine positive reelle Zahl b, sodass $b^p = a$ ist. Diese Zahl wird mit $\sqrt[p]{a}$ bezeichnet und die p-te Wurzel aus a genannt. Für $a = 0$ wird $\sqrt[p]{a}$ als 0 definiert.

Auch wenn Ihr programmierbarer Taschenrechner etwas anderes behauptet, es gilt wieder die Merkregel:

Merkregel:
p-te Wurzeln sind nur für Zahlen ≥ 0 definiert, und $\sqrt[p]{a} > 0$ für alle $a > 0$.

Vielleicht geben Sie sich mit dieser Merkregel nicht zufrieden und kontern mit folgendem Beispiel: Es ist -2 die einzige reelle Zahl, deren dritte Potenz -8 ist. Wieso sollte man dann nicht $\sqrt[3]{-8} = -2$ schreiben dürfen? Der Grund dafür ist, dass wir, wenn wir das erlauben, so gruselige Dinge wie $2 = -2$ „beweisen“ können. Und so soll es natürlich nicht sein. Ich werde später auf diese Frage zurückkommen.

Eine Fingerübung für Sie:

3.9 Aufgabe: Berechnen Sie:

- $$\sqrt[4]{81}$$
- $$\sqrt[3]{2^2 \cdot 2}$$

Lösung

- Es ist
$$3^4 = 81 \,\text{also}\, \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3.$$

- Es ist
$$2^2 \cdot 2 = 2^{2+1} = 2^3 \,\text{also}\, \sqrt[3]{2^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} = 2.$$

3.3.2 Potenzen mit natürlichen Exponenten

Die Potenzschreibweise haben wir schon verwendet, aber hier wollen wir sie noch einmal allgemein definieren.

Potenzierung mit natürlichen Zahlen: Ist a irgendeine Zahl, und ist n eine natürliche Zahl, so ist a^n definiert als das n-fache Produkt von a mit sich selbst, also
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$$
Man nennt a die **Basis** und n den **Exponenten** von a^n und bezeichnet a^n selbst als die n-te Potenz von a. Weiterhin definiert man $a^0 = 1$ für alle a, selbst für $a = 0$.

Es mag etwas ungewöhnlich sein, dass man 0^0 als 1 definiert, und in vielen Lehrbüchern finden Sie den Satz „0^0 ist nicht definiert“. Diese Einstellung (und es ist wirklich Einstellungssache, ob man das definiert oder nicht), führt dann aber in anderen Zusammenhängen zu unnötigen Fallunterscheidungen, um die man sich mit unserer Definition herumdrücken kann.

Ein Zahlenbeispiel für das Potenzieren: Es ist $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$.

Kommen wir zu den Rechenregeln des Potenzierens mit Exponenten in $\mathbb{N}_0$.

Potenzregeln für Exponenten in $\mathbb{N}_0$:

Für alle Zahlen a und $b \in \mathbb{R}$ und alle natürlichen Zahlen m und n gilt

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

Drei Zahlenbeispiele zur Illustration der Regeln: Es sind $2^3 = 8$ und $2^4 = 16$. Damit ist $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$. Dasselbe erhalten wir, wenn wir $2^{3+4} = 2^7$ ausrechnen. Zur Illustration der zweiten Regel schauen wir uns $(2^3)^4$ an. Es ist $2^3 = 8$, also $(2^3)^4 = 8^4 = 4096$. Dasselbe erhalten wir, wenn wir $2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ ausrechnen. Für die letzte Regel berechnen wir $3^2 \cdot 5^2$, also $9 \cdot 25 = 225$. Dasselbe erhalten wir, wenn wir $(3 \cdot 5)^2 = 15^2$ berechnen.

Mit diesen Regeln sollte klar sein, wie wir mit Potenzen rechnen können, solange der Exponent eine natürliche Zahl oder 0 ist.

3.3.3 Potenzen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten

Kommen wir jetzt zu Potenzen mit negativen Exponenten. Dazu sei a eine reelle Zahl, von der wir aber jetzt voraussetzen, dass sie $\neq 0$ ist. Zu a gibt es eine reelle Zahl b, die ebenfalls $\neq 0$ ist, sodass $a \cdot b = 1$ ist. Diese Zahl b wird das **multiplikative Inverse** zu a genannt und mit a^{-1} oder $\frac{1}{a}$ bezeichnet. Halten wir dies als Regel gesondert fest:

Multiplikative Inverse in $\mathbb{R}$:
Zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es eine Zahl $a^{-1} = \frac{1}{a}$ sodass $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ist.

Dabei ist a^{-1} nur eine andere Schreibweise für $\frac{1}{a}$. Jetzt können wir Potenzen mit negativen Exponenten definieren:

Potenzen mit negativen Exponenten:
Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n .$$

Mit den Potenzregeln für Potenzen in $\mathbb{N}$ gilt dann $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die analogen Potenzregeln wie für Exponenten in $\mathbb{N}$, nämlich

Potenzregeln für Exponenten in $\mathbb{Z}$: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
2. $(a^m)^n = a^{mn}$,
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$,
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \neq 0$,
5. $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ für $b \neq 0$.

Einige Aufgaben zum Einüben dieser Regeln:

3.10 Aufgabe: Leiten Sie folgende Rechnungen her:

1. Zeigen Sie, dass
$$\left(\frac{2^2 \cdot 15^4}{6^4 \cdot 5^3}\right) \cdot \left(\frac{2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^2}{2^7 \cdot 5^6}\right)^3 = 2^{-8} \cdot 5^{-11}$$
gilt.
2. Zeigen auch Sie, dass
$$\frac{(3 \cdot 5^4 \cdot 7^{-1})^2}{(9 \cdot 5^{-2} \cdot 7^{-3})^{-1}} : \frac{(2 \cdot 5^{-6} \cdot 7^3)^{-3}}{(2 \cdot 5^5 \cdot 7^{-2})^4} = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^8 \cdot 7^{-4}$$
gilt.

Lösung

1. Es gilt
$$\begin{aligned}
\left(\frac{2^2 \cdot 15^4}{6^4 \cdot 5^3}\right) \cdot \left(\frac{2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^2}{2^7 \cdot 5^6}\right)^3 &= \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3} \cdot \left(\frac{1}{2^2 \cdot 5^4}\right)^3 \\
&= \frac{5}{2^2} \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 5^{12}} \\
&= \frac{1}{2^8 \cdot 5^{11}} \\
&= 2^{-8} \cdot 5^{-11}
\end{aligned}$$
2. Außerdem gilt:
$$\begin{aligned}
\frac{(3 \cdot 5^4 \cdot 7^{-1})^2}{(9 \cdot 5^{-2} \cdot 7^{-3})^{-1}} : \frac{(2 \cdot 5^{-6} \cdot 7^3)^{-3}}{(2 \cdot 5^5 \cdot 7^{-2})^4} &= \frac{3^2 \cdot 5^8 \cdot 7^{-2}}{9^{-1} \cdot 5^2 \cdot 7^{-3}} : \frac{2^{-3} \cdot 5^{18} \cdot 7^{-9}}{2^4 \cdot 5^{20} \cdot 7^{-8}} \\
&= \left(\frac{3^4 \cdot 5^6}{7^5}\right) : \left(\frac{1}{2^7 \cdot 5^2 \cdot 7}\right) \\
&= \left(\frac{3^4 \cdot 5^6}{7^5}\right) \cdot \left(\frac{2^7 \cdot 5^2 \cdot 7}{1}\right) \\
&= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^8 \cdot 7^{-4}.
\end{aligned}$$

3.3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Sei wieder $a > 0$, und sei $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(\sqrt[p]{a})^p = a = a^1$, und diese Beobachtung führt dazu, dass man an Stelle von $\sqrt[p]{a}$ auch $a^{\frac{1}{p}}$ schreibt. Diese

Schreibweise hat den Vorteil, dass $(a^{\frac{1}{p}})^p = a^{\frac{1}{p}\cdot p} = a^1 = a$ ist, was genau dem entspricht, was wir von den Potenzgesetzen erwarten. Halten wir diese Bezeichnung noch einmal explizit fest:

Bezeichnung:
Für alle $a \geq 0$ und alle $p \in \mathbb{N}$ setzen wir $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$.

Wir können p-te Wurzeln in die q-te Potenz erheben, und wir können aus einer q-ten Potenz die p-te Wurzel ziehen. Wie ist der Zusammenhang? Das werden wir jetzt klären.

Zusammenhang zwischen $(a^{\frac{1}{p}})^q$ und $(a^q)^{\frac{1}{p}}$:
Für alle $a > 0$ und alle $p, q \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a^{\frac{1}{p}})^q = (a^q)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis:
Wir führen die Abkürzung $x = a^{\frac{1}{p}}$ ein. Die linke Seite der Gleichung ist dann x^q. Schauen wir uns jetzt die rechte Seite an. Wenn wir die Gleichung $x = a^{\frac{1}{p}}$ in die p-te Potenz erheben, erhalten wir $x^p = (a^{\frac{1}{p}})^p = a$. Wir ersetzen also a auf der rechten Seite der Gleichung durch x^p und erhalten $((x^p)^q)^{\frac{1}{p}}$. Innerhalb der äußeren Klammer rechnen wir mit natürlichen Exponenten und können die entsprechenden Potenzregeln anwenden. Wir können damit die rechte Seite der Gleichung wie folgt umformen:

$$((x^p)^q)^{\frac{1}{p}} = (x^{pq})^{\frac{1}{p}} = (x^{qp})^{\frac{1}{p}} = ((x^q)^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{(x^q)^p} = x^q.$$

Damit sind die linke und die rechte Seite der Gleichung identisch (beide sind x^q), und damit gilt die behauptete Formel. $\square$

Fassen wir kurz zusammen, welche reellen Zahlen wir bisher in welche Potenzen erheben können. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^0 = 1$. Sei $p \in \mathbb{N}$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ können wir a^p bilden. Für alle $a \neq 0$ haben wir $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Ferner haben wir $a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$ für alle $a \geq 0$.

Wir definieren jetzt $a^{\frac{q}{p}}$ für alle $a \geq 0$ und alle $p, q \in \mathbb{N}$ durch

$$a^{\frac{q}{p}} = (a^{\frac{1}{p}})^q.$$

Mit dem, was wir oben überlegt haben, gilt $a^{\frac{q}{p}} = (a^{\frac{1}{p}})^q = (a^q)^{\frac{1}{p}}$.

Mit dieser Schreibweise sollen Sie sich etwas vertraut machen:

3.11 Aufgabe:
- Schreiben Sie folgende Terme mit Wurzeln.

1.
$$2^{\frac{2}{3}}$$

2.
$$\frac{2^{\frac{p}{q}}}{3^{\frac{r}{s}}}$$

3.
$$\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{7}{8}}$$

- Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit rationalen Exponenten

1.
$$\sqrt[7]{3^5}$$

2.
$$\left(\sqrt[p]{2}\right)^8$$

3.
$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{z}^2}{\sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[3]{3}}}$$

Lösung Es gilt

1.
$$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$$

2.
$$\frac{2^{\frac{p}{q}}}{3^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[q]{2^p}}{\sqrt[s]{3^r}} = \sqrt[q]{2^p} \cdot (3^r)^{-\frac{1}{s}} = \sqrt[q]{2^p} \cdot 3^{-\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{2^p} \cdot \sqrt[s]{3^{-r}}$$

3.
$$(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}})^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b}}^{\,7} = \sqrt[8]{(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b})^7}.$$

Es gilt

1.
$$\sqrt[7]{3^5} = 3^{\frac{5}{7}}$$

2.
$$\left(\sqrt[p]{2}\right)^8 = 2^{\frac{8}{p}}$$

3.
$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{z}^2}{\sqrt[5]{x^4}\cdot\sqrt[3]{3}}} = \left(\frac{z^{\frac{2}{4}}}{x^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Kommen wir jetzt zur Definition von Potenzen, deren Exponenten negative rationale Zahlen sind. Das machen wir ganz analog zur Definition von Potenzen, deren Exponenten negative ganze Zahlen sind. Ist $a > 0$, und seien p und q natürliche Zahlen, so setzen wir

$$a^{-\frac{q}{p}} = \frac{1}{a^{\frac{q}{p}}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich folgendermaßen umformen:

$$a^{-\frac{q}{p}} = \frac{1}{a^{\frac{q}{p}}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^q}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a}^q} = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{a}}\right)^q.$$

Fassen wir noch einmal zusammen.

Zusammenfassung – Potenzen mit ganzen und rationalen Exponenten:

Seien p und q in $\mathbb{N}$.

1. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^0 = 1$ (auch für $a = 0$).
2. Für alle $a \in \mathbb{R}$ lässt sich a^p bilden.
3. Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, lässt sich a^{-p} bilden, und es ist $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.
4. Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, lässt sich $a^{\frac{1}{p}}$ bilden, und es ist $a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$.
5. Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, lässt sich $a^{\frac{q}{p}}$ bilden, und es ist $a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[p]{a}^q$.
6. Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, lässt sich $a^{-\frac{q}{p}}$ bilden, und es ist $a^{-\frac{q}{p}} = \frac{1}{a^{\frac{q}{p}}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^q}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a}^q} = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{a}}\right)^q$.

So, jetzt, wo wir wissen, was Potenzen mit rationalen Exponenten sind, muss ich natürlich noch verraten, wie man mit ihnen rechnet. Die gute Nachricht ist, dass wir genau dieselben Potenzregeln haben wie für Potenzen mit ganzen Koeffizienten. Der einzige Unterschied ist, dass wir diese Regeln – sofern die Exponenten rationale Zahlen sind, die keine ganze Zahlen sind – nur auf positive reelle Zahlen anwenden dürfen.

Potenzregeln für rationale Exponenten:

Seien $a, b > 0$, und seien r und r' in $\mathbb{Q}$. Dann gilt:

1. $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$
2. $\dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$
3. $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$
4. $a^r b^r = (ab)^r$
5. $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

Diese Regeln werden falsch, wenn wir erlauben, dass auch aus negativen Zahlen Wurzeln gezogen werden. Sie erinnern sich an die Frage, warum man $\sqrt[3]{-8} = -2$ nicht zulässt, obwohl doch -2 die einzige Zahl ist, deren dritte Potenz -8 ist? Angenommen, wir würden das erlauben. Dann bekommen wir mit den Potenzgesetzen folgende Gleichungskette

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2,$$

also $-2 = 2$, ein Widerspruch. Sollten Sie jetzt an den Potenzregeln zweifeln: Diese sind richtig, und wir werden sie in Kurseinheit 4 der Mathematischen Grundlagen auch beweisen.

3.12 Aufgabe: Verifizieren Sie folgende Rechnungen.

1. $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 4$ und $120^{\frac{1}{2}} \cdot 900^{\frac{1}{4}} = 60$ und $\sqrt[6]{6 \cdot \sqrt[4]{6 \cdot \sqrt[3]{6}}} = \sqrt[9]{36}$
2. $\dfrac{a^{-\frac{7}{8}} b}{c^{-\frac{1}{2}}} : \dfrac{b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{4}}}{a} = \dfrac{\sqrt[8]{a}\sqrt{b}}{\sqrt[4]{c}}$ und $\left(\dfrac{4x^{-3}y^2}{z^5}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\dfrac{16y^{-2}}{x^{-6}z^4}\right)^{\frac{1}{6}} = \dfrac{xz^4}{4y}$

Lösung

1. $$4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2 = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+1} = 2^2 = 4$$

   und

   $$120^{\frac{1}{2}} \cdot 900^{\frac{1}{4}} = 120^{\frac{1}{4}} \cdot 120^{\frac{1}{4}} \cdot 900^{\frac{1}{4}} = (120 \cdot 120 \cdot 900)^{\frac{1}{4}} = (2 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 15 \cdot 60)^{\frac{1}{4}} = (60^4)^{\frac{1}{4}} = 60$$

   und

   $$\begin{aligned} \sqrt[6]{6 \cdot \sqrt[4]{6 \cdot \sqrt[3]{6}}} &= (6 \cdot (6 \cdot 6^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1}{6}}(6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}})^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1}{6}}(6^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}} \cdot 6^{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}}) \\ &= 6^{\frac{1}{6}} \cdot 6^{\frac{1}{24}} \cdot 6^{\frac{1}{72}} = 6^{\frac{12}{72}+\frac{3}{72}+\frac{1}{72}} = 6^{\frac{16}{72}} = 6^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{6^2} = \sqrt[9]{36}. \end{aligned}$$

2.

$$\frac{a^{-\frac{7}{8}} \cdot b}{c^{-\frac{1}{2}}} : \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{3}{4}}}{a} = \frac{a^{-\frac{7}{8}} \cdot b}{c^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{1} \cdot a^{-\frac{7}{8}} \cdot b^{\frac{2}{2}}}{c^{\frac{3}{4}} \cdot c^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{a^{1-\frac{7}{8}} \cdot b^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}}}{c^{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{8}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[8]{a}\sqrt{b}}{\sqrt[4]{c}}$$

und

$$\left(\frac{4x^{-3}y^{2}}{z^{5}}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{16y^{-2}}{x^{-6}z^{4}}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{4^{-\frac{2}{3}}x^{-3\cdot(-\frac{2}{3})}y^{2\cdot(-\frac{2}{3})}}{z^{5\cdot(-\frac{2}{3})}} : \frac{16^{\frac{1}{6}}y^{-2\cdot\frac{1}{6}}}{x^{-6\cdot\frac{1}{6}}z^{4\cdot\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{4^{-\frac{2}{3}}x^{2}y^{-\frac{4}{3}}}{z^{-\frac{10}{3}}} : \frac{4^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-1}z^{\frac{2}{3}}} = \frac{4^{-\frac{2}{3}}x^{2}y^{-\frac{4}{3}}}{z^{-\frac{10}{3}}} \cdot \frac{x^{-1}z^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}} = 4^{-1}xy^{-1}z^{4} = \frac{xz^{4}}{4y}.$$

4 Rechnen mit Buchstaben

4.1 Ausmultiplizieren

In der Mathematik bezeichnet **Term** einen sinnvollen Ausdruck, der Ziffern, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann. Terme sind sozusagen die grammatisch korrekten Wörter oder Wortgruppen in der Sprache der Mathematik. Das Umformen von Termen ist Grundlage für das Beherrschen aller mathematischen Disziplinen, und im Wesentlichen lässt es sich unter dem Schlagwort „Variationen zum Thema Distributivgesetz“ fassen. Termumformungen umfassen das Ausmultiplizieren von Klammern, das Ausklammern und das Einsetzen von Termen in Terme.

4.1.1 Die Distributivgesetze

Wir haben alle einmal gelernt wie man Klammern ausmultipliziert: $a(b+c) = ab+ac$. Dieses Gesetz heißt **Distributivgesetz**. Wir haben auch die Formel $(a+b)c = ac+bc$, die wir ebenfalls Distributivgesetz nennen wollen. Die Distributivgesetze machen Aussagen darüber, wie sich die Addition und die Multiplikation vertragen.

Oft sind a, b und c nicht irgendwelche Zahlen sondern selbst wieder Terme. Trotzdem reichen allein die beiden Distributivgesetze aus, die Klammern aufzulösen. Ein Beispiel: Wir möchten (ganz ausführlich) die Klammern des Ausdrucks $(x+y)(a+b)$ auflösen. Dazu führen wir die Abkürzung $A = a+b$ ein. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)(a+b) &= (x+y)A, \text{ denn } A = a+b \\
&= xA + yA \text{ mit dem zweiten Distributivgesetz} \\
&= x(a+b) + y(a+b), \text{ denn } A = a+b \\
&= xa + xb + ya + yb \text{ mit dem ersten Distributivgesetz.}
\end{aligned}$$

Eine Fingerübung für Sie:

4.1 Aufgabe: Schreiben Sie folgende Ausdrücke ohne Klammern.

1. $(a-b)(x+y)$
2. $(3x-5y)(-b+3c)$
3. $-(xy+c)(ab-2xz)$
4. $(a^2+b-c)(a+bc)a^2b$

Lösung

1. $(a-b)(x+y) = ax + ay - bx - by$
2. $(3x-5y)(-b+3c) = -3bx + 5by + 9cx - 15cy$
3. $-(xy+c)(ab-2xz) = -(xyab-2x^2yz+abc-2cxz) = -abxy+2x^2yz-abc+2cxz$
4. $(a^2+b-c)(a+bc)a^2b = (a^3+a^2bc+ab+b^2c-ac-bc^2)a^2b = a^5b+a^4b^2c+a^3b^2+a^2b^3c-a^3bc-a^2b^2c^2$

Bei diesen Lösungen habe ich von der Konvention Gebrauch gemacht, bei einem Produkt von Variablen die einzelnen Faktoren in alphabetischer Reihenfolge zu notieren. Das muss man nicht machen, aber in der Regel hilft es, den Überblick zu behalten.

4.1.2 Die binomischen Formeln

Ein Highlight des Ausmultiplizierens von Klammern liefert die **binomischen Formeln**.

Binomische Formeln:
Für alle reellen Zahlen a und b gilt

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Alle diese Formeln beweist man, indem man die Klammern ausmultipliziert und dann gleichnamige Terme (also Terme, die dieselben Variablen mit jeweils derselben Potenz enthalten) zusammenfasst. Machen wir das mal ausführlich:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir das Kommutativgesetz $ab = ba$ verwendet, und beim letzten Gleichheitszeichen haben wir $ab + ab$ zu $2ab$ zusammen gefasst.

