

---

# Magnetfelder von Spulen

## Protokoll

---

Praktikant: Michael Lohmann  
Felix Kurtz  
E-Mail: m.lohmann@stud.uni-goettingen.de  
felix.kurtz@stud.uni-goettingen.de  
Betreuer: Björn Klaas  
Versuchsdatum: 05.09.2014

Testat:
---------

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Magnetfelder . . . . .	3
2.2	Magnetfelder von Spulen . . . . .	4
2.3	Messverfahren von Magnetfeldern . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Eichen des Stromintegrators . . . . .	6
4.2	Vergleich der beiden Messmethoden . . . . .	7
4.3	Messung mit der Hallsonde . . . . .	7
4.4	Homogenität der Magnetfelder . . . . .	8
4.5	Bestimmung von $\mu_0$ . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>9</b>
5.1	Eichen des Stromintegrators . . . . .	9
5.2	Vergleich der Messmethoden . . . . .	10
5.3	Hallsonde . . . . .	10
5.4	Homogenität der Magnetfelder . . . . .	11
5.5	Bestimmung von $\mu_0$ . . . . .	12
	<b>Literatur</b>	<b>12</b>

# 1 Einleitung

Spulen sind für die Transformation von Spannungen essentiell. Jede Spule besitzt ein charakteristisches Magnetfeld mit dessen genauer Kenntnis man zum Beispiel Untersuchungen wie Magnetresonanztomographie ermöglichen kann. Dafür ist allerdings eine sehr genaue Beschreibung des Magnetfeldes der Spule notwendig. Für drei Spulen wurde es hier durchgeführt.

## 2 Theorie

### 2.1 Magnetfelder

Magnetfelder lassen sich durch die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  und die Feldstärke  $\vec{H}$  beschreiben. Mit der Magnetisierung  $\vec{M}$  kann man diese verknüpfen:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (1)$$

Mit der *Influenzkonstante* oder *magnetischen Feldkonstante*  $\mu_0$ . Für geringe Flussdichten ist die Magnetisierung proportional zu der Flussdichte:  $\vec{M} = \chi \vec{H}$ . Dadurch ergibt sich

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} . \quad (2)$$

Bei den in diesem Versuch verwendeten Spulen handelt es sich um Luftspulen, für die  $\mu_r \approx 1$  gilt. Die Wechselwirkung des Magnetischen Feldes mit elektrischen Ladungen wird durch die LORENTZ-Kraft erzeugt:

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} . \quad (3)$$

Sie besagt, dass Magnetfelder durch elektrische Ladungsträger erzeugt werden können und umgekehrt. Nach [Gri99, S.215] gilt für erzeugte Magnetfelder durch bewegte Ladungen das *Biot-Savart*-Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4)$$

Nach dem AMPÈRESchen Gesetz gilt:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \quad (5)$$

## 2.2 Magnetfelder von Spulen

### Zylinderspulen

Nach Gleichung 4 erzeugen Ströme ein Magnetfeld. Für das Innere einer kreisförmigen Leiterschleife der Länge  $L$  mit der Windungszahl  $n$ , durch die ein Strom  $I$  fließt gilt

$$B = \frac{\mu_0 n I}{L}. \quad (6)$$

Dies ist eine Näherung, bei der das Magnetfeld im Inneren als homogen angenommen wird und außerhalb vernachlässigt wird. Dies gilt für lange Spulen ( $R \ll L$ ). Ist diese Näherung zu ungenau, so muss das Biot-Savart-Gesetz aus Gleichung (4) verwendet werden. Daraus ergibt sich durch die Integration über alle Windungen

$$B(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right). \quad (7)$$

Dabei parametrisiert  $z$  die Symmetrieachse der Spule und deren Ursprung ist in der Mitte der Spule.

