



Univerzitet u Beogradu  
Matematički fakultet

# ANALIZA VREMENSKIH SERIJA

Seminarski rad

Ivana Nešković 167/2019  
Marija Papović 63/2019

Profesor: dr Nenad Mitić

Beograd, 2024

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Opis problema</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Algoritmi i metode</b>	<b>5</b>
3.1	ARIMA model (AutoRegressive Integrated Moving Average) . . .	5
3.2	SARIMA - Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average .	5
3.3	Rekurentne neuronske mreže- RNN . . . . .	6
3.3.1	LSTM Mreže - Long short-term memory . . . . .	6
3.3.2	Gated Recurrent Unit (GRU) mreže . . . . .	7
3.4	LOWESS - Local Regression Smoothing . . . . .	7
3.5	STL metodologija . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Analiza vremenskih serija kretanja kursa dinara u odnosu na evro u periodu od 2003. do 2023. godine</b>	<b>9</b>
4.1	Primena STL dekompozicije nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro . . . . .	13
4.2	ARIMA model treniran nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro . . . . .	14
4.3	ARIMA sa podešenim hiperparametrima nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro . . . . .	15
4.4	ARIMA u RapidMiner-u . . . . .	17
4.5	SARIMA model treniran nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro . . . . .	17
4.6	GRU mreža nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro . . . . .	18
4.7	LSTM mreža nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro . . . . .	19
4.8	LOWESS nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Analiza vremenskih serija prosečnih temperatura u Beogradu u periodu od 1887. do 2017. godine</b>	<b>21</b>
5.1	Sređivanje podataka i vizualizacija . . . . .	21
5.2	Primena ARIMA algoritma na podatke o temperaturama . . . .	24
5.3	Primena SARIMA algoritma na podatke o temperaturama . . . .	26
5.4	Primena LOWESS algoritma na podatke o temperaturama . . . .	27
5.5	Primena LSTM algoritma na podatke o temperaturama . . . . .	29
5.6	Primena STL dekompozicije na podatke o temperaturama . . . .	29
5.7	Primena GRU mreže na podatke o temperaturama . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>32</b>
6.1	Kretanje kursa u odnosu na evro . . . . .	32
6.2	Prosečne temperature u Beogradu . . . . .	32



# 1 Uvod

Analiza vremenskih serija je statistička metoda koja se koristi za istraživanje i interpretaciju podataka koji se menjaju tokom vremena. Ova analiza se primenjuje na različitim oblastima, uključujući ekonomiju, finansije, meteorologiju, medicinu, telekomunikacije i mnogim drugim.

Glavni cilj analize vremenskih serija je razumevanje uzoraka, trendova, sezonskih varijacija, ciklusa i ostalih karakteristika koje se javljaju u podacima tokom vremena. Ovo razumevanje omogućava predviđanje budućih vrednosti, identifikaciju anomalija ili vanrednih događaja, kao i donošenje informisanih odluka. Analiza vremenskih serija obuhvata različite tehnike i metode, uključujući:

- Deskriptivnu statistiku: Pregled osnovnih statističkih karakteristika vremenskih serija kao što su srednja vrednost, medijana, standardna devijacija, maksimalna i minimalna vrednost.
- Vizualizaciju podataka: Grafičko prikazivanje vremenskih serija radi uočavanja uzoraka i trendova.
- Modelovanje trendova: Identifikacija dugoročnih trendova ili promena u vremenskim serijama korišćenjem metoda kao što su linearna regresija ili ekspanencijalno zaglađivanje.
- Detekciju sezonskih varijacija: Identifikacija periodičnih uzoraka ili sezonskih varijacija u podacima.
- Analizu ciklusa: Identifikacija dužih cikličnih varijacija u vremenskim serijama i analizu njihovog uticaja na promene tokom vremena.
- Predviđanje budućih vrednosti: Korišćenje modela i tehnika analize vremenskih serija za predviđanje budućih vrednosti podataka.

Više o analizi vremenskih serija možete pronaći na [1] .

## 2 Opis problema

U prvom delu ovog seminarskog rada fokusiraćemo se na analizu vremenskih serija kretanja kursa dinara u odnosu na evro u periodu od 2003. do 2023. godine, dok ćemo u drugom delu vršiti analizu vremenskih serija kretanja prosečnih temperatura u Beogradu u periodu od 1887. godine do 2017. godine.

Cilj našeg istraživanja je identifikacija ključnih trendova, sezonskih varijacija i ostalih karakteristika ovih vremenskih serija, kao i analiza faktora koji mogu uticati na ove promene.

Kurs dinara u odnosu na evro jedan je od ključnih ekonomskih pokazatelja za Srbiju, a njegovo kretanje može imati značajan uticaj na različite sektore ekonomije. S druge strane, prosečne temperature u Beogradu značajno utiču na različite aspekte života građana, od energetske potrošnje do poljoprivrede i turizma.

Nadamo se da će rezultati našeg istraživanja pružiti dublje razumevanje dinamike ovih fenomena i korisne uvide za donošenje odluka u različitim sektorima.

### 3 Algoritmi i metode

Rad sa vremenskim serijama obuhvata raznolike alate i metode. U ovom poglavlju, detaljno ćemo predstaviti i opisati neke od ključnih tehnika koje smo koristili u našem istraživanju.

#### 3.1 ARIMA model (AutoRegressive Integrated Moving Average)

ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) je statistički metod koji se često koristi za analizu vremenskih serija i predviđanje budućih vrednosti. Ovaj model kombinuje tri osnovne komponente:

- **AR (AutoRegressive) - p:** Ova komponenta uzima u obzir linearnu zavisnost između trenutnih vrednosti i prethodnih vrednosti u vremenskoj seriji. To znači da se trenutna vrednost može predvideti na osnovu prethodnih vrednosti.
- **I (Integrated) - d:** Ova komponenta se odnosi na proces diferenciranja vremenske serije kako bi se postigla stacionarnost. To znači da se uklanjaju trendovi ili sezonski efekti koji bi mogli uticati na analizu.
- **MA (Moving Average) - q:** Ovaj parametar označava red pokretnog proseka i predstavlja broj prethodnih izmena (reziduala) koji se koriste za modeliranje kratkoročnih varijacija u vremenskoj seriji.

Svrha svakog ovog parametra je da učini da model što bolje odgovara podacima. Jedna od prednosti ARIMA modela je upravo njegova sposobnost automatskog prilagođavanja različitim tipovima vremenskih serija, uzimajući u obzir njihove specifične karakteristike. Više o ARIMA modelu možete pogledati na [2] .

#### 3.2 SARIMA - Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average

SARIMA model je proširenje klasičnog ARIMA modela koje uzima u obzir sezonsku komponentu u vremenskim serijama. Ovaj model određen je parametrima  $p$ ,  $d$ ,  $q$  i  $m$ . Prvi čemu, prva tri parametra imaju isto značenje kao kod ARIMA modela, dok četvrti parametar  $m$  predstavlja broj vremenskih koraka koji čine jedan sezonski period u vremenskoj seriji.

Parametar  $m$  daje ključnu prednost SARIMA modelu jer može identifikovati sezonske obrasce i trendove u podacima, što može biti od velike koristi u analizi vremenskih serija.

### 3.3 Rekurentne neuronske mreže- RNN

Rekurentne neuronske mreže (RNN) su klase neuronskih mreža koje su posebno dizajnirane za obradu sekvencijalnih podataka. Osnovna karakteristika RNN-a je sposobnost zadržavanja informacija o prethodnim koracima obrade, omogućavajući im da modeliraju privremene zavisnosti u podacima. Svaki član sekvence se obrađuje koristeći istu težinsku matricu, koja se iterativno primenjuje na svaki korak u sekvenci. Međutim, klasične RNN mreže često pate od problema nestajućih i eksplodirajućih gradijenata, što ograničava njihovu sposobnost učenja dugoročnih zavisnosti. Kako bi se prevazišli ovi nedostaci razvijene su Long Short-Term Memory (LSTM) mreže i Gated Recurrent Unit (GRU) mreže. Ključna razlika između GRU i LSTM-a leži u broju izlaza i načinu na koji upravljaju informacijama unutar ćelija.

#### 3.3.1 LSTM Mreže - Long short-term memory

LSTM mreže su vrsta rekurentnih neuronskih mreža (RNN) koje su posebno dizajnirane da hvataju dugoročne zavisnosti u sekvencijalnim podacima. Ključna inovacija LSTM mreža je korišćenje memorijske ćelije koja omogućava mreži da održava informacije tokom dužih vremenskih perioda. Ova memorijska ćelija sadrži ulaznu kapiju, kapiju zaborava i izlaznu kapiju, koje omogućavaju mreži da selektivno ažurira svoju memoriju u skladu sa ulaznim podacima. LSTM mreže su posebno efikasne u analizi vremenskih serija zbog njihove sposobnosti hvatanja složenih i dugoročnih zavisnosti u podacima. One mogu identifikovati sezonske obrazce, trendove, cikluse i druge karakteristike vremenskih serija sa visokom tačnošću.

