

---

# Magnetfelder von Spulen

## Protokoll

---

Praktikant: Michael Lohmann  
Felix Kurtz  
E-Mail: m.lohmann@stud.uni-goettingen.de  
felix.kurtz@stud.uni-goettingen.de  
Betreuer: Björn Klaas  
Versuchsdatum: 05.09.2014

Testat:
---------

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Magnetfelder . . . . .	3
2.2	Magnetfelder von Spulen . . . . .	4
2.3	Messverfahren von Magnetfeldern . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Eichen des Ladungsmessgeräts . . . . .	6
4.2	Vergleich der beiden Messmethoden . . . . .	7
4.3	Messung mit der Hallsonde . . . . .	7
4.4	Homogenität der Magnetfelder . . . . .	7
4.5	Bestimmung von $\mu_0$ . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>8</b>
5.1	Eichen des Stromintegrators . . . . .	8
5.2	Vergleich der Messmethoden . . . . .	8
5.3	Hallsonde . . . . .	8
5.4	Homogenität der Magnetfelder . . . . .	9
5.5	Bestimmung von $\mu_0$ . . . . .	10
	<b>Literatur</b>	<b>10</b>

# 1 Einleitung

Spulen sind für die Transformation von Spannungen essentiell. Jede Spule besitzt ein charakteristisches Magnetfeld mit dessen genauer Kenntnis man zum Beispiel Untersuchungen wie Magnetresonanztomographie ermöglichen kann. Dafür ist allerdings eine sehr genaue Beschreibung des Magnetfeldes der Spule notwendig. Für zwei Spulen wurde es hier durchgeführt.

## 2 Theorie

### 2.1 Magnetfelder

Magnetfelder lassen sich durch die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  und die Feldstärke  $\vec{H}$  beschreiben. Mit der Magnetisierung  $\vec{M}$  kann man diese verknüpfen:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (1)$$

Mit der *Influenzkonstante*  $\mu_0$ . Für geringe Flussdichten ist die Magnetisierung proportional zu der Flussdichte:  $\vec{M} = \chi \vec{H}$ . Dadurch ergibt sich

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}. \quad (2)$$

Die Wechselwirkung des Magnetischen Feldes mit elektrischen Ladungen wird durch die LORENTZ-Kraft erzeugt:

$$F_L = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (3)$$

Sie besagt, dass Magnetfelder durch elektrische Ladungsträger erzeugt werden können und umgekehrt. Nach [Gri99, S.215] gilt für erzeugte Magnetfelder durch bewegte Ladungen das *Biot-Savart*-Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4)$$

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben die Felder:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6)$$

## 2.2 Magnetfelder von Spulen

### Zylinderspulen

Nach Gleichung 4 erzeugen Ströme ein Magnetfeld. Für das Innere einer kreisförmigen Leiterschleife der Länge  $L$  mit der Windungen pro Länge  $n$ , durch die ein Strom  $I$  fließt gilt

$$B = \frac{\mu_0 n I}{L}. \quad (7)$$

Dies ist eine Näherung, bei der das Magnetfeld im Inneren als homogen angenommen wird und außerhalb vernachlässigt wird. Dies gilt für lange Spulen ( $R \ll L$ ). Ist diese Näherung zu ungenau, so muss das Biot-Savart-Gesetz aus Gleichung (4) verwendet werden. Daraus ergibt sich durch die Integration über alle Windungen

$$B(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right). \quad (8)$$

Dabei parametrisiert  $z$  die Symmetrieachse der Spule und deren Ursprung ist in der Mitte der Spule.

### Helmholtzspulen

Um homogene elektrische Felder in guter Näherung zu erzeugen, kann man einen Plattenkondensator verwenden. Ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen ist wesentlich anspruchsvoller. Das hier verwendete HELMHOLTZ-Spulenpaar ist die wohl gebräuchlichste Lösung. Dafür wird nicht eine unendlich (oder zumindest sehr) lange Spule verwendet, sondern nur zwei relativ kleine. Diese, welche für sich genommen nur ein inhomogenes Magnetfeld besitzen, sind in einer bestimmten Geometrie angeordnet, so dass sich auch mit ihnen gute Ergebnisse zumindest in kleinen Raumbereichen erzielen lassen. In einer Helmholtzspule gilt nach [Dem12, S. 94] für die Mitte der Spulen

$$B \approx \frac{8\mu_0 n I}{\sqrt{125}R} \quad (9)$$

Dies wird erreicht, dass die mit der Entfernung schwächer werdenden Felder sich im Inneren des Paares idealerweise genau ausgleichen. Die sogenannte HELMHOLTZ-Bedingung beschreibt den Spulenabstand im Verhältnis zu ihrem Radius. Diese beiden Größen sollten im Idealfall die selben Dimensionen (jeweils  $R$ ) haben.