### Helmholtzspulen

Um homogene elektrische Felder in guter Näherung zu erzeugen, kann man einen Plattenkondensator verwenden. Ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen ist wesentlich anspruchsvoller. Das hier verwendete HELMHOLTZ-Spulenpaar ist die wohl gebräuchlichste Lösung. Dafür wird nicht eine unendlich (oder zumindest sehr) lange Spule verwendet, sondern nur zwei relativ kleine. Diese, welche für sich genommen nur ein inhomogenes Magnetfeld besitzen, sind in einer bestimmten Geometrie angeordnet, so dass sich auch mit ihnen gute Ergebnisse zumindest in kleinen Raumbereichen erzielen lassen. In einer Helmholtzspule gilt nach [Dem12, S. 94] für die Mitte der Spulen

$$B \approx \frac{8\mu_0 n I}{\sqrt{125}R} \quad (8)$$

Dies wird erreicht, dass die mit der Entfernung schwächer werdenden Felder sich im Inneren des Paares idealerweise genau ausgleichen. Die sogenannte HELMHOLTZ-Bedingung beschreibt den Spulenabstand im Verhältnis zu ihrem Radius. Diese beiden Größen sollten im Idealfall die selben Dimensionen (jeweils  $R$ ) haben.

## 2.3 Messverfahren von Magnetfeldern

### Hallsonde

Eine Hallsonde ist ein technisches Bauteil um das Magnetfeld an einer Stelle zu bestimmen. Die Funktionsweise wurde bereits in Protokoll 15 - *Dia- und Paramagnetismus* erläutert.

#### Induktionsspule

Eine Induktionsspule ist eine Spule, die an einen Stromintegrator angeschlossen ist. Ändert sich der magnetische Fluss durch sie, so folgt nach dem Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = -n\dot{\Phi} = -n\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow B_{\perp} = -\frac{1}{nA} \int U_{\text{ind}} dt. \quad (10)$$

Dies gilt, falls  $A = \text{const.}$  ist. Das Integral über die Spannung kann nun von einem Stromintegrator bestimmt werden. Dies liefert die geflossene Ladung, welche sich über über

$$R_{\text{int}} \cdot Q = \int_0^t U_{\text{ind}} dt' \quad (11)$$

bestimmt.

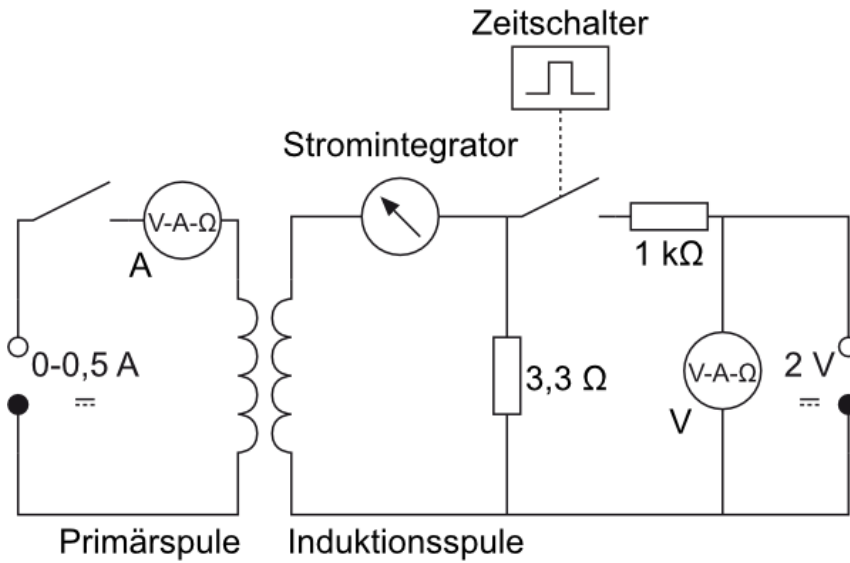
Das hier verwendete Gerät gibt jedoch nicht direkt das Integral aus, sondern nur einen dazu proportionalen Wert. Daher muss es noch geeicht werden. Außerdem kann eine Induktionsspule nur Magnetfeldänderungen messen und nicht absolute Größen, so dass man das Magnetfeld einmal abschalten muss.