Für Puristen: Dass man Terme zusammenfassen kann, liegt wieder am Distributivgesetz, es gilt nämlich $ab + ab = (1 + 1)ab = 2ab$.

4.2 Aufgabe: Beweisen Sie die anderen binomischen Formeln.

Lösung
Es gilt

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ba+(-b)^2 = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2$$

und

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Hier haben wir von den Vorzeichenregeln (Minus mal Minus ist Plus, Plus mal Minus ist Minus und Minus mal Plus ist Minus) Gebrauch gemacht.

Das Zusammenfassen von Termen dürfen Sie gleich noch einmal üben.

4.3 Aufgabe: Schreiben Sie $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 - x)$ ohne Klammern und vereinfachen Sie.

Lösung Es ist

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x) = 1+x+x^2+x^3+x^4-x-x^2-x^3-x^4-x^5 = 1-x^5.$$

Die binomischen Formeln müssen Sie in den unterschiedlichsten Verkleidungen erkennen und richtig anwenden können. Etwas Futter zum Üben finden Sie hier.

4.4 Aufgabe: Welche der folgenden Rechnungen sind richtig?

- $1 - 4q^2 =$

  $(1 - 4q)^2$ oder $(1 - 2q)(1 + 2q)$ oder $(1 - 2p)^2$
- $(a + 3b)^2 =$

  $a^2 + 6ab + 9b^2$oder $a^2 + 3ab + 9b^2$ oder $a^2 + 9ab + 6b^2$
- $A^4 - B^2 =$

  $(A + B)(A - B)$ oder $(A^4 + B)(A^4 - B)$ oder $(A^2 + B)(A^2 - B)$
- $(2a + 3b)^2 =$

  $2a^2 + 6ab + 9b^2$ oder $4a^2 + 12ab + 9b^2$ oder $4a^2 + 6ab + 9b^2$
- $(1 - x)^2 =$

  $1 - 2x - 2x^2$ oder $1 - 2x - x^2$ oder $1 - 2x + x^2$

- $(2a-3b)^2 =$

  $4a^2 - 12ab + 9b^2$ oder $4a^2 + 12ab - 9b^2$ oder $4a^2 - 6ab + 9b^2$

Lösung

- Mit der 3. binomischen Formel folgt:

$$1 - 4q^2 = (1-2q)(1+2q).$$

- Mit der 1. binomischen Formel folgt:

$$(a+3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2.$$

- Mit der 3. binomischen Formel folgt:

$$A^4 - B^2 = (A^2+B)(A^2-B).$$

- Mit der 1. binomischen Formel folgt:

$$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2.$$

- Mit der 2. binomischen Formel folgt:

$$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2.$$

- Mit der 2. binomischen Formel folgt:

$$(2a-3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2.$$

4.2 Ausklammern

4.2.1 Noch einmal die Distributivgesetze

Lesen wir das Distributivgesetz jetzt einfach mal rückwärts: $ab+ac = a(b+c)$. Verbal könnte man diese Formel auch folgendermaßen ausdrücken: Enthalten in einer Summe die Summanden einen gemeinsamen Faktor, so können wir diesen Faktor herausziehen. Dieses Herausziehen nennt man **ausklammern**. Versuchen Sie es selbst. Wenn Sie am Rechner sitzen, müssen Sie zunächst den Button „Test starten“ anklicken.

4.5 Aufgabe: Welche der folgenden Rechnungen sind richtig?

- $4c^2 + 12x =$

  $4(c^2 + 3x)$ oder $4(c^2 + 12x)$ oder $4c^2(1 + 12x)$
- $2ab - a^2 =$

  $a^2(2b - 1)$ oder $a(2b - a)$ oder $b(2a - a^2)$
- $A^2 + 16(y + 2)A =$

  $A^2(1 + (16(y + 2))$ oder $A(A + 16y + 32)$ oder $16(A^2 + (y + 2)A)$
- $9(a^2 - 1) + 3(b^2 - 3) =$

  $3(3a^2 + b^2)$ oder $3(3a^2 + b^2 - 3)$ oder $3(3a^2 + b^2 - 6)$
- $1 + x + x^2 =$

  $x(1 + x)$ oder $1 + x(1 + x)$ oder $1 + x(1 + 2x)$
- $3(b - 1) + (b - 1)^2$

  $(b - 1)(b + 2)$ oder $4(b - 1)$ oder $3(b - 1)(1 + (b - 1)^2)$

Lösung

- Es ist
$$4c^2 + 12x = 4(c^2 + 3x)$$
- Es ist
$$2ab - a^2 = a(2b - a).$$
- Es ist
$$A^2 + 16(y + 2)A = A(A + 16y + 32).$$
- Es ist
$$9(a^2 - 1) + 3(b^2 - 3) = 3(3a^2 + b^2 - 6).$$
- Es ist
$$1 + x + x^2 = 1 + x(1 + x).$$
- Es ist
$$3(b - 1) + (b - 1)^2 = (b - 1)(b + 2).$$

4.2.2 Terme kürzen

Ausklammern ist besonders dann von Interesse, wenn wir Brüche, deren Zähler und Nenner Terme sind, kürzen wollen. Versuchen Sie sich doch einmal an dem folgenden Test. Dabei werden Sie bei einigen Aufgaben vermutlich Papier und Kuli brauchen. Es wird übrigens angenommen, dass die auftretenden Variablen nur solche Werte annehmen, für die die Terme, durch die gekürzt wird, ungleich Null sind.

4.6 Aufgabe: Welche der folgenden Rechnungen sind richtig?

- $\dfrac{ax+2x^2}{x(ax+2y)} =$

  $\dfrac{a+2x^2}{ax+2y}$ oder $\dfrac{1+x}{x+y}$ oder $\dfrac{a+2x}{ax+2y}$

- $\dfrac{ax^2+2x}{x(ax+3y)} =$

  $\dfrac{ax+2}{ax+3y}$ oder $\dfrac{x+2}{x+3y}$ oder $\dfrac{a+2x}{ax+3y}$

- $\dfrac{(x+a)(x-b)}{x^2-bx} =$

  $\dfrac{(x+a)(x-1)}{x(x-1)}$ oder $\dfrac{x+a}{x}$ oder $\dfrac{(x+a)(x-1)}{x^2-x}$

- $\dfrac{(x^2+ax)(x^2-36)}{(x-a)(x+6)} =$

  $\dfrac{(x+a)(x-18)}{(x-a)(x+3)}$ oder $\dfrac{(x^2+ax)(x-6)}{x-a}$ oder $\dfrac{(x^2+x)(x^2-6)}{(x-1)(x+1)}$

- Die Terme $x(x^2-4)(ax+1)$ und $(x^2+2x)(ax+2)$ haben als gemeinsamen Faktor

  ax oder $x(x+2)$ oder $(ax+1)(ax+2)$

- $\dfrac{x(x^2-4)(ax+1)}{(x^2+2x)(ax+2)} =$

  $\dfrac{x(x^2-4)2}{(x^2+2x)3}$ oder $\dfrac{(x-2)(ax+1)}{ax+2}$ oder $\dfrac{x^2-4}{x+2}$

Lösung

- Es ist
$$\frac{ax+2x^2}{x(ax+2y)} = \frac{a+2x}{ax+2y}$$

- Es ist
$$\frac{ax^2+2x}{x(ax+3y)} = \frac{ax+2}{ax+3y}$$

- Es ist
$$\frac{(x+a)(x-b)}{x^2-bx} = \frac{x+a}{x}$$

- Es ist
$$\frac{(x^2+ax)(x^2-36)}{(x-a)(x+6)} = \frac{(x^2+ax)(x-6)}{x-a},$$
denn mit der dritten Binomischen Formel ist
$$(x^2-36) = (x+6)(x-6).$$

- Der gemeinsame Faktor ist $x(x+2)$. Wieder mit der dritten Binomischen Formel ist
$$(x^2-4) = (x+2)(x-2).$$

- Es ist
$$\frac{x(x^2-4)(ax+1)}{(x^2+2x)(ax+2)} = \frac{(x-2)(ax+1)}{ax+2}.$$

4.2.3 Polynomdivision

Terme aus Termen auszuklammern ist in der Regel gar nicht einfach, wenn man keine Idee hat, welchen Term man eigentlich ausklammern will oder kann. Aber wenn man eine Idee hat, dann hilft die Polynomdivision. Polynomdivision funktioniert im Prinzip genauso wie die schriftliche Division. Ich erkläre das einfach mal an einem Beispiel.

Nehmen wir an, wir hätten den Verdacht, dass wir $x+1$ aus x^3+6x^2+9x+4 ausklammern können. Wenn das stimmt, dann lässt sich x^3+6x^2+9x+4 ohne Rest durch $x+1$ teilen. Machen wir also den Ansatz:

$$(x^3+6x^2+9x+4) : (x+1) =$$

Bei den folgenden Rechnungen stelle ich jeweils die Teile, die im betreffenden Rechenschritt verwendet werden, blau dar. Im ersten Schritt muss ich mir die Frage beantworten: Womit muss ich x multiplizieren, damit x^3 heraus kommt? Natürlich ist die Antwort x^2.

Wir schreiben dann

$$(x^3 + 6x^2 + 9x + 4) : (x + 1) = x^2.$$

Jetzt muss ich x^2 mit $x + 1$ multiplizieren und das Ergebnis $x^3 + x^2$ von $x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ subtrahieren.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
(x^3 & + & 6x^2 & + & 9x & + & 4) & : & (x & + & 1) & = & x^2 \\
-(x^3 & + & x^2) & & & & & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Ich führe jetzt die Subtraktion durch

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
(x^3 & + & 6x^2 & + & 9x & + & 4) & : & (x & + & 1) & = & x^2 \\
-(x^3 & + & x^2) & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & + & 9x & + & 4 & & & & & &
\end{array}$$

Jetzt muss ich überlegen, womit ich x multiplizieren muss, damit $5x^2$ heraus kommt. Die Antwort ist $5x$. Damit wird $5x$ der nächste Summand.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
(x^3 & + & 6x^2 & + & 9x & + & 4) & : & (x & + & 1) & = & x^2 & + & 5x \\
-(x^3 & + & x^2) & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & + & 9x & + & 4 & & & & & & & &
\end{array}$$

Jetzt muss ich $5x$ mit $x + 1$ multiplizieren und das Ergebnis $5x^2 + 5x$ von $5x^2 + 9x + 4$ subtrahieren.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
(x^3 & + & 6x^2 & + & 9x & + & 4) & : & (x & + & 1)) & = & x^2 & + & 5x \\
-(x^3 & + & x^2) & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & + & 9x & + & 4 & & & & & & & & \\
 & & -(5x^2 & + & 5x) & & & & & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Ich führe die Subtraktion durch und erhalte

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
(x^3 & + & 6x^2 & + & 9x & + & 4) & : & (x & + & 1) & = & x^2 & + & 5x \\
-(x^3 & + & x^2) & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & + & 9x & + & 4 & & & & & & & & \\
 & & -(5x^2 & + & 5x) & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 4x & + & 4 & & & & & & & &
\end{array}$$

Ich muss x mit 4 multiplizieren, damit $4x$ herauskommt. Damit wird 4 unser nächster Summand.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrr}
(x^3 & + & 6x^2 & + & 9x & + & 4) & : & (x & + & 1) & = & x^2 & + & 5x & + & 4 \\
-(x^3 & + & x^2) & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & + & 9x & + & 4 & & & & & & & & & & \\
 & & -(5x^2 & + & 5x) & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 4x & + & 4 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Jetzt muss ich $4(x+1) = 4x+4$ bilden und von $4x+4$ subtrahieren. Es bleibt der Rest 0.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
(x^3 & + & 6x^2 & + & 9x & + & 4) & : & (x & + & 1) & = & x^2 + 5x + 4 \\
-(x^3 & + & x^2) & & & & & & & & & & \\
\hline
& & 5x^2 & + & 9x & + & 4 & & & & & & \\
& & -(5x^2 & + & 5x) & & & & & & & & \\
\hline
& & & & 4x & + & 4 & & & & & & \\
& & & & -(4x & + & 4) & & & & & & \\
\hline
& & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Da die Division ohne Rest aufging, folgt $x^3+6x^2+9x+4 = (x+1)(x^2+5x+4)$, und wir haben $x+1$ aus x^3+6x^2+9x+4 ausgeklammert.

Noch ein Beispiel? Also los:
Wir vermuten, dass man n^3+4n^2+3 aus $2n^5+8n^4-3n^3-6n^2-9$ ausklammern kann. Dann muss sich $2n^5+8n^4-3n^3-6n^2-9$ durch n^3+4n^2+3 ohne Rest teilen lassen. Wir machen den Ansatz

$$(2n^5+8n^4-3n^3-6n^2-9) : (n^3+4n^2+3) =$$

Wir müssen n^3 mit $2n^2$ multiplizieren, damit $2n^5$ heraus kommt. Damit wird $2n^2$ unser erster Summand. Danach müssen wir $2n^2(n^3+4n^2+3) = 2n^5+8n^4+6n^2$ berechnen und von $2n^5+8n^4-3n^3-6n^2-9$ subtrahieren:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(2n^5 & + & 8n^4 & - & 3n^3 & - & 6n^2 & - & 9) & : & (n^3 + 4n^2 + 3) = 2n^2 \\
-(2n^5 & + & 8n^4 & & & + & 6n^2) & & & & \\
\hline
& & & - & 3n^3 & - & 12n^2 & - & 9 & &
\end{array}$$

Wir müssen n^3 mit -3 multiplizieren, damit $-3n^3$ herauskommt. Damit wird -3 unser nächster Summand. Danach müssen wir $-3(n^3+4n^2+3) = -3n^3-12n^2-9$ berechnen und von $-3n^3-12n^2-9$ subtrahieren.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(2n^5 & + & 8n^4 & - & 3n^3 & - & 6n^2 & - & 9) & : & (n^3 + 4n^2 + 3) = 2n^2 - 3 \\
-(2n^5 & + & 8n^4 & & & + & 6n^2) & & & & \\
\hline
& & & - & 3n^3 & - & 12n^2 & - & 9 & & \\
& & - & (- & 3n^3 & - & 12n^2 & - & 9) & & \\
\hline
& & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Wieder geht die Division ohne Rest auf, und es folgt, dass $2n^5+8n^4-3n^3-6n^2-9 = (n^3+4n^2+3)(2n^2-3)$ ist.

4.7 Aufgabe: 1. Klammern Sie $T+4$ aus T^3+6T^2+9T+4 aus.

2. Klammern Sie $2a^2 + 10a + 12$ aus $2a^3 + 4a^2 - 18a - 36$ aus.
3. Klammern Sie $n + 5$ aus $n^4 + 5n^3 - n - 5$ aus.

Lösung

1.

$$
\begin{array}{l}
(T^3 + 6T^2 + 9T + 4) : (T + 4) = T^2 + 2T + 1 \\
\underline{-(T^3 + 4T^2)} \\
\qquad 2T^2 + 9T + 4 \\
\qquad \underline{-(2T^2 + 8T)} \\
\qquad\qquad T + 4 \\
\qquad\qquad \underline{-(T + 4)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es folgt $T^3 + 6T^2 + 9T + 4 = (T + 4)(T^2 + 2T + 1)$.

2.

$$
\begin{array}{l}
(2a^3 + 4a^2 - 18a - 36) : (2a^2 + 10a + 12) = a - 3 \\
\underline{-(2a^3 + 10a^2 + 12a)} \\
\qquad -6a^2 - 30a - 36 \\
\qquad \underline{-(-6a^2 - 30a - 36)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es folgt $2a^3 + 4a^2 - 18a - 36 = (2a^2 + 10a + 12)(a - 3)$.

3.

$$
\begin{array}{l}
(n^4 + 5n^3 - n - 5) : (n + 5) = n^3 - 1 \\
\underline{-(n^4 + 5n^3)} \\
\qquad\qquad - n - 5 \\
\qquad\qquad \underline{-(- n - 5)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es folgt $n^4 + 5n^3 - n - 5 = (n + 5)(n^3 - 1)$.

4.3 Einsetzen in Terme

In Variablen von Termen kann man andere Terme einsetzen. An sich ist es nicht schwierig, etwa überall in einem Term $a+b$ an Stelle von x zu schreiben, aber trotzdem ist das beliebig fehleranfällig. Daher ein Tipp:

Tipp: Wenn Sie in eine Variable in einem Term einen weiteren Term einsetzen, dann machen Sie um das, was Sie einsetzen wollen, Klammern!

Überflüssige Klammern weg zu machen ist viel einfacher, als den Fehler zu suchen, wenn aus $2T$ nach Einsetzen von $n+1$ in T aus Versehen $2n+1$ an Stelle von $2(n+1) = 2n+2$ wird.

4.8 Aufgabe: Ersetzen Sie in $\dfrac{(2n^3-6n)(n+3)}{12n+(n+1)^2}$ die Variable n durch

1. -1
2. $f-g$
3. $n+1$.

Vereinfachen Sie die resultierenden Ausdrücke so weit, wie es Ihnen sinnvoll erscheint.

Lösung

1. Wenn wir n in $\dfrac{(2n^3-6n)(n+3)}{12n+(n+1)^2}$ durch -1 ersetzen, erhalten wir

$$\frac{(2(-1)^3-6(-1))((-1)+3)}{12(-1)+((-1)+1)^2} = \frac{(-2+6)\cdot 2}{-12} = -\frac{4\cdot 2}{12} = -\frac{2}{3}.$$

2. Wenn wir n in $\dfrac{(2n^3-6n)(n+3)}{12n+(n+1)^2}$ durch $f-g$ ersetzen, erhalten wir

$$\frac{(2(f-g)^3-6(f-g))((f-g)+3)}{12(f-g)+((f-g)+1)^2} = \frac{(2(f-g)^3-6f+6g)(f-g+3)}{12(f-g)+(f-g+1)^2}.$$

Da es kaum so aussieht, dass der Ausdruck durch Ausmultiplizieren der Klammern übersichtlicher wird, lassen wir die Finger davon.

3. Wenn wir n in $\dfrac{(2n^3-6n)(n+3)}{12n+(n+1)^2}$ durch $n+1$ ersetzen, erhalten wir

$$\frac{(2(n+1)^3-6(n+1))((n+1)+3)}{12(n+1)+((n+1)+1)^2} = \frac{(2(n+1)^3-6n-6)(n+4)}{12(n+1)+(n+2)^2}.$$

Wieder sieht es nicht so aus, dass der Ausdruck durch Ausmultiplizieren der Klammern einfacher wird.

Auf das Einsetzen von Termen werden Sie im ersten Semester häufig treffen, etwa im Zusammenhang mit so genannten reellen Folgen. Reelle Folgen sind unendlich lange Zahlenstrings $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Dabei wird für jede natürliche

Zahl n eine reelle Zahl a_n festgesetzt, und alle a_n werden der Reihe nach aufgelistet. Oft beschreibt man dazu an durch einen Term, in dem n vorkommt. Ist zum Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$, dann wird dadurch die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ beschrieben. Bei Folgen interessiert man sich beispielsweise dafür, ob sie wachsen, ob also immer $a_{n+1} > a_n$ ist. Dazu muss man erst einmal a_{n+1} fehlerfrei hinschreiben, und das können Sie gleich mal üben.

4.9 Aufgabe:

- Wenn $a_n = \frac{1}{n}$ ist, dann ist $a_{n+1} =$

  $\frac{1}{n+1}$ oder $\frac{1}{n} + 1$ oder $\frac{n}{n+1}$
- Wenn $a_n = \frac{n+1}{n}$ ist, dann ist $a_{n+1} =$

  $\frac{n+2}{n}$ oder $\frac{2n+1}{n}$ oder $\frac{n+2}{n+1}$
- Wenn $a_n = \frac{n+1}{n^2-1}$ ist, dann ist $a_{n+1} =$

  $\frac{1}{n}$ oder $\frac{n+2}{n^2}$ oder $\frac{n+2}{n^2+n}$
- Wenn $a_n = \frac{6(n+1)(2n-3)}{n^2-n}$ ist, dann ist $a_{n+1} =$

  $\frac{12(n^2+2n)}{(n+1)^2-2}$ oder $\frac{6(n+2)(2n-2)}{n^2+2n-1}$ oder $\frac{6(n+2)(2n-1)}{n^2+n}$
- Wenn $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ ist, dann ist $a_{n+1} =$

  $\frac{1}{n+1}$ oder $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ oder $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) + 1$
- Wenn $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ ist, dann ist $a_{n+1} =$

  $\frac{a_n-1}{2}$ oder $\frac{1}{2}a_n - 1$ oder $\frac{1}{4}a_{n-1}$

Lösung

- Es ist
  $$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$
- Es ist
  $$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$
- Es ist
  $$a_{n+1} = \frac{1}{n}$$
  denn
  $$a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2-1} = \frac{n+2}{n^2+2n} = \frac{n+2}{n(n+2)} = \frac{1}{n}$$

- Es ist
$$a_{n+1} = \frac{6(n+2)(2n-1)}{n^2+n}$$
- Es ist
$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$
- Es ist
$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_{n-1}$$
denn
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_{(n+1)-1} = \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_{n-1}\right) = \frac{1}{4}a_{n-1}$$

Um zu überprüfen, ob $a_{n+1} > a_n$ ist, gibt es zwei Standardtricks. Der erste ist, die Differenz $a_{n+1} - a_n$ zu bilden, und zu untersuchen, ob diese Differenz > 0 ist. Um das zu tun, müssen Sie in der Bruchrechnung und bei Termumformungen sicher sein. Der zweite Trick funktioniert nur, wenn Sie wissen, dass a_{n+1} und a_n beide positiv sind. Dann können Sie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bilden und untersuchen, ob diese Zahl > 1 ist. Ist dies der Fall, dann ist $a_{n+1} > a_n$, anderenfalls ist es gerade umgekehrt. Auch um dieses zu untersuchen, müssen Sie in der Bruchrechnung und bei Termumformungen fit sein.