## 2.3 Messverfahren von Magnetfeldern

### Hallsonde

Eine Hallsonde ist ein technisches Bauteil um das Magnetfeld an einer Stelle zu bestimmen. Die Funktionsweise wurde bereits in Protokoll 15 - *Dia- und Paramagnetismus* erläutert.

### Induktionsspule

Eine Induktionsspule ist eine Spule, die an einen Stromintegrator angeschlossen ist. Ändert sich der magnetische Fluss durch sie, so folgt nach dem Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = -n\dot{\Phi} = -n\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow B_{\perp} = -\frac{1}{nA} \int U_{\text{ind}} dt. \quad (11)$$

Dies gilt, falls  $A = \text{const.}$  ist. Das Integral über die Spannung kann nun von einem Stromintegrator bestimmt werden. Dies liefert die geflossene Ladung, welche über

$$R_{\text{int}} \cdot Q = \int_0^t U_{\text{ind}} dt' \quad (12)$$

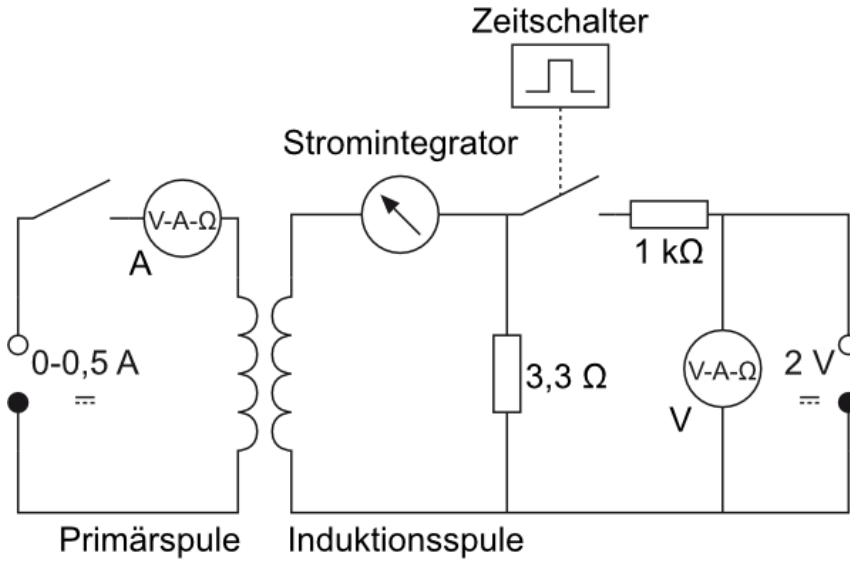
Der hier verwendete gibt jedoch nicht direkt das Integral aus, sondern nur einen dazu proportionalen Wert. Daher muss es noch geeicht werden. Außerdem kann eine Induktionsspule nur Magnetfeldänderungen messen und nicht absolute Größen, so dass man das Magnetfeld einmal abschalten muss.

## 3 Durchführung

Zuerst muss der Stromintegrator kalibriert werden. Dazu wird er über einen Zeitschalter an eine Stromquelle angeschlossen. Der Zeitschalter wird nun im Bereich von 50 bis 500ms mit mindestens 10 verschiedenen Zeiten in Betrieb genommen und jeweils zu den Zeiten wird die Anzeige des Integrators notiert.

Danach misst man das Magnetfeld der Langen Spule (Primärspule) mit der Induktionsspule nach dem Aufbau aus Abb. 1, indem der Schalter im Primärkreis kurz geöffnet und wieder geschlossen wird. Der durch den erzeugten Spannungspuls resultierende Strom wird über das Ladungsmessgerät integriert. Für verschiedene Positionen auf der Spulenchse wird die Anzeige des Ladungsmessgerätes notiert. Die Schrittweite beträgt dabei 2 cm und die Messung wird auch außerhalb der Spule fortgeführt.