### 3 Durchführung

Zuerst muss der Stromintegrator kalibriert werden. Dazu wird er über einen Zeitschalter an eine Stromquelle angeschlossen. Der Zeitschalter wird nun im Bereich von 50 bis 500ms mit mindestens 10 verschiedenen Zeiten in Betrieb genommen und jeweils zu den Zeiten wird die Anzeige des Integrators notiert.

Danach misst man das Magnetfeld der Langen Spule (Primärspule) mit der Induktionsspule nach dem Aufbau aus Abb. 1, indem der Schalter im Primärkreis kurz geöffnet und wieder geschlossen wird. Der durch den erzeugten Spannungspuls resultierende Strom wird über das Ladungsmessgerät integriert. Für verschiedene Positionen auf der Spulenachse wird die Anzeige des Ladungsmessgerätes notiert. Die Schrittweite beträgt dabei 2 cm und die Messung wird auch außerhalb der Spule fortgeführt.

Zu den weiteren Messungen wird die Hall-Sonde benutzt. Diese schließt man an den Strom an und auf dem Display erscheint das gemessene Magnetfeld in Gauss. Man startet bei allen drei Spulen (inkl. Helmholtzspule) in der Mitte der Spule und bewegt die Sonde bei jeder Messung um 1 cm heraus. Zuletzt werden die Daten der einzelnen Spulen wie Länge, Durchmesser und Wicklungszahl notiert.



**Abbildung 1:** Magnetfeldmessung mit der Induktionsspule [LP1, Datum: 09.10.2014]

## 4 Auswertung

### 4.1 Eichen des Stromintegrators

Die verwendeten Widerstände waren:

- $R_1 = 1\text{k}\Omega$
- $R_2 = 3,3\Omega$
- Innenwiderstand des Stromintegrators  $R_{\text{int}}$
- Spulenwiderstand  $R_L$

Der Strom, der durch den Integrator fließt, wird mit  $I_\kappa$  bezeichnet. Aufgrund der Reihen- und Parallelschaltung der verschiedenen Widerstände ergibt sich ein Gesamtwiderstand von

$$R_{\text{ges}} = R_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L + R_{\text{int}}} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Nach den Regeln für die Spannung an Parallelschaltungen gilt:

$$\begin{aligned} R_2 I_2 &= (R_L + R_{\text{int}}) I_\kappa \\ \Rightarrow I_2 &= \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2} I_\kappa. \end{aligned}$$

Damit kann der Gesamtstrom berechnet werden:

$$I_{\text{ges}} = I_{\kappa} + I_2 = I_{\kappa} \left( 1 + \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow I_{\kappa} = \frac{I_{\text{ges}}}{1 + \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2}} .$$

Woraus sich der Widerstand der Spule und dem Integrator wie folgt ergibt:

$$R_{\kappa} = R_{\text{int}} + R_L = \frac{U}{I_{\kappa}} = \frac{U}{I_{\text{ges}}} \left( 1 + \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2} \right) = R_{\text{ges}} \left( 1 + \frac{R_L + R_{\text{int}}}{R_2} \right) . \quad (13)$$

Der durch den Stromintegrator fließende Strom  $I_{\kappa}$  bei einer anliegenden Spannung von  $U_{\text{int}}$  beträgt

$$U_{\text{int}} = \frac{U_{\text{ges}} R_{\text{int}}}{R_{\text{int}} + R_1} \quad (14)$$

$$I_{\kappa} = \frac{U_{\text{int}}}{R_{\text{int}} + R_L} \approx 6.85 \cdot 10^{-7} \text{ A} . \quad (15)$$

Die Widerstände werden als fehlerfrei angenommen, da sie als Herstellerangaben im Vergleich zu den sonstigen auftretenden Fehlerquellen zu vernachlässigen sind. Die Eichkonstante  $\kappa$ , welche das Verhältnis der angezeigten Skalenteile zu den geflossenen Coulomb angibt, wurde mit der linearen Regression

$$y = \kappa \cdot x$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$\kappa = (426.9 \pm 0.4) \text{ pC/Skt} . \quad (16)$$

