Reminder:

- N parties $U_1, \dots, U_n$
- Secret $x \in \{0,1\}^\ell$

Basic:

- $i<n$: U_i receives $x_i \leftarrow \{0,1\}^\ell$
- $i=n$: U_n receives $x_n \oplus x$, $x_i \leftarrow \{0,1\}^\ell$
- reconstruct via $\bigoplus_{i \in [n]} x_i = s$

Shamir:

- k points determine a unique polynomial P of degree (at most) $k-1$
- choose distinct x_i, and y_j at random
- set P s.t. $x = P(0)$ and for all i: $P(x_i) = y_j$ (with Lagrange Interpolation)
- for subset $S \subseteq [n]$ of size k:

$$P(x) = \sum_{j \in S} y_j \underbrace{L_{S,j}(x)}_{\substack{1 \text{ if } x = x_j, \\ 0 \text{ otherwise}}}$$

- evaluate $P(0)$ to obtain x:

$$P(0) = \sum_{j \in S} y_j \underbrace{L_{S,j}(0)}_{\substack{=: \lambda_{S,j}, \text{ can be} \\ \text{computed via} \\ \text{the set } (x_i)_{i \in S}}} = \sum_{j \in S} y_j \lambda_{S,j} = x$$

Ex 1:

For all $S \in \mathcal{A}$,

- secret share x independently via $x_1^{(S)}, \dots, x_{|S|}^{(S)}$

Better:

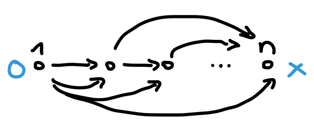
- let $I_1, \dots, I_k$ be the minimal sets to decide membership in $\mathcal{A}$
- secret share x for all $i \in [k]$ separately: $x_1^{(i)}, \dots, x_{|I_i|}^{(i)}$

let $S \subset [n]$:

- if $S \in \mathcal{A}$: $\exists I_i \subseteq S$ and $x = \bigoplus_{j=1}^{|I_i|} x_j^{(i)}$
- if $S \notin \mathcal{A}$: all values look uniformly and independently random

Ex2:

- $G = (V, E)$



- give node 1 (resp. n) the label $\ell_1 = 0$ ($\ell_n = x$)
- all other nodes receive random label
- edge (i,j) has share $\ell_{i,j} = \ell_i \oplus \ell_j$
- for some edges $S \subseteq E$:
  - if path $P \subseteq S$ from 1 to n in S:

$$x = \bigoplus_{(i,j) \in P} \ell_{i,j}$$

  - else: distribution of labels is independent of x (see pdf below)

Exercise 3:

1. - $pk = g^x$, $sk = x$

hash function

- $\mathrm{Sign}(sk, m)$: set $r = g^k$, $c = H(pk, r, m)$, $s = k - cx \bmod q$

output $\sigma = (r, c, s)$ (c is optional)

- $\mathrm{Verify}(pk, m, \sigma)$: check $r = g^s pk^c$ and $c = H(pk, r, m)$

2. choose $c, s \leftarrow \mathbb{Z}_p$ at random

set $r = g^s pk^c$

transcript: (r, c, s)

3. language: $\{y_0, y_1 : y_0 = g^x$ or $y_1 = g^x\}$

witness: $x \in \mathbb{Z}_p$ s.t. $y_0 = g^x$ or $y_1 = g^x$

Alice x | Bob y_0, y_1

$\left.\begin{array}{l} k_0 \leftarrow \mathbb{Z}_p \\ r_0 \leftarrow g^{r_0} \end{array}\right\}(*)$ $\xrightarrow{r_0,\, r_1}$

(*) normal Schnorr

(+) simulated Schnorr

$\left.\begin{array}{l} c_1, s_1 \leftarrow \mathbb{Z}_p \\ r_1 = g^{s_1} y_1^{c_1} \end{array}\right\}(+)$

$c_0 = c_1 \oplus c$ $\xleftarrow{c}$ $c \leftarrow \mathbb{Z}_p$

$s_0 = k_0 - c_0 \cdot x$ $\}(*)$ $\xrightarrow{s_0,\, s_1,\, c_0}$ check $r_b = g^{s_b} y_b^{c_b}$ for $b \in \{0,1\}$, $c_1 = c \oplus c_0$

if $x = \mathrm{Dlog}_g(h_1)$, then simulate (r_0, c_0, s_0) instead

4. correct: easy to check

zero-knowledge: simulate (*) and (+) at the same time

soundness: given two transcripts with challenges $c \neq d$:

- $\tau_1 = (r_0, r_1, c, s_1, s_2, c_0)$
- $\tau_2 = (u_0, u_1, d, t_1, t_2, d_0)$
- have (i) $c_0 \neq d_0$ or (ii) $c \oplus c_0 \neq d \oplus d_0$
- (i): can extract $\mathrm{dlog}(h_0)$ as in Schnorr
- (ii): ——— $\mathrm{dlog}(h_1)$ ———

5. - let y_0 be verification key of signer with known x_0: $y_0 = g^{x_0}$
- follow above protocol with $c = H(pk_1, pk_2, r_1, r_2, m)$
- hides whether x_0 or x_1 was used bc. the underlying scheme is zero-knowledge
- verifier with y_1 knows that x_0 was used for signature generation (because only signer knows x_1)
- but verifier could've signed via x_1 himself $\rightarrow$ not transferable

École normale supérieure **2022-2023**
Département d'informatique

Introduction à la cryptologie
TD n° 3 :Correction.

