1. LAS ONDAS SENOIDALES

Existen en Física –y concretamente en Electrotecnia– muchas magnitudes que varían unas respecto a otras; la representación gráfica de esta variación en un sistema de ejes coordenados da lugar a una línea –recta o curva– que pone de manifiesto la relación existente entre ambas magnitudes.

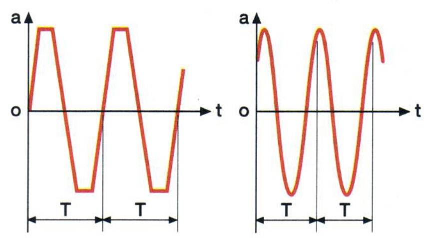
Cuando el valor **a** de una magnitud varía con el tiempo, para indicar tanto la función $a = f(t)$ como su representación gráfica, se suele utilizar el término **forma de onda,** que sirve para poner de relieve la manera en que dicha magnitud varía a lo largo del tiempo. No obstante, en lo sucesivo, simplificaremos el término, y nos referiremos a él simplemente con la palabra **onda.**

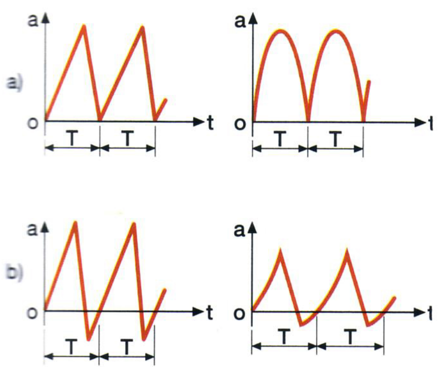
Dejando aparte las que representan variaciones transitorias, las formas de onda que ofrecen mayor interés en Electrotecnia son las llamadas **periódicas,** es decir, aquéllas que se refieren a magnitudes cuyos valores se repiten a intervalos iguales de tiempo, y siempre en el mismo orden. Precisando un poco más, diremos que si para todo valor de t se verifica:

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = f(t+3T) = \ldots$$

la función $a = f(t)$ es periódica de **período T.**

Ondas alternas puras.



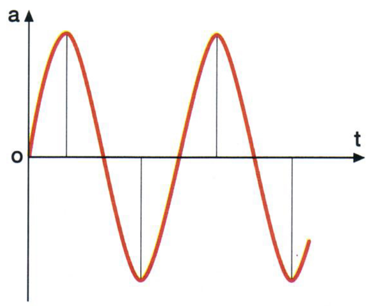


Ondas periódicas:
a) pulsantes; b) alternas.

Las ondas periódicas pueden ser de dos clases diferentes:

- **Pulsantes,** si la magnitud representada no cambia de sentido.
- **Alternas,** si dicha magnitud cambia de sentido dentro del intervalo correspondiente a cada período.

Entre las ondas alternas resultan de especial importancia, puesto que representan a muchos fenómenos eléctricos, aquéllas en las que la alternancia de la magnitud a la que se refieren es la misma en el sentido positivo y en el negativo. En estos casos se dice que la onda es **alterna pura.**



Onda senoidal.

Por último, aquellas ondas alternas puras que representan a una magnitud cuya variación viene dada por una función trigonométrica del tiempo (seno, coseno...) reciben el nombre de **ondas (alternas) senoidales.**

Dada la relación existente entre el seno y el coseno de un ángulo, las ondas senoidales se expresarán de la forma:

$$a = a_m \cdot \text{sen}\ kt$$

siendo a_m el valor máximo de la magnitud a, que corresponde al instante de tiempo en que $\text{sen}\ kt = 1$. Suele designarse con el nombre de **amplitud.** En las ondas senoidales, por lo general, $k = \omega$ (pulsación) $= \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$. Por lo tanto, su ecuación será:

$$a = a_m \cdot \text{sen}\ \omega t$$

2. ELEMENTOS Y PARÁMETROS DE UNA ONDA PERIÓDICA

En toda onda periódica se pueden distinguir los siguientes elementos y parámetros:

- **Período,** T. Es el tiempo que invierte la onda en realizar un ciclo. Su unidad es el segundo (s).