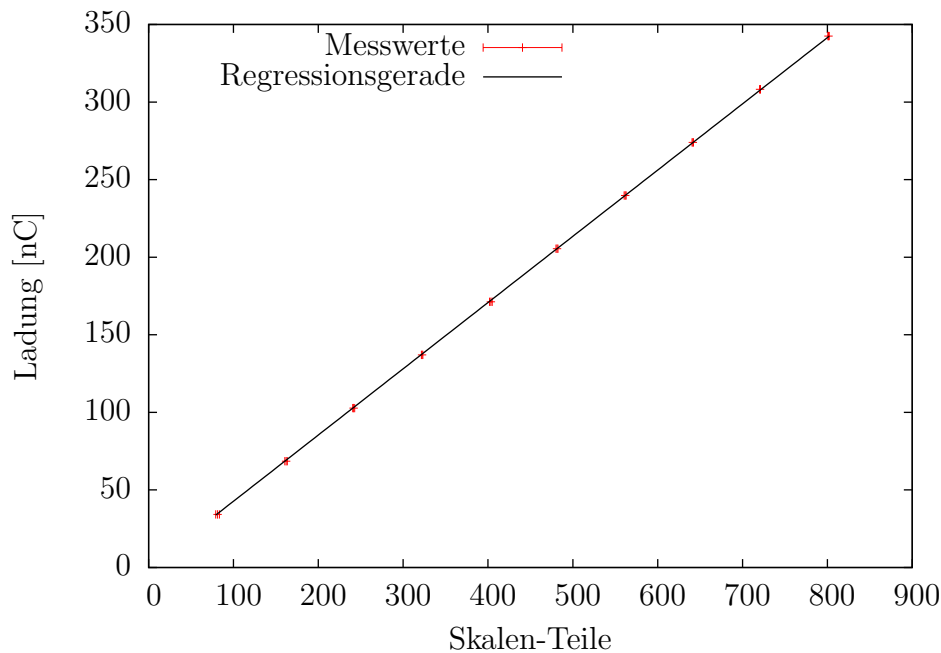
Da der Fehler so gering ist, wird er in der folgenden Berechnung nicht berücksichtigt.

## 4.2 Vergleich der beiden Messmethoden

In Abbildung 3 sind die Messwerte der beiden Messmethoden sowie der theoretische Verlauf des Magnetfeldes an der langen Spule aufgetragen. Hierbei fällt auf, dass die Messung der Hallsonde innerhalb der Spule stärker von der Theorie abweicht, als die der Induktionsspule.

## 4.3 Messung mit der Hallsonde

In Diagramm 4 sind die Messwerte der Hallsonde für die lange und die dicke Spule mit den theoretischen Messwerten aufgetragen. Die Näherung der Langen Spule ist, wie deutlich zu erkennen, nur im Inneren der Spule halbwegs akkurat. Sie entspricht natürlich für die lange Spule eher der Realität und erstaunlicherweise genauer den Messwerten bis ca. 15cm von der Mitte entfernt.



**Abbildung 2:** Ladung in Abhängigkeit der angezeigten Skalenteile.

#### 4.4 Homogenität der Magnetfelder

In Abbildung 5 sind die Messwerte der Hallsonde für alle Spulen aufgetragen. Die Werte, welche nicht aufgenommen wurden, wurden um den jeweiligen Mittelpunkt der Spulen gespiegelt, da diese einen symmetrischen Verlauf besitzen. Hierbei fällt auf, dass die Helmholtzspulen zwar außerhalb der Spulen einen sehr starken Abfall der Feldstärke besitzen, im Inneren ist ihr Magnetfeld jedoch deutlich homogener, als das der Dicken Spule. Bei dieser fällt es zwar zum Rand hin nicht so schnell ab, es ist jedoch an keiner Stelle konstant.