Exercice 1 (Partage de secret pour toute structure d'accès)**.** On rappelle le protocole de partage de secret (n, n) où n utilisateurs partagent un secret, et ce secret ne peut être retrouvé que si les k utilisateurs collaborent ensemble. Pour cela, considérons un secret $S \in \{0,1\}^\lambda$. On tire de manière uniformément aléatoire $(S_1, \ldots, S_n) \in (\{0,1\}^\lambda)^n$ conditionné à : $\sum S_i = S$. Ici la somme est sur $\mathbb{F}_2^\lambda$: c'est un XOR. De manière équivalente, on tire uniformément aléatoirement $S_1, \ldots, S_{n-1}$ et on fixe $S_n = S - \sum_{i<n} S_i$: cette distribution est identique à la précédente. On voit que les n utilisateurs peuvent retrouver S en calculant la somme de leurs parts. Par contre, pour un sous-ensemble strict des n utilisateurs, la distribution des valeurs qu'il connaissent est uniformément aléatoire et indépendante ; en particulier ell est indépendante de S.
Nous arrivons à la question de l'exercice. Soient $I_1, \ldots, I_m$ les éléments minimaux pour l'inclusion dans $\mathcal{A}$. L'idée est simplement de réaliser, pour chaque I_k, une instance indépendante du protocole ci-dessus. Si un ensemble $A \subseteq [\![1, n]\!]$ d'utilisateurs est dans $\mathcal{A}$, il existe $I_k \subseteq A$ et les utilisateurs dans I_k peuvent calculer le secret grâce à l'instance correspondante. Par contre, pour $A \notin \mathcal{A}$, la distribution des valeurs connues par les utilisateurs de A, dans toute les instances, est un ensemble de valeurs indépendantes et uniformément aléatoires, en particulier indépendantes de S.

Exercice 2 (Graphes et partage de secret)**.** Soit $S \in \{0,1\}^n$ le secret. On associe un label dans $\{0,1\}^n$ à chaque sommet de G de la manière suivante. Le sommet 1 a le label $\ell_1 = 0$. Le sommet n a le label $\ell_n = S$. Pour $1 < i < n$, le sommet i a un label ℓ_i tiré uniformément aléatoirement et de manière indépendante dans $\{0,1\}^n$. On associe ensuite à l'arête (i, j) la valeur $a_{i,j} = \ell_i \oplus \ell_j$. L'utilisateur associé à l'arête (i, j) reçoit cette valeur.
On identifie les utilisateurs avec les arêtes du graphe. Si un ensemble A d'utilisateurs contient un chemin du sommet 1 au sommet n, il suffit de calculer la somme des $a_{i,j}$ le long de ce chemin pour trouver S. Réciproquement, si un ensemble d'utilisateurs A ne contient pas de tel chemin, alors considérons le graphe dont les arêtes sont dans A. Dans ce graphe, les sommets 1 et n sont dans des composantes connexes distinctes (sinon il existerait un chemin). Soit C la composante connexe contenant n. Prenons une valeur δ arbitraire dans $\{0,1\}^n$. Définissons la fonction f_δ sur les labels des sommets telle que $f_\delta((\ell_i)_{i\leq n}) = (\ell'_i)_{i\leq n}$ avec :

$$\ell'_i = \begin{cases} \ell_i \oplus \delta \text{ si } i \in C \\ \ell_i \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction translate donc les labels des sommets par δ sur C, et laisse les autres labels inchanges. On remarque que cette fonction conserve les valeurs $a_{i,j}$, quel que soit le choix de δ. Par contre elle correspond au secret $S' = S \oplus \delta$ et non plus S. Le point crucial est les suivant : f_δ est une bijection entre l'ensemble des labels ℓ_i correspondant au secret S et compatibles avec les valeurs $a_{i,j}$ connues des utilisateurs de A, et l'ensemble des ℓ'_i correspondant au secret S' et compatibles avec les (mêmes) valeurs $a_{i,j}$ connues des utilisateurs de A. Comme toutes les distributions sont uniformes, il s'ensuit que la probabilité que le secret soit S ou soit S' conditionné à la connaissance des utilisateurs de A est la même. Les secrets S et S' ont donc la même probabilité, pour n'importe quel S' ($\delta = S' \oplus S$ étant arbitraire) : les utilisateurs de A n'apprennent donc rien sur la valeur de S.

Exercice 3 (Partage de secret pour signature à verificateur designé)**.** voir solution au-dessus.

Exercice 4 (Problème de la demande en mariage)**.** Une manière de faire est la suivante.