5 Lösungen von Gleichungen

5.1 Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Eine **Gleichung** besteht aus zwei mathematischen Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. Enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so sucht man nach Lösungen der Gleichung. Dieses sind Zahlen, die man in die Variable einsetzen kann, sodass die beiden durch das Gleichheitszeichen verbundenen Terme denselben Wert haben. Die Menge aller Lösungen, die auch leer sein kann, bezeichnet man als die Lösungsmenge der Gleichung. In diesem Kapitel wird es um Lösungsverfahren für gewisse Typen von Gleichungen gehen.

Meistens sollen Gleichungen, mit denen Sie es zu tun haben, über den reellen Zahlen gelöst werden. Das heißt, die Lösungen sollen reelle Zahlen sein. Es kann aber durchaus auch vorkommen, dass nur solche Lösungen interessieren, die rationale Zahlen oder ganze Zahlen oder natürliche Zahlen sind. Die Menge, aus der die Lösung einer Gleichung stammen soll, heißt die Definitionsmenge der Gleichung. Wir gehen hier immer davon aus, dass die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ ist.

Alle Lösungsverfahren beruhen darauf, dass Gleichungen nach gewissen Regeln – so genannten Äquivalenzregeln – umgeformt werden dürfen, ohne dass sich die Lösungsmenge verändert.

Äquivalenzregeln für Gleichungen: Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn

1. auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert wird.
2. beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multipliziert werden, wobei die Zahl allerdings $\neq 0$ sein muss.

Will man eine Gleichung lösen, so formt man diese so lange um, bis die gesuchte Variable isoliert ist.

Sie werden sich vielleicht wundern, warum die Addition von 0 auf beiden Seiten erlaubt, hingegen die Multiplikation mit 0 auf beiden Seiten verboten ist. Nun, wenn wir 0 auf beiden Seiten der Gleichung addieren, dann passiert gar nichts, insbesondere bleibt die Lösungsmenge unverändert. Wenn aber beide Seiten einer Gleichung mit 0 multipliziert werden, erhält man die Gleichung $0 = 0$. Die ist zwar wahr, hilft aber bei der Suche nach der Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung keinen Schritt weiter.

Beispiel:
Wenn wir die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 6 = 12$ bestimmen wollen, dann benutzen wir die erlaubten Umformungsregeln um x so zu isolieren, dass es allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht. Auf der anderen Seite finden wir dann die Lösung. So weit die Theorie. Um $3x - 6 = 12$ zu lösen, addieren wir auf beiden Seiten 6. Dies ergibt, ohne die Lösungsmenge zu ändern, $3x = 18$. Jetzt teilen wir beide Seiten durch 3 und erhalten $x = 6$. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ ist dann $\mathcal{L} = \{6\}$.

5.2 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind von der Form $ax + b = 0$, wobei x eine Variable ist. Die Form $ax + b = 0$ nennt man die **Normalform** der linearen Gleichung. Haben wir eine Gleichung durch Äquivalenzumformungen – die ja die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung nicht verändern – in Normalform gebracht, lässt sich die Lösungsmenge leicht berechnen. Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, dann erhalten wir die Gleichung $0 \cdot x + b = 0$, und die hat keine Lösung. Ist $a = b = 0$, so ist die Gleichung für alle Zahlen richtig. Wenn $a \neq 0$ ist, können wir b auf beiden Seiten der Gleichung subtrahieren und beide Seiten durch a teilen. Wir erhalten $x = -\frac{b}{a}$, und die Lösungsmenge von $ax + b = 0$ ist die Menge $\mathcal{L} = \{-\frac{b}{a}\}$. Fassen wir zusammen:

Lösungen von linearen Gleichungen in Normalform: Die lineare Gleichung $ax + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat

1. für $a \neq 0$ die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{-\frac{b}{a}\}$,
2. für $a = 0$ und $b = 0$ die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \mathbb{R}$,
3. für $a = 0$ und $b \neq 0$ keine Lösung, also $\mathcal{L} = \emptyset$.

So weit, so gut; eigentlich könnten wir hier schon aufhören, über lineare Gleichungen zu plaudern. Es bleibt allerdings eine Frage unbeantwortet: Wie kann man eigentlich entscheiden, ob sich eine gegebene Gleichung so umformen lässt, dass eine Normalform $ax + b = 0$ heraus kommt? Dafür gibt es keine Regeln, dass müssen wir in jedem Einzelfall checken. Machen wir einige Beispiele.

Beispiele:

1. Wir suchen die Lösungsmenge der Gleichung

$$2x - 3(5 - x) = 3(2x - 5) + 9.$$

Dazu multiplizieren wir die Klammern aus und vereinfachen beide Seiten der Gleichung. Das ergibt

$$5x - 15 = 6x - 6.$$

Jetzt subtrahieren wir auf beiden Seiten $5x$, was ja eine Äquivalenzumformung ist. Damit erhalten wir $-15 = x - 6$. Jetzt addieren wir auf beiden Seiten 15 und erhalten $0 = x + 9$. Wir können unsere ursprüngliche Gleichung durch Äquivalenzumformungen in die Normalform $x + 9 = 0$ überführen. Die Gleichung ist also linear, ihre Lösungsmenge ist $\mathcal{L} = \{-9\}$.

2. Wir suchen die Lösungsmenge der Gleichung

$$(x-1)^2 + (x+1)(x-3) = 2(x-2)^2.$$

Sieht nicht wirklich linear aus, oder? Aber abwarten.
Wir multiplizieren die Klammern auf beiden Seiten aus und erhalten

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x - 3x - 3 = 2(x^2 - 4x + 4),$$

also

$$2x^2 - 4x - 2 = 2x^2 - 8x + 8.$$

Jetzt subtrahieren wir auf beiden Seiten $2x^2$ (Äquivalenzumformung). Das ergibt

$$-4x - 2 = -8x + 8.$$

Jetzt addieren wir auf beiden Seiten $8x$ (Äquivalenzumformung) und erhalten $4x-2 = 8$. Auf beiden Seiten 8 Subtrahieren ergibt $4x-10 = 0$, die Normalform der Gleichung, die sich als linear entpuppt. Die Lösung ist $\mathcal{L} = \{\frac{5}{2}\}$.

3. Wir suchen die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{2(x+1)}{x-2} = \frac{2(2-x)}{1-x}.$$

Bevor wir jetzt wild los rechnen, müssen wir kurz nachdenken. Diese Gleichung macht nur dann Sinn, wenn $x \neq 1$ und $x \neq 2$ ist. Denn sonst hätten wir durch Null geteilt, und das ist wirklich nicht erlaubt. Die Definitionsmenge dieser Gleichung ist somit $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$,das heißt, $\mathbb{R}$ ohne 1 und ohne 2.

Jetzt machen wir uns daran, die Gleichung

$$\frac{2(x+1)}{x-2} = \frac{2(2-x)}{1-x}$$

umzuformen. Wir versuchen zunächst, uns von den lästigen Brüchen zu trennen und multiplizieren beide Seiten der Gleichung zunächst mit $1-x$ und dann mit $x-2$. Da wir 1 und 2 aus der Definitionsmenge ausgeschlossen haben, haben wir mit Termen multipliziert, die $\neq 0$ sind. Also sind das Äquivalenzumformungen. Wir erhalten:

$$2(x+1)(1-x) = 2(2-x)(x-2).$$

Nach Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Umstellen mutiert diese Gleichung zu $8x - 10 = 0$. Diese ist linear und hat die Lösungmenge $\mathcal{L} = \{\frac{5}{4}\}$.

4. Noch ein letztes Beispiel. Wir suchen die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x.$$

Diese Gleichung ist für $x = 1$ nicht definiert, denn anderenfalls würden wir durch 0 teilen. Jetzt multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $x - 1$. Das ist allerdings keine Äquivalenzumformung, denn $x - 1$ könnte 0 sein.

Damit erhalten wir

$$x^2 - 1 = x(x-1) = x^2 - x.$$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten x^2 (Äquivalenzumformung) und multiplizieren beide Seiten der Gleichung

$$-1 = -x$$

mit -1. Wir erhalten

$$x = 1.$$

Setzen wir dieses in unsere Ursprungsgleichung ein, so ist die linke Seite nicht definiert. Damit hat diese Gleichung keine Lösung.

Das letzte Beispiel zeigt, dass bei Bruchgleichungen, bei denen die Variable im Nenner steht, rechnerisch Lösungen entstehen können, die nicht im Definitionsbereich der Gleichung liegen. Diese müssen Sie bei Angabe der Lösungsmenge eliminieren. Sollten Sie jetzt etwas kleinlaut fragen, ob Sie immer zunächst untersuchen müssen, wann der Nenner einer Bruchungleichung 0 wird, so kann ich Sie trösten. Nein, das müssen Sie nicht. Formen Sie zunächst die Gleichung nach dem Motto „Augen zu und durch“ um, bis

Sie die potentielle Lösungsmenge ablesen können. Setzen Sie dann alle gefundenen Werte in die Gleichung ein, und überprüfen Sie, ob die Werte die Gleichung wirklich lösen. Ist dies nicht der Fall, entfernen Sie diese Werte aus der Lösungsmenge. Auch das fassen wir zu einer Merkregel zusammen.

Merkregel zum Lösen von Gleichungen:
Durch die Multiplikation von Gleichungen mit Termen, die 0 sein können, können sich rechnerisch Werte ergeben, die nicht im Definitionsbereich der Gleichung liegen oder diese nicht lösen. Diese erkennt man, indem man sie in die ursprüngliche Gleichung einsetzt, und überprüft, ob sie die Gleichung lösen (insbesondere, ob die Nenner $\neq 0$ sind). Ist dies nicht der Fall, so sind diese Werte bei Angabe der Lösungsmenge aus dieser zu entfernen.

Jetzt einige Aufgaben für Sie.

5.1 Aufgabe: Berechnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

1. $2(x-3)+4 = 3(1-x)$
2. $3(x+1)(1-x) = 1-x-3x^2$.
3. $\dfrac{x-1}{2(x+3)} = \dfrac{x}{2x-1}$
4. $\dfrac{2x+3}{2x+1} - \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{1}{4x^2+2x}$
5. $\dfrac{x}{(x-2)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-4x+4} = \dfrac{1}{x+1}$

Lösung

1.
$$\begin{array}{rcll} 2(x-3)+4 &=& 3(1-x) & \text{Ausmultiplizieren und Vereinfachen} \\ 2x-2 &=& 3-3x & \text{auf beiden Seiten } 3x \text{ und 2 addieren} \\ 5x &=& 5 & \text{beide Seiten durch 5 dividieren} \\ x &=& 1 & \end{array}$$

Da wir nur Äquivalenzumformungen gemacht haben, gilt $\mathcal{L} = \{1\}$.

2.
$$\begin{array}{rcll} 3(x+1)(1-x) &=& 1-x-3x^2 & \text{Ausmultiplizieren und Vereinfachen} \\ 3-3x^2 &=& 1-x-3x^2 & \text{auf beiden Seiten } 3x^2 \text{ addieren} \\ 3 &=& 1-x & \text{auf beiden Seiten } x \text{ und } -3 \text{ addieren} \\ x &=& -2 & \end{array}$$

Da wir nur Äquivalenzumformungen gemacht haben, gilt $\mathcal{L} = \{-2\}$.

3.

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{2(x+3)} &= \frac{x}{2x-1} && \text{beide Seiten mit } 2(x+3) \text{ und } 2x-1 \text{ multiplizieren} \\
(x-1)(2x-1) &= 2x(x+3) && \text{Ausmultiplizieren und Vereinfachen} \\
2x^2-3x+1 &= 2x^2+6x && \text{auf beiden Seiten } -2x^2 \text{ addieren} \\
-3x+1 &= 6x && \text{auf beiden Seiten } 3x \text{ addieren} \\
1 &= 9x && \text{beide Seiten durch 9 dividieren} \\
x &= \tfrac{1}{9}
\end{aligned}$$

Der Schritt von der ersten zur zweiten Zeile war keine Äquivalenzumformung, denn $2(x+3)$ und $2x-1$ können 0 sein. Daher müssen wir den gefundenen Wert einsetzen und überprüfen, ob wirklich Gleichheit vorliegt.

Das machen wir für beide Seiten getrennt:

$$\text{rechte Seite:} \quad \frac{\frac{1}{9}}{2\cdot\frac{1}{9}-1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}-\frac{9}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{7} = -\frac{1}{7}$$

$$\text{linke Seite:} \quad \frac{\frac{1}{9}-1}{2(\frac{1}{9}+3)} = \frac{\frac{1}{9}-\frac{9}{9}}{\frac{2}{9}+6} = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{54}{9}} = -\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{56} = -\frac{1}{7}.$$

Auf beiden Seiten kommt dasselbe raus, und es folgt $\mathcal{L} = \{\frac{1}{9}\}$.

4.

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x-2}{2x} &= \frac{1}{4x^2+2x} && 2x \text{ ausklammern} \\
\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x-2}{2x} &= \frac{1}{2x(2x+1)} && \text{Mit } 2x+1 \text{ und } 2x \text{ multiplizieren} \\
(2x+3)2x-(2x-2)(2x+1) &= 1 && \text{Ausmultiplizieren} \\
4x^2+6x-4x^2+2x+2 &= 1 && \text{Vereinfachen} \\
8x &= -1 \\
x &= -\tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

Der Schritt von der zweiten zur dritten Zeile war keine Äquivalenzumformung. Daher müssen wir den gefundenen Wert einsetzen und überprüfen, ob Gleichheit vorliegt. Wieder machen wir das für beide Seiten getrennt.

Es gilt

$$\text{linke Seite:}\quad \frac{-\frac{2}{8}+3}{-\frac{2}{8}+1}-\frac{-\frac{2}{8}-2}{-\frac{2}{8}}=\frac{-\frac{2}{8}+\frac{24}{8}}{-\frac{2}{8}+\frac{8}{8}}-\frac{-\frac{2}{8}-\frac{16}{8}}{-\frac{2}{8}}=\frac{\frac{22}{8}}{\frac{6}{8}}-\frac{-\frac{18}{8}}{-\frac{2}{8}}$$

$$=\tfrac{22}{8}\cdot\tfrac{8}{6}-\tfrac{18}{8}\cdot\tfrac{8}{2}=\tfrac{11}{3}-9=\tfrac{11}{3}-\tfrac{27}{3}=-\tfrac{16}{3}$$

$$\text{rechte Seite:}\quad \frac{1}{-\frac{2}{8}(-\frac{2}{8}+1)}=\frac{1}{-\frac{2}{8}(-\frac{2}{8}+\frac{8}{8})}=\frac{1}{-\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{8}}=\frac{1}{-\frac{12}{64}}=-\frac{64}{12}=-\frac{16}{3}$$

Beide Seiten stimmen überein, und es folgt $\mathcal{L}=\{-\frac{1}{8}\}$.

5.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x-2)(x+1)}-\frac{2}{x^2-4x+4} &= \frac{1}{x+1} && \text{Binomische Formel, und } \frac{1}{x+1} \text{ subtrahieren}\\
\frac{x}{(x-2)(x+1)}-\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{1}{x+1} &= 0 && \text{Multiplikation mit } x+1\\
\frac{x}{x-2}-\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}-1 &= 0 && \text{Multiplikation mit } (x-2)^2\\
x(x-2)-2(x+1)-(x-2)^2 &= 0 && \text{Ausmultiplizieren}\\
x^2-2x-2x-2-x^2+4x-4 &= 0 && \text{Vereinfachen}\\
-6=0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass die ursprüngliche Gleichung keine Lösung hat.

5.3 Quadratische Gleichungen

Bei quadratischen Gleichungen tritt die Variable mit dem Exponenten 2, also „im Quadrat“ auf. Formal:

Quadratische Gleichungen:

1. Eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ mit $a\neq 0$ heißt **quadratische Gleichung**.
2. Eine Gleichung der Form $x^2+px+q=0$ heißt **quadratische Gleichung in Normalform**.

Dass hier die Koeffizienten unterschiedlich benannt sind, soll Sie nicht stören, das ist geschehen, weil es gleich auf die so genannte *pq*-Formel gehen wird, aber dazu gleich mehr.

Sie erinnern sich an die Äquivalenzregeln zur Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung? Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn wir die linke und die rechte Seite mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren. Also auch nicht, wenn wir quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c$ mit $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$, multiplizieren und so eine quadratische Gleichung in Normalform produzieren. Halten wir diesen Schritt gleich fest:

Merkregel zum Lösen quadratischer Gleichungen:
Eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

hat dieselbe Lösungsmenge wie die quadratische Gleichung

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

in Normalform.

Mit anderen Worten, wir können quadratische Gleichungen lösen, wenn wir wissen, wie quadratische Gleichungen in Normalform gelöst werden. Und wie das geschieht, werden wir jetzt herleiten.

Dazu sei $x^2 + px + q = 0$ eine quadratische Gleichung in Normalform. Dann gilt

$$x^2 + px + q = \underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}}_{\text{Binomische Formel}} - \frac{p^2}{4} + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0.$$

Dadurch, dass wir beim ersten Gleichheitszeichen $\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = 0$ zu der Gleichung addiert haben, konnten wir von der Gleichung $(x + \frac{p}{2})^2$ abspalten. Diesen Trick nennt man auch die Methode der **quadratischen Ergänzung**. Diesen Trick sollten Sie sich merken, der ist oft hilfreich. Aber kommen wir zurück zur Sache. Bisher haben wir die quadratische Gleichung nur geschickt umgestellt ohne an der Lösungsmenge zu wackeln. Mit den Äquivalenzregeln folgt, dass

$$x^2 + px + q = 0$$

dieselben Lösungen wie

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

hat.

Die Gleichung

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

schauen wir uns jetzt genauer an. Gleichgültig, was wir in x einsetzen, der Term $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ ist niemals negativ. Ist also

$$\frac{p^2}{4}-q<0,$$

so hat die Gleichung $x^2+px+q=0$ keine Lösung. Ist

$$\frac{p^2}{4}-q=0,$$

so ist

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0,$$

also

$$x+\frac{p}{2}=0,$$

und die Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

hat genau eine Lösung, nämlich

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Ist hingegen

$$\frac{p^2}{4}-q>0,$$

so gilt

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

oder

$$x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

also

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

oder

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Fassen wir noch einmal zusammen.

Lösungen quadratischer Gleichungen – auch genannt die *pq*-Formel:
Eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

hat dieselbe Lösungsmenge wie die quadratische Gleichung

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ in Normalform.}$$

Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in Normalform hat keine oder eine oder zwei Lösungen. Genauer:

1. Ist
$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$
so hat $x^2 + px + q = 0$ keine Lösung, also
$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

2. Ist
$$\frac{p^2}{4} - q = 0,$$
so hat $x^2 + px + q = 0$ genau eine Lösung, und es ist
$$\mathcal{L} = \{-\frac{p}{2}\}.$$

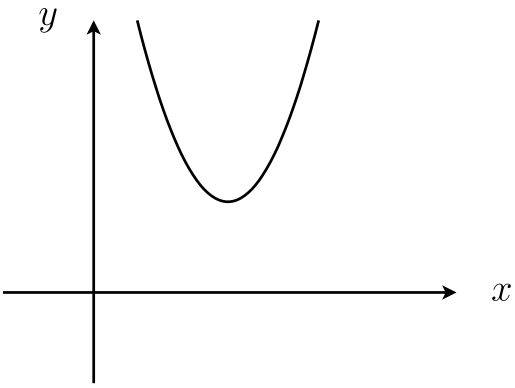
3. Ist
$$\frac{p^2}{4} - q > 0,$$
so hat $x^2 + px + q = 0$ genau zwei Lösungen, und es ist
$$\mathcal{L} = \{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\}.$$

Im dritten Fall schreibt man auch oft für die Lösungen

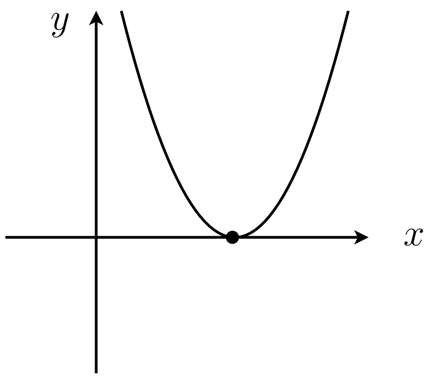
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Was hier geometrisch geschieht, lässt sich leicht veranschaulichen. Der Graph der Funktion $y = x^2 + px + q$ ist eine Parabel. Wenn wir Lösungen von

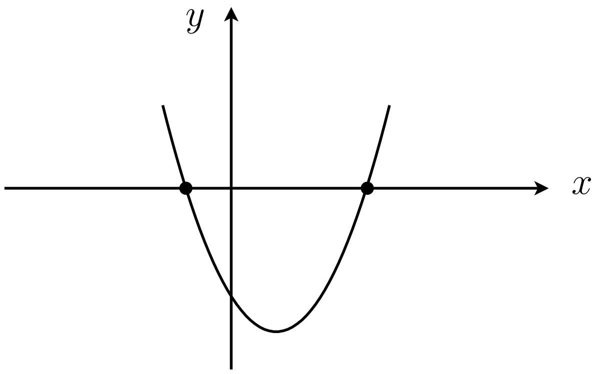
$x^2 + px + q = 0$ suchen, dann suchen wir Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse. Je nachdem, wie die Parabel liegt, gibt es keinen, einen oder zwei Schnittpunkte. Wenn die Parabel oberhalb der x-Achse liegt, gibt es keinen Schnittpunkt, wenn sie die x-Achse berührt, gibt es einen Schnittpunkt, wenn sie unter- und oberhalb der x-Achse liegt, gibt es zwei Schnittpunkte.