Pri treniranju LSTM modela, sledeći parametri igraju ključnu ulogu u postizanju optimalnih performansi i pravilnoj konvergenciji mreže.

- **Broj Neurona (Units):** Broj neurona u LSTM slojevima određuje kapacitet mreže za modeliranje složenih zavisnosti u podacima.
- **Broj Epoha (Epochs):** Broj epoha predstavlja broj prolaza kroz trening skup podataka tokom obuke mreže.
- **Velicina Grupisanja (Batch Size):** Velika grupisanja određuje broj uzoraka koji se koriste za ažuriranje težina mreže tokom jedne iteracije obuke.
- **Funkcija Gubitka (Loss Function):** Funkcija gubitka određuje način izračunavanja greške između stvarnih i predviđenih vrednosti tokom obuke mreže. Za regresione probleme, česta funkcija gubitka je srednje kvadratna greška (Mean Squared Error), dok se za klasifikacione probleme često koristi unakrsna entropija.

- **Optimizer (Optimizer):** Optimizator određuje algoritam koji se koristi za minimizaciju funkcije gubitka tokom obuke mreže. Adam, RM-Sprop i SGD (Stochastic Gradient Descent) su neki od često korišćenih optimizatora.

LSTM mreže se obučavaju kroz iterativni proces koji se naziva unazadno širenje (Backpropagation Through Time). Tokom obuke, mreža ažurira svoje težine kako bi minimizirala funkciju gubitka, koja meri razliku između stvarnih i predviđenih vrednosti. Ovaj proces se ponavlja kroz više epoha dok mreža ne postigne željeni nivo tačnosti na trening skupu podataka.

### 3.3.2 Gated Recurrent Unit (GRU) mreže

Gated Recurrent Unit (GRU) je još jedna varijanta rekurentnih neuronskih mreža (RNN) koja je dizajnirana za modeliranje sekvencijalnih podataka. Slično kao i LSTM, GRU mreže su posebno efikasne u hvatanju dugoročnih zavisnosti u podacima, na raspolaganju je isti skup parametara, ali imaju pojednostavljeniju arhitekturu.

Glavna razlika između GRU i LSTM-a je u strukturi ćelije. Dok LSTM ima tri kapije (kapija zaborava, kapija ulaza i kapija izlaza), GRU ima dve kapije: kapiju osvežavanja (update gate) i kapiju resetovanja (reset gate). Ove kapije omogućavaju GRU mreži da efikasno upravlja informacijama u ćeliji bez potrebe za posebnom kapijom zaborava.

GRU se često koristi u situacijama kada je potrebno brže treniranje i manja sklonost preprilagođavanju na manjim skupovima podataka.

GRU mreže se takođe obučavaju kroz iterativni proces unazadnog širenja (Backpropagation Through Time), slično kao i LSTM mreže, ažuriraju svoje težine kako bi minimizovale funkciju gubitka. Više o rekurentnim neuronskim mrežama možete pogledati na [3].

## 3.4 LOWESS - Local Regression Smoothing

Jedan od ključnih alata koji se koristi u analizi vremenskih serija je LOWESS, tehnika koja omogućava modeliranje i detekciju trendova, sezonalnosti i ostalih obrazaca u podacima.

LOWESS je metoda glatkog filtriranja koja je posebno korisna u situacijama kada tradicionalne parametarske metode ne uspevaju adekvatno modelirati kompleksne obrasce u vremenskim serijama. Ova metoda se zasniva na ideji lokalne regresije, gde se za svaku tačku u vremenskoj seriji izračunava lokalni regresioni model, koristeći samo podatke iz okoline te tačke. Time se omogućava fleksibilnije modeliranje i detekcija nepravilnosti u podacima.

Jedna od ključnih karakteristika LOWESS metode je parametar glatkosti (engl. smoothing parameter), koji određuje na kojoj udaljenosti će biti tačke



koje su uključene u lokalni regresioni model. Podešavanje ovog parametra igra ključnu ulogu u balansiranju između glatkog modeliranja trendova i očuvanja lokalnih promena u podacima.

Primena LOWESS metode u analizi vremenskih serija omogućava istraživačima da otkriju skrivene obrasce i trendove u podacima koji bi inače bili teško uočljivi.

### 3.5 STL metodologija

STL (Seasonal and Trend decomposition using Loess) je metodologija za dekompoziciju vremenskih serija na tri osnovne komponente:

- Trend (eng. trend)
- Sezonske varijacije (eng. seasonal)
- Ostatak (eng. residual)

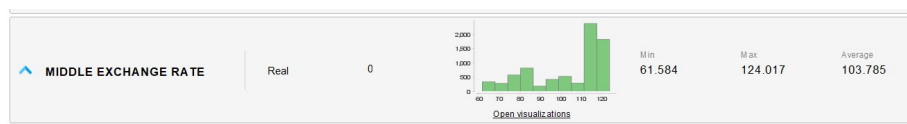
STL dekompozicija se zasniva na lokalno-težinskom glatkom (Loess) pristupu. Prvo se procenjuje trend koristeći lokalno težinsku regresiju, koja prilagođava model lokalnoj distribuciji podataka. Zatim se trend izdvaja iz originalnih podataka kako bi se identifikovale sezonske varijacije i ostatak.

Sezonske varijacije se procenjuju u svakoj tački vremenske serije i zatim se agregiraju kako bi se identifikovao periodični uzorak. Na kraju, preostali delovi signala koji nisu objašnjeni trendom ili sezonskim varijacijama čine ostatak. Više o STL metodologiji na [4].

## 4 Analiza vremenskih serija kretanja kursa dinara u odnosu na evro u periodu od 2003. do 2023. godine

Analiza kretanja kursa dinara u odnosu na evro predstavlja važan segment istraživanja u domenu ekonomije i finansija. Podaci korišćeni u ovom istraživanju preuzeti su sa zvaničnog sajta Narodne banke Srbije [5], vodeće finansijske institucije u zemlji.

Analizu kursa dinara u odnosu na evro vršili smo koristeći program RapidMiner kao i programski jezik Python i njegove biblioteke za analizu podataka, posebno Pandas, NumPy i Matplotlib. Nakon što smo prikupili, obradili i analizirali podatke, izvršili smo vizuelizaciju rezultata kako bismo dobili jasniji uvid u kretanje kursa dinara u odnosu na evro tokom posmatranog perioda.



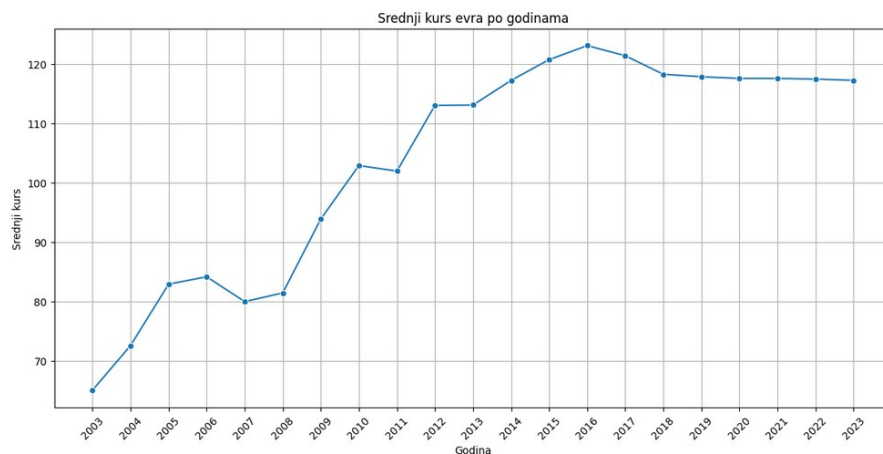
Slika 1: Minimalni, maksimalni i srednji kurs

Koristeći program RapidMiner izveli smo zaključak da je minimalna vrednost kursa dinara u odnosu na evro 61.594, maksimalna 124.017, dok je prosečna vrednost u posmatranom periodu iznosila 103.785 dinara za 1 evro.

Kada analiziramo kretanje kursa valute, nekoliko faktora može imati značajan uticaj na promenu valute:

- Makroekonomska situacija: Promene u ekonomskim pokazateljima kao što su stopa inflacije, stopa nezaposlenosti, bruto domaći proizvod (BDP) i spoljnotrgovinski bilans;
- Fiskalna politika: Mere koje preduzima vlada, poput promena u porezima, javnoj potrošnji ili državnom zaduživanju;
- Monetarna politika: Odluke centralne banke o kamatnim stopama, intervencijama na tržištu i upravljanju deviznim rezervama;
- Geopolitički događaji: Nestabilnost ili promene u političkoj situaciji, kako u zemlji tako i u svetu.