In unserem Aufbau haben wir die Helmholtzspulen parallel angeschlossen, so dass nur der halbe Strom durch die einzelne Spule fließt. Dies muss man in der Auswertung berücksichtigen, da sonst die Magnetfelder die doppelte Stärke hätten.

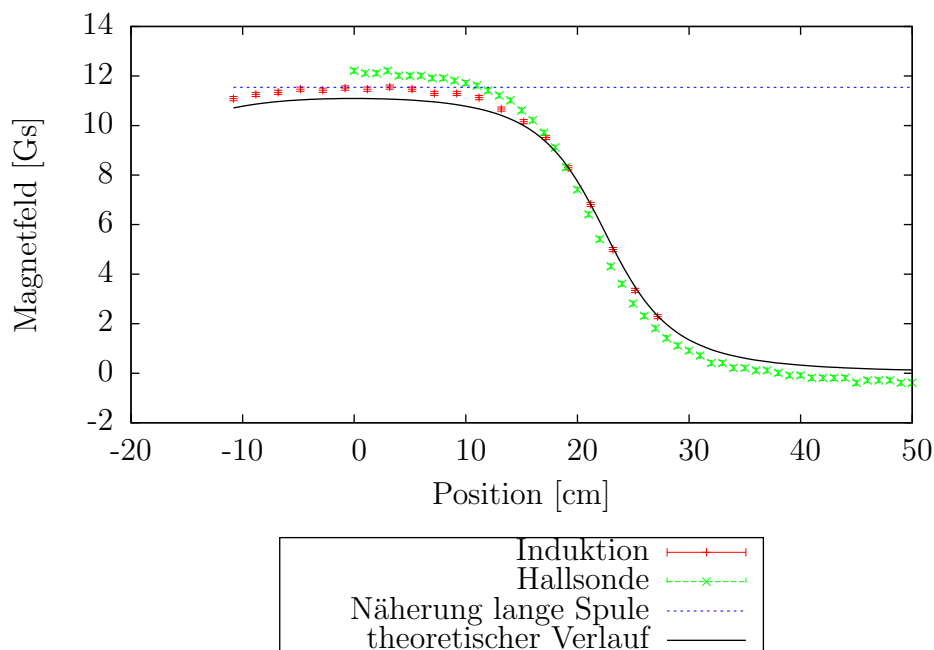
#### 4.5 Bestimmung von $\mu_0$

In Tabelle 1 sind die berechneten  $\mu_0$  zu sehen, welche nach der Formel

$$B = \mu_0 H$$

bestimmt werden. Dabei werden für das  $B$ -Feld die Messwerte und für das  $H$ -Feld die theoretisch nach Formeln (7) und (8) bestimmten Werte. Dies haben wir über das Fitten der Theoriekurve an die Messwerte über den Faktor  $\mu_0$  durchgeführt, da so gleich die





**Abbildung 3:** Verlauf des Magnetfeldes: Vergleich der beiden Messmethoden mit der Theorie anhand der Lagen Spule.

gewichteten Mittelwerte der jeweiligen Kurven ermittelt werden. Zu beachten ist hierbei, dass es sich bei den Näherungen des theoretischen  $B$ -Feldes um Taylor-Entwicklungen um die Mitte der Spule handelt, welche außerhalb der Spulen deutlich ungenauer werden.