- **Frecuencia,** f. Es el número de ciclos que tienen lugar en la unidad de tiempo. Su unidad es el ciclo por segundo o s^{-1}, también llamada hercio (Hz):

$$1\ c/s = 1\ s^{-1} = 1\ Hz$$

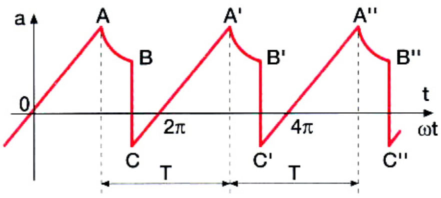
Múltiplos: 1 kilohercio (kHz) $= 10^3$ Hz
1 megahercio (MHz) $= 10^6$ Hz

El período (T) y la frecuencia (f) son inversos. En efecto: si en T segundos la onda avanza 1 ciclo, en 1 segundo efectuará f ciclos.

de donde: $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ o también: $\boxed{T = \frac{1}{f}}$

- **Fase** de una onda en un instante determinado es la fracción de período que ha transcurrido desde el instante correspondiente al valor o estado que se tome como referencia.

  Cada punto de un ciclo de una onda periódica define un estado o fase de la misma y cada fase se repite a intervalos de un período. Por ejemplo, los puntos A y A', o los B y B', C y C', etc. de la onda de la figura tienen la misma fase, y se dice de ellos que **están en fase.**



- **Valores de cresta, A_C.** Son los valores máximo (A_{C+}) y mínimo (A_{C-}) de la onda a lo largo de un ciclo. En la onda de la figura, los valores de cresta están representados por los puntos A y C.

- **Valor medio, A_m.** Es la media algebraica de todos los valores que puede adquirir la onda en un ciclo. Su valor viene dado matemáticamente por la expresión:

$$A_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}[f(t)]dt$$

siendo t un instante cualquiera de tiempo y t + T el instante que corresponde a un período más tarde.

- **Valor eficaz, A.** Es la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la función en un período:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[f(t)]^2dt}$$

- **Factor de forma.** Es la relación $\frac{A}{A_m}$ entre los valores eficaz y medio de la onda.

2.1. Caso particular de una onda senoidal

Para estas ondas:

- **Valor de cresta.** Coincide con el **valor máximo** de la onda, es decir:

$$A_C = a_m$$

Se le conoce también con el nombre de **amplitud.**

- **Valor medio.** En un período, el valor medio es cero, ya que cada valor de la onda tiene su correspondiente opuesto. Sin embargo, en las funciones senoidales se considera el valor medio en un semiciclo (que corresponde a un semiperíodo). De esta manera:

$$A_m = \frac{a_m}{T/2}\int_0^{T/2} \text{sen}\,\omega t\, dt = \frac{2\,a_m}{T}\int_0^{T/2} \text{sen}\,\omega t\, dt = \frac{2\,a_m}{T}\left[-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot a_m = 0{,}6366\; a_m$$

Geométricamente, el valor medio equivale a la altura de un rectángulo que tenga la misma base y la misma superficie que la semionda correspondiente.

- **Valor eficaz.** Aplicando la expresión:

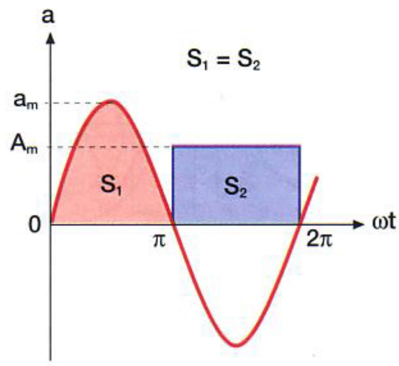
$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[f(t)]^2 dt}$$

resulta:

$$A^2 = \frac{a_m^2}{T}\int_0^T \text{sen}^2\omega t\, dt = \frac{a_m^2}{T}\left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}\,2\omega t}{4\,\omega}\right]_0^T = \frac{a_m^2}{2}$$

Por lo tanto: $A = \dfrac{a_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\; a_m$.

- **Factor de forma.** Su valor es: $\dfrac{A}{A_m} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$



Interpretación geométrica del valor medio de una onda.

Recuerda

Como $\text{sen}^2\,\omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$, resulta:

$$\int \text{sen}^2\omega t\; dt = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\omega t)\cdot dt = \frac{t}{2} - \frac{\text{sen}\,2\,\omega t}{4\omega}$$

Ejemplos

1. En la función senoidal: $a = 80\cdot\text{sen}\,100\,t$, hallar:
   a) Frecuencia y período.
   b) Valor de cresta (amplitud).
   c) Valor medio.
   d) Valor eficaz.
   e) Factor de forma.