Uočavamo da je kurs dinara u odnosu na evro u prve dve godine razmatranog perioda naglo rastao. Sa 65.05 koliko je iznosio 2003. godine porastao je na 82.91, nakon čega se postiže relativna stabilnost. Međutim, kriza 2008. godine, koja je potresla svetsko finansijsko tržište, imala je značajan uticaj na valutne



Slika 2: Promena kursa evra po godinama

tokove. Nakon krize, beležimo nagli porast kursa dinara u odnosu na evro, što je rezultat ekonomskih turbulencija i nestabilnosti.

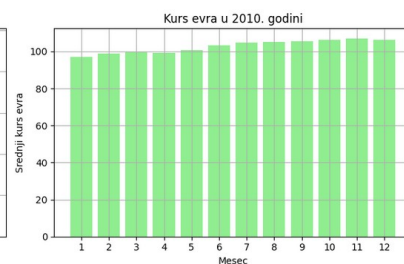
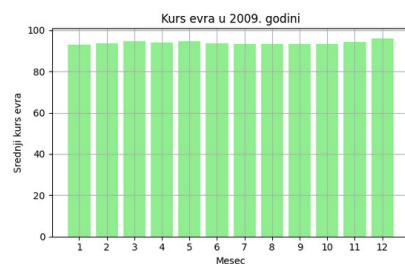
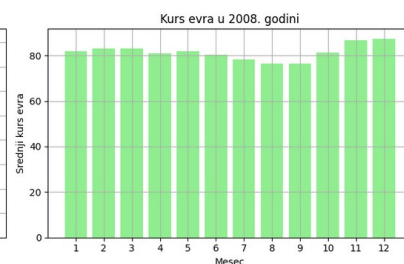
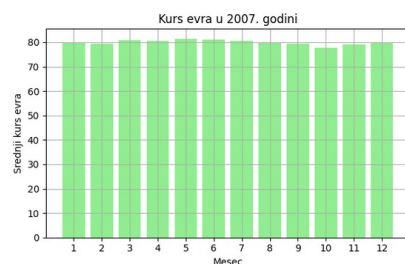
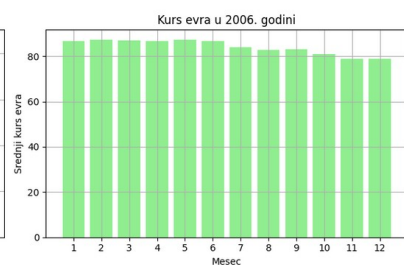
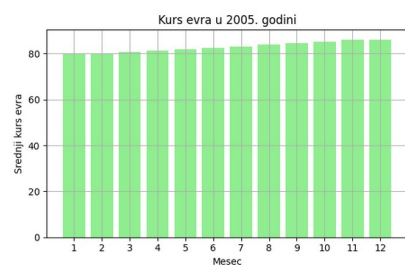
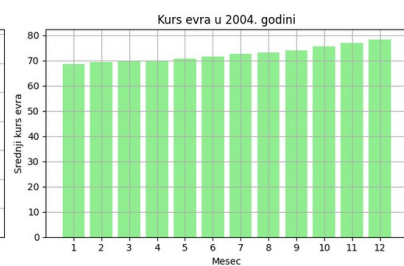
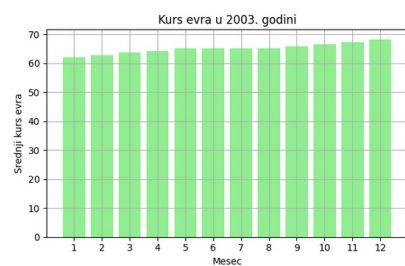
Od početka svetske krize septembra 2008. do kraja 2010. godine dinar je izgubio prema evru oko 30% svoje vrednosti. Na intervencije na deviznom tržištu Narodna banka Srbije je potrošila preko 2,3 milijarde evra. Slabljenje dinara uticalo je na određeni oporavak srpskog izvoza i platnobilansno usklađivanje. Više o ovome možete pročitati na [6].

Dodatno, pandemija COVID-19, koja je započela 2019. godine, donela je novi talas promena na valutnom tržištu. Zatvaranje granica, prekidi u lancima snabdevanja i pad ekonomske aktivnosti imali su negativan uticaj na dinar, čime je došlo do daljeg slabljenja kursa dinara u odnosu na evro. Država je ulagala velike napore da očuva stabilnost kursa.

Važno je istaći i period od 2016. do 2018. godine, kada je kurs dinara u odnosu na evro beležio opadanje. Ovaj trend možemo povezati sa različitim faktorima, uključujući ekonomske reforme, političke promene i promene u međunarodnim odnosima.

U celini, analiza kretanja kursa dinara u odnosu na evro ukazuje na kompleksnu interakciju između globalnih ekonomskih faktora, geopolitičkih događaja i domaćih dešavanja. Razumevanje ovih dinamika ključno je za pravilno donošenje ekonomsko-političkih odluka i upravljanje rizicima na finansijskom tržištu.

Pogledajmo i kako se vrednost dinara u odnosu na evro menjala svake godine na mesečnom nivou:





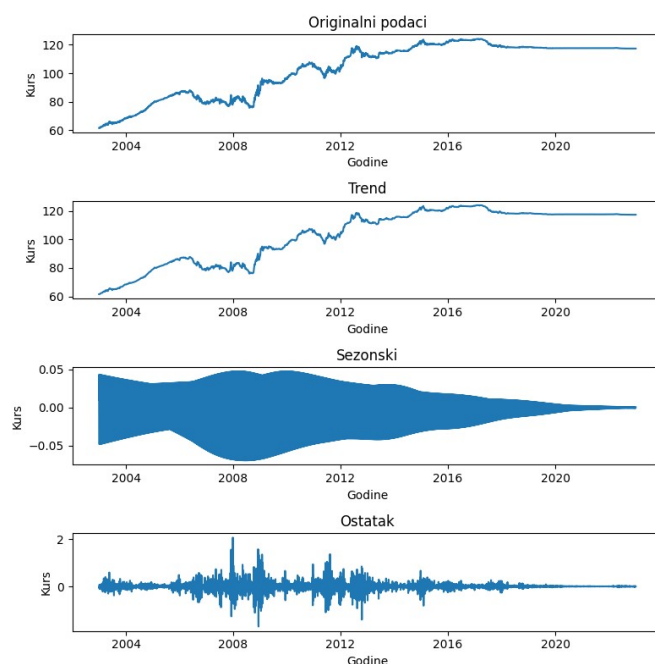
Slika 3: Kretanje kursa na mesečnom nivou

Kako je u periodu od 2018. do 2023. godine kurs dinara u odnosu na evro konstantan, grafici u tom periodu su identični priloženom grafiku iz 2018. godine.

Sa priloženih grafika možemo primetiti da ne postoji jasna sezonska pravilnost u kretanju kursa tokom različitih meseci tokom godine. Zbog toga smo odlučili da primenimo STL (Seasonal and Trend decomposition using Loess) metodologiju kako bismo detaljnije istražili i identifikovali eventualne sezonske obrasce u podacima.

## 4.1 Primena STL dekompozicije nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro

Prilikom treniranja STL modela, postavili smo dužinu sezonskog perioda na 365 dana. Odlučili smo se za ovu dužinu perioda jer odgovara godišnjem ciklusu i omogućava modelu da uhvati sezonske obrasce koji se ponavljaju svake godine. Ova konfiguracija nam je donela sledeći rezultat:



Slika 4: STL

Na osnovu dobijenih grafika iz STL analize, mogu se izvesti sledeći zaključci:

- Sličnost između originalnih podataka i trenda ukazuje na to da u podacima postoji malo sezonske ili trendovske komponente. Ovo može značiti da su podaci već relativno stabilni ili linearni.
- Sezonska komponenta je skoro simetrična oko nule i ima relativno male varijacije, što sugeriše da nema izraženog sezonskog obrasca u podacima ili da su sezonske varijacije relativno male ili slabo izražene.
- Simetričnost ostataka oko nule ukazuje na to da model nije uhvatio nikakve sistemske obrasce ili trendove u ostacima, što je pozitivan znak. To može značiti da je STL model uspešno uklonio sezonske i trendovske komponente, ostavljajući samo slučajnu varijaciju ili šum. Ovo je važno za ver-

ifikaciju ispravnosti primenjenog modela i ukazuje na to da su preostali ostaci stohastični i nepristrasni.

Na osnovu analize, možemo zaključiti da podaci nemaju jak sezonski obrazac i da su već relativno stabilni ili linearni.