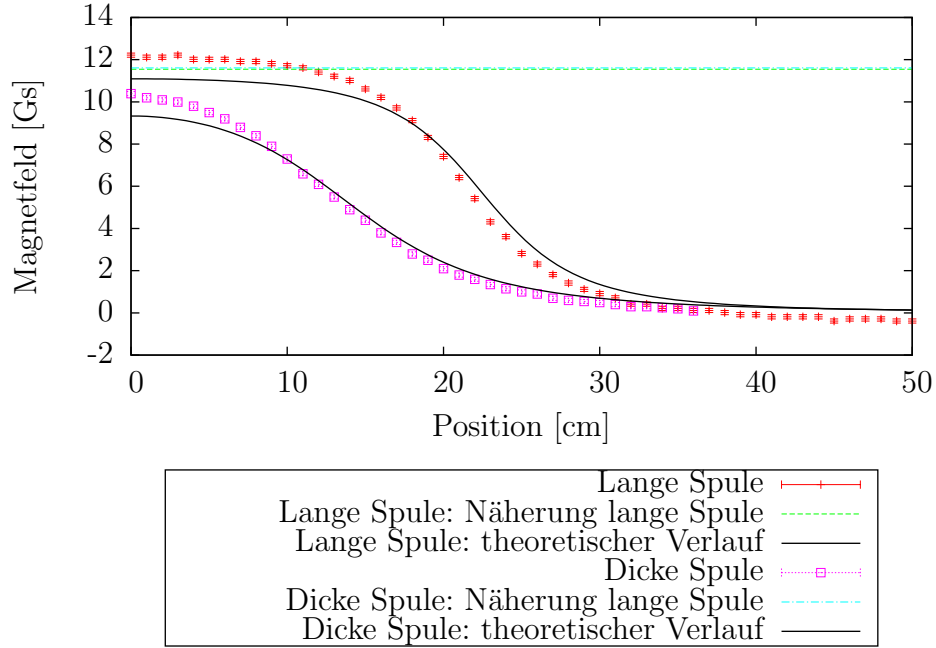
Messungsmethode	Spule	$\mu_0 [10^{-7} \text{ H m}^{-1}]$
Induktionsspule	Lange Spule	$13.020 \pm 0.020$
Hallsonde	Lange Spule	$13.67 \pm 0.11$
	Dicke Spule	$13.28 \pm 0.13$
	Helmholtzspule	$12.39 \pm 0.05$
Gew. Mittelwert		$13.308 \pm 0.006$

**Tabelle 1:** Aus den verschiedenen Messungen bestimmte magnetische Feldkonstante

## 5 Diskussion

### 5.1 Eichen des Stromintegrators

In der Graphik 2 sind die Ladungen gegen die vom Stromintegrator angezeigten Skalenteile aufgetragen. Die Messwerte liegen sehr gut auf einer Geraden, so dass sich nur eine



**Abbildung 4:** Verlauf des Magnetfeldes: Vergleich der langen und der dicken Spule sowie jeweils mit der Theorie.

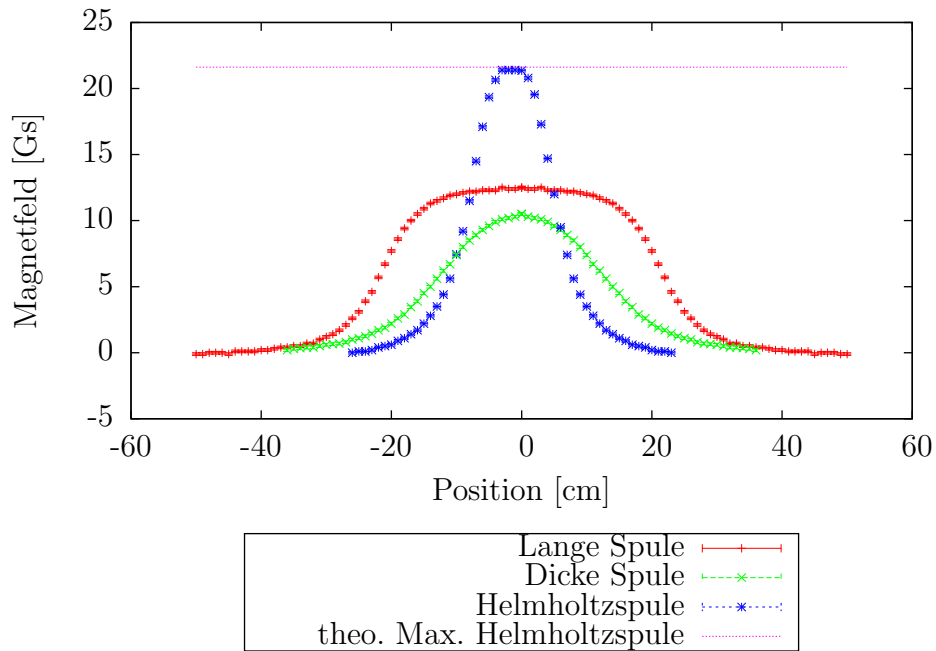
Unsicherheit der Geradensteigung (der Eichkonstante)  $\kappa$  von 0.1% ergibt. Dies spricht für die Qualität des Integrators, da er selbst bei einer halben Sekunde immer noch keine Sättigung zeigt. Darauf müsste man bei anderen Versuchsaufbauten gegebenenfalls achten und den Widerstand  $R_2$  dementsprechend anpassen.