   Solución:

   a) Como $\omega = 100$ rad/s ; $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{100 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = \dfrac{50}{\pi}$ Hz $= 15{,}9$ Hz;

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{50}\text{ s} = 0{,}063\text{ s}$$

   b) Amplitud: $a_m = 80$

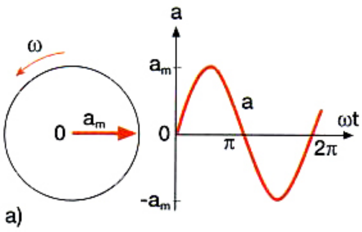
   c) Valor medio: $A_m = \dfrac{2}{\pi}\cdot a_m = \dfrac{2}{\pi}\cdot 80 = 50{,}93$

   d) Valor eficaz: $A = \dfrac{a_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{80}{\sqrt{2}} = 56{,}57$

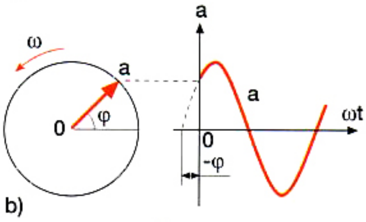
   e) Factor de forma: $\dfrac{A}{A_m} = \dfrac{56{,}57}{50{,}93} = 1{,}11$

Fíjate

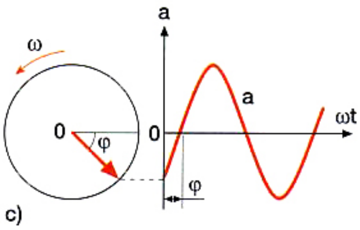
En la ecuación de una onda senoidal: $a = a_m\cdot\text{sen}\,\omega t$, como ω se expresa en el Sistema Internacional en rad/s, y el tiempo en segundos, el valor de ωt vendrá dado en radianes. Ten cuidado, por ello, cuando utilices la calculadora, para obtener el valor del seno de ωt: asegúrate de que **el ángulo** cuyo valor introduces esté **expresado en radianes.**



a)



b)



c)

3. REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UNA ONDA SENOIDAL

Una onda senoidal ($a = a_m \cdot \text{sen}\ \omega t$) puede representarse por medio de un vector de módulo a_m que gira en sentido antihorario con velocidad angular constante ω.

Lógicamente, la orientación de este vector varía a lo largo del tiempo; sin embargo, a efectos de representación se consideran la orientación y el sentido que le corresponden al instante inicial ($t = 0$).

- Si en este instante inicial la onda arranca en su sentido positivo, la configuración de la onda y la dirección del vector que la representa aparecen reflejadas en la figura a.
- La figura b corresponde al caso de una onda cuyo punto de arranque es anterior al instante inicial. En este caso, la ecuación de la onda será: $a = a_m \cdot \text{sen}\ (\omega t + \varphi)$.
- Por último, si esa misma onda comienza después del instante $t = 0$, su configuración y la orientación del vector representativo aparecen claramente reseñados en la figura c. La ecuación de la onda será: $a = a_m \cdot \text{sen}\ (\omega t - \varphi)$.

El ángulo φ que figura en estas dos últimas ecuaciones recibe el nombre de **fase inicial** y representa el **adelanto** o el **retraso** de la onda con respecto al origen de los tiempos.

Evidentemente, si se considera una única onda senoidal se puede hacer coincidir su comienzo con el origen de los tiempos. De este modo, la expresión matemática de la onda será más sencilla, así como también su representación gráfica.

Ejemplos

1. El valor eficaz de una onda senoidal es $A = 250$ y su frecuencia, $f = 100$ Hz. Si dicha onda comienza 1 ms después de comenzar a contar el tiempo, hallar su fase inicial.

Solución:

Como $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 100\ s^{-1} = 628$ rad/s, y $a_m = A \cdot \sqrt{2} = 250\sqrt{2}$, la expresión de la onda será:

$$a = 250\sqrt{2} \cdot \text{sen}\ (628\,t + \varphi)$$

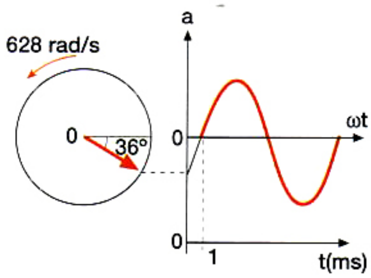
Para el cálculo de φ tendremos en cuenta que para $t = 10^{-3}$ s el valor de a se anula ($a = 0$). Por lo tanto:

$$\text{sen}\ (628 \cdot 10^{-3} + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 628 \cdot 10^{-3} + \varphi = 0$$

de donde resulta: $\varphi = -0{,}628\ \text{rad} \approx -36\ °$.

Por lo tanto: $a = 250\sqrt{2} \cdot \text{sen}\ (628\,t - 0{,}628)$.

En la figura se muestra su representación gráfica.



