



Versuch 14

Magnetfeld von Spulen

Praktikanten: **Johannes Dörr**
mail@johannesdoerr.de
physik.johannesdoerr.de

Gruppe: 14

Datum: 05.02.2007

Katharina Rabe
kathinka1984@yahoo.de

Assistent: Tobias Liese

Oliver Schönborn
hadesop@gmx.de

1 Einleitung

In diesem Versuch wollen wir uns mit Magnetfeldern beschäftigen, die von Stromdurchflossenen Spulen erzeugt werden. Wir wollen uns dabei vor allem die Änderung von Feldern bei verschiedenen Spulen anschauen. Hierzu lernen wir die Induktionsspule und die Hallsonde kennen, die uns Aufschluss über die magnetischen Felder geben sollen.

2 Theorie

2.1 Das Magnetfeld

Lässt man Strom durch einen graden Leiter fließen und stellt eine Kompassnadel neben diesen Aufbau, sieht man einen Ausschlag der Nadel. Auf diese Weise lässt sich sehr schön verdeutlichen, dass von dem Leiter ein

Magnetfeld ausgeht. Dieses Feld kann man, ähnlich wie beim elektrischen Feld und der elektrischen Feldstärke \vec{E} , durch die *magnetische Erregung* \vec{H} charakterisieren. Der Name magnetische Feldstärke (\vec{B}) wurde für die wichtigere Größe, in der Beschreibung von Magnetfeldern aufgehoben,

$$B = \mu_0 \mu_r \cdot H \quad . \quad (1)$$

Dabei ist $\mu_0 = 4 \cdot \pi \frac{Vs}{Am}$ die Permeabilitätskonstante und μ_r die Materialkonstante analog zu den Konstanten im elektrischen Feld. Die Dimension des magnetischen Feldes wird in Tesla $[T] = 1 \frac{Vs}{m^2}$ angegeben, da die Einheit sehr groß gewählt ist, meist hat man mit mT oder μT zu arbeiten, hat man sich noch eine Hilfseinheit gesucht die nach Gauß benannt worden ist. Diese Einheit ist definiert als $1G = 10^{-4}T$.

2.1.1 Magnetischer Kraftfluss

Wir beschäftigen uns in unserem Versuch mit Magnetfeldern, die von stromdurchflossenden Spulen erzeugt werden. Deswegen sollten wir uns zunächst einmal mit dem magnetischen Kraftfluss beschäftigen. Dieser läuft analog zu dem im elektrischen Feld,

$$\Phi_m = \int_A B \cdot dA \quad (2)$$

und gibt uns ein Maß für die magnetischen Kraftlinien in der betrachteten Fläche. Im Gegensatz zum elektrischen Feld sind beim magnetischen Feld die Feldlinien geschlossen, sodass das Integral der magnetischen Feldstärke über eine geschlossene Fläche zu null werden muss. Es gilt also nach dem Satz von Gauss:

$$\oint B \cdot dA = \text{div} B \cdot dV = 0 \quad . \quad (3)$$

Es ergibt sich also, dass $\text{div} B = 0$ gilt, was die Voraussetzung für ein quellenfreies Feld ist, was bedeutet, dass immer ein Nord und ein Südpol zusammen existieren müssen. Somit muss aber auch gelten, dass der Weg über eine geschlossene Weglänge l im Gegensatz zum elektrischen Feld ungleich null ist. Es gilt das amperesche Gesetz:

$$\oint H \cdot dl = I \rightarrow \oint B \cdot dl = \mu_0 \cdot I \quad , \quad (4)$$

dabei beschreibt I die Stromstärke die durch die Spule fließt.