1. Alice et Bob génèrent une clef ElGamal partagée suivant le protocole vu en cours, puis chiffrent le message « mariage ! » avec la clef publique, pour obtenir un chiffré c_0.
2. Si Alice veut se marier, elle re-randomise le chiffré c_0 en un c_1 (on rappelle qu'ElGamal permet de rerandomiser le chiffré d'un message m, sans modifier le message et sans connaître la clef : il suffit de multiplier le composant de gauche du chiffré par g^s, et le composant de droite par y^s, où y est la clef publique et s est quelconque). Si elle ne veut pas se marier, elle remplace les deux composants du chiffré par des valeurs aléatoires uniformes.
3. Bob fait de même en partant de c_1 pour obtenir le chiffré c_2.
4. Alice et Bob déchiffrent de manière conjointe le chiffré c_2 suivant le protocole vu en cours. S'ils obtiennt le message « mariage ! », c'est que les deux souhaitent se marier.

Exercice 5 (Sécurité du protocole de signature de Groth)**.**

1. On demande les chiffrées des messages $m = 0$ et $m = 1$. On obtient r_1, r_2, r'_1, r'_2 tels que :
$$y_1^{r_1} y_2^{r_2} = y_3 \qquad g y_1^{r'_1} y_2^{r'_2} = y_3$$
On peut alors forger une signature pour un message quelconque m, en effet on a :
$$y_1^{(m-1)r_1} y_2^{(m-1)r_2} = y_3^{m-1}$$
$$g^m y_1^{mr'_1} y_2^{mr'_2} = y_3^m$$
donc en combinant :
$$g^m y_1^{mr'_1-(m-1)r_1} y_2^{mr'_2-(m-1)r_2} = y_3.$$
La signature $(mr'_1 - (m-1)r_1, mr'_2 - (m-1)r_2)$ est donc valide pour le message m.
2. L'équation (1) de l'énoncé implique qu'une signature (r_1, r_2) ne peut être valide que pour un unique message m (le log discret de $y_3 y_1^{-r_1} y_2^{-r_2}$ en base g).
3. (a) Les variables y_1, y_2, y_3 sont indépendantes (chacune est uniformément aléatoire), seule y_3 dépend de c_s donc nous pouvons limiter notre attention à y_3. Il suffit de remarquer que la distribution de y_3 conditionnée à $c_s = c$, pour tout c fixé, reste uniformément aléatoire à cause du choix uniforme de b_s, en particulier elle ne dépend pas de c.

   (b) On vérifie que la signature $(b_s - m - a_s, c_s)$ est valide. D'autre part on a vu que c_s est uniformément aléatoire même conditionné à la clef publique, et $r_1 = b_s - m - a_s$ est l'unique exposant donnant une signature correcte pour $r_2 = c_s$. C'est donc la même distribution qu'une signature véritable : en effet le même relation existe entre r_1 et r_2 dans une signature générée en suivant le protocole (le protocole tel qu'il est écrit tire r_1 uniformément et déduit r_2, mais on voit que les rôles de r_1 et r_2 sont complètement symétriques et qu'on peut faire l'inverse).

   (c) Supposons que $\mathcal{A}$ produit une contrefaçon sur un message $m^* \neq m$. Il produit donc r_1^*, r_2^* tels que :
$$g^{m^*} y_1^{r_1^*} y_2^{r_2^*} = y_3$$
$$g^{m^*} g^{a_s r_1^*} h^{r_2^*} = g^{b_s} h^{c_s}$$
$$g^{(m^*+a_s r_1^* - b_s)(c_s - r_2^*)^{-1}} = h.$$
L'inversion $(c_s - r_2^*)^{-1}$ est valide parce qu'on a supposé $r_2^* \neq r_2 = c_s$.

4. Comme déjà remarqué plus haut, les rôles de r_1 et r_2 sont complètement symétriques dans ce protocole, donc on peut réécrire le même raisonnement en échangeant les rôles de y_1 (et ses exposants) et y_2 (et ses exposants).
5. Soit $\mathcal{B}$ l'algorithme qui tire $b \leftarrow \{0,1\}$ uniformément aléatoirement et qui exécute $\mathcal{B}_b$ (qui fait lui-même appel à $\mathcal{A}$). On a vu que la distribution de la clef publique, et de la signature du message demandé par $\mathcal{A}$ sont identiques à celle des clefs publiques et signatures légitimes (en particulier elles sont identiques pour les deux choix de b). L'algorithme $\mathcal{A}$ produit donc une signature forgée (r_1^*, r_2^*) pour un message m^* avec probabilité ϵ, après avoir éventuellement demandé la signature (r_1, r_2) d'un message choisi m. Nous avons vu que $(r_1^*, r_2^*) \neq (r_1, r_2)$, donc $r_1 \neq r_1^*$ ou $r_2 \neq r_2^*$, donc avec probabilité au moins 50% l'hypothèse de l'algorithme $\mathcal{B}_b$ est satisfaite. Avec probabilité au moins $\epsilon/2$ on retrouve donc le logarithme discret de h en base g.