ACTIVIDADES

1. Una determinada magnitud viene representada en función del tiempo por una onda senoidal de 50 Hz de frecuencia, siendo el valor medio de dicha magnitud 4 unidades.
   a) Dibujar el primer ciclo de la onda.
   b) Hallar el valor de la magnitud 1 ms después de haber comenzado el primer ciclo.

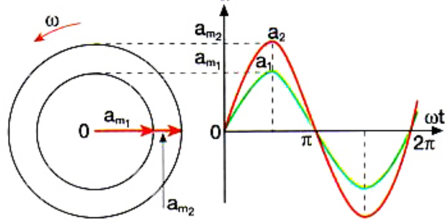
   Resultado: b) $a = 1{,}94$

2. El valor eficaz de una onda senoidal es de 75 unidades, y su frecuencia de 50 Hz. Hallar el valor instantáneo de la onda 4 milisegundos después de haber comenzado su ciclo.

   Resultado: $a = 100{,}86$

ONDAS SENOIDALES SIMULTÁNEAS

Es frecuente que en un fenómeno físico intervengan varias magnitudes relacionadas entre sí y que varíen con el tiempo de una forma senoidal. Cuando esto sucede, decimos que se trata de **ondas senoidales simultáneas** que, si son de la **misma frecuencia,** se pueden representar vectorialmente.



Ondas senoidales en fase.

- Si dos ondas senoidales de igual frecuencia alcanzan sus valores máximos y mínimos al mismo tiempo, se dice que están **en fase.**
- Si, por el contrario, no coinciden los instantes en que las ondas alcanzan sus valores máximos y mínimos, las dos ondas están **desfasadas** (existe un **desfase** entre ellas). Su representación gráfica, en este caso, se suele realizar considerando que el punto de arranque de una de ellas se encuentra situado en el origen de los tiempos ($t=0$), y refiriendo a esta primera onda el desfase de la segunda, que puede ser positivo o negativo.
  - Si las ecuaciones de las dos ondas son:

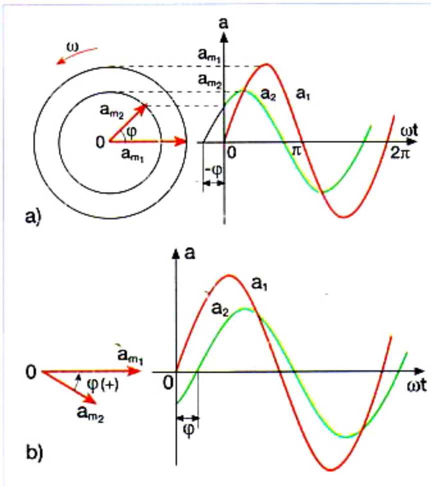
$$a_1 = a_{m_1} \cdot \text{sen } \omega t$$
$$a_2 = a_{m_2} \cdot \text{sen } (\omega t + \varphi)$$

    la segunda está adelantada respecto a la primera un ángulo φ y, según se observa en la gráfica, el ángulo de desfase es negativo.

  - Por el contrario, si las ecuaciones fuesen:

$$a_1 = a_{m_1} \cdot \text{sen } \omega t$$
$$a_2 = a_{m_2} \cdot \text{sen } (\omega t - \varphi)$$

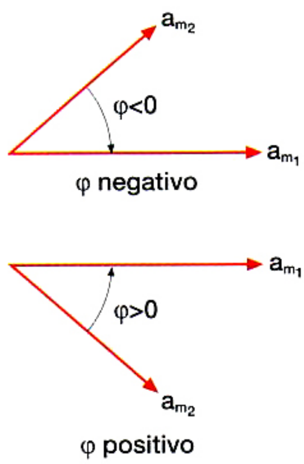
    la segunda onda estaría retrasada. El desfase en este caso (véase la gráfica correspondiente) es positivo.



La onda a_2 está:
a) adelantada; b) retrasada respecto a a_1.

Con objeto de evitar cualquier posible ambigüedad que pueda surgir a la hora de asignar al ángulo de desfase el signo positivo o negativo que le corresponda en la representación vectorial de la onda, se partirá del hecho de que el ángulo φ tiene siempre un sentido determinado que va, siguiendo el camino más corto, desde la onda desfasada hasta la que se toma como referencia y se adoptará el criterio de considerar positivo dicho sentido si es el opuesto al de las agujas del reloj, y negativo en caso contrario.

Signo del ángulo de desfase.