2.2 Das Gesetz von Biot-Savart

Wir definieren uns jetzt die Flächenstromdichte j , so dass wir mit Hilfe des Stokeschen Satzes auf folgendes kommen:

$$\mu_0 \mu_r \int j \cdot dA = \oint B \cdot dl \quad (5)$$

$$= \int \text{rot } B \cdot dA \quad (6)$$

$$\Rightarrow \text{rot } B = \mu_0 \mu_r \cdot j \quad . \quad (7)$$

Aus dieser Gleichung kann man nun durch Umformen das Gesetz von Biot-Savart erhalten:

$$B(r_1) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int \frac{e_{1,2} \times dl}{r_{1,2}^2} \quad . \quad (8)$$

Betrachten wir nun das Magnetfeld, das eine geschlossene ringförmige Leiterschleife mit dem Strom I auf ihrer Symetrieachse (z-Achse) erzeugt (siehe Abb. 1).

Hierfür ist es sinnvoll, Polarkoordinaten zu benutzen, für welche gilt (R : Radius der Leiterschleife; $dl = R d\varphi$):

$$\vec{r} = (0, 0, z) \quad , \quad \vec{r}_0 = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0) \quad , \quad \vec{e}_t = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad . \quad (9)$$

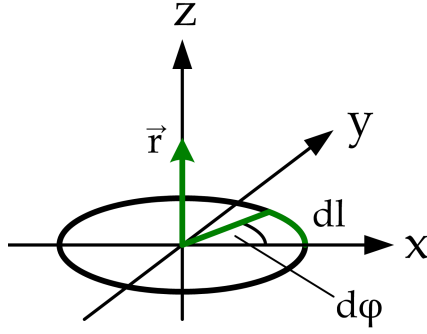


Figure 1: Schema der Strom durchflossenen Leiterschleife

Es ergibt sich nun für das Biot-Savartsche Gesetz:

$$B(\vec{r})_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R z \cos \varphi}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \quad (10)$$

$$= 0 \quad (11)$$

$$B(\vec{r})_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R z \sin \varphi}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \quad (12)$$

$$= 0 \quad (13)$$

$$B(\vec{r})_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \quad (14)$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

Um nun vom Magnetfeld einer einzelnen Leiterschleife auf das Magnetfeld einer homogen gewickelten Spule zu kommen, wie wir sie im Versuch benutzen werden, sehen wir die Spule als eine Aufsummierung von vielen kleinen Leiterschleifen mit dem jeweiligen Strom dI an, für die gilt:

$$\frac{dI}{dz} = \frac{N}{L} \cdot I \quad (16)$$

N gibt ihr die Windungszahl an und L steht für die Länge der Spule. Setzt man nun die Änderung des Feldes in Gl.15 ein, kann man über die gesamte Spulenlänge integrieren. Dazu setzen wir den Abstand a zwischen dem Punkt, an dem wir das Feld bestimmen möchten, und dem Rand der Spule fest. Da das Feld links und rechts vom Punkt entgegengesetzt wirken, teilen wir der Einfachheit halber unser Integral in die beiden Teil Stücke der Spule auf. Es gilt dann:

$$B(a)_z = \frac{\mu_0 N I R^2}{2 L} \left(\int_0^a \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{L-a} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (17)$$

$$= \frac{\mu_0 N I R^2}{2 L} \left(\int_{L-a}^a \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (18)$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{2 L} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{(l-a)}{\sqrt{R^2 + (l-a)^2}} \right) \quad (19)$$

Für die Annahme, dass der Radius R im Verhältnis zur Länge L sehr sehr klein ist, kann man folgende Näherungen annehmen:

1. Im Mittelpunkt der Spule ($a = \frac{L}{2}$) ergibt sich

$$B_{Mitt} = \frac{\mu_0 I N}{L} \quad (20)$$

2. Das Feld am Rand der Spule errechnet sich zu

$$B_{Rand} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \quad (21)$$

3. Für aneinander Reihungen von Spulen sind einfach die Längen und die Windungszahlen der Spulen auf addieren und kann dann das System von Spulen als eine einzige Spule betrachten.

Wie man an Punkt eins schön sehen kann, gilt die uns bekannte Formel für das Magnetfeld von Spulen nur für den Mittelpunkt von langen Spulen, deren Radius eher gering ist. Somit lässt sich für unseren Versuch erwarten, dass im Mittelpunkt der langen Spule diese Formel zutrifft, zum Rand hin aber das Feld deutlich schwächer wird. Für die