## 5.2 Vergleich der Messmethoden

In Abb. 3 sind die Messwerte der beiden Methoden eingezeichnet, sowie die theoretische Kurve. Dabei fällt auf, dass beide Messwerte innerhalb der Spule über dem theoretischen Wert liegen. Die Messung der Induktionsspule ist jedoch dichter an diesem. Die Induktionsspule ist jedoch im Bereich von 15cm bis zu der letzten Messung fast identisch mit der Theoriekurve.

## 5.3 Hallsonde

In dem Diagramm 4 sind die Messwerte der Hallsonde zusammen mit den Theoriekurven für die dicke und die lange Spule aufgetragen. Bei beiden liegen die Messungen im Inneren der Spulen über den berechneten Werten und fallen danach darunter. Die Messwerte beinhalten zwar kaum die erwarteten in ihren Fehlerintervallen, jedoch folgen sie deutlich den Kurven, so dass sich vermuten lässt, dass im Inneren Effekte vernachlässigt wurden,



**Abbildung 5:** Verlauf des Magnetfeldes der 3 Spulen: Messung mit der Hallsonde.

welche die Werte beeinflussten. Auch kann man gut sehen, dass die Felder im Inneren nicht so groß werden, wie unter der Näherung der langen Spule.

## 5.4 Homogenität der Magnetfelder

In Abbildung 5 sind die Messwerte der Hallsonde für alle Spulen aufgetragen. Die Werte, welche nicht aufgenommen wurden, wurden um den Mittelpunkt der Spule gespiegelt, da diese einen symmetrischen Verlauf besitzt. Wie zu erwarten, hat die dicke Spule keinen nennenswerten Bereich, in dem sie ein homogenes Magnetfeld besitzt, während die Helmholtzspulen auf 10cm eine annähernd konstante Feldstärke aufweisen. Die lange Spule ist natürlich auf einem noch größeren Bereich (ca. 30cm) in guter Näherung mit einem homogenen Feld gefüllt.

Wir haben die Helmholtzspulen parallel und nicht in Reihe geschaltet, wie es eigentlich vorgesehen ist. Dies hat den Nachteil, dass so der Strom in den Spulen nicht gleich groß ist, falls sie unterschiedliche Widerstände haben, so dass das Magnetfeld nicht homogen ist. In unserem Fall war dies augenscheinlich nicht besonders stark der Fall, für zukünftige Versuche sollte man aber darauf achten, dies zu vermeiden.

## 5.5 Bestimmung von $\mu_0$

Der gewichtete Mittelwert aller bestimmten  $\mu_0$  aus Tabelle 1 beträgt  $(13.308 \pm 0.006) \cdot 10^{-7} \text{NA}^{-2}$ , was um ungefähr 6% größer ist, als der tatsächliche Wert von  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{NA}^{-2}$ . Dieser liegt nicht im Fehlerintervall, was vermutlich an der zu geringen Fehlerabschätzung und der Vernachlässigung einiger Fehler liegt.

## Literatur

- [Dem12] Demtröder, W.: *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 6. Auflage, 2012, ISBN 978-3-642-29943-8.
- [Gri99] Griffith, David J.: *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 3. Auflage, 1999.
- [LP1] *Lehrportal der Universität Göttingen*. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4087>.