Teniendo en cuenta esta norma, la ecuación general de una onda senoidal desfasada un ángulo φ respecto de otra que se toma como referencia podrá expresarse de la manera:

$$\boxed{a = a_m \cdot \text{sen } (\omega t - \varphi)}$$

Esta ecuación engloba todos los casos posibles, tanto si esta onda está adelantada como si está retrasada. En efecto:

- Si la onda está adelantada ($\varphi < 0$):

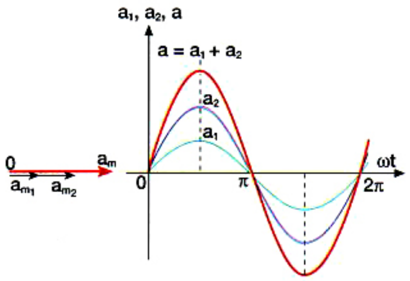
$$a = a_m \cdot \text{sen } [\omega t - (-\varphi)] = a_m \cdot \text{sen } (\omega t + \varphi)$$

- Si la onda está retrasada ($\varphi > 0$):

$$a = a_m \cdot \text{sen } (\omega t - \varphi)$$

4.1. Suma de ondas senoidales

Si dos ondas senoidales de la misma frecuencia representan a dos magnitudes físicas homogéneas (por ejemplo, dos intensidades de corriente o dos tensiones) es posible realizar su suma de una forma gráfica, llevando a cabo este proceso por parejas de puntos que tengan igual abscisa.



Suma de dos ondas senoidales en fase.

Sin embargo, como este procedimiento resulta bastante laborioso, en la práctica se recurre a utilizar las expresiones algebraicas de ambas ondas.

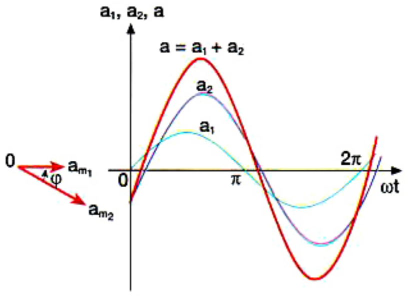
- Si éstas se encuentran en fase:

$$a_1 = a_{m_1} \cdot \text{sen}\ \omega t$$
$$a_2 = a_{m_2} \cdot \text{sen}\ \omega t$$

la onda suma será: $a = a_1 + a_2 = (a_{m1} + a_{m2}) \cdot \text{sen}\ \omega t = a_m \cdot \text{sen}\ \omega t$.

Se observa que esta onda:

- Es también senoidal.
- Está en fase con las otras dos.
- Su valor máximo es la suma de los valores máximos correspondientes a los dos sumandos.



Suma de dos ondas senoidales desfasadas.

- Si las ondas están desfasadas:

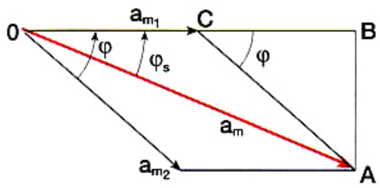
$$a_1 = a_{m_1} \cdot \text{sen}\ \omega t$$
$$a_2 = a_{m_2} \cdot \text{sen}\ (\omega t - \varphi)$$

su suma valdrá: $a = a_1 + a_2 = a_{m_1} \cdot \text{sen}\ \omega t + a_{m_2} \cdot \text{sen}\ (\omega t - \varphi)$

Esta onda:

- Es también senoidal.
- Su ángulo de desfase es inferior a φ.

El valor máximo de la onda resultante, así como su desfase, se pueden calcular fácilmente llevando a cabo la **representación fasorial.** La suma de los vectores representativos de a_1 y a_2 da lugar a un vector cuyo módulo indica el valor máximo de la onda resultante, y su orientación indica el valor del ángulo de desfase correspondiente, φ_s.



Suma fasorial de dos ondas senoidales desfasadas.

En efecto, aplicando el teorema del coseno al triángulo OAC, resulta:

$$a_m = \sqrt{a_{m_1}^2 + a_{m_2}^2 + 2\, a_{m_1} \cdot a_{m_2} \cdot \cos \varphi}$$

Por otra parte, el triángulo OAB permite calcular el ángulo φ_s:

$$\text{tg}\ \varphi_s = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{a_{m_2} \cdot \text{sen}\ \varphi}{a_{m_1} + a_{m_2} \cdot \cos \varphi}$$

Ejemplos

1. Los valores eficaces de dos ondas senoidales de la misma frecuencia son: $A_1 = 100$ y $A_2 = 200$, estando la segunda onda retrasada 60° respecto de la primera. Hallar el valor eficaz de la suma de las dos ondas, así como su desfase.

Solución:

Calculemos, en primer lugar los valores máximos de las dos ondas:

$$a_{m1} = A_1 \cdot \sqrt{2} = 100\ \sqrt{2}$$
$$a_{m2} = A_2 \cdot \sqrt{2} = 200\ \sqrt{2}$$