Zu den weiteren Messungen wird die Hall-Sonde benutzt. Diese schließt man an den Strom an und auf dem Display erscheint das gemessene Magnetfeld in Gauss. Man startet bei allen drei Spulen (inkl. Helmholtzspule) in der Mitte der Spule und bewegt die



**Abbildung 1:** Magnetfeldmessung mit der Induktionsspule [LP1, Datum: 09.10.2014]

Sonde bei jeder Messung um 1 cm heraus. Zuletzt werden die Daten der einzelnen Spulen wie Länge, Durchmesser und Wicklungszahl notiert.

## 4 Auswertung

### 4.1 Eichen des Ladungsmessgeräts

$$R_{\text{ges}} = R_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L + R_{\text{int}}} \right)^{-1} \quad (13)$$

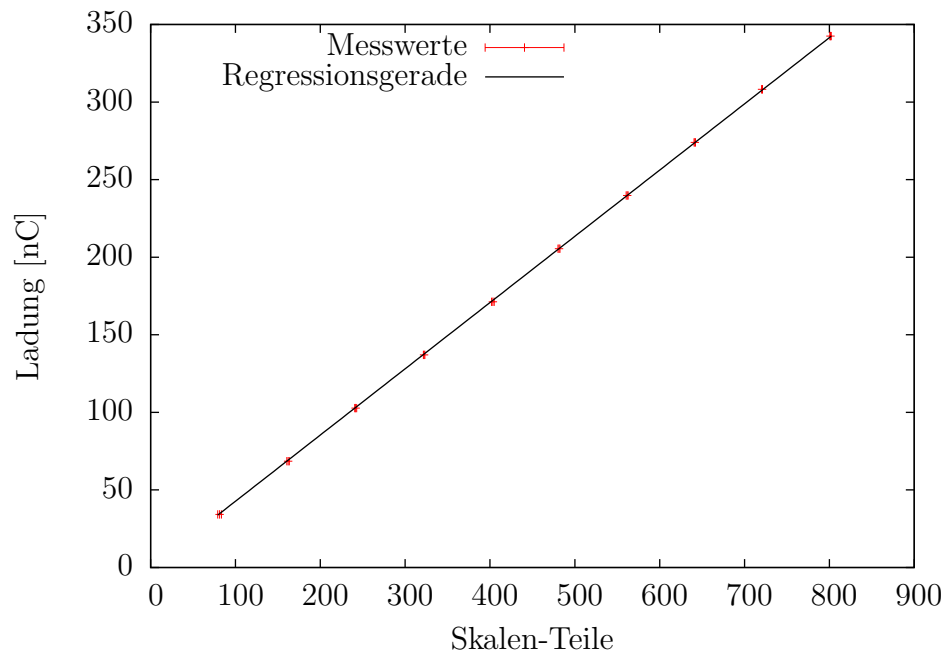
$$R_2 I_2 = (R_L + R_{\text{int}}) I_{\kappa}$$

$$I_{\text{ges}} = I_{\kappa} + I_2 = I_{\kappa} \left( 1 + \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2} \right)$$

$$R_{\kappa} = \frac{U}{I_{\kappa}} = \frac{U}{I_{\text{ges}}} \left( 1 + \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2} \right) = R_{\text{ges}} \left( 1 + \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2} \right) \quad (14)$$

$$\kappa = (426.9 \pm 0.4) \text{ pC/Skt} \quad (15)$$

Da der Fehler so gering ist wird er in der folgenden Berechnung nicht berücksichtigt.