## 4.2 ARIMA model treniran nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro

Da bismo istrenirali ARIMA model, prvo smo podelili naše podatke na test i trening skup. Odlučili smo se za podelu u razmeri 80:20, što znači da smo 20% podataka koristili za testiranje modela, dok smo preostalih 80% koristili za treniranje modela. Razlog za ovakav odabir leži u želji da se obezbedi dovoljno podataka za treniranje modela, kako bi model bio sposoban da nauči karakteristike vremenske serije i pravilno ih modelira. Sa druge strane, koristimo testni skup kako bismo evaluirali performanse modela na neviđenim podacima i proverili njegovu sposobnost generalizacije.

Kada koristimo ARIMA modele, možemo koristiti AIC kao kriterijum za odabir optimalnih vrednosti parametara modela. Kriterijum informacione akcije (AIC) je mera koja se koristi u statistici kako bi se procenio relativni kvalitet statističkog modela, uzimajući u obzir složenost i preciznost modela. Ideja je da model koji dobro balansira između visoke preciznosti i niske složenosti ima manju vrednost AIC-a. AIC se često koristi u kontekstu selekcije modela, gde se upoređuju različiti modeli kako bi se odabrao onaj koji najbolje odgovara podacima.

Nakon izvršene pretrage korak po korak kako bismo minimizovali kriterijum informacione akcije (AIC), pronašli smo najbolji ARIMA model za predviđanje kursa dinara u odnosu na evro. Rezultati pretrage su sledeći:

Model	Parametri	AIC	Vreme
ARIMA(2,1,2)	(2,1,2)(0,0,0)[0] intercept	-168.547	4.54 sec
ARIMA(0,1,0)	(0,1,0)(0,0,0)[0] intercept	234.765	0.54 sec
ARIMA(1,1,0)	(1,1,0)(0,0,0)[0] intercept	-124.910	0.85 sec
ARIMA(0,1,1)	(0,1,1)(0,0,0)[0] intercept	-158.968	0.59 sec
ARIMA(0,1,0)	(0,1,0)(0,0,0)[0]	241.175	0.20 sec
ARIMA(1,1,2)	(1,1,2)(0,0,0)[0] intercept	-170.844	2.37 sec
ARIMA(0,1,2)	(0,1,2)(0,0,0)[0] intercept	-159.586	0.73 sec
ARIMA(1,1,1)	(1,1,1)(0,0,0)[0] intercept	-160.494	1.12 sec
ARIMA(1,1,3)	(1,1,3)(0,0,0)[0] intercept	-168.933	3.47 sec
ARIMA(0,1,3)	(0,1,3)(0,0,0)[0] intercept	-164.339	0.87 sec
ARIMA(2,1,1)	(2,1,1)(0,0,0)[0] intercept	-164.074	1.63 sec
ARIMA(2,1,3)	(2,1,3)(0,0,0)[0] intercept	-166.887	4.41 sec
ARIMA(1,1,2)	(1,1,2)(0,0,0)[0]	-164.843	0.76 sec

Najbolji model koji je pronađen je ARIMA(1,1,2), koji je imao najniži AIC od -168.547. Ukupno vreme potrebno za treniranje svih modela iznosilo je 22.072 sekunde.

Nakon treniranja modela ARIMA na podacima o promeni kursa dinara u odnosu na evro, izvršena je evaluacija modela kako bi se procenila njegova tačnost i efikasnost u predviđanju budućih vrednosti kursa. Korišćene su sledeće metrike evaluacije:

- Mean Squared Error (MSE): Prosečna vrednost kvadrata razlike između stvarnih i predviđenih vrednosti. Dobijena vrednost MSE iznosila je 67.93.
- Mean Absolute Error (MAE): Prosečna apsolutna vrednost razlike između stvarnih i predviđenih vrednosti. Dobijena vrednost MAE iznosila je 7.12.

Na osnovu rezultata evaluacije možemo zaključiti da model ARIMA daje velike greške. Kako bismo unapredili performanse modela, podesićemo hiperparametre modela, kao što su redovi diferencijacije ( $p$ ,  $d$ ,  $q$ ). Cilj je optimizovati ove parametre kako bismo postigli tačnije i pouzdanije prognoze u budućnosti.

### 4.3 ARIMA sa podešenim hiperparametrima nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na vero

Proces podešavanja hiperparametara ARIMA modela obuhvata automatsko pretraživanje različitih kombinacija parametara kako bi se pronašla ona koja daje najbolje rezultate u predviđanju vrednosti kursa dinara u odnosu na evro. Za ovu svrhu koristili smo funkciju `auto_arima` iz biblioteke `pmdarima` u programskom jeziku Python.

Parametri koji su podešavani u ovom procesu uključuju:

- **start\_p=1 i start\_q=1**: Početne vrednosti parametara  $p$  i  $q$  postavljene su na 1, što označava početne pretpostavke o autoregresivnoj i pokretnoj prosečnoj komponenti modela.
- **max\_p=3 i max\_q=3**: Maksimalne vrednosti parametara  $p$  i  $q$  ograničene su na 3 kako bismo izbegli prekomernu kompleksnost modela i preteranu računsku složenost.
- **m=12**: Parametar  $m$  označava broj vremenskih koraka u jednoj sezoni. Postavili smo  $m$  na 12, što odgovara broju meseci u jednoj godini.
- **start\_P=0 i seasonal=True**: Početna vrednost sezonskog parametra  $P$  postavljena je na 0, a sezonska komponenta je uključena u model.
- **d=1 i D=1**: Parametri  $d$  i  $D$  predstavljaju redove razlika za nesezonsku i sezonsku komponentu vremenske serije. Postavili smo ih na 1 kako bismo primenili prvu razliku i eliminisali trend i sezonske efekte.



- **trace=True**: Ovaj parametar omogućava ispisivanje detalja postupka pretrage kako bismo bolje razumeli proces.
- **error\_action='ignore' i suppress\_warnings=True**: Ovi parametri služe za ignorisanje eventualnih grešaka ili upozorenja koje generiše model.
- **stepwise=True**: Postavljanjem ovog parametra na True, omogućili smo automatsko određivanje najboljeg modela ARIMA koristeći algoritam step-wise.

Funkcija `auto_arima` vrši pretragu kroz različite kombinacije ovih parametara koristeći kriterijum informacione akcije (AIC) kako bi odabrala model sa najmanjom vrednošću AIC.

Nakon automatske pretrage i podešavanja hiperparametara, ARIMA model je prilagođen sa sledećim parametrima:

`ARIMA(2,1,1)(2,1,0)[12]`

Ovaj model je zatim evaluiran koristeći testni skup podataka. Dobijeni rezultati evaluacije su:

- Mean Squared Error (MSE): 2.71
- Mean Absolute Error (MAE): 1.39

Da bismo utvrdili da li su podešeni hiperparametri unapredili performanse modela, upoređujemo ih sa modelom ARIMA koji nije imao podešene hiperparametre. Poređenjem rezultata evaluacije modela ARIMA sa i bez podešavanja hiperparametara, primećujemo značajno poboljšanje performansi modela nakon podešavanja. Na primer, MSE je smanjen sa 67.93 na 2.71, što ukazuje na veliko smanjenje greške u predikcijama, dok je MAE je smanjen sa 7.12 na 1.39. Ovi rezultati jasno pokazuju korist od podešavanja hiperparametara u ARIMA modelu za predviđanje kursa dinara u odnosu na evro.

## 4.4 ARIMA u RapidMiner-u

Nakon učitavanja podataka i odabira relevantnih atributa istreniran je ARIMA model u alatu RapidMiner. Treniranje ARIMA modela u RapidMiner-u dalo je sledeće rezultate:

```
Forecast Model trained on the following time series:
Name of time series: MIDDLE EXCHANGE RATE          Number of values: 7670

Resulting Forecast Model:
Arima Model (p: 1,d: 0, q: 1)
AR Coefficients: [0.999579718051108]
MA Coefficients: [0.25323861593479446]
constant: 103.78462195567144, length of residuals: 1
```

Slika 5: Arima u RapidMiner-u za kretanje kursa

Kao što vidimo najbolji model je ARIMA(1, 0, 1). AR koeficijent iznosi 0.99 što znači da postoji snažna pozitivna korelacija između trenutne vrednosti i prethodne vrednosti vremenske serije. MA koeficijent ima vrednost od 0.25 što znači da postoje neki uticaji prethodnih grešaka, ali oni nisu toliko značajni kao autoregresivni uticaji. Konstanta 103.78 predstavlja srednju vrednost ka kojoj vremenska serija konvergira. Dužina reziduala je razlika između stvarnih vrednosti i predviđenih vrednosti modela. Dužina reziduala 1 ukazuje na to da je dostupna veoma mala količina rezidualnih podataka, što može ukazivati na dobru prilagođenost modela podacima.