Funktionsgraph liegt oberhalb der x-Achse



Funktionsgraph berührt x-Achse



Funktionsgraph liegt unter- und oberhalb der x-Achse

Den Skizzen entsprechend hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ keine, eine oder zwei Lösungen.

5.2 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen.

1. $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$
2. $\dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{4}{4x^2 + 2x}$

Lösung

1. Die Lösungsmenge von

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$$

ist dieselbe wie von

$$x^2 - 6x + 4 = 0.$$

Mit der *pq*-Formel folgt

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}, \text{ also } \mathcal{L} = \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}.$$

2. Es ist

$$\frac{x-1}{2x+1} = \frac{4}{4x^2 + 2x} = \frac{4}{2x(2x+1)}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $2x$ und $2x + 1$ und erhalten

$$(x - 1)2x = 4.$$

Ausmultiplizieren und Umstellen ergibt

$$2x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat dieselbe Lösungsmenge wie die Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Diese lösen wir mit der *pq*-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, \text{ also } x_{1,2} \in \{-1, 2\}.$$

Dadurch, dass wir die Nenner der Bruchgleichungen durch Multiplikation mit $2x$ und $2x+1$ eliminiert haben, haben wir an dieser Stelle keine Äquivalenzumformungen gemacht. Wir müssen also noch überprüfen, ob die errechneten Werte die Gleichung wirklich lösen. Dazu setzen wir -1 und 2 ein:

-1: linke Seite:

$$\frac{-1-1}{-2+1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

und rechte Seite:

$$\frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2,$$

also ist -1 eine Lösung, und

2: linke Seite:
$$\frac{2-1}{4+1} = \frac{1}{5}$$
und rechte Seite:
$$\frac{4}{4 \cdot 2^2 + 4} = \frac{4}{4(2^2+1)} = \frac{1}{5}.$$

Also ist auch 2 eine Lösung, und es folgt $\mathcal{L} = \{-1, 2\}$.

Kommen wir noch einmal auf die Umformung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zurück, auf die wir bei der quadratischen Ergänzung gestoßen sind:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= \underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}}_{\text{Binomische Formel}} - \frac{p^2}{4} + q \\ &= (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = (x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p^2}{4} - q) = 0. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, wir sind in der Situation, wo diese Gleichung eine oder zwei Lösungen hat.

Hat sie nur eine Lösung, so ist diese $-\frac{p}{2}$, und die Gleichung lässt sich in der Form
$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})(x + \frac{p}{2})$$
schreiben, denn es ist ja
$$\frac{p^2}{4} - q = 0.$$
Worauf wir hinaus wollen ist Folgendes: In dieser Situation lässt sich der Faktor ($x -$ Lösung der Gleichung) aus $x^2 + px + q$ ausklammern, und der verbleibende Faktor ist wieder von der Form ($x -$ Lösung der Gleichung), also informell ausgedrückt

$$x^2 + px + q = (x - \text{Lösung der Gleichung})(x - \text{Lösung der Gleichung}).$$

Hat die Gleichung zwei verschiedene Lösungen, so ist

$$\frac{p^2}{4} - q > 0,$$

und wir können aus
$$\frac{p^2}{4} - q$$

die Wurzel ziehen und

$$\frac{p^2}{4} - q$$

in der Form

$$\frac{p^2}{4} - q = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}^{\,2}$$

schreiben. Damit erhalten wir

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}^{\,2}.$$

Auf die rechte Seite wenden wir jetzt die dritte binomische Formel an. Das ergibt

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}^{\,2} = (x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q})(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}).$$

Die Lösungen der Gleichung sind

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

und auch in dieser Situation gilt

$$x^2 + px + q = (x - \text{Lösung}_1 \text{ der Gleichung})(x - \text{Lösung}_2 \text{ der Gleichung}).$$

Formalisieren wir unsere Überlegungen etwas, so haben wir folgendes Resultat gefunden:

Faktorisierung von quadratischen Gleichungen:
Wenn

$$x^2 + px + q = 0$$

mindestens eine Lösung hat, so gilt

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b),$$

und a und b sind Lösungen von

$$x^2 + px + q = 0.$$

Dabei kann auch $a = b$ gelten.

Wenn man

$$x^2 + px + q$$

in der Form

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$$

schreiben kann, dann nennt man $x - a$ und $x - b$ **Linearfaktoren** von $x^2 + px + q$ und sagt, dass $x^2 + px + q$ in die **Linearfaktoren** $x - a$ und $x - b$ **zerfällt**.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $x^2 + px + q$ von der Bauart

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$$

ist. Wenn wir a oder b einsetzen, kommt 0 raus, und damit sind a und b Lösungen von $x^2 + px + q = 0$. Kombinieren wir diese Beobachtung mit dem, was wir gerade gemacht haben, so gilt:

Lösungen einer quadratischen Gleichung versus Linearfaktoren der Gleichung:
Genau dann gilt

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b),$$

wenn a und b Lösungen von

$$x^2 + px + q = 0$$

sind. Dabei ist $a = b$ möglich.

5.3 Aufgabe: Schreiben Sie, falls dies möglich ist,

1. $x^2 + x + 1$ in der Form $x^2 + x + 1 = (x - a)(x - b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $x^2 + 2x - 3$ in der Form $x^2 + 2x - 3 = (x - a)(x - b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $2x^2 + 32x - 34$ in der Form $2x^2 + 32x - 34 = 2(x - a)(x - b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung

1. $x^2 + x + 1$ lässt sich nicht in der Form

   $$(x - a)(x - b) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

   schreiben, denn für die Gleichung

   $$x^2 + x + 1 = 0$$

gilt

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} - 1 < 0$$

also hat die Gleichung keine Lösungen.

2. Wir lösen die Gleichung

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

mit der pq-Formel und erhalten

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3},$$

also

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -3.$$

Es folgt

$$(x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$

3. Die Gleichung

$$2x^2 + 32x - 34 = 0$$

hat dieselbe Lösungsmenge wie die Gleichung

$$x^2 + 16x - 17 = 0.$$

Diese lösen wir mit der pq-Formel:

$$x_{1,2} = -8 \pm \sqrt{64 + 17} = -8 \pm 9,$$

also $x_1 = 1$ und $x_2 = -17$. Es folgt

$$x^2 + 16x - 17 = (x-1)(x+17)$$

und damit

$$2x^2 + 32x - 34 = 2(x^2 + 16x - 17) = 2(x-1)(x+17).$$

5.3.1 Allgemeine Polynomgleichungen

Eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

wird **Polynomgleichung vom Grad** n genannt. Die Zahlen $a_n, \ldots, a_0$ heißen **Koeffizienten** der Polynomgleichung. Lineare Gleichungen, also Gleichungen der Form

$$ax + b = 0$$

und quadratische Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sind Beispiele für Polynomgleichungen – erstere sind vom Grad 1 und letztere vom Grad 2. Was lässt sich nun über Lösungen von Polynomgleichungen vom Grad ≥ 3 aussagen? Nun ja, zunächst einmal das, was wir schon vorher gemacht haben:

Merkregel:
Eine Polynomgleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

hat dieselbe Lösungsmenge wie

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} = 0.$$

Es reicht also aus, wenn wir uns Gedanken über Lösungen von Polynomgleichungen der Form

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

machen. Die Zahl a_0 nennt man übrigens das **absolute Glied** der Polynomgleichung, und dieses wird gleich noch eine prominente Rolle spielen.

Für Polynomgleichungen vom Grad 1 oder 2, die wir in den letzten Abschnitten untersucht haben, können wir entscheiden, ob und wie viele Lösungen sie haben, und wir haben Formeln dafür hergeleitet, wie man solche Lösungen finden kann. Die gute Nachricht ist, dass es solche Formeln auch für Polynomgleichungen vom Grad 3 und 4 gibt. Die schlechte Nachricht ist, dass diese Formeln so kompliziert sind, dass ich sie nicht auswendig kenne, und auch niemanden kenne, der sie jemals benutzt hat. Außer seinem Entdecker Geronimo Cardano (1501–1576) natürlich, von dem erzählt wird, dass er auf den Jahrmärkten damit Geld verdiente, dass er auf Zuruf Lösungen von Polynomgleichungen vom Grad 3 oder 4 löste (so ändern sich die Geschmäcker, damit würde man heutzutage vermutlich keinen müden Cent verdienen können). Die noch schlechtere Nachricht ist, dass der norwegische Mathematiker

Niels Henrik Abel (1802–1829)bewiesen hat, dass es vergleichbare Formeln für Lösungen von Polynomgleichungen vom Grad ≥ 5 nicht geben kann. Manchmal hilft allerdings Folgendes, was ich Ihnen jetzt ohne Beweis zum Glauben lasse, denn einen Beweis werden Sie im Studium kennen lernen.

Satz:
Eine Polynomgleichung vom Grad n hat höchstens n Lösungen, und wenn a eine Lösung von

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

ist, dann lässt sich $x - a$ aus

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ausklammern.

Angenommen, Sie müssten alle Lösungen einer Polynomgleichung

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

finden. Und weiter angenommen, Ihre gute Fee käme vorbei und würde Ihnen zuflüstern, dass a eine Lösung ist. Dann sagt der Satz, dass Sie $x - a$ aus

$$x^3 + px^2 + qx + r$$

ausklammern können, und wie Sie das bewerkstelligen können, haben Sie bereits gesehen. Sie machen eine Polynomdivision und erhalten

$$(x^3 + px^2 + qx + r) : (x - a) = x^2 + c_1 x + c_0$$

für irgendwelche Koeffizienten c_1 und c_0. Dann gilt

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - a)(x^2 + c_1 x + c_0).$$

Sie suchen Lösungen von

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - a)(x^2 + c_1 x + c_0) = 0.$$

Wenn Sie a einsetzen, kommt 0 raus, denn der linke Faktor von

$$(x - a)(x^2 + c_1 x + c_0)$$

wird dann $a - a$, also

$$(a - a)(a^2 + c_1 a + c_0) = 0 \cdot (a^2 + c_1 a + c_0) = 0.$$

Aber wenn Sie eine Lösung b von

$$x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

einsetzen, wird der rechte Faktor 0, und b ist ebenfalls eine Lösung von

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Sie müssen also nur noch die Lösungen von

$$x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

finden und haben dann, zusammen mit a, alle Lösungen der Gleichung gefunden. Zu abstrakt? Dann machen wir es eben konkreter.

5.4 Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen von

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0.$$

(Von irgendwo hören Sie ein zartes Stimmchen: „Setz doch mal -2 ein!“)

Lösung

Es ist

$$(-2)^3 - 6(-2)^2 - (-2) = -8 - 24 + 2 + 30 = 0,$$

also ist -2 eine Lösung von

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$$

(anderenfalls hätten wir unserer guten Fee gekündigt). Jetzt dividieren wir

$$x^3 - 6x^2 - x + 30$$

durch $x+2$. Dazu benutzen wir die Polynomdivision. Es stellt such raus, dass

$$(x^3 - 6x^2 - x + 30) : (x + 2) = x^2 - 8x + 15$$

ist, also

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x^2 - 8x + 15).$$

Genau dann ist

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x^2 - 8x + 15) = 0,$$

wenn $x + 2 = 0$ oder $x^2 - 8x + 15 = 0$ ist. Der Term $x + 2$ ist 0, wenn wir -2 einsetzen. Um die Lösungen von

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

zu finden, verwenden wir die pq-Formel, also

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15}.$$

Also sind 5 und 3 die Lösungen von

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Damit ist

$$\mathcal{L} = \{-2, 3, 5\}$$

Was nun, wenn wir unserer guten Fee wirklich leichtfertig gekündigt hätten und selbst Lösungen von

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

raten müssten? Dann kommt das absolute Glied a_0 ins Spiel, zusammen mit der Psyche von Autorinnen und Autoren von Übungsaufgaben und Klausuraufgaben. Nehmen wir nämlich mal an, wir hätten schon eine Lösung a. Der Satz oben sagt, dass

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x - a)(x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0)$$

für gewisse Koeffizienten $b_{n-2}, \ldots, b_0$ ist. Auf der linken Seite ist das absolute Glied a_0. Wenn wir es auf der rechten Seite ausrechnen, steht da $-ab_0$. Es gilt also immer $a_0 = -ab_0$. Wir halten fest:

Merkregel:
Jede Lösung a von

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

ist ein Teiler von a_0.

Diese Merkregel hilft Ihnen keinen Schritt weiter, wenn die Koeffizienten oder die Lösungen beliebig unerfreuliche reelle Zahlen sind, etwa so etwas wie $\frac{\sqrt[3]{12}}{7}$. Aber jetzt kommt die Psyche von Autorinnen und Autoren von Übungsaufgaben und Klausuraufgaben ins Spiel. Meistens sind die Koeffizienten bei Polynomgleichungen in Klausuren ganze Zahlen, und mindestens eine Lösung ist auch eine ganze Zahl. Setzen Sie also erst mal ± 1 ein, vielleicht ist darunter schon eine Lösung. Dann versuchen Sie es mit (positiven und negativen) Teilern des absoluten Gliedes a_0. Die Wahrscheinlichkeit ist groß, dass Sie auch ohne Unterstützung Ihrer guten Fee eine Lösung finden.

Apropos absolutes Glied. Wenn dieses 0 ist, dann können Sie x ausklammern, es ist also

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x = x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1).$$

Dann ist eine Lösung 0, und die andern sind die Lösungen von

$$x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0.$$

Es gibt noch weitere Tricks für Polynomgleichungen spezieller Natur, aber wir lassen es an dieser Stelle mit diesem Thema bewenden.

5.4 Wurzelgleichungen

Definition:
Eine **Wurzelgleichung** ist eine Gleichung, bei der die Variable unter einem Wurzelzeichen steht.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $\sqrt{x-1} = 3$. Wir müssen versuchen, die Variable x zu isolieren. Dazu quadrieren wir die Gleichung und erhalten $x - 1 = 9$, also $x = 10$. Im nächsten Schritt setzen wir 10 in die ursprüngliche Gleichung ein und erhalten $\sqrt{10-1} = 3$. Das ist richtig, also ist $x = 10$ wirklich eine Lösung der Wurzelgleichung.

Wichtig: Das Einsetzen gefundener Werte in die ursprüngliche Wurzelgleichung ist ein wichtiger Teil des Lösungsprozesses und darf nicht vergessen werden.

Ein Beispiel: Gegeben sei die Wurzelgleichung $\sqrt{x-1} = -1$. Wir quadrieren sie und erhalten $x - 1 = 1$, also $x = 2$. Einsetzen liefert $\sqrt{2-1} = 1$, also $1 = -1$, und das ist falsch. Diese Gleichung hat also keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Was passiert hier? Nun, der Grund ist, dass Quadrieren, oder allgemein Potenzieren, keine Äquivalenzumformung ist. **Wenn** eine reelle Zahl die Gleichung $\sqrt{x-1} = 1$ löst, **dann** löst sie auch $x - 1 = 1$, und es ist $x = 2$. Das ist also kein Problem. Was unsere Rechnungen also zeigen ist: Wenn diese Gleichung eine Lösung hat, dann ist sie 2. Da wir quadriert haben und damit keine Äquivalenzumformung gemacht haben, können wir aber **nicht** schließen: Wenn $x = 2$ ist, dann gilt $\sqrt{x-1} = -1$. Diese notwendige Üperprüfung müssen wir noch machen, und das geschieht, indem wir nachschauen: In die ursprüngliche Gleichung einsetzen, und schauen, ob es eine Lösung ist oder nicht. Fassen wir zusammen:

Merkregel zum Lösen von Wurzelgleichungen:
Um eine Wuzelgleichung zu lösen, quadriert beziehungsweise potenziert man sie so lange, bis sie zu einer Polynomgleichung umgeformt ist. Dann löst man – falls möglich – die Polynomgleichung. Anschließlich setzt man die gefundenen Werte in die ursprüngliche Wurzelgleichung ein und prüft, ob sie die Wurzelgleichug wirklich lösen.

Und noch ein Beispiel: Wir möchten die Gleichung

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 3$$

lösen. Dazu quadrieren wir zunächst und erhalten

$$x + 1 = x + 6\sqrt{x} + 9$$

(binomische Formel). Wenn wir jetzt noch einmal quadrieren, erhalten wir wieder einen Ausdruck, in dem eine Wurzel auftaucht. Um das zu verhindern, isolieren wir $\sqrt{x}$ auf einer Seite des Gleichheitszeichens. Wir subtrahieren x und 9 auf beiden Seiten und erhalten

$$-8 = 6\sqrt{x}.$$

Jetzt quadrieren:

$$64 = 36x,$$

also

$$x = \frac{16}{9}.$$

Bis jetzt haben wir mit unseren Rechnungen gezeigt: Wenn

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 3$$

eine Lösung hat, dann ist diese $\frac{16}{9}$. Jetzt einsetzen:

$$\text{linke Seite: } \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \text{ und rechte Seite: } \sqrt{\frac{16}{9}} + 3 = \frac{13}{3}.$$

Dumm gelaufen, diese Gleichung hat keine Lösung.

Jetzt etwas Übungsmaterial für Sie:

5.5 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen.

1. $\sqrt{x - \sqrt{x-2}} = \sqrt{2}$
2. $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$
3. $\sqrt{2x^2 - 2} = \sqrt{x^2 + 1}$
4. $x = \sqrt{3x + 10}$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{5 - x} = \sqrt{2x + 7}$

Lösung

1. Wir quadrieren
$$\sqrt{x - \sqrt{x-2}} = \sqrt{2}$$
und erhalten
$$x - \sqrt{x-2} = 2.$$
Wir isolieren den Ausdruck mit der Wurzel, dies ergibt
$$x - 2 = \sqrt{x-2}.$$
Erneutes Quadrieren liefert
$$x^2 - 4x + 4 = x - 2.$$
Wir subtrahieren $x - 2$ auf beiden Seiten und erhalten
$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$
Mit der *pq*-Formel sind $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ mögliche Lösungen.
Für $x_1 = 2$ gilt
$$\text{linke Seite: } \sqrt{2 - \sqrt{2-2}} = \sqrt{2} \text{ und rechte Seite: } \sqrt{2}.$$
Beide Seiten stimmen überein, und es folgt, dass 2 eine Lösung ist.
Für $x_2 = 3$ gilt
$$\text{linke Seite: } \sqrt{3 - \sqrt{3-2}} = \sqrt{2} \text{ und rechte Seite: } \sqrt{2},$$
also ist auch 3 eine Lösung. Es folgt $\mathcal{L} = \{2, 3\}$.

2. Wir quadrieren
$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-x+1}$$
und erhalten
$$x^2-1 = x^2-x+1.$$
Wir subtrahieren x^2 auf beiden Seiten und stellen die Gleichung um. Dies ergibt $x=2$. Jetzt setzen wir 2 in die Wurzelgleichung ein:
$$\text{linke Seite: } \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \text{ und rechte Seite: } \sqrt{4-2+1} = \sqrt{3}.$$
Beide Seiten stimmen überein, und es folgt $\mathcal{L} = \{2\}$.

3. Quadrieren von
$$\sqrt{2x^2-2} = \sqrt{x^2+1}$$
liefert
$$2x^2-2 = x^2+1.$$
Wir subtrahieren x^2 und addieren 2 auf beiden Seiten und erhalten
$$x^2 = 3.$$
Somit sind $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$ mögliche Lösungen. Einsetzen liefert:
$$\text{linke Seite: } \sqrt{2\cdot 3-2} = 2 \text{ und rechte Seite: } \sqrt{3+1} = 2,$$
also ist $\sqrt{3}$ eine Lösung. Analog ist $-\sqrt{3}$ eine Lösung, und es folgt $\mathcal{L} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

4. Quadrieren von
$$x = \sqrt{3x+10}$$
ergibt
$$x^2 = 3x+10.$$
Dann folgt
$$x^2-3x-10 = 0,$$
und mit der *pq*-Formel folgt, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$ mögliche Lösungen sind. Einsetzen von $x_1 = -2$ liefert
$$\text{linke Seite: } -2 \text{ und rechte Seite: } \sqrt{-6+10} = 2.$$
Da beide Seiten verschieden sind, ist -2 keine Lösung der Gleichung. Einsetzen von $x_2 = 5$ liefert
$$\text{linke Seite: } 5 \text{ und rechte Seite: } \sqrt{15+10} = 5.$$
Beide Seiten stimmen überein. Es folgt $\mathcal{L} = \{5\}$.