**Abbildung 2:** Ladung in Abhängigkeit der angezeigten Skalenteile.

## 4.2 Vergleich der beiden Messmethoden

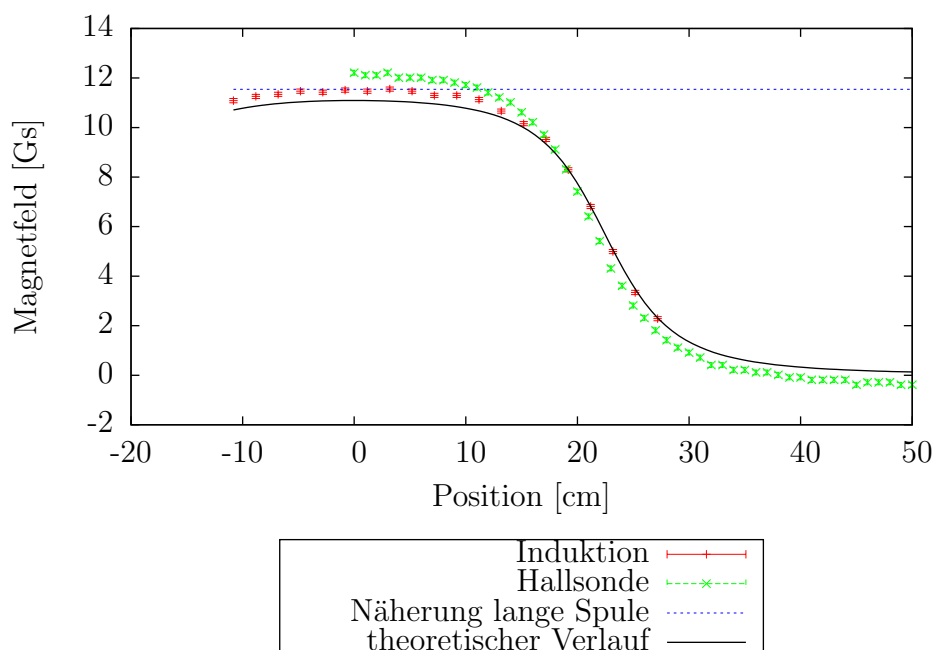
## 4.3 Messung mit der Hallsonde

## 4.4 Homogenität der Magnetfelder

## 4.5 Bestimmung von $\mu_0$

Messungsmethode	Spule	$\mu_0$ [ $10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ ]
Induktionsspule	Lange Spule	$13.020 \pm 0.020$
Hallsonde	Lange Spule	$13.67 \pm 0.11$
	Dicke Spule	$13.28 \pm 0.13$
	Helmholtzspule	$12.39 \pm 0.05$

**Tabelle 1:** Aus den verschiedenen Messungen bestimmte magnetische Feldkonstante



**Abbildung 3:** Verlauf des Magnetfeldes: Vergleich der beiden Messmethoden mit der Theorie anhand der Lagen Spule.

## 5 Diskussion

### 5.1 Eichen des Stromintegrators

In der Graphik 2 sind die Ladungen gegen die vom Stromintegrator angezeigten Skalenteile aufgetragen. Die Messwerte liegen sehr gut auf einer Geraden, so dass sich nur eine Unsicherheit der Geradensteigung von 0.1% ergibt.

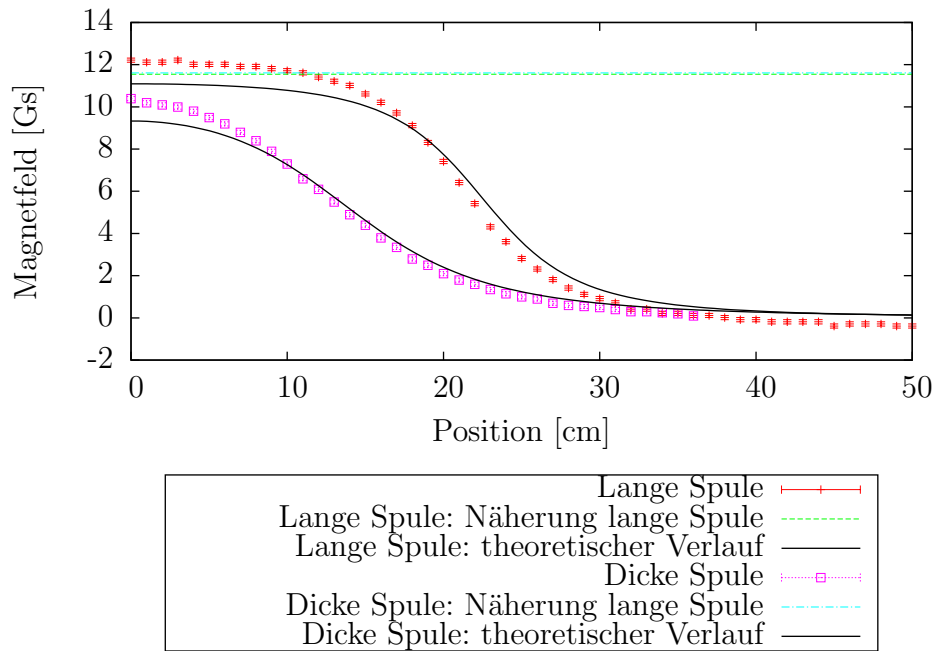
### 5.2 Vergleich der Messmethoden

In Abb. 3 sind die Messwerte der beiden Methoden eingezeichnet, sowie die theoretische Kurve. Dabei fällt auf, dass beide Messwerte innerhalb der Spule über dem theoretischen Wert liegen. Die Messung der Induktionsspule ist jedoch dichter an diesem. Die Induktionsspule ist jedoch im Bereich von 15cm bis zu der letzten Messung fast identisch mit der Theoriekurve.