## 4.5 SARIMA model treniran nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro

Prvo smo korišćenjem automatske selekcije modela (auto\_arima funkcija) odabrali optimalne parametre. Dobijeni optimalni parametri su:

$$(P,D,Q,s) = (2,1,0,12)$$

SARIMA model je treniran na trening skupu koristeći optimalne parametre. Nakon evaluacije modela dobijeni su sledeći rezultati:

Mean Squared Error (MSE): 2.7098  
Mean Absolute Error (MAE): 1.3942

Na osnovu ovoga možemo izvesti zaključak da je SARIMA model podjednako precizan kao i ARIMA model sa podešenim hiperparametrima.

## 4.6 GRU mreža nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro

Normalizacija podataka pomaže u tome da ulazni podaci budu u sličnom opsegu, što može poboljšati performanse modela i ubrzati proces konvergencije tokom obuke. Neuronske mreže poput GRU obično zahtevaju ulazne podatke koji su skalirani na određeni opseg. Zbog toga smo najpre podatke skalirali na opseg od 0 do 1.

Nastavili smo pripremu podataka za obuku neuronske mreže definisanjem funkcije koja transformiše vremensku seriju u uzorke i ciljeve. Sledeći korak bio je izbor odgovarajućih parametara za GRU model. Parametri kao što su broj vremenskih koraka (time steps= 30), veličina serije (batch size=64) i broj epoha (epochs=100) su pažljivo odabrani kako bismo postigli optimalne performanse modela. Takođe smo eksperimentisali sa različitim vrednostima ovih parametara kako bismo pronašli najbolju konfiguraciju za naš problem. Podatke smo podelili na test i trening skup u razmeri 20:80.

Model smo definisali koristeći Sequential model iz TensorFlow biblioteke. U našem modelu, dodali smo jedan sloj GRU neuronske mreže sa 50 jedinica (neurona). Za kompilaciju modela koristili smo Adam optimizator i srednje kvadratnu gresku (mse).

Nakon završetka treninga, model je evaluiran na test skupu podataka kako bismo procenili njegove performanse. Gubitak modela na testiranju korišćen je kao glavna metrika za procenu kvaliteta modela. Male vrednosti grešaka, MAE = 0.0017 i MSE = 1.43 ukazuju na to da je model dobro generalizovao i da je uspešno naučio zakonitosti u podacima.

Model u narednom periodu predviđa sledeće kretanje kursa dinara:

117.5808	96.74774	118.377266
65.22695	93.12359	117.967354
106.06819	113.79178	78.70222
87.588104	120.6537	117.56823
117.550995	120.50632	117.93369
118.054825	117.42316	86.7988
113.65062	77.69711	94.76528
117.17541	123.27148	117.40353
71.484276	81.66505	80.82337
122.86855	117.58306	65.360855

Table 1: Kretanje kursa predviđeno GRU mrežom

#### 4.7 LSTM mreža nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro

Postupak pripreme podataka i odabir parametara za treniranje LSTM mreže su isti kao za treniranje GRU mreže. Model u narednom periodu predviđa sledeće vrednosti kursa dinara u odnosu na evro:

117.69721	97.01296	118.379135
65.14468	93.27349	118.08447
106.1674	113.910965	78.78515
87.625305	120.832245	117.68933
117.667175	120.65601	118.045
118.165886	117.54235	86.76111
113.68252	77.58454	94.770706
117.29291	123.38518	117.50257
71.494896	81.65068	80.82784
122.9822	117.70015	65.34538

Table 2: Kretanje kursa predviđeno LSTM mrežom

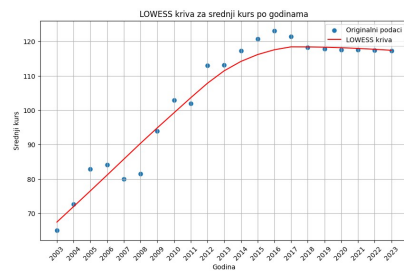
Uočava se velika sličnost između predviđanja LSTM mreže i GRU mreže, gde su u prvih nekoliko godina predviđene identične vrednosti.

Nakon evaluacije modela dobijene su sledeće vrednosti gresaka:  $MAE = 0.0028$  i  $MSE = 2.14$ .

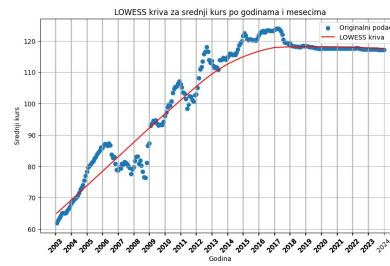
#### 4.8 LOWEES nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro

Najpre smo izdvojili godine iz datuma, grupisali podatke po godinama i izračunali prosečnu vrednost kursa za svaku godinu. Zatim smo izdvojili mesece iz datuma, odradili grupisanje po godinama i mesecima i izračunali srednju vrednost kursa za svaki mesec u svakoj godini.

Primenom LOWESS metode nad podacima grupisanim po godinama dobijen je grafik sa slike dole levo, dok je primena LOWESS metode nad podacima grupisanim po mesecima i godinama dala rezultat koji možemo videti dole desno.



(a) Lowess nad podacima grupisanim po godinama



(b) Lowess nad podacima grupisanim po mesecima i godinama

Kao što možemo videti, dobijene su glatke interpolacije koje jasno prikazuje opšti trend kretanja vrednosti kursa dinara u odnosu na evro kroz godine. U oba slučaja  $MAE = 3.05$ , doke je  $MSE = 17.35$ .

## 5 Analiza vremenskih serija prosečnih temperatura u Beogradu u periodu od 1887. do 2017. godine

Analiza vremenskih serija prosečnih temperatura u Beogradu u periodu od 1887. do 2017. godine predstavlja važan korak u razumevanju klimatskih promena na lokalnom nivou. Kroz ovu analizu, istražujemo dugoročne trendove i varijacije u temperaturi koje su karakteristične za prestonicu Srbije.

Uvid u prosečne temperature tokom različitih perioda godine pruža dragocene informacije koje mogu koristiti meteorolozi, arhitekti, poljoprivrednici i raznim drugim stručnjacima, pružajući im osnovu za prilagođavanje infrastrukture i usluga u skladu sa promenama temperature.

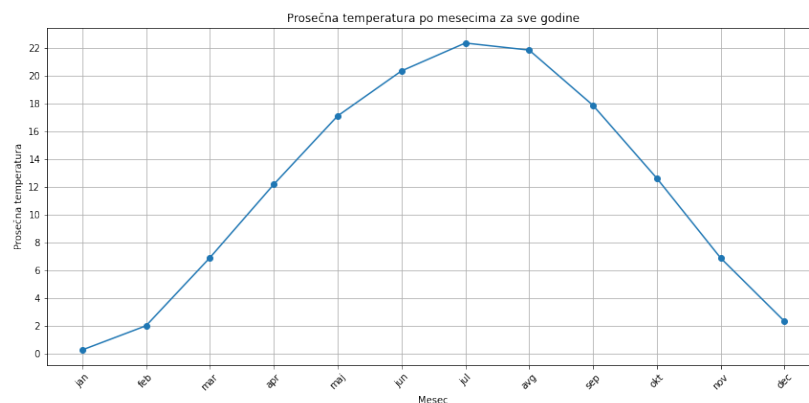
Podaci korišćeni u ovoj analizi obuhvataju prosečne temperature za svaki mesec u godini, godišnju prosečnu temperaturu, prosečne temperature tokom proleća, leta, jeseni i zime, kao i razlike između minimalnih i maksimalnih temperatura tokom celog kalendarskog perioda, kao i razlike između temperatura letnjih i zimskih meseci. Ovi podaci predstavljaju temelj za dublju analizu klimatskih karakteristika u Beogradu.

### 5.1 Sređivanje podataka i vizualizacija

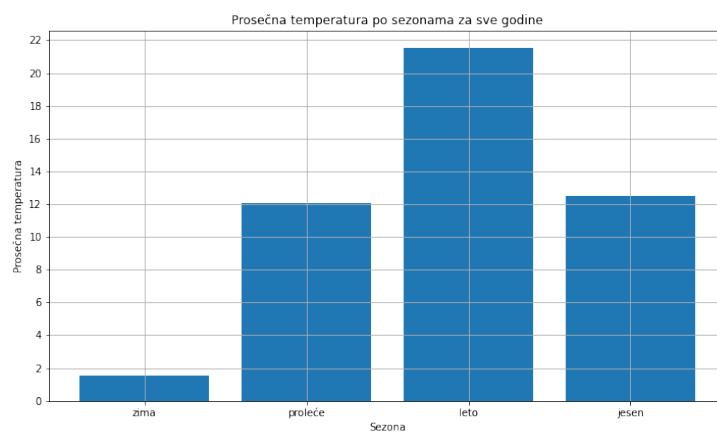
Nakon učitavanja podataka u programskom jeziku Python, pristupili smo sređivanju istih. Prvi korak bio je rešavanje problema nepoznatih vrednosti, koje su se pojavile u prvoj i poslednjoj vrsti podataka.