5. Wir quadrieren
$$\sqrt{x} + \sqrt{5 - x} = \sqrt{2x + 7}$$
und erhalten
$$x + 2\sqrt{x(5 - x)} + 5 - x = 2x + 7.$$
Wir subtrahieren 5 auf beiden Seiten. Dies ergibt
$$2\sqrt{x(5 - x)} = 2x + 2.$$
Wir dividieren beide Seiten durch 2 und quadrieren erneut. Wir erhalten
$$5x - x^2 = x^2 + 2x + 1.$$
Wir subtrahieren $5x - x^2$ und erhalten
$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$
Jetzt dividieren wir durch 2 um eine quadratische Gleichung in Normalform zu erhalten. Diese ist
$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0.$$
Die *pq*-Formel liefert, dass $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ mögliche Lösungen sind. Wir setzen $\frac{1}{2}$ ein:
$$\text{linke Seite: } \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ und rechte Seite: } \sqrt{1 + 7} = \sqrt{\frac{16}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$
Beide Seiten stimmen überein, und damit ist $\frac{1}{2}$ eine Lösung der Gleichung. Jetzt setzen wir 1 ein:
$$\text{linke Seite: } \sqrt{1} + \sqrt{4} = 3 \text{ und rechte Seite: } \sqrt{2 + 7} = 3.$$
Es folgt, dass $\mathcal{L} = \{\frac{1}{2}, 1\}$ ist.

5.5 Betragsgleichungen

Definition:
Sei a eine reelle Zahl. Der **Betrag** von a wird mit $|a|$ bezeichnet und ist definiert als
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$
Als Beispiele: $|-7| = 7$, $|7| = 7$ und $|0| = 0$. Für Beträge gelten folgende Rechenregeln:

Rechenregeln für Beträge:
Seien a und b reelle Zahlen. Dann gilt

1. $|a| = |-a|$
2. $|a-b| = |b-a|$
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, sofern $b \neq 0$ ist.

Die Regeln 3. und 4. besagen, dass der Betrag eines Produktes (bzw. Quotienten) das Produkt (bzw. der Quotient) der Beträge der Faktoren ist. Gilt das Analoge für Summen und Differenzen? Die Antwort ist nein, und das formulieren wir gleich in einer Merkregel.

Merkregel:
In der Regel gilt

$$|a+b| \neq |a| + |b|$$

und

$$|a-b| \neq |a| - |b|.$$

5.6 Aufgabe:

1. Geben Sie Beispiele für reelle Zahlen a und b, sodass

   $$|a+b| \neq |a| + |b|$$

   und

   $$|a-b| \neq |a| - |b|$$

   ist.
2. Wählen Sie (positive und negative) reelle Zahlen und überzeugen Sie sich davon, dass die Rechenregeln für Beträge für Ihre Beispiele richtig sind.

Lösung

1. Sei $a = -2$, und sei $b = 1$.

   Dann gilt

   $$|a+b| = |-2+1| = |-1| = 1$$

   und

   $$(|a| + |b| = |-2| + |1| = 2 + 1 = 3.$$

   Es ist $1 \neq 3$.

Weiter ist

$$|a-b| = |-2-1| = |-3| = 3$$

und

$$|a| - |b| = |-2| - |1| = 2 - 1 = 1.$$

Wieder gilt

$$|a-b| \neq |a| - |b|.$$

2. Bleiben wir doch bei $a = -2$ und $b = 1$. Dann gilt
   (a)
   $$|-2| = |-(-2)| = |2| = 2,$$
   stimmt also.
   (b)
   $$|a-b| = |-2-1| = |-3| = 3$$
   und
   $$|b-a| = |1-(-2)| = |1+2| = |3| = 3,$$
   stimmt also auch.
   (c)
   $$|ab| = |(-2) \cdot 1| = |-2| = 2$$
   und
   $$|a| \cdot |b| = |-2| \cdot |1| = 2 \cdot 1 = 2,$$
   auch richtig.
   (d)
   $$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{-2}{1}\right| = |-2| = 2$$
   und
   $$\frac{|-2|}{|1|} = \frac{2}{1} = 2,$$
   auch okay.

Eine **Betragsgleichung** ist eine Gleichung, bei der die Variable durch Betragsstriche eingeschlossen ist. Um die Gleichung nach der Variablen umzuformen, müssen wir die Betragsstriche auflösen. Dazu müssen wir Fallunterscheidungen machen, je nachdem, ob der Term, der durch Betragsstriche eingeschlossen wird, ≥ 0 ist oder < 0 ist.

Beispiel:
Wir suchen die Lösungen der Betragsgleichung

$$|3x - 7| = 2.$$

Dazu unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich den, dass $3x - 7 \geq 0$ ist, und den, dass $3x - 7 < 0$ ist. Diese Fälle untersuchen wir getrennt. Auf geht's.

1. Fall: $3x - 7 \geq 0$, also $|3x - 7| = 3x - 7$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} 3x - 7 &=& 2 & \text{Addition von } 7 \\ 3x &=& 9 & \text{Multiplikation mit } \frac{1}{3} \\ x &=& 3. & \end{array}$$

Wir setzen $x = 3$ ein und erhalten $|9 - 7| = 2$, das heißt, 3 ist eine Lösung. Im ersten Fall erhalten wir als Lösungsmenge $\mathcal{L}_1 = \{3\}$.

2. Fall: $3x - 7 < 0$, also $|3x - 7| = -(3x - 7) = -3x + 7$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} -3x + 7 &=& 2 & \text{Addition von } -7 \\ -3x &=& -5 & \text{Multiplikation mit } -\frac{1}{3} \\ x &=& \frac{5}{3}. & \end{array}$$

Wieder setzen wir $x = \frac{5}{3}$ ein und erhalten $|\frac{15}{3} - \frac{21}{3}| = |-2| = 2$. In diesem Fall ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_2 = \{\frac{5}{3}\}$.

Die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|3x-7| = 2$ ist dann die Vereinigung der Lösungsmengen unserer Fallunterscheidungen, also $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{\frac{5}{3}, 3\}$.

Bei der Lösung von Betragsgleichungen geschieht das Einsetzen der gefundenen Werte nicht nur zur Probe. Es können sich rechnerisch Werte ergeben, die keine Lösungen sind. Das liegt daran, dass wir bei unseren Fallunterscheidungen bestimmte Vorgaben haben. Im letzten Beispiel haben wir bei der ersten Fallunterscheidung angenommen, dass $3x - 7 \geq 0$ ist. Mit dieser Annahme haben wir dann weiter gerechnet. Es könnte passieren (ist allerdings in diesem Beispiel gut gegangen), dass die errechnete Lösung diese Vorgabe nicht erfüllt. Dann müssen wir diese Lösung verwerfen. Das folgende Beispiel wird das zeigen. Es zeigt auch, dass man zum Lösen von Betragsgleichungen manchmal mehrere Fallunterscheidungen machen muss.

Beispiel:
Wir suchen die Lösungen der Gleichung

$$|2x + 3| - 1 = |4x - 2|.$$

Wie im letzten Beispiel machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall:

$$2x + 3 \geq 0,$$

also

$$|2x + 3| = 2x + 3.$$

Damit wird unsere Gleichung zu

$$2x + 3 - 1 = |4x - 2|,$$

also

$$2x + 2 = |4x - 2|.$$

Jetzt müssen wir wieder die Fälle $4x - 2 \geq 0$ und $4x - 2 < 0$ getrennt untersuchen, also eine weitere Fallunterscheidung einschieben.

Fall 1.1:

$$4x - 2 \geq 0,$$

also

$$|4x - 2| = 4x - 2.$$

Unsere Gleichung wird damit zu

$$2x + 2 = 4x - 2,$$

und wir haben alle Betragsstriche aufgelöst. Diese Gleichung lösen wir jetzt.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 4x - 2 \\ 2 &= 2x - 2 \\ 4 &= 2x \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Wir setzen 2 ein und erhalten (linke Seite)

$$|4 + 3| - 1 = 6$$

und (rechte Seite)

$$|8 - 2| = 6.$$

Damit ist die Lösungsmenge in diesem Fall $\mathcal{L}_{1.1} = \{2\}$.

Fall 1.2:

$$4x - 2 < 0,$$

also

$$|4x - 2| = -4x + 2.$$

Unsere Gleichung wird damit zu

$$2x + 2 = -4x + 2,$$

und die lösen wir jetzt.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= -4x + 2 \\ 6x + 2 &= 2 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt $|3| - 1 = 2$ und $|-2| = 2$. Damit ist $x = 0$ eine Lösung, und es folgt $\mathcal{L}_{1.2} = \{0\}$.

2. Fall:

$$2x + 3 < 0$$

, also

$$|2x + 3| = -2x - 3.$$

Die Gleichung hat damit die Form

$$-2x - 3 - 1 = |4x - 2|,$$

also

$$-2x - 4 = |4x - 2|.$$

Hier machen wir wieder eine Fallunterscheidung.

Fall 2.1:

$$4x - 2 \geq 0,$$

also

$$|4x - 2| = 4x - 2.$$

$$\begin{aligned} -2x - 4 &= 4x - 2 \\ -4 &= 6x - 2 \\ -2 &= 6x \\ x &= -\tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Setzen wir $-\frac{1}{3}$ ein, so erhalten wir (linke Seite)

$$\left|-\frac{2}{3} + \frac{9}{3}\right| - 1 = \frac{4}{3}$$

und (rechte Seite)

$$\left|-\frac{4}{3} - \frac{6}{3}\right| = \frac{10}{3}.$$

Beide Seiten sind verschieden, also ist $-\frac{1}{3}$ keine Lösung. Was ist hier geschehen? Nun, wir sind in der Situation, dass wir

$$4x - 2 \geq 0$$

annehmen. Die lineare Gleichung

$$-2x - 4 = 4x - 2$$

hat zwar genau eine Lösung (nämlich $-\frac{1}{3}$), aber die erfüllt nicht die Voraussetzung

$$4x - 2 \geq 0.$$

Damit ist $\mathcal{L}_{2.1} = \emptyset$, die leere Menge.

Fall 2.2:

$$4x - 2 < 0,$$

also

$$|4x - 2| = -4x + 2.$$

$$\begin{aligned} -2x - 4 &= -4x + 2 \\ -4 &= -2x + 2 \\ -6 &= -2x \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Wieder erfüllt $x = 3$ nicht die Voraussetzung

$$4x - 2 < 0,$$

kann daher keine Lösung sein. Trotzdem setzen wir zum Test ein: (linke Seite)

$$|6 + 3| - 1 = 8$$

und (rechte Seite)

$$|12 - 2| = 10.$$

Offenbar gilt $8 \neq 10$. Damit ist $\mathcal{L}_{2.2} = \emptyset$.

Als Lösungsmenge der Gleichung $|2x + 3| - 1 = |4x - 2|$ erhalten wir damit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{1.1} \cup \mathcal{L}_{1.2} = \{0, 2\}.$$

5.7 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungsmengen von folgenden Gleichungen.

1.
$$\left|\frac{2}{x}-3\right|=5$$

2.
$$|(4x+2)(2x-3)|=2$$

3.
$$|2x+1|-3=|x^2-1|$$

Lösung

1. Wir suchen die Lösungen von
$$\left|\frac{2}{x}-3\right|=5.$$

1. Fall: $\frac{2}{x}-3\geq 0$, also $\left|\frac{2}{x}-3\right|=\frac{2}{x}-3$.
$$\begin{aligned}\tfrac{2}{x}-3 &= 5\\ \tfrac{2}{x} &= 8\\ 2 &= 8x\\ x &= \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Einsetzen liefert $\left|\frac{2}{\frac{1}{4}}-3\right|=|2\cdot 4-3|=5$. Damit ist $\mathcal{L}_1=\{\frac{1}{4}\}$.

2. Fall: $\frac{2}{x}-3<0$, also $\left|\frac{2}{x}-3\right|=-\frac{2}{x}+3$.
$$\begin{aligned}-\tfrac{2}{x}+3 &= 5\\ -\tfrac{2}{x} &= 2\\ -2 &= 2x\\ x=-1.\end{aligned}$$

Einsetzen liefert $\left|\frac{2}{-1}-3\right|=|-2-3|=5$. Damit ist $\mathcal{L}_2=\{-1\}$.

Die Lösungsmenge von $\left|\frac{2}{x}-3\right|=5$ ist $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2=\{-1,\frac{1}{4}\}$.

2. Wir suchen die Lösungen von
$$|(4x+2)(2x-3)|=2.$$

Es ist
$$|(4x+2)(2x-3)|=|8x^2-8x-6|.$$

1. Fall:
$$8x^2 - 8x - 6 \geq 0,$$
also
$$|8x^2 - 8x - 6| = 8x^2 - 8x - 6.$$

$$\begin{aligned} 8x^2 - 8x - 6 &= 2 \\ 8x^2 - 8x - 8 &= 0 \\ x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der pq-Formel sind $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Einsetzen von $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ liefert

$$\begin{aligned} |(4(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2}) + 2)(2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2}) - 3)| &= |(4 - 2\sqrt{5})(-2 - \sqrt{5})| \\ &= |-2(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})| \\ &= |-2(2^2 - \sqrt{5}^2)| \\ &= |-2 \cdot (-1)| = 2. \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ eine Lösung.

Einsetzen von $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ liefert

$$\begin{aligned} |(4(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}) + 2)(2(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}) - 3)| &= |(4 + 2\sqrt{5})(-2 + \sqrt{5})| \\ &= |2(2 + \sqrt{5})(-2 + \sqrt{5})| \\ &= |2(\sqrt{5}^2 - 2^2)| \\ &= |2 \cdot 1| = 2. \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ eine Lösung. Es folgt $\mathcal{L}_1 = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$.

2. Fall:
$$8x^2 - 8x - 6 < 0,$$
also
$$|8x^2 - 8x - 6| = -8x^2 + 8x + 6.$$
$$\begin{aligned} -8x^2 + 8x + 6 &= 2 \\ -8x^2 + 8x + 4 &= 0 \\ x^2 - x - \tfrac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Mit der pq-Formel sind $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ Lösungen dieser quadratischen Gleichung.

Einsetzen von $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ liefert

$$\begin{aligned} |(4(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}) + 2)(2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}) - 3)| &= |(4 - 2\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})| \\ &= | - 2(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})| \\ &= | - 2(2^2 - \sqrt{3}^2)| = | - 2 \cdot 1| = 2. \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ eine Lösung der Gleichung.

Einsetzen von $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ liefert

$$\begin{aligned} |(4(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}) + 2)(2(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}) - 3)| &= |(4 + 2\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})| \\ &= | - 2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})| \\ &= | - 2(2^2 - \sqrt{3}^2)| = | - 2 \cdot 1| = 2. \end{aligned}$$

Somit ist auch $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ eine Lösung der Gleichung. Es gilt

$$\mathcal{L}_2 = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\}.$$

Die Lösungsmenge von $|(4x + 2)(2x - 3)| = 2$ ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}.$$

3. Wir suchen die Lösungen von

$$|2x + 1| - 3 = |x^2 - 1|.$$

1. Fall:

$$2x + 1 \geq 0,$$

also

$$|2x + 1| = 2x + 1.$$

Die Gleichung lautet dann

$$2x + 1 - 3 = |x^2 - 1|,$$

also

$$2x - 2 = |x^2 - 1|.$$

Fall 1.1:
$$x^2 - 1 \geq 0,$$
also
$$|x^2 - 1| = x^2 - 1.$$
Dann lautet die Gleichung
$$2x - 2 = x^2 - 1.$$
$$\begin{array}{lcl} 2x - 2 & = & x^2 - 1 \\ x^2 - 2x + 1 & = & 0 \\ x & = & 1 \end{array}$$
Somit ist $x = 1$ die einzige Lösung. Sie löst auch
$$|2x + 1| - 3 = |x^2 - 1|,$$
also
$$\mathcal{L}_{1.1} = \{1\}.$$
Fall 1.2:
$$x^2 - 1 < 0,$$
also
$$|x^2 - 1| = -x^2 + 1.$$
Dann lautet die Gleichung
$$2x - 2 = -x^2 + 1.$$
$$\begin{array}{lcl} 2x - 2 & = & -x^2 + 1 \\ x^2 + 2x - 3 & = & 0 \end{array}$$
Es sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Aber weder $x_1 = 1$ noch $x_2 = -3$ erfüllen die Voraussetzung
$$x^2 - 1 < 0,$$
also ist $\mathcal{L}_{1.2} = \emptyset$.

2. Fall:
$$2x + 1 < 0,$$
also
$$|2x + 1| = -2x - 1.$$
Die Gleichung lautet dann
$$-2x - 4 = |x^2 - 1|.$$

Fall 2.1:

$$x^2 - 1 \geq 0,$$

also

$$|x^2 - 1| = x^2 - 1.$$

$$\begin{array}{rcl} -2x - 4 & = & x^2 - 1 \\ -4 & = & x^2 + 2x - 1 \\ x^2 + 2x + 3 & = & 0 \end{array}$$

Diese quadratische Gleichung hat keine Lösung, und es folgt

$$\mathcal{L}_{2.1} = \emptyset.$$

Fall 2.2:

$$x^2 - 1 < 0,$$

also

$$|x^2 - 1| = -x^2 + 1.$$

$$\begin{array}{rcl} -2x - 4 & = & -x^2 + 1 \\ x^2 - 2x - 5 & = & 0 \end{array}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich

$$x_1 = 1 + \sqrt{6}$$

und

$$x_2 = 1 - \sqrt{6}.$$

Allerdings erfüllen beide nicht die Vorgabe

$$x^2 - 1 < 0,$$

also gilt auch in diesem Fall

$$\mathcal{L}_{2.2} = \emptyset.$$

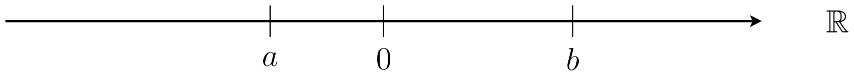
Die Lösungsmenge von $|2x + 1| - 3 = |x^2 - 1|$ bleibt damit überschaubar. Es ist

$$\mathcal{L} = \{1\}.$$

6 Ungleichungen

Eine Ungleichung liegt vor, wenn zwei Terme durch ein Ungleichungszeichen $>$, $\geq$, $<$ oder $\leq$ verbunden sind. Dabei bedeutet $a < b$, dass a kleiner als b ist, und $a \leq b$, dass a kleiner oder gleich b ist.

Bei Ungleichungen hilft mir oft, wenn ich an den Zahlenstrahl denke. Eine Zahl a ist kleiner als eine Zahl b, wenn a links von b auf dem Zahlenstrahl liegt.



Zahlenstrahl mit $a < b$

Für Ungleichungen gelten immer die folgenden Beziehungen:

Erste Eigenschaften der $<$ Beziehung:
Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a < b$ genau dann, wenn $b > a$ ist.
2. Es gilt stets eine der folgenden Beziehungen:

   $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.
3. Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Da $a < b$ genau dann der Fall ist, wenn $b > a$, kann man durch Vertauschen der Seiten aus einer „kleiner als"-Ungleichung stets eine „größer als"-Ungleichung machen. Es reicht also, sich nur mit einem Typ von Ungleichungen (also $<$ oder $>$) zu beschäftigen. Ich werde mich im Folgenden im Wesentlichen auf $<$-Ungleichungen konzentrieren. Wie rechnet man nun mit Ungleichungen? Dafür gelten folgende Regeln:

Weitere Eigenschaften der $<$-Beziehung:

1. Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $a < b$ genau dann, wenn $a+c < b+c$ ist. Symbolisch ausgedrückt: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

   Beispiel:
   $2 < 3$ genau dann, wenn $2 + 4 < 3 + 4$ ist, genau dann, wenn $6 < 7$ ist.
2. Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gilt $a < b$ genau dann, wenn $ac < bc$ ist. Symbolisch ausgedrückt: $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ für alle $c > 0$.

   Beispiel:
   $2 < 3$ genau dann, wenn $2 \cdot 4 < 3 \cdot 4$ ist, genau dann, wenn $8 < 12$ ist.

3. Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c < 0$ gilt $a < b$ genau dann, wenn $ac > bc$ ist. Symbolisch ausgedrückt: $a < b \Leftrightarrow ac > bc$ für alle $c < 0$.

   Beispiel:
   $2 < 3$ genau dann, wenn $2 \cdot (-4) > 3 \cdot (-4)$ ist, genau dann, wenn $-8 > -12$ ist.

Merkregel:
Bei Multiplikation mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichungszeichen um.

Eigenschaften der $\leq$ -Beziehung:

1. Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ genau dann, wenn $a+c \leq b+c$ ist. Symbolisch ausgedrückt: $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.
2. Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gilt $a \leq b$ genau dann, wenn $ac \leq bc$ ist. Symbolisch ausgedrückt: $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$ für alle $c > 0$.
3. Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c < 0$ gilt $a \leq b$ genau dann, wenn $ac \geq bc$ ist. Symbolisch ausgedrückt: $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$ für alle $c < 0$.

6.1 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Enthält mindestens einer der Ausdrücke einer Ungleichung eine Variable, so sucht man nach Lösungen der Ungleichung. Diese sind Zahlen, die man in die Variable einsetzen kann, sodass die beiden durch das Ungleichheitszeichen verbundenen Terme die Ungleichung erfüllen. Die Menge $\mathcal{L}$ aller Lösungen, die auch leer sein kann, bezeichnet man als die Lösungsmenge der Ungleichung. Im Gegensatz zu den Gleichungen, die wir bisher besprochen haben, haben Ungleichungen oft unendlich viele Lösungen.