### 5.3 Hallsonde

In dem Diagramm 4 sind die Messwerte der Hallsonde zusammen mit den Theoriekurven für die dicke und die lange Spule aufgetragen. bei beiden liegen die Messungen im Inneren



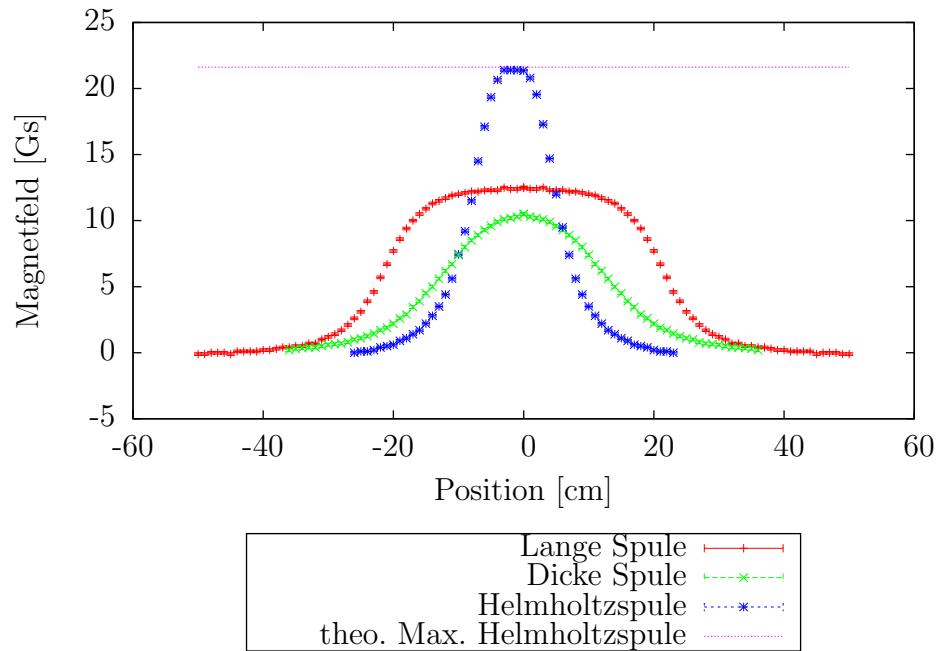


**Abbildung 4:** Verlauf des Magnetfeldes: Vergleich der langen und der dicken Spule sowie jeweils mit der Theorie.

der Spulen über den berechneten Werten und fallen danach darunter. Die Messwerte beinhalten zwar kaum die erwarteten in ihren Fehlerintervallen, jedoch folgen sie deutlich den Kurven, so dass sich vermuten lässt, dass im Inneren Effekte vernachlässigt wurden, welche die Werte beeinflussten. Auch kann man gut sehen, dass die Felder im Inneren nicht so groß werden, wie unter der Näherung der langen Spule.

## 5.4 Homogenität der Magnetfelder

In Abbildung 5 sind die Messwerte der Hallsonde für alle Spulen aufgetragen. Die Werte, welche nicht aufgenommen wurden, wurden um den Mittelpunkt der Spule gespiegelt, da diese einen symmetrischen Verlauf besitzt. Wie zu erwarten, hat die dicke Spule keinen nennenswerten Bereich, in dem sie ein homogenes Magnetfeld besitzt, während die Helmholzspulen auf 10cm eine annähernd konstante Feldstärke aufweisen. Die lange Spule ist natürlich auf einem noch größeren Bereich (ca. 30cm) in guter Näherung mit einem homogenen Feld gefüllt.



**Abbildung 5:** Verlauf des Magnetfeldes der 3 Spulen: Messung mit der Hallsonde.

## 5.5 Bestimmung von $\mu_0$

### Literatur

- [Dem12] Demtröder, W.: *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 6. Auflage, 2012, ISBN 978-3-642-29943-8.
- [Gri99] Griffith, David J.: *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 3. Auflage, 1999.
- [LP1] *Lehrportal der Universität Göttingen*. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4087>.