U poslednjoj vrsti nepoznata vrednost (NaN), odnosila se na godinu i bilo je moguće jednostavno zaključiti koja godina nedostaje, s obzirom na to da su godine date redom i nedostajala je tačno jedna vrednost. Međutim, u prvoj vrsti, nedostajuće vrednosti su se pojavile u više kolona. Kako imamo podatke za period od 130 godina, nedostajuće vrednosti (NaN) su popunjene prosečnim vrednostima koje su izračunate na osnovu preostalih 129 godina.

Nakon sređivanja podataka, pristupili smo vizualizaciji koristeći biblioteku `matplotlib` u Jupyter Notebook okruženju. Ovaj korak omogućio je grafički prikaz podataka radi lakšeg razumevanja i interpretacije trendova i varijacija u prosečnim temperaturama tokom vremena.

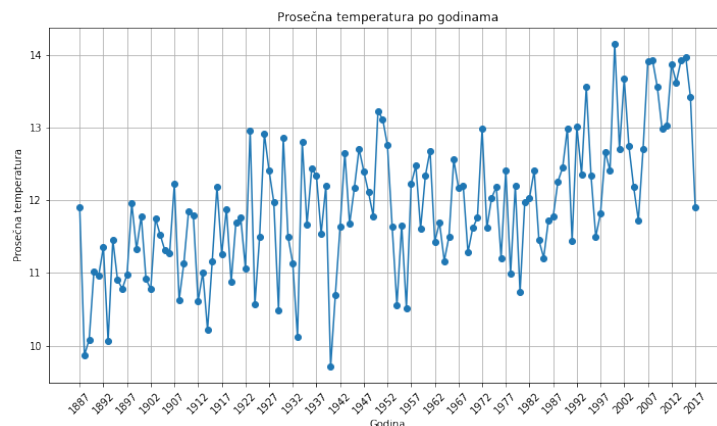


Slika 7: Prosečna temperatura po mesecima



Slika 8: Prosečna temperatura po sezonama

Na teritoriji cele Srbije, klima je umereno kontinentalna. Leto je obično tolo, a najtopliji meseci su jul i avgust, sa prosečnim temperaturama koje se kreću od 20°C do 25°C. Zima je hladna, sa prosečnim temperaturama koje se kreću od 0°C do 5°C, ali mogu biti i niže tokom hladnih talasa. Najhladniji mesec je uglavnom januar.



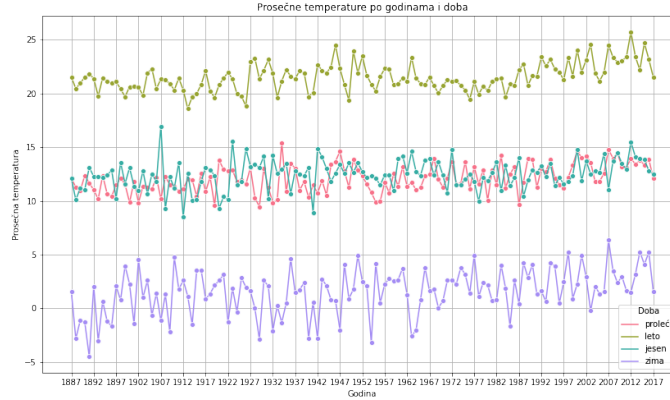
Slika 9: Prosečna temperatura po godinama

Na osnovu grafika možemo primetiti da se prosečna godišnja temperatura u Beogradu kretala između  $9^{\circ}\text{C}$  i  $15^{\circ}\text{C}$ . Ovi podaci ukazuju na promenljive i ponekad nepredvidive vremenske uslove, što je karakteristično za umereno kontinentalnu klimu ovog područja. Takođe, tokom analiziranog perioda od 130 godina, ljudske aktivnosti su se značajno menjale, uključujući industrijsku revoluciju, povećanje emisija gasova sa efektom staklene bašte i druge faktore koji mogu doprineti globalnom zagrevanju i promenama klime. Nešto više o prirodnim faktorima koji utiču na promenu klime u Beogradu i na teritoriji cele Srbije možete pronaći na [7].

Važno je napomenuti da je u 20. veku Beograd bio središte nekoliko ratnih sukoba i konflikata, koji su ostavili posledice na čitav ekosistem u Srbiji. Sa grafikona vidimo da je 2000. godine prosečna temperatura bila najviša, što može biti posledica NATO bombardovanja Beograda 1999. godine. Više o ekološkim posledicama NATO bombardovanja na [8].

Razdoblje Prvog i Drugog svetskog rata takođe ima značajan uticaj na klimatske uslove Beograda, kao i na globalnu klimu uopšte. Na grafikonu koji prikazuje prosečne temperature u Beogradu, možemo primetiti naglu promenu temperatura sredinom 20. veka. Ovaj fenomen može biti rezultat povećanog zagađenja vazduha nastalog tokom ratnih aktivnosti, uključujući vazdušne napade, eksplozije i paljenje.





Slika 10: Prosečna temperatura po godišnjim dobima za sve godine

Na osnovu grafika iznad, možemo zaključiti da prosečne temperature tokom zimskih meseci u 21. veku retko padaju ispod  $0^{\circ}\text{C}$ , dok su u prethodnim vekovima temperature često dosežale do  $-5^{\circ}\text{C}$ . To može biti posledica velike urbanizacije koja je krenula posle 2000. godine. Takođe, emitovanje toplote iz fabrika i vozila, kojih je sve više, doprinosi zagrevanju urbanih sredina i sprečava da temperature padnu ispod nule.

## 5.2 Primena ARIMA algoritma na podatke o temperaturama

Nakon što smo izvršili adekvantnu pripremu podataka, primenili smo ARIMA metodu nad podacima o prosečnoj godišnjoj, letnjoj i zimskoj temperaturi. Korišćenjem automatske selekcije modela (`auto_arma`), identifikovani su najbolji parametri modela, nakon čega je ocenjen dobijeni model koristeći srednje-kvadratnu i srednje-apsolutnu grešku.

Dobijeni su sledeći rezultati:

Period	Najbolji model	Srednja kvadratna greška	Srednja apsolutna greška
Leto	ARIMA(3,1,0)(2,1,0)[4]	1.300	2.399
Zima	ARIMA(3,1,0)(2,1,0)[4]	2.798	10.703
Godišnje	ARIMA(3,1,1)(1,1,1)[12]	1.342	0.973

Table 3: ARIMA model i dobijeni rezultati u python-u

Na osnovu analize rezultata dobijenih ARIMA modelima i prikazanih grešaka u tabeli, možemo zaključiti da su greške modela varirale u zavisnosti od perioda, pri čemu su greške za godišnje vrednosti bile manje u poređenju sa ostalim periodima. Ovo sugeriše da su ARIMA modeli efikasniji u predviđanju dužih

vremenskih intervala nego kratkoročnih.

ARIMA metodu smo primenili i u alatu RapidMiner, nakon učitavanja obrađenih podataka i odabira relevantnih atributa. Dobijeni su sledeći rezultati:

```
Forecast Model trained on the following time series:
Name of time series: prosek      Number of values: 131

Resulting Forecast Model:
Arima Model (p: 1,d: 0, q: 1)
AR Coefficients: [0.8837593018736724]
MA Coefficients: [-0.5966193236652028]
constant: 11.925661073041478, length of residuals: 1
```

Slika 11: ARIMA model - PROSEK

```
Forecast Model trained on the following time series:
Name of time series: leto      Number of values: 131

Resulting Forecast Model:
Arima Model (p: 1,d: 0, q: 1)
AR Coefficients: [0.976779709463997]
MA Coefficients: [-0.8037279338477811]
constant: 22.102077033582013, length of residuals: 1
```

Slika 12: ARIMA model - LETO

```
Forecast Model trained on the following time series:
Name of time series: zima      Number of values: 131

Resulting Forecast Model:
Arima Model (p: 1,d: 0, q: 1)
AR Coefficients: [0.999900307932656]
MA Coefficients: [-0.9586177024673954]
constant: 159.67175385590514, length of residuals: 1
```

Slika 13: ARIMA model - ZIMA

U svim analiziranim periodima predviđen je identični Arima model (p:1, d:0, q:1), koji je dao slične rezultate.

- Koeficijent AR (autoregresije) blizu 1 ukazuje na visoku korelaciju prethodnih vrednosti vremenske serije sa sadašnjom vrednošću. To implicira prisustvo snažnog autokorelacijskog efekta u podacima.