Alle Lösungsverfahren beruhen darauf, dass Ungleichungen nach gewissen Regeln – so genannten Äquivalenzregeln – umgeformt werden dürfen, ohne dass sich die Lösungsmenge verändert.

Äquivalenzregeln für Ungleichungen:
Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn

1. auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert wird.
2. beide Seiten der Ungleichung mit derselben **positiven** Zahl multipliziert werden.

3. beide Seiten der Ungleichung mit derselben **negativen** Zahl multipliziert werden, wenn gleichzeitig das Ungleichungszeichen, das beide Seiten verbindet, umgekehrt wird.

Will man eine Ungleichung lösen, so formt man diese so lange um, bis die gesuchte Variable isoliert ist.

6.2 Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen zeichnen sich dadurch aus, dass die Variable nur mit dem Exponenten 1 auftritt. Es gibt also kein x^2, x^3 und so weiter. Die folgenden Beispiele zeigen, wie lineare Ungleichungen gelöst werden können.

Beispiele

1. Wir suchen die Lösungsmenge der Ungleichung

$$5x - 7 < 2x + 2.$$

$$\begin{array}{rcll} 5x - 7 & < & 2x + 2 & \text{Addition von } 7 \\ 5x & < & 2x + 9 & \text{Addition von } -2x \\ 3x & < & 9 & \text{Multiplikation mit } \frac{1}{3} \\ x & < & 3 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-1 < \frac{1}{2}x + 2 < 3?$$

Hier verstecken sich gleich zwei Ungleichungen in einer Ungleichungskette, nämlich wir suchen alle $x \in \mathbb{R}$, die gleichzeitig

$$-1 < \frac{1}{2}x + 2$$

und

$$\frac{1}{2}x + 2 < 3$$

erfüllen. Oft (das heißt, bei komplizierten Ungleichungsketten) ist es sinnvoll, die einzelnen Ungleichungen getrennt zu betrachten, ihre Lösungsmengen zu bestimmen und dann zu untersuchen, welche Zahlen in beiden Lösungsmengen auftauchen. Bei dieser Ungleichungskette können wir die Umformungen allerdings simultan machen.

$$\begin{array}{rcccll} -1 & < & \frac{1}{2}x+2 & < & 3 & \text{Addition von } -2 \\ -3 & < & \frac{1}{2}x & < & 1 & \text{Multiplikation mit } 2 \\ -6 & < & x & < & 2 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 2\}$.

6.1 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen.

1. $3x + 8 < 7 - 5x$
2. $\frac{3}{2}x - 5 < \frac{5}{2}x + 2$
3. $-2 \leq -2x + 6 \leq 4$.

Lösung

1. Es ist

$$\begin{array}{rcll} 3x+8 & < & 7-5x & \text{Addition von } 5x \\ 8x+8 & < & 7 & \text{Additionvon } -8 \\ 8x & < & -1 & \text{Multiplikation mit } \frac{1}{8} \\ x & < & -\frac{1}{8} & \end{array}$$

Es folgt $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{8}\}$.

2. Es ist

$$\begin{array}{rcll} \frac{3}{2}x-5 & < & \frac{5}{2}x+2 & \text{Addition von } -\frac{5}{2}x \\ -x-5 & < & 2 & \text{Addition von } 5 \\ -x & < & 7 & \text{Multipliktion mit } -1 \\ x & > & -7 & \end{array}$$

Es folgt $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x\}$.

3. Es ist

$$\begin{array}{rcccll} -2 & \leq & -2x+6 & \leq & 4 & \text{Addition von } -6 \\ -8 & \leq & -2x & \leq & -2 & \text{Multiplikation mit } -\frac{1}{2} \\ 4 & \geq & x & \geq & 1 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$.

6.3 Quadratische Ungleichungen

Eine quadratische Ungleichung ist eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die so genannte **Normalform**

$$x^2 + px + q > 0$$

oder

$$x^2 + px + q \geq 0$$

oder

$$x^2 + px + q < 0$$

oder

$$x^2 + px + q \leq 0$$

überführen lässt.

Dass die Koeffizienten hier p und q heißen, ist übrigens kein Zufall, denn gleich bekommt die pq-Formel wieder einen wichtigen Auftritt.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel. Wir suchen die Lösungsmenge der Ungleichung

$$-6x^2 > 6(x - 6).$$

Dazu überführen wir die Ungleichung zunächst in Normalform: Ausmultiplizieren liefert

$$-6x^2 > 6x - 36.$$

Dann addieren wir auf beiden Seiten $-6x + 36$ und erhalten

$$-6x^2 - 6x + 36 > 0.$$

Zum Schluss multiplizieren wir mit $-\frac{1}{6}$, wobei sich das Ungleichheitszeichen umkehrt, und erhalten die Normalform

$$x^2 + x - 6 < 0.$$

Jetzt kommt ein Trick. Wir schreiben $x^2 + x - 6$ in der Form

$$x^2 + x - 6 = (x - a)(x - b),$$

also als Produkt von Linearfaktoren. Wie das gemacht wird, war im Kapitel über quadratische Gleichungen schon dran, es sind a und b gerade die Lösungen von

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Also werfen wir die pq-Formel an und erhalten als Lösungen $a = -3$ und $b = 2$. Damit ist

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2),$$

und unsere Ungleichung haben wir wie folgt umgeformt:

$$(x + 3)(x - 2) < 0.$$

Jetzt sind wir ein gutes Stück weiter. Es ist nämlich so, dass ein Produkt von zwei reellen Zahlen nur dann < 0 sein kann, wenn einer der Faktoren positiv und einer negativ ist. Sie erinnern sich an die Merkregel „Plus mal Minus ist Minus und Minus mal Plus ist Minus"? Das bedeutet, dass die Ungleichung $(x + 3)(x - 2) < 0$ genau dann erfüllt ist, wenn

1. $x + 3 < 0$ und gleichzeitig $x - 2 > 0$ ist, oder
2. $x + 3 > 0$ und gleichzeitig $x - 2 < 0$ ist.

Die Fälle betrachten wir jetzt getrennt. Im ersten Fall muss $x < -3$ und $x > 2$ sein. Das ist nicht möglich, also erhalten wir in der Situation die leere Menge als Lösungsmenge. Im zweiten Fall ist $x > -3$ und $x < 2$. Wir erhalten also als Lösungmenge

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}.$$

Jetzt eine Aufgabe für Sie:

6.2 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen.

1. $x^2 - 6x + 8 > 0$
2. $(3x - 2)(2x - 3) > 0$.

Lösung

1. Die Lösungen von
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
sind 2 und 4. Damit ist
$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2).$$
Es folgt, dass $x^2 - 6x + 8$ genau dann > 0 ist, wenn
$$x - 4 > 0$$

und gleichzeitig

$$x - 2 > 0$$

ist, oder wenn

$$x - 4 < 0$$

und gleichzeitig

$$x - 2 < 0$$

ist.

Im ersten Fall muss $x > 4$ und $x > 2$ erfüllt sein, und die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

Im zweiten Fall muss

$$x < 4 \text{ und } x < 2$$

erfüllt sein, und es folgt

$$\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}.$$

Die Lösungsmenge ist die Vereinigung von $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$, also

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}.$$

2. Die Ungleichung

$$(3x - 2)(2x - 3) > 0$$

ist genau dann erfüllt, wenn

(a)

$$3x - 2 > 0 \text{ und } 2x - 3 > 0$$

oder

(b)

$$3x - 2 < 0 \text{ und } 2x - 3 < 0$$

ist.

Im ersten Fall muss

$$x > \frac{2}{3} \text{ und } x > \frac{3}{2}$$

gleichzeitig gelten. Es folgt

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\}.$$

Im zweiten Fall muss

$$x < \frac{2}{3} \text{ und } x < \frac{3}{2}$$

gleichzeitig gelten, also

$$\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3}\}.$$

Es ist

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\}.$$

Wenn eine Ungleichung von der Form

$$(sx - a)(tx - b) > 0$$

oder

$$(sx - a)(tx - b) < 0$$

ist, wissen Sie jetzt, was zu tun ist. Sie untersuchen die einzelnen Faktoren darauf, wann sie positiv beziehungsweise negativ sind und kombinieren diese Fälle dann so, wie Sie es brauchen. Was aber, wenn Sie eine Ungleichung

$$x^2 + px + q > 0$$

oder

$$x^2 + px + q < 0$$

haben, und die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

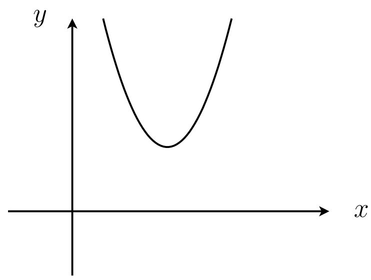
hat keine Lösung? Dieser Fall ist ganz einfach. Wenn

$$x^2 + px + q = 0$$

keine Lösung hat, dann schneidet der Graph der Funktion

$$y = x^2 + px + q$$

(eine Parabel) die x-Achse niemals. Der Graph liegt also oberhalb der x-Achse, wie die folgende Skizze zeigt.



Funktionsgraph liegt oberhalb der x-Achse

Das bedeutet, dass die Ungleichung

$$x^2 + px + q > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, und dass die Ungleichung

$$x^2 + px + q < 0$$

nie erfüllt ist.

6.4 Bruchungleichungen

Bei Bruchungleichungen steht die Variable im Nenner eines Bruchs. Bruchungleichungen lassen sich wie vorher durch Äquivalenzumformungen lösen. Wieder ist es das Ziel, die Variable zu isolieren. Dafür muss man in der Regel mit einem Term im Nenner multiplizieren, der eine Variable enthält und somit positive oder negative Werte annehmen kann. Dementsprechend ändert sich die Richtung des Ungleichheitszeichens. Also müssen wir zum Lösen wieder Fallunterscheidungen machen.

Beispiel:
Wir untersuchen die Bruchungleichung

$$\frac{x+1}{x-2} > 2.$$

Diese ist für alle reellen Zahlen außer 2 definiert.

1. Fall: $x - 2 > 0$, also $x > 2$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{x+1}{x-2} & > & 2 & \text{Multiplikation mit } (x-2)\text{. Nach Annahme ist} \\ & & & \text{dies positiv, das Ungleichungszeichen} \\ & & & \text{ändert daher seine Richtung nicht.} \\ x+1 & > & 2(x-2) & \\ x+1 & > & 2x-4 & \text{Addition von } -x \\ 1 & > & x-4 & \text{Adddition von 4} \\ 5 & > & x. & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist in diesem Fall also

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}.$$

2. Fall: $x - 2 < 0$, also $x < 2$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{x+1}{x-2} & > & 2 & \text{Multiplikation mit } (x-2)\text{. Nach Annahme ist} \\ & & & \text{dies negativ,das Ungleichungszeichen} \\ & & & \text{ändert daher seine Richtung.} \\ x+1 & < & 2(x-2) & \\ x+1 & < & 2x-4 & \text{Addition von } -x \\ 1 & < & x-4 & \text{Adddition von 4} \\ 5 & < & x. & \end{array}$$

Wir haben also $x < 2$ und $x > 5$ herausgefunden. Diese Bedingungen widersprechen einander, also erhalten wir im zweiten Fall die leere Menge als Lösungsmenge. Es ist

$$\mathcal{L}_2 = \emptyset.$$

Die Lösungsmenge von $\dfrac{x+1}{x-2} > 2$ ist die Vereinigung von $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$, also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}.$$

6.3 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

1. $\dfrac{-x+3}{x-5} \leq -2$

2. $\dfrac{3x+2}{x-1} > -3$

3. $\dfrac{4x+3}{2x-1} > 2$

Lösung

1. Wir suchen die Lösungsmenge von
$$\frac{-x+3}{x-5} \leq -2.$$
Dazu machen wir Fallunterscheidungen.

1. Fall: $x-5>0$, also $x>5$.
$$\begin{aligned} \frac{-x+3}{x-5} &\leq -2 \\ -x+3 &\leq -2(x-5) \\ -x+3 &\leq -2x+10 \\ x+3 &\leq 10 \\ x &\leq 7 \end{aligned}$$
Die Lösungsmenge sind alle x mit $x>5$ und $x \leq 7$, also
$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\}.$$

2. Fall:
$$x-5<0, \text{ also } x<5.$$
Bei Multiplikation mit $x-5$ dreht sich das Ungleichungszueichen um.
$$\begin{aligned} \frac{-x+3}{x-5} &\leq -2 \\ -x+3 &\geq -2(x-5) \\ -x+3 &\geq -2x+10 \\ x+3 &\geq 10 \\ x &\geq 7 \end{aligned}$$
Die Aussagen $x \leq 5$ und $x \geq 7$ widersprechen sich. Daher hat die Ungleichung in dieser Situation keine Lösung, also
$$\mathcal{L}_2 = \emptyset.$$

Es folgt
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\}.$$

2. Wir suchen die Lösungsmenge von $\dfrac{3x+2}{x-1} > -3$.

1. Fall: $x - 1 > 0$, also $x > 1$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{3x+2}{x-1} & > & -3 \\ 3x+2 & > & -3(x-1) \\ 6x+2 & > & 3 \\ 6x & > & 1 \\ x > \frac{1}{6} & & \end{array}$$

Da

$$x > 1 \text{ und } x > \frac{1}{6}$$

besteht die Lösungsmenge aus allen reellen Zahlen, die sowohl größer als $\frac{1}{6}$ als auch größer als 1 sind. Also

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

2. Fall: $x - 1 < 0$, also $x < 1$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{3x+2}{x-1} & > & -3 \\ 3x+2 & < & -3(x-1) \\ 6x+2 & < & 3 \\ 6x & < & 1 \\ x < \frac{1}{6} & & \end{array}$$

Die Lösungsmenge besteht aus den reellen Zahlen, die sowohl kleiner als $\frac{1}{6}$ also auch kleiner als 1 sind. Also

$$\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{6}\}.$$

Es ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{6}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

3. Wir suchen die Lösungsmenge von

$$\frac{4x+3}{2x-1} > 2.$$

1. Fall:

$$2x - 1 > 0, \text{ also } 2x > 1, \text{ also } x > \frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{4x+3}{2x-1} & > & 2 \\ 4x+3 & > & 2(2x-1) \\ 4x+3 & > & 4x-2 \\ 3 & > & -2 \end{array}$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig. Wir haben also nur die Einschränkung aus unserer Fallunterscheidung, nämlich $x > \frac{1}{2}$. Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\}.$$

2. Fall:

$$2x - 1 < 0, \text{ also } 2x < 1, \text{ also } x < \frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{4x+3}{2x-1} & > & 2 \\ 4x+3 & < & 2(2x-1) \\ 4x+3 & < & 4x-2 \\ 3 & < & -2 \end{array}$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ falsch. Somit hat diese Ungleichung im Fall $2x - 1 < 0$ keine Lösung, also

$$\mathcal{L}_2 = \emptyset.$$

Es folgt

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\}.$$

6.5 Betragsungleichungen

Ungleichungen, bei denen die Variable von Betragstrichen eingeschlossen ist, nennt man Betragsungleichungen. Um sie zu lösen sind wieder – teilweise mehrfache – Fallunterscheidungen nötig um die Betragstriche aufzulösen und die Variable zu isolieren. Wir zeigen das einfach mal an einem Beispiel.

Beispiel:
Wir suchen die Lösungen von

$$|x - 10| \leq \frac{1}{2}x.$$

1. Fall:

$$x - 10 \geq 0, \text{ also } |x - 10| = x - 10 \text{ und } x \geq 10.$$

In diesem Fall hat die Ungleichung die Form

$$x - 10 \leq \frac{1}{2}x.$$

$$\begin{array}{rcl} x - 10 & \leq & \frac{1}{2}x \\ 2x - 20 & \leq & x \\ 2x & \leq & x + 20 \\ x & \leq & 20. \end{array}$$

Zusammen mit der Annahme, dass $x \geq 10$ ist, folgt

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 20\}.$$

2. Fall:

$$x - 10 < 0, \text{ also } |x - 10| = -x + 10 \text{ und } x < 10.$$

In diesem Fall hat die Ungleichung die Form

$$-x + 10 \leq \frac{1}{2}x.$$

$$\begin{array}{rcl} -x + 10 & \leq & \frac{1}{2}x \\ -2x + 20 & \leq & x \\ 20 & \leq & 3x \\ \frac{20}{3} & \leq & x. \end{array}$$

Es folgt

$$\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{20}{3} \leq x < 10\}.$$

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{20}{3} \leq x < 10\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 20\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{20}{3} \leq x \leq 20\}.$$

6.4 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen.

1. $|x-7| \leq 2$
2. $|3x+6| \leq x$
3. $|x+3| \leq |2x-1|+3$

Lösung

1. Wir suchen die Lösungsmenge von

$$|x-7| \leq 2.$$

1. Fall: $x-7 \geq 0$, also $|x-7| = x-7$ und $x \geq 7$.

Genau dann ist $x-7 \leq 2$, wenn $x \leq 9$ ist. Es folgt

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x \leq 9\}.$$

2. Fall: $x-7 < 0$, also $|x-7| = -x+7$ und $x < 7$.

Genau dann ist $-x+7 \leq 2$, wenn $7-2 \leq x$ ist, wenn also $5 \leq x$ ist. Es folgt

$$\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 7\}.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 9\}.$$

2. Wir suchen die Lösungsmenge von

$$|3x+6| \leq x.$$

1. Fall: $3x+6 \geq 0$, also $3x \geq -6$, beziehungsweise $x \geq -2$.

$$\begin{aligned} 3x+6 &\leq x \\ 2x+6 &\leq 0 \\ 2x &\leq -6 \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

Die Aussagen $x \geq -2$ und $x \leq -3$ widersprechen einander. Es gilt also

$$\mathcal{L}_1 = \emptyset.$$

2. Fall:
$$3x + 6 < 0, \text{ also } 3x < -6$$
beziehungsweise
$$x < -2.$$
Es ist
$$|3x + 6| = -3x - 6.$$

$$\begin{array}{rcl} -3x - 6 & \leq & x \\ -4x & \leq & 6 \\ x & \geq & -\frac{3}{2} \end{array}$$

Die Aussagen $x < -2$ und $x \geq -\frac{3}{2}$ widersprechen einander. Also gilt auch in diesem Fall
$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Die Ungleichung $|3x + 6| \leq x$ hat keine Lösung.

3. Wir suchen die Lösungsmenge von
$$|x + 3| \leq |2x - 1| + 3$$
.

1. Fall:
$$x + 3 \geq 0, \text{ also } x \geq -3 \text{ und } |x + 3| = x + 3.$$
Die Ungleichung ist dann
$$x + 3 \leq |2x - 1| + 3.$$

Fall 1.1:
$$2x - 1 \geq 0, \text{ also } x \geq \frac{1}{2} \text{ und } |2x + 1| = 2x + 1.$$

$$\begin{array}{rcl} x + 3 & \leq & 2x - 1 + 3 \\ x & \leq & 2x - 1 \\ -x & \leq & -1 \\ x & \geq & 1 \end{array}$$

Die Menge der x, die $x \geq \frac{1}{2}$ und $x \geq 1$ und $x \geq -3$ gleichzeitig erfüllen ist
$$\mathcal{L}_{1.1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}.$$

Fall 1.2:

$$2x - 1 < 0, \text{ also } x < \frac{1}{2} \text{ und } |2x + 1| = -2x + 1.$$

$$\begin{array}{rcl} x + 3 & \leq & -2x + 1 + 3 \\ x & \leq & -2x + 1 \\ 3x & \leq & 1 \\ x & \leq & \frac{1}{3} \end{array}$$

Die Menge der x, die $x \leq \frac{1}{3}$ und $x < \frac{1}{2}$ und $x \geq -3$ gleichzeitig erfüllen ist

$$\mathcal{L}_{1.2} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq \frac{1}{3}\}.$$

2. Fall:

$$x + 3 < 0, \text{ also } x < -3 \text{ und } |x + 3| = -x - 3.$$

Die Ungleichung ist dann

$$-x - 3 \leq |2x - 1| + 3.$$

Fall 2.1:

$$2x - 1 \geq 0, \text{ also } x \geq \frac{1}{2}.$$

Die Bedingungen

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ und } x < -3$$

widersprechen sich, und die Ungleichung hat in diesem Fall keine Lösung.

Fall 2.2:

$$2x - 1 < 0, \text{ also } x < \frac{1}{2} \text{ und } |2x - 1| = -2x + 1.$$

$$\begin{array}{rcl} -x - 3 & \leq & -2x + 1 + 3 \\ -x & \leq & -2x + 7 \\ x & \leq & 7 \end{array}$$

Die Menge der x, die $x < -3$ und $x < \frac{1}{2}$ und $x \leq 7$ gleichzeitig erfüllen, ist

$$\mathcal{L}_{2.2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$$

.