- Negativan koeficijent MA (pokretnog proseka) ukazuje na delimičnu zavisnost sadašnje vrednosti vremenske serije od negativnih vrednosti šuma.
- Dužina reziduala ima vrednost 1, na osnovu čega možemo pretpostaviti da se dobijeni model dobro prilagodio našim podacima.

### 5.3 Primena SARIMA algoritma na podatke o temperaturama

Nakon pripreme podataka, uključujući konverziju vremenskog indeksa u tip datuma i podelu podataka na trening i test skup, primenjeno je automatsko određivanje parametara (auto\_arima) modela SARIMA kako bi se dobili optimalni parametri za predikciju prosečnih godišnjih temperatura. Parametar  $m$  je postavljen na 12, jer ima 12 meseci u jednoj godini, pa se sezonski period ponavlja svake godine.

Nakon treniranja modela na trening skupu, izvršena je predikcija na test skupu i izračunate su srednja kvadratna greška (MSE) i srednja apsolutna greška (MAE) kako bismo procenili tačnost modela. Rezultati su pokazali da je srednja kvadratna greška iznosila 1.6036, a srednja apsolutna greška iznosila 1.0704. Predviđene temperature i intervali poverenja, koji pružaju informaciju o rasponu unutar kojeg se očekuje da će se stvarna vrednost posmatranog atributa nalaziti, date su u narednoj koloni.

Godina	Predviđena temperatura	Interval pouzdanosti
1991	11.96794	(10.518226, 13.417654)
1992	11.96794	(10.512711, 13.423170)
1993	11.96794	(10.507217, 13.428664)
1994	11.96794	(10.501743, 13.434138)
1995	11.96794	(10.496289, 13.439591)

Table 4: Predviđene vrednosti i intervali pouzdanosti za prosečne godišnje temperature

Nakon primene SARIMA metode na prosečnu godišnju temperaturu, isti postupak primenjen je i na prosečne temperature u toku leta i zime, pri čemu smo menjali sezonski parametar  $m$  kako bismo dobili najmanju grešku, odnosno model koji najbolje predviđa.

$m$	MSE za leto	MSE za zimu
4	408.269	3.152
6	4.354	3.235
12	4.325	3.235

Table 5: MSE vrednosti za različite sezone i različite vrednosti parametra  $m$

Analizom MSE vrednosti za različite vrednosti parametra  $m$ , zaključujemo o uticaju sezonalnosti i optimalnom izboru parametra  $m$  za svako godišnje doba. Nakon što smo odabrali parametar  $m$ , u slučaju leta 12, a u slučaju zime 4, dobili smo naredno predviđanje:

Godina	Predviđena zimska temperatura	Interval pouzdanosti
1991	2.036	(lower zima: -2.030, upper zima: 6.102)
1992	2.050	(lower zima: -2.017, upper zima: 6.117)
1993	2.259	(lower zima: -1.885, upper zima: 6.404)
1994	1.941	(lower zima: -2.218, upper zima: 6.100)
1995	2.238	(lower zima: -1.923, upper zima: 6.398)

Table 6: Predviđene vrednosti i intervali pouzdanosti za zimsku temperaturu

Godina	Predviđena letnja temperatura	Interval pouzdanosti
1991	21.382	(lower leto: 19.395, upper leto: 23.370)
1992	21.273	(lower leto: 19.145, upper leto: 23.402)
1993	21.189	(lower leto: 19.053, upper leto: 23.327)
1994	21.095	(lower leto: 18.948, upper leto: 23.242)
1995	21.108	(lower leto: 18.952, upper leto: 23.265)

Table 7: Predviđene vrednosti i intervali pouzdanosti za letnju temperaturu

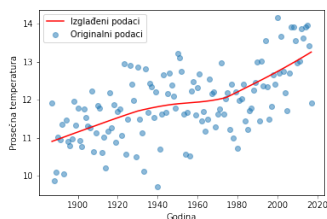
Ovi rezultati sugerišu da je model SARIMA relativno precizan u predviđanju prosečnih temperatura na osnovu dostupnih podataka, ali da kao i ARIMA, bolje rezultate daje na godišnjem nivou.

## 5.4 Primena LOWESS algoritma na podatke o temperaturama

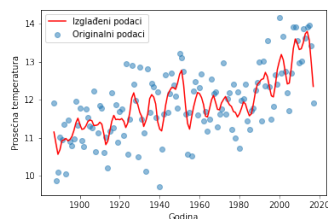
Primenom LOWESS algoritma na naše podatke o temperaturama postigli smo glatku regresionu krivu koja predstavlja trendove u temperaturama tokom vremena. Ovaj algoritam omogućava lokalno prilagođavanje regresione krive na manjim podskupovima podataka, koristeći težinske najmanje kvadratne metode kako bi se dobili optimalni rezultati.

Ključni parametri koji su podešavani u ovom algoritmu su:

- **frac:** Ovaj parametar predstavlja faktor glatkosti, odnosno koliko će se daleko u prošlost gledati pri izračunavanju lokalnog trenda. Veći faktor glatkosti znači da će se uzimati u obzir podaci iz šireg okruženja, dok manji faktor znači da će se uzimati u obzir samo podaci iz bliže okoline trenutne tačke.
- **it:** Ovaj parametar predstavlja broj iteracija koje će LOWESS algoritam izvršiti kako bi konvergirao ka glatkom trendu.



(a) Prikaz bez podešenih parametara



(b) Prikaz sa podešenim parametrima

Slika 14: Dekompozicija za leto i zimu

Na slici (a) možemo videti rezultate bez podešavanja parametara, dok je na slici (b) prikazan rezultat sa podešenim parametrima. Izgladene krive na slici jasno prikazuju trendove u temperaturama tokom vremena, pri čemu je primetno da su krive sa podešenim parametrima bolje prilagođene podacima.

U tabeli 8 prikazane su srednje kvadratne i srednje apsolutne greške za različite periode bez podešenih parametara algoritma LOWESS. Možemo primetiti da su greške varirale u zavisnosti od godišnjeg doba, pri čemu su temperature zimi imale najveće greške, dok su temperature tokom godine imale najmanje greške.

Period	Srednja kvadratna greška	Srednja apsolutna greška
Leto	1.177	0.866
Zima	3.835	1.579
Godišnje	0.517	0.579

Table 8: Srednje kvadratne i srednje apsolutne greške za različite periode bez podešenih parametara

Nakon definisanja vrednosti za parametre (frac: [0.05,0.1,0.15, 0.2,0.25, 0.3], it: [2, 3,4,5]) i korišćenja ParameterGrid-a za generisanje svih mogućih kombinacija parametara, primenjen je LOWESS algoritam na podatke za svaku kombinaciju. Najbolja kombinacija dala je sledeće rezultate:

Period	Srednja kvadratna greška	Srednja apsolutna greška
Leto	0.595	0.662
Zima	1.295	2.673
Godišnje	0.562	0.497

Table 9: Srednje kvadratne i srednje apsolutne greške za različite periode sa podešenim parametrima

## 5.5 Primena LSTM algoritma na podatke o temperaturama

Podaci nad kojima je primenjen LSTM model su prethodno normalizovani kako bi se osigurala konzistentnost i ubrzao proces učenja, a zatim podeljeni na trening i test skupove radi evaluacije performansi modela.

Nakon definisanja parametara kao što su veličina paketa (batch\_size: [8, 16, 32, 64]), broj epoha (epochs: [25, 50, 75, 100]) i broj jedinica (units: [16, 32, 64, 128]) u LSTM slojevima, koristili smo GridSearchCV objekat iz biblioteke sklearn.model\_selection za istraživanje kombinacija ovih parametara.

Koristeći najbolje dobijene parametre za predviđenje vrednosti na testnom skupu podataka i za evaluiranje performanse modela, dobijeni su sledeći rezultati:

Period	Srednja kvadratna greška	Srednja apsolutna greška
Leto	2.603	1.248
Zima	4.489	1.645
Godišnje	1.221	0.988

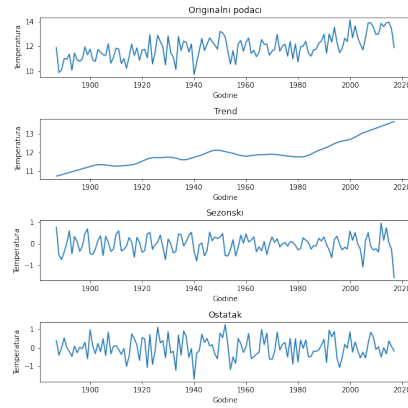
Table 10: Srednje kvadratne i srednje apsolutne greške za različite periode sa podešenim parametrima

Analizom ovih rezultata možemo zaključiti da su performanse LSTM modela varirale u zavisnosti od perioda. Primećujemo da su srednja kvadratna i srednja apsolutna greška najveće za zimski period, što verovatno potiče od veće varijabilnosti temperature tokom zime.