Die Gesamtlösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{1.1} \cup \mathcal{L}_{1.2} \cup \mathcal{L}_{2.1} \cup \mathcal{L}_{2.2}$$

also

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ oder } x \leq \frac{1}{3}\}.$$

In der Analysis geht es im Zusammenhang mit Grenzwerten oft um Betragsungleichungen der Form $|x-a| < b$, wobei $b > 0$ gilt. Lösen wir diese ganz allgemein auf, erhalten wir:

1. Fall:

$$x - a \geq 0, \text{ also } |x-a| = x - a.$$

Genau dann ist

$$x - a < b, \text{ wenn } x < a + b$$

gilt. Es folgt

$$\mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < a + b\}.$$

2. Fall:

$$x - a < 0, \text{ also } |x-a| = -(x-a) = -x + a.$$

Genau dann ist

$$-x + a < b, \text{ wenn } a - b < x$$

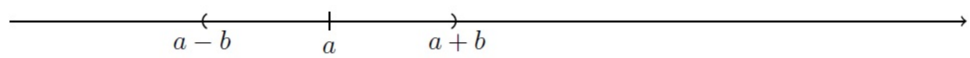
gilt. Es folgt

$$\mathcal{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid a - b < x < a\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 &= \{x \in \mathbb{R} \mid a - b < x < a + b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -b < x - a < b\} \end{aligned}$$

Auf dem Zahlenstrahl:



Zahlenstrahl zur Veranschaulichung der Betragsungleichnung

Mit der Betragsungleichung $|x-a| < b$ werden also genau die $x \in \mathbb{R}$ beschrieben, deren Abstand zu a kleiner als b ist.

7 Lineare Gleichungssysteme

7.1 Wiederholung aus dem Kapitel über Gleichungen

Eine Gleichung besteht aus zwei mathematischen Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. Enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so sucht man nach Lösungen der Gleichung, also Zahlen, die man für die Variablen einsetzen kann, so dass die Gleichung erfüllt ist. Die Menge aller reellen Zahlen, die Lösungen der Gleichung sind, heißt **Lösungsmenge**. Um die Gleichung zu lösen, darf man Äquivalenzumformungen benutzen, die die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändern.

Äquivalenzregeln für Gleichungen
Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn

1. auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert wird.
2. beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multipliziert werden, wobei die Zahl allerdings $\neq 0$ sein muss.

Lineare Gleichungen sind nun Gleichungen, in denen die Variable nur „linear“ vorkommt, also nur x, nicht x^2, x^3 usw. oder auch $\sin(x)$ oder 2^x. Sie haben im Kapitel „Lösungen von Gleichungen“ bereits gesehen, dass man lineare Gleichungen mit Hilfe der Äquivalenzregeln immer so umformen kann, dass sie von der Form

$$ax + b = 0$$

sind. Dabei sind a und b reelle Zahlen, und x ist die Variable. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ einer linearen Gleichung ist

- $\mathcal{L} = \{-\frac{b}{a}\}$ für $a \neq 0$,
- $\mathcal{L} = \emptyset$ für $a = 0$ und $b \neq 0$,
- $\mathcal{L} = \mathbb{R}$ für $a = 0$ und $b = 0$.

Wir gehen hier davon aus, dass wir lineare Gleichungen oder lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ lösen möchten, also alle reellen Zahlen finden möchten, die die Gleichungen lösen.

Der Fall, in dem wir eine Gleichung und eine Variable haben, ist also bereits gelöst.

7.2 Lineare Gleichungssysteme und ihre Lösungen

In diesem Vorkurs betrachten wir lineare Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Dabei sind x, y und z die **Variablen** im Gleichungssystem. Sie sind wie bei einer Gleichung mit einer Variablen Platzhalter für reelle Zahlen, die man für die Variable einsetzen kann. Im obigen Gleichungssystem sind a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3 und d_3 beliebige reelle Zahlen. Sie werden die **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems genannt.

7.1 Beispiel: Ein Beispiel für ein konkretes lineares Gleichungssystem wäre also

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - 3y + z &= 7 \\ -x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

7.2 Aufgabe: Welches sind die Werte von a_2, d_1 und b_3 im Beispiel?

Lösung
Es ist $a_2 = 1$, $d_1 = -2$ und $b_3 = -1$.

Die Bezeichnung der Variablen eines linearen Gleichungssystems ist willkürlich. Im Prinzip ist da alles erlaubt. Gebräuchlich sind x, y, z aber auch x_1, x_2, x_3.

7.3 Beispiel: Das Gleichungssystem aus dem Beispiel eben könnte man auch schreiben als

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a + b - c &= -2 \\ 2a - 3b + c &= 7 \\ -a - b + 2c &= 4 \end{aligned}$$

Wir werden hier lineare Gleichungssysteme betrachten, die aus höchstens drei Gleichungen in höchstens drei Variablen bestehen. Im Studium werden Sie ein Verfahren kennenlernen, mit dem Sie im Prinzip lineare Gleichungssysteme mit beliebig vielen Gleichungen und Variablen lösen können. Bevor wir zum Lösen eines linearen Gleichungssystems kommen, muss zunächst geklärt werden, was überhaupt eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist.

7.4 Definition: Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

ist ein Tupel (r, s, t) aus reellen Zahlen r, s und t, so dass

$$\begin{aligned} a_1r + b_1s + c_1t &= d_1 \\ a_2r + b_2s + c_2t &= d_2 \\ a_3r + b_3s + c_3t &= d_3 \end{aligned}$$

gilt. Es wird also in allen Gleichungen r für x, s für y und t für z eingesetzt, und alle Gleichungen sind erfüllt.

7.5 Beispiel: $(1, -1, 2)$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - 3y + z &= 7 \\ -x - y + 2z &= 4, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} 1 + (-1) - 2 &= -2 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 2 &= 7 \\ -1 - (-1) + 2 \cdot 2 &= 4 \end{aligned}$$

7.6 Aufgabe: Welche der folgenden Tupel sind Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - 3y + z &= 7 \\ 4x - y - z &= 3? \end{aligned}$$

1. $(1, -1, 2)$
2. $(0, 1, 1)$
3. $(3, 2, 7)$

Lösung

1. $(1, -1, 2)$ ist eine Lösung, denn

$$\begin{aligned} 1 + (-1) - 2 &= -2 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 2 &= 7 \\ 4 \cdot 1 - (-1) - 3 &= 3 \end{aligned}$$

2. $(0, 1, 1)$ ist keine Lösung, denn $0 + 1 - 1 \neq -2$. Die erste Gleichung ist also nicht erfüllt und damit auch das ganze Gleichungssystem nicht.
3. $(3, 2, 7)$ ist eine Lösung, denn

$$\begin{aligned} 3 + 2 - 7 &= -2 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 7 &= 7 \\ 4 \cdot 3 - 2 - 7 &= 3 \end{aligned}$$

Ein lineares Gleichungssystem kann durchaus mehr als eine Lösung haben, wie Sie zum Beispiel in der Aufgabe oben gesehen haben. Man interessiert sich daher für die **Lösungsmenge** $\mathcal{L}$ eines linearen Gleichungssystems, also die Menge $\mathcal{L}$ aller Lösungstupel des Gleichungssystems.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems
Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist leer, unendlich oder besteht aus genau einem Element.

7.7 Beispiel: Da wir aus der letzten Aufgabe schon zwei Elemente aus der Lösungsmenge von

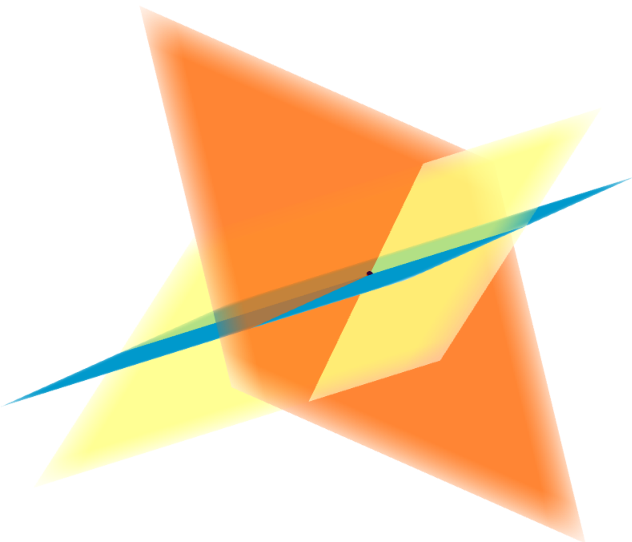
$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - 3y + z &= 7 \\ 4x - y - z &= 3 \end{aligned}$$

kennen, nämlich $(1, -1, 2)$ und $(3, 2, 7)$, wissen wir, dass die Lösungsmenge unendlich ist.

7.3 Geometrische Interpretation von linearen Gleichungssystemen

Jede lineare Gleichung in drei Variablen kann als Gleichung einer Ebene im dreidimensionalen Raum interpretiert werden (siehe das Kapitel über analytische Geometrie in diesem Vorkurs). Hat man nun drei lineare Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein sollen, so bedeutet das, dass man die Punkte im dreidimensionalen Raum finden möchte, die auf allen drei Ebenen liegen. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems entspricht also der Schnittmenge der drei Ebenen. Für diese Schnittmenge gibt es drei Möglichkeiten:

In der Regel schneiden sich drei Ebenen im Raum in einem Punkt. Auf der folgenden Abbildung sehen Sie drei Ebenen (gelb, orange und blau), die sich in einem Punkt (schwarz) schneiden.

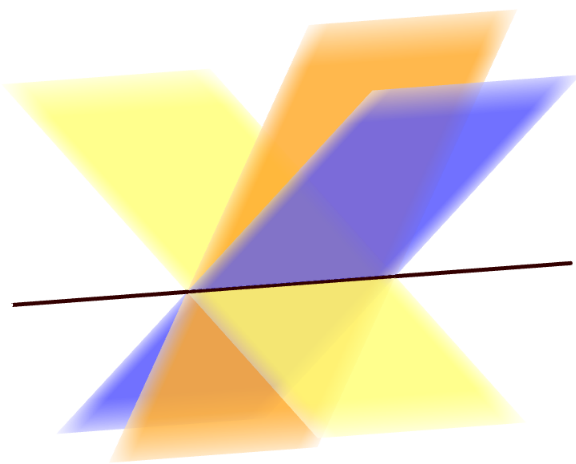


Schnitt von drei Ebenen im Raum

Sind zwei der Ebenen parallel, so besitzen sie keine gemeinsamen Punkte, und die Schnittmenge ist leer. Eine solche Situation sehen Sie auf dem folgenden Bild. Auch hier sind wieder drei Ebenen (gelb, orange,blau) zu sehen. Es gibt jetzt aber keinen Punkt, der auf allen drei Ebenen liegt.

Schnitt von zwei parallelen Ebenen und einer weiteren Ebene im Raum

Wie im folgenden Fall kann es auch sein, dass es unendlich viele Punkte gibt, die auf allen drei Ebenen liegen. Hier liegen alle Punkte der schwarzen Geraden auf allen drei Ebenen.



Schnitt von drei Ebenen mit Schnittgerade

7.4 Erlaubte Umformungen bei der Bestimmung der Lösungsmenge

Wir wollen nun ein gegebenes lineares Gleichungssystem so umformen, dass wir einerseits die Lösungsmenge nicht verändern, diese aber andererseits am Ende leicht ablesen können. Dazu sind folgende Umformungen erlaubt:

Äquivalenzregeln für lineare Gleichungssysteme
Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn

1. zwei Gleichungen vertauscht werden.
2. eine Gleichung mit einer reellen Zahl $\neq 0$ multipliziert wird.
3. eine der Gleichungen durch die Summe der Gleichung mit einer anderen Gleichung des Gleichungssystems ersetzt wird.

Beispiel
Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - 3y + z &= 7 \\ -x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

wird nicht verändert, wenn die zweite Gleichung mit 2 multipliziert wird, also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 4x - 6y + 2z &= 14 \\ -x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

betrachtet wird. Sie ändert sich auch nicht, wenn die zweite und die dritte Gleichung vertauscht werden.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ -x - y + 2z &= 4 \\ 4x - 6y + 2z &= 14 \end{aligned}$$

Auch wenn wir die zweite Gleichung durch die Summe von erster und zweiter Gleichung ersetzen, ändert sich die Lösungsmenge nicht.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -2 \\ z &= 2 \\ 4x - 6y + 2z &= 14 \end{aligned}$$

7.8 Aufgabe: Gegeben sei

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -x - y + z &= -1 \\ -x + 2y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Ersetzen Sie zuerst die zweite Gleichung durch die Summe aus erster und zweiter Gleichung. Ersetzen Sie dann die dritte Gleichung durch die Summe aus erster und dritter Gleichung.Tauschen Sie anschließend die zweite und dritte Gleichung und multiplizieren Sie schließlich die (neue) dritte Gleichung mit -1.

Lösung
Wir ersetzen die zweite Gleichung durch die Summe aus erster und zweiter Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -z &= -1 \\ -x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir die dritte Gleichung durch die Summe aus der zweiten und dritten. Das ergibt

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -z &= -1 \\ 3y &= 3 \end{aligned}$$

Nun tauschen wir die zweite mit der dritten Gleichung.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ 3y &= 3 \\ -z &= -1 \end{aligned}$$

Zum Schluss multiplizieren wir noch die dritte Gleichung mit -1.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ 3y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

7.5 Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksform

Die Frage ist nun, wie man systematisch die Äquivalenzregeln anwenden kann, so dass sich die Lösungsmenge leicht ablesen lässt. Ziel wird die folgende Form eines linearen Gleichungssystems sein:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \\ c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

7.9 Definition: Hat ein lineares Gleichungssystem obige Form, so sagt man, dass es in **Dreiecksform** ist.

Was haben wir gewonnen, wenn ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform vorliegt?

Wir können die Lösungsmenge bzw. die Lösung berechnen, indem wir von unten nach oben auflösen.

7.10 Beispiel: Sei

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= 1 \\ y - z &= 2 \\ 2z &= -4 \end{aligned}$$

in Dreiecksform gegeben. Wir möchten die Lösungsmenge berechnen. Dazu multiplizieren wir die dritte Gleichung mit $\frac{1}{2}$. Das Gleichungssystem hat jetzt die Form

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= 1 \\ y - z &= 2 \\ z &= -2, \end{aligned}$$

und wir wissen nun, dass $z = -2$ gilt. Das setzen wir in die erste und zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 4 &= 1 \\ y + 2 &= 2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Nun addieren wir 4 auf beiden Seiten der ersten Gleichung und subtrahieren 2 auf beiden Seiten der zweiten Gleichung. Wir verändern dadurch die

Lösungsmenge nicht, wie wir schon bei den einzelnen Gleichungen gesehen haben.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ y &= 0 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass $y = 0$ gelten muss. Das setzen wir in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} 3x &= 5 \\ y &= 0 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir noch die erste Gleichung mit $\frac{1}{3}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{3} \\ y &= 0 \\ z &= -2. \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist also $(\frac{5}{3}, 0, -2)$ und die Lösungsmenge somit

$$\mathcal{L} = \{(\frac{5}{3}, 0, -2)\}.$$

Dieses Verfahren (z berechnen, in die erste und zweite Gleichung einsetzen, y berechnen, in die erste Gleichung einsetzen, x berechnen) funktioniert auf diese Weise auf jeden Fall immer dann, wenn das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.

7.11 Aufgabe: Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ -y + 3z &= 2 \\ -z &= -1. \end{aligned}$$

Lösung
Wir multiplizieren die dritte Gleichung mit -1.

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ -y + 3z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Also gilt $z = 1$, und wir setzen das in die erste und zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned} x - 2y + 2 &= 0 \\ -y + 3 &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Nun addieren wir -2 auf beiden Seiten der ersten Gleichung und -3 auf beiden Seiten der zweiten Gleichung.

$$\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ -y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit -1.

$$\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Es gilt also $y = 1$. Das setzen wir in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} x - 2 &= -2 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Zum Schluss addieren wir noch 2 auf beiden Seiten der ersten Gleichung.

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist damit

$$\mathcal{L} = \{(0, 1, 1)\}.$$

7.6 Das Gauß-Verfahren

Wenn ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform ist, kann man die Lösungsmenge leicht berechnen. Aber welche Äquivalenzregeln muss man wie anwenden, um ein Gleichungssystem in Dreiecksform zu erhalten?

Das Verfahren, das hier angewendet wird, nennt sich **Gauß-Verfahren** oder **Gauß-Algorithmus**, wobei dieses Verfahren auch für größere Gleichungssysteme mit mehr Gleichungen und mehr Variablen funktioniert. Wir schauen uns das hier für drei Gleichungen mit drei Variablen an und gehen zunächst davon aus, dass es genau eine Lösung gibt. Die Fälle, dass es keine oder unendlich viele Lösungen gibt, betrachten wir später.

Noch ein Hinweis zu den Bezeichnungen im Verfahren. Wir benennen die Koeffizienten im linearen Gleichungssystem (also $a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots, d_3$) immer gleich. Das heißt, nachdem ein Schritt im Verfahren ausgeführt wurde, nennen wir die neuen Koeffizienten wieder $a_1, \ldots, d_3$. Bitte behalten Sie das im Hinterkopf.

Sei also nun ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_3z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

gegeben.

1. Schritt: Sorge dafür, dass $a_1 \neq 0$ gilt.

Ist $a_1 = 0$, so tausche die erste Gleichung mit einer anderen Gleichung. Gilt $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, so kommt die Variable x im Gleichungssystem gar nicht vor. Wir haben es dann mit einem überbestimmten Gleichungssystem zu tun. Diese werden später behandelt.

2. Schritt: Sorge dafür, dass $a_2 = a_3 = 0$ gilt.

Ist $a_2 \neq 0$, so multipliziere die zweite Gleichung mit $-\frac{a_1}{a_2}$. Dann gilt für das neue a_2, dass $a_2 = -a_1$ ist. Anschließend ersetze die zweite Gleichung durch die Summe aus der ersten und zweiten Gleichung. Jetzt ist das neue $a_2 = 0$. Analog wird vorgegangen, wenn $a_3 \neq 0$ ist. Es wird dann die dritte Gleichung mit $-\frac{a_1}{a_3}$ multipliziert und anschließend die dritte Gleichung durch die Summe aus der ersten und dritten Gleichung ersetzt.

Das lineare Gleichungssystem hat jetzt die Form

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \\ c_3y + d_3z &= d_3, \end{aligned}$$

wobei $a_1 \neq 0$ gilt.

3. Schritt: Sorge dafür, dass $b_2 \neq 0$ gilt.

Ist $b_2 = 0$, dann tausche die zweite und dritte Gleichung. Ist auch $b_3 = 0$, dann hat das lineare Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen. Dieser Fall wird später betrachtet.

4. Schritt: Sorge dafür, dass $b_3 = 0$ gilt.

Ist $b_3 \neq 0$, so multipliziere die dritte Gleichung mit $-\frac{b_2}{b_3}$. Dann gilt für das neue b_3, dass $b_3 = -b_2$ ist. Ersetze nun die dritte Gleichung durch die Summe aus der zweiten und dritten Gleichung. Nun gilt $b_3 = 0$.

Das lineare Gleichungssystem hat jetzt die Form

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \\ c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

und ist damit in Dreiecksform.

Ist $c_3 = 0$, dann hat das lineare Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen. Dazu kommen wir später. Gilt $c_3 \neq 0$, sind wir fertig, und es gibt genau eine Lösung.

7.12 Beispiel: Wir betrachten

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ -x - y + 2z &= 4 \\ 2x - 3y + z &= 7. \end{aligned}$$

1. Schritt: Es gibt nichts zu tun. Es ist bereits $a_1 \neq 0$.

2. Schritt: Es ist $a_2 = -1 \neq 0$. Weil schon $a_2 = -a_1$ gilt, muss die zweite Gleichung nicht multipliziert werden. Wir können sofort die zweite Gleichung durch die Summe aus den ersten beiden Gleichungen ersetzen.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 7 \end{aligned}$$

Da auch $a_3 \neq 0$ gilt, sind wir noch nicht fertig mit dem zweiten Schritt.

Wir multiplizieren die dritte Gleichung mit $-\frac{a_1}{a_3} = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ z &= 2 \\ -x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Nun addieren wir die erste und dritte Gleichung und machen das Ergebnis zur neuen dritten Gleichung.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ z &= 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z &= -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

Es gilt $a_2 = a_3 = 0$, also ist der zweite Schritt abgeschlossen.

3. Schritt: Es ist $b_2 = 0$. Also vertauschen wir die zweite und die dritte Gleichung.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z &= -\frac{11}{2} \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Da jetzt schon $b_3 = 0$ gilt, sind wir fertig, das Gleichungssystem ist in Dreiecksform. Es kann nun durch Einsetzen von unten nach oben weiter gelöst werden.

7.13 Aufgabe: Bringen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 6 \\ 2x - y - z &= -3 \end{aligned}$$

auf Dreiecksform und bestimmen Sie anschließend die Lösungsmenge.

Lösung

1. Schritt: Nichts zu tun, $a_1 \neq 0$.

2. Schritt: Wir multiplizieren die zweite Zeile mit 2.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ -2x + 4y + 2z &= 12 \\ 2x - y - z &= -3 \end{aligned}$$

Jetzt ersetzen wir die zweite Gleichung durch die Summe der ersten beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 5y + z &= 13 \\ 2x - y - z &= -3 \end{aligned}$$

Jetzt ist $a_2 = 0$. Wir multiplizieren die dritte Gleichung mit -1.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 5y + z &= 13 \\ -2x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

Nun wird die dritte Gleichung durch die Summe der ersten und dritten Gleichung ersetzt.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 5y + z &= 13 \\ 2y &= 4 \end{aligned}$$

Jetzt ist $a_2 = a_3 = 0$. So, wie das Gleichungssystem hier steht, sieht es so aus, als wäre es in Dreiecksform, aber das ist es nicht, denn es gilt $b_3 \neq 0$. Das sieht man besser, wenn man das Gleichungssystem so schreibt:

$$\begin{array}{rrl} 2x + y & -z & = 1 \\ 5y & +z & = 13 \\ 2y & & = 4 \end{array}$$

3. Schritt: Hier ist nichts zu tun, es gilt bereits $b_2 \neq 0$.

4. Schritt: Wir multiplizieren die dritte Gleichung mit $-\frac{5}{2}$.

$$\begin{array}{rrl} 2x + y & -z & = 1 \\ 5y & +z & = 13 \\ -5y & & = -10 \end{array}$$

Wir addieren die zweite und die dritte Gleichung und ersetzen die dritte Gleichung mit dem Ergebnis.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 5y + z &= 13 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Nun ist das lineare Gleichungssystem in Dreiecksform.

Wir lösen jetzt das Gleichungssystem, indem wir von unten her einsetzen. Die dritte Gleichung besagt ja bereits, dass $z = 3$ gilt. Das setzen wir in die erste und zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 1 \\ 5y + 3 &= 13 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Nun addieren wir 3 auf beiden Seiten der ersten Gleichung, und gleichzeitig subtrahieren wir 3 auf beiden Seiten der zweiten Gleichung.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 5y &= 10 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $\frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Damit ist $y = 2$, und das setzen wir in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 4 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Wir subtrahieren 2 auf beiden Seiten der ersten Gleichung.

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Zum Schluss teilen wir noch die erste Gleichung durch 2.

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= 2 \\
z &= 3
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\mathcal{L} = \{(1, 2, 3)\}.$$

Das Gauß-Verfahren, wie wir es bisher beschrieben haben, funktioniert nicht in jedem Fall auf diese Weise, sondern nur, wenn in der Dreiecksform $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ und $c_3 \neq 0$ gilt. Dann gibt es immer genau eine Lösung, die sich durch Einsetzen von unten nach oben finden lässt. Es gibt aber auch noch viele andere Fälle, in denen das nicht so funktioniert und in denen es dann unendlich viele oder gar keine Lösungen gibt. Wir werden hier nicht alle dieser Fälle betrachten, sondern nur die, die später im Abschnitt über analytische Geometrie vorkommen.

7.7 Spezielle lineare Gleichungssysteme

Ging es bisher um lineare Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Variablen mit genau einer Lösung, werden wir nun solche behandeln, die weniger als drei Gleichungen oder Variablen oder eine unendliche oder leere Lösungsmenge besitzen.

7.7.1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen ist von der Form

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y &= c_1 \\
a_2x + b_2y &= c_2.
\end{aligned}
$$

Eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist ein Tupel (r, s) von reellen Zahlen, so dass

$$
\begin{aligned}
a_1r + b_1s &= c_1 \\
a_2r + b_2s &= c_2
\end{aligned}
$$

gilt. Ein solches Gleichungssystem ergibt sich zum Beispiel, wenn man die Schnittmenge von zwei Geraden in der Ebene berechnet. In der Regel schneiden sich zwei Geraden in genau einem Punkt. Sind sie jedoch parallel, schneiden sie sich gar nicht. Sind sie gleich, gibt es unendlich viele Schnittpunkte. Ganz analog haben wir hier also auch eine Lösungsmenge, die entweder aus genau einem Punkt oder aus unendlich vielen Elementen besteht oder leer ist.

Analog zu den linearen Gleichungssystemen mit drei Gleichungen und drei Variablen löst man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, indem man es mit Hilfe der Äquivalenzregeln und des Gauß-Verfahrens auf Dreiecksform bringt. In diesem Fall ist das die Form

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Ist dann $a_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$, lässt sich das lineare Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben lösen.

7.14 Beispiel: Wir betrachten

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ -2x + y &= -2. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ -x + \frac{1}{2}y &= -1. \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir die zweite Gleichung durch die Summe der beiden Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ \frac{5}{2}y &= 0. \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem ist nun in Dreiecksform. Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $\frac{2}{5}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Jetzt können wir $y = 0$ in die erste Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\mathcal{L} = \{(1, 0)\}.$$

Es kann auch sein, dass die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems leer ist oder unendlich viele Elemente besitzt. Diesen Fällen wollen wir uns jetzt (ganz allgemein für drei Gleichungen und drei Variablen) zuwenden.

7.7.2 Widersprüchliche Gleichungen

Ergibt sich während des Gaußverfahrens eine Gleichung der Form $0 = d$ mit $d \neq 0$, dann ist die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems leer, denn diese Gleichung ist nie erfüllt, und eine Lösung muss ja immer **alle** Gleichungen des linearen Gleichungssystems erfüllen. An der Stelle können Sie also abbrechen und die Lösungsmenge direkt hinschreiben ($\mathcal{L} = \emptyset$).

7.15 Beispiel: Wir möchten die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

berechnen. Dazu multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 2.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ -2x + 4y - 2z &= 0 \\ y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Nun addieren wir die ersten beiden Gleichungen und ersetzen die zweite Gleichung durch das Ergebnis.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ y + 3z &= 7 \\ y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Hier sieht man schon, dass sich die zweite und dritte Gleichung widersprechen. Noch deutlicher wird es, wenn die dritte Gleichung mit -1 multipliziert wird

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ y + 3z &= 7 \\ -y - 3z &= -6 \end{aligned}$$

und anschließend die dritte Gleichung durch die Summe der zweiten und dritten Gleichung ersetzt wird.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ y + 3z &= 7 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt nun einen Widerspruch. Damit ist das gesamte lineare Gleichungssystem nicht lösbar, und es gilt $\mathcal{L} = \emptyset$.

7.16 Aufgabe: Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ -2x + 3y &= a \end{aligned}$$

wobei a eine reelle Zahl ist. Geben Sie ein Beispiel für ein $a \in \mathbb{R}$, so dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Lösung
Für jedes $a \neq -1$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems leer. Nehmen wir zum Beispiel $a = 2$. Dann lautet das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ -2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Wir addieren die beiden Gleichungen und ersetzen die zweite durch das Ergebnis.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung zeigt, dass $\mathcal{L} = \emptyset$ gilt.

7.7.3 Überflüssige Gleichungen

Erhält man im Zuge der Anwendung des Gauß-Verfahrens eine Gleichung der Form $0 = 0$, dann ist diese zwar immer erfüllt, liefert andererseits aber auch keine Informationen über mögliche Lösungen des linearen Gleichungssystems. Eine solche Gleichung kann einfach weggelassen und mit den übrigen Gleichungen weitergerechnet werden.

7.17 Beispiel: Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit 2.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ -2x + 4y - 2z &= 0 \\ y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir die zweite Gleichung durch die Summe der ersten beiden.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ y + 3z &= 7 \\ y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

Wir sehen jetzt schon, dass die zweite und dritte Gleichung gleich sind. Damit ist klar, dass man eine der beiden Gleichungen weglassen kann. Wir können aber auch die dritte Gleichung mit -1 multiplizieren

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ y + 3z &= 7 \\ -y - 3z &= -7 \end{aligned}$$

und schließlich die dritte Gleichung durch die Summe der zweiten und dritten Gleichung ersetzen.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ y + 3z &= 7 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung können wir nun weglassen und haben ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ y + 3z &= 7, \end{aligned}$$

das wir lösen müssen. Wie das funktioniert, erfahren Sie im nächsten Abschnitt.

7.7.4 Unterbestimmte Gleichungssysteme

Wir haben oben gesehen, dass es vorkommen kann, dass man Gleichungen in einem linearen Gleichungssystem weglassen kann. Natürlich ist es auch möglich, dass man von Anfang an mit weniger Gleichungen startet, also nicht so viele Gleichungen wie Variablen hat.

7.18 Definition: Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Variablen, heißt **unterbestimmt**.

Die unterbestimmten Gleichungssysteme, die uns in diesem Vorkurs interessieren, sind die mit zwei Gleichungen und drei Variablen. Diese ergeben sich zum Beispiel, wenn der Schnitt von zwei Ebenen im dreidimensionalen Raum berechnet wird. Gegeben ist also ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

Für alle unterbestimmten linearen Gleichungssysteme gilt:

Die Lösungsmenge unterbestimmter Gleichungssysteme:
Hat ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem eine Lösung, dann hat es auch unendlich viele Lösungen.

Hat ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, dann stellt sich die Frage, wie man die Lösungsmenge beschreiben kann; denn alle Lösungen aufzuzählen, funktioniert dann ja nicht mehr. Wir stellen hier für die Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und drei Variablen ein Verfahren vor, bei dem wieder zunächst (soweit das möglich ist) das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren in Dreiecksform gebracht wird.

Wir haben dann ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

Mehr Dreiecksform geht nicht, das heißt, aus dieser Form muss jetzt die Lösungsmenge berechnet werden. Wir gehen davon aus, dass $b_2 \neq 0$ gilt. Dann addieren wir auf beiden Seiten der zweiten Gleichung $-c_2z$ und erhalten

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y &= d_2 - c_2z \end{aligned}$$

Nun teilen wir die zweite Gleichung durch b_2.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ y &= \frac{d_2}{b_2} - \frac{c_2}{b_2}z \end{aligned}$$

und benennen die zweite Gleichung jetzt etwas um (das ist aber nur eine Umbenennung, damit es übersichtlich bleibt, in konkreten Beispielen bleiben die Zahlen gleich).

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ y &= a + bz \end{aligned}$$

Wir haben jetzt in der zweiten Gleichung y durch einen Term dargestellt, in dem z vorkommt. Diesen Term setzen wir für y in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1(a + bz) + c_1z &= d_1 \\ y &= a + bz \end{aligned}$$

Wir können nun die erste Gleichung ausmultiplizieren und sortieren und erhalten (mit neuen Bezeichnungen)

$$\begin{aligned} a_1x + \overline{c}_1z &= \overline{d}_1 \\ y &= a + bz \end{aligned}$$

dabei gilt:

$$\begin{aligned} \overline{c}_1 &= b_1b + c_1 \\ \overline{d}_1 &= d_1 - b_1a \end{aligned}$$

Jetzt wird $\overline{c}_1 z$ auf beiden Seiten der ersten Gleichung subtrahiert.

$$\begin{aligned} a_1 x &= \overline{d}_1 - \overline{c}_1 z \\ y &= a + bz \end{aligned}$$

Zum Schluss wird noch die erste Gleichung durch a_1 geteilt. Wieder mit neuen Bezeichnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= c + dz \\ y &= a + bz \end{aligned}$$

Wenn wir also z beliebig aus $\mathbb{R}$ wählen und x und y gemäß dieser beiden Gleichungen, erhalten wir immer eine Lösung. Es gibt also unendlich viele Lösungen, eine für jede Wahl von z. Die Lösungsmenge ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{(x, y, z) \mid x = c + dz, y = a + bz, z \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\} \\ &= \{(c + dz, a + bz, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Da die Berechnung der Lösungsmenge im Allgemeinen nur schwer nachvollziehbar ist, schauen wir uns jetzt ein Beispiel an, mit dem das Vorgehen sicher klarer wird.

7.19 Beispiel: Wir betrachten

$$\begin{aligned} -x + y - 2z &= 3 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Wir tauschen die beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ -x + y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 2.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ -2x + 2y - 4z &= 6 \end{aligned}$$

Wir addieren die beiden Gleichungen und ersetzen die zweite mit dem Ergebnis.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 3y - 3z &= 7 \end{aligned}$$

Nun ist das lineare Gleichungssystem soweit es geht in Dreiecksform. Wir addieren $3z$ auf beiden Seiten der zweiten Gleichung.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 3y &= 7 + 3z \end{aligned}$$

Jetzt multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ y &= \frac{7}{3} + z \end{aligned}$$

Der Term $\frac{7}{3} + z$ kann nun für y in die erste Gleichung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 2x + \frac{7}{3} + z + z &= 1 \\ y &= \frac{7}{3} + z \end{aligned}$$

Wir fassen die erste Gleichung zusammen und stellen um.

$$\begin{aligned} 2x + 2z &= -\frac{4}{3} \\ y &= \frac{7}{3} + z \end{aligned}$$

Nun subtrahieren wir $2z$ auf beiden Seiten der ersten Gleichung.

$$\begin{aligned} 2x &= -\frac{4}{3} - 2z \\ y &= \frac{7}{3} + z \end{aligned}$$

Zu guter Letzt multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{3} - z \\ y &= \frac{7}{3} + z \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(-\frac{2}{3} - z, \frac{7}{3} + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

7.20 Aufgabe: Bestimmen Sie zwei verschiedene Elemente aus der Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{(-\frac{2}{3} - z, \frac{7}{3} + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ im vorhergehenden Beispiel.

Lösung
In der Lösungsmenge darf z frei gewählt werden, also tun wir das. Wir können zum Beispiel $z = 0$ nehmen. Dann steht in der ersten Komponente des Lösungstupels

$$-\frac{2}{3} - z = -\frac{2}{3},$$

und in der zweiten Komponente steht

$$\frac{7}{3} + z = \frac{7}{3}.$$

In der dritten steht einfach z, also 0. Damit wäre

$$(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0)$$

ein Element der Lösungsmenge. Für das zweite Element wählen wir $z = 1$. Dann ist die erste Komponente

$$-\frac{2}{3} - z = -\frac{5}{3},$$

und die zweite ist

$$\frac{7}{3} + z = \frac{10}{3}.$$

Eine weitere Lösung ist also

$$(-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 1).$$

Bei unterbestimmten Gleichungssystemen mit unendlich vielen Lösungen müssen in der Lösungsmenge Variablen mit Hilfe anderer Variablen dargestellt werden. Das ist nicht schwer, man muss aber zusehen, dass man den Überblick nicht verliert. Das Ziel sollte es sein, alle übrigen Variablen in Abhängigkeit einer einzigen Variablen darzustellen. Wir haben hier einen Lösungsweg vorgestellt, bei dem immer x und y durch z beschrieben werden. Das muss man natürlich nicht immer so machen, manchmal geht es anders sicher schneller und/oder eleganter. Unser Verfahren hat aber den Vorteil, dass es immer auf die gleiche Weise ablaufen kann.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel.

7.21 Beispiel: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Wir tauschen zunächst die beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y - z &= -1 \end{aligned}$$

Jetzt ist das lineare Gleichungssystem in Dreiecksform. Nun addieren wir z auf beiden Seiten der zweiten Gleichung.

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y &= -1 + z \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung hat jetzt schon die gewünschte Form. Wir setzen $-1+z$ für y in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} -x + 3(-1 + z) + 2z &= 0 \\ y &= -1 + z \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird sortiert.

$$\begin{aligned} -x + 5z &= 3 \\ y &= -1 + z \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der ersten Gleichung wird $5z$ subtrahiert.

$$\begin{aligned} -x &= 3 - 5z \\ y &= -1 + z \end{aligned}$$

Zum Schluss multiplizieren wir noch die erste Gleichung mit -1.

$$\begin{aligned} x &= -3 + 5z \\ y &= -1 + z \end{aligned}$$

Nun können wir die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(-3 + 5z, -1 + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

ablesen.

7.22 Aufgabe: Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 3 \\ -2x + 2y - z &= -1 \end{aligned}$$

und zwei verschiedene Elemente der Lösungsmenge.

Lösung
Wir addieren die beiden Gleichungen und ersetzen die zweite Gleichung durch das Ergebnis.

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 3 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

Schon ist die Dreiecksform erreicht. Nun wird z auf beiden Seiten der zweiten Gleichung subtrahiert.

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 3 \\ y &= 2 - z \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist jetzt in der gewünschten Form. Der Term $2 - z$ wird für y in die erste Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} 2x - 2 + z + 2z &= 3 \\ y &= 2 - z \end{aligned}$$

Jetzt sortieren wir die erste Gleichung.

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 5 \\ y &= 2 - z \end{aligned}$$

Nun wird auf beiden Seiten der ersten Gleichung $-3z$ addiert.

$$\begin{aligned} 2x &= 5 - 3z \\ y &= 2 - z \end{aligned}$$

Zum Schluss wird noch die erste Gleichung durch 2 geteilt.

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z \\ y &= 2 - z \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist jetzt

$$\mathcal{L} = \{(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}z, 2 - z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Für $z = 1$ erhalten wir $(1, 1, 1)$ als Element der Lösungsmenge, für $z = 0$ bekommen wir $(\frac{5}{2}, 2, 0)$.

Bis jetzt hatten alle unterbestimmten Gleichungssysteme in diesem Abschnitt unendlich viele Lösungen. Dass das nicht immer der Fall ist, sollen Sie sich in der nächsten Aufgabe überlegen.

7.23 Aufgabe: Finden Sie ein Beispiel für ein unterbestimmtes Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in drei Variablen, das keine Lösung besitzt.

Lösung
Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen hat dann keine Lösung, wenn sich die beiden Gleichungen widersprechen. Ein Beispiel wäre also

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt, kann man sehen, indem man die zweite Gleichung mit -1 multipliziert

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -x - y - z &= -1 \end{aligned}$$

und dann beide Gleichungen addiert und die zweite Gleichung durch das Ergebnis ersetzt.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

Jetzt zeigt die zweite Gleichung, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt (was ja auch vorher schon klar war, denn $x+y+z$ kann nicht gleichzeitig 0 und 1 sein).

7.7.5 Überbestimmte Gleichungssysteme

Ist die Zahl der Gleichungen eines linearen Gleichungssystems größer als die Zahl der Variablen, so heißt das Gleichungssystem **überbestimmt**. In der analytischen Geometrie kommen solche überbestimmten Gleichungssysteme vor, wenn zwei Geraden im dreidimensionalen Raum geschnitten werden. Wir haben dann ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen in zwei Variablen.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned}$$

Lässt man die dritte Gleichung weg, hat man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, das in der Regel genau eine Lösung (r, s) besitzt. Erfüllt diese Lösung auch die dritte Gleichung, ist es eine Lösung des gesamten Gleichungssystems. Erfüllt (r, s) die dritte Gleichung nicht, hat das gesamte Gleichungssystem keine Lösung.

7.24 Beispiel: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -x + y &= -3 \\ -3x - 2y &= -1. \end{aligned}$$

Wir ignorieren zunächst die dritte Gleichung und multiplizieren die zweite Gleichung mit 2.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -2x + 2y &= -6 \\ -3x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir die zweite Gleichung durch die Summe der beiden ersten Gleichungen.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ y &= -2 \\ -3x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem, das nur aus den ersten beiden Gleichungen besteht, ist jetzt in Dreiecksform. Wir setzen -2 für y in die erste Gleichung ein.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 4 \\ y &= -2 \\ -3x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Nun subtrahieren wir 2 auf beiden Seiten der ersten Gleichung.

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ y &= -2 \\ -3x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Wir teilen die erste Gleichung durch 2.

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ -3x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Nun ist das Gleichungssystem, das aus den ersten beiden Gleichungen besteht, gelöst. Die einzige Lösung ist $(1, -2)$. Wir setzen diese Lösung in die dritte Gleichung ein

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ (-3) \cdot 1 - 2(-2) &= 1 \end{aligned}$$

und rechnen aus.

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung also ebenfalls erfüllt ist, gilt

$$\mathcal{L} = \{(1, -2)\}.$$

Wäre die letzte Gleichung nicht erfüllt, hätten wir

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

7.25 Aufgabe: Berechnen Sie die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= 5 \\ x - y &= -2 \\ 2x + 3y &= 2. \end{aligned}$$

Lösung
Wie im Beispiel ignorieren wir die dritte Gleichung zunächst. Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit 3.

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= 5 \\ 3x - 3y &= -6 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Nun addieren wir die ersten beiden Gleichungen und ersetzen die zweite Gleichung durch das Ergebnis.

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= 5 \\ -y &= -1 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung wird mit -1 multipliziert.

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= 5 \\ y &= 1 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Nun wird in der ersten Gleichung y durch 1 ersetzt.

$$\begin{aligned} -3x + 2 &= 5 \\ y &= 1 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird umgestellt

$$\begin{aligned} -3x &= 3 \\ y &= 1 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

und dann noch die erste Gleichung durch -3 geteilt.

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung des aus den ersten beiden Gleichungen bestehenden Gleichungssystems ist also $(-1, 1)$. Diese setzen wir in die dritte Gleichung ein

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 \\ 2(-1) + 3 \cdot 1 &= 2 \end{aligned}$$

und rechnen aus:

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ist hier also nicht erfüllt. Es gilt

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

7.7.6 Zusammenfassung

Um ein lineares Gleichungssystem zu lösen, bringen wir es zunächst mit Hilfe des Gauß-Verfahrens auf Dreiecksform. In der Regel kann dann einfach von unten nach oben aufgelöst werden, und es ergibt sich genau eine Lösung. Ergibt sich im Laufe des Gauß-Verfahrens ein Widerspruch (meistens in der Form $0 = a$ mit $a \neq 0$), dann ist die Lösungsmenge leer. Ergeben sich Gleichungen der Form $0 = 0$, so können diese weggelassen werden. Hat man dann mehr Variablen als Gleichungen, versucht man eine Variable (meistens z) zu finden, mit deren Hilfe man die anderen darstellen kann. Diese Variable kann am Ende frei gewählt werden, so dass die Lösungsmenge unendlich ist.

Und noch eine Bemerkung zum Schluss:

7.26 Bemerkung: Sie werden im Studium Verfahren kennenlernen, mit denen Sie ganz kompakt und übersichtlich lineare Gleichungssysteme beliebiger Größe einheitlich lösen können - auch in den Fällen, die hier nicht behandelt wurden.