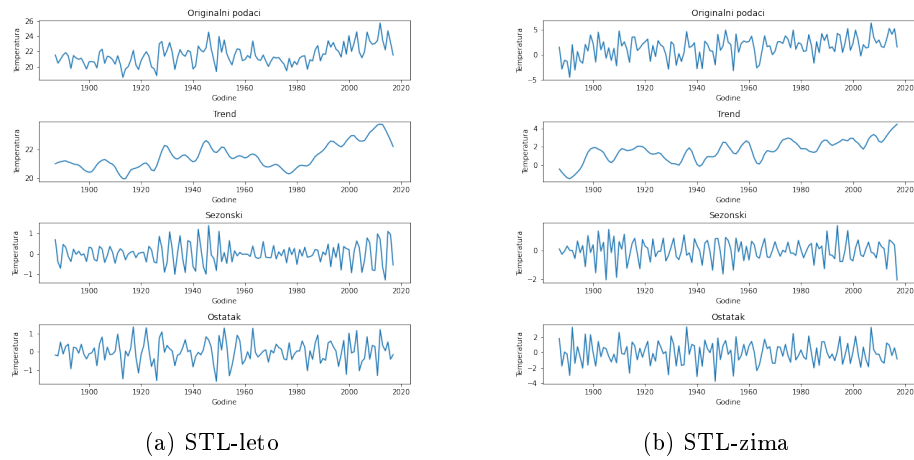
## 5.6 Primena STL dekompozicije na podatke o temperaturama

Prilikom treniranja STL modela, dužinu sezonskog perioda (m) smo postavili na 12 kada smo radili sa prosečnom godišnjom temperaturom, dok smo je postavili na 4 kada smo radili sa godišnjim dobima. Ovo odgovara godišnjem i četvorome-sečnom ciklusu i omogućava modelu da uhvati sezonske obrasce koji se ponavljaju.

Treniranje modela nam je dalo sledeće rezultate:



Slika 15: Dekompozicija za prosek



Slika 16: Dekompozicija za leto i zimu

Na osnovu dobijenih grafika mogu se izvesti sledeći zaključci:

- Trend za prosečne godišnje temperature pokazuje relativno glatku krivu sa blagim rastom, posebno nakon 1990. godine. Međutim, važno je napomenuti da linija trenda nije u potpunosti slična originalnoj krivi koja prikazuje stvarne podatke. Ovo ukazuje na prisustvo određenih nepravilnosti u podacima koje nisu u potpunosti obuhvaćene trendom. Sa druge strane, trendovi za letnje i zimske sezone nisu tako glatki kao kod prosečnih temperatura, već pokazuju prisustvo oscilacija, ali više liče na originalnu krivu koja prikazuje stvarne podatke.
- Na osnovu sezonske komponente možemo zaključiti da su prosečne godišnje temperature relativno stabilne, dok su zimske temperature podložnije

većim varijacijama. Takođe, nagle oscilacije u letnjim temperaturama u periodu oko 1940. godine i posle 2000. godine, ukazuju na značajne promene u klimatskim uslovima tokom analiziranog perioda.

- Opseg variranja ostataka kod letnjih i prosečnih godišnjih vrednosti sugerise da postoji relativno stabilan nivo promene u temperaturi tokom leta i prosečnih godišnjih temperatura. Ovo može ukazivati na postojanje različitih faktora ili obrazaca koji utiču na temperaturu tokom ovih perioda, dok širi opseg variranja ostataka tokom zimskih meseci sugerise na veće nestabilnost u temperaturi tokom ovog godišnjeg doba.

## 5.7 Primena GRU mreže na podatke o temperaturama

Nakon odabira odgovarajućih vrednosti parametara, trenirali smo model GRU neuronske mreže radi predviđanja temperature za različite sezone. Korišćeni podaci obuhvatali su vremenske serije temperatura za letnje, zimske i godišnje vrednosti, a srednja kvadratna greška (MSE) i srednja apsolutna greška (MAE) korišćene su kao mere performansi modela.

Dobijene predviđene vrednosti temperature su date u narednoj tabeli:

Letnja temperatura	Godišnja temperatura	Zimska temperatura
21.153	11.567	1.006
22.577	11.713	2.074
20.791	11.784	1.824
21.947	11.235	1.148
20.817	12.410	1.484
21.882	13.015	1.653
22.373	11.928	1.719
21.323	11.850	1.597
21.305	12.240	0.752
21.109	12.381	1.709

Table 11: Predviđene prosečne temperature

Analiziranjem ovih vrednosti, možemo zaključiti da dobijena predviđanja imaju smisla i da pretpostavimo da ćemo dobiti male vrednosti grešaka, koje su predstavljene u tabeli ispod.

Period	Srednja kvadratna greška	Srednja apsolutna greška
Leto	0.021	0.106
Zima	0.042	0.161
Godišnje	0.016	0.096

Table 12: GRU



## 6 Zaključak

### 6.1 Kretanje kursa u odnosu na evro

Kada pogledamo greške za svaki model koji smo trenirali nad podacima za kretanje kursa dinara u odnosu na evro, primećujemo da su GRU i LSTM mreže postigle najmanje greške, posebno u poređenju sa ARIMA modelom bez podešenih parametara i LOWESS modelom. Ovo ukazuje na to da su GRU i LSTM mreže bolje prilagođene našim podacima i daju tačnije prognoze.

Model	MSE	MAE
ARIMA	67.93	7.12
LOWESS	17.35	3.05
ARIMA (podešeni parametri)	2.71	1.39
SARIMA	2.7098	1.3942
GRU mreža	1.43	0.0017
LSTM mreža	2.14	0.0028

Table 13: Poređenje performansi različitih modela

Dakle, na osnovu dobijenih rezultata, možemo zaključiti da je GRU mreža najbolji model za podatke o kretanju kursa dinara u odnosu na evro.

### 6.2 Prosečne temperature u Beogradu

Kombinovana analiza performansi različitih algoritama za predviđanje prosečnih godišnjih, letnjih i zimskih temperatura pruža dublji uvid u adekvatnost i pouzdanost modela u različitim klimatskim kontekstima.

Iz dobijenih rezultata može se zaključiti da na globalnom nivou, GRU mreža i LOWESS model, pokazuju dosledno visoku efikasnost u predviđanju temperatura. Ovi nalazi naglašavaju važnost primene naprednih tehnika, poput neuronskih mreža, u analizi i predviđanju klimatskih promena. Suprotno tome, SARIMA model pokazuje znatno lošije performanse, što implicira da linearna kombinacija sezonske i autoregresivne komponente nije adekvatna za modeliranje ovog specifičnog fenomena.

U narednim tabelama prikazane su srednja kvadratna i srednja apsolutna greška primenjenih metoda nad našim podacima, na osnovu kojih smo doneli prethodne zaključke.

<b>Model</b>	<b>MSE</b>	<b>MAE</b>
ARIMA (podešeni parametri)	1.342	0.977
SARIMA	1.603	1.071
GRU mreža	0.016	0.096
LSTM mreža	1.221	0.988
LOWESS	0.562	0.497

Table 14: Poređenje performansi različitih modela za prosečne godišnje temperature

<b>Model</b>	<b>MSE</b>	<b>MAE</b>
ARIMA (podešeni parametri)	1.300	2.399
SARIMA	4.354	1.726
GRU mreža	0.021	0.106
LSTM mreža	2.603	1.248
LOWESS	0.595	0.662

Table 15: Poređenje performansi različitih modela za prosečne letnje temperature

<b>Model</b>	<b>MSE</b>	<b>MAE</b>
ARIMA (podešeni parametri)	1.798	10.703
SARIMA	3.152	1.411
GRU mreža	0.042	0.161
LSTM mreža	4.489	1.645
LOWESS	1.295	2.673

Table 16: Poređenje performansi različitih modela za prosečne zimske temperature

## 7 Literatura

- [1] Peter J. Brockwell, Richard A. Davis: *Introduction to Time Series and Forecasting, Second Edition*
- [2] Robert H. Shumway, David S. Stoffer: *Time Series Analysis and Its Applications*
- [3] Junyoung Chung, Caglar Gulcehre, Kyunghyun Cho, i Yoshua Bengio: *Empirical Evaluation of Gated Recurrent Neural Networks on Sequence Modeling*
- [4] Robert B. Cleveland, Williams S. Cleveland, Jean E. McRae, Irma Terpenning: *A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess*
- [5] *Zvanični sajt Narodne banke Srbije*
- [6] dr Dejan Jovović: *Dinar i režim deviznog kursa*
- [7] Boško Milovanović: *Natural causes of climate variability in Serbia*
- [8] Saša T. Bakrač, Emilija Klem, Miško Milanović: *Ekološke posledice NATO bombardovanja Republike Srbije 1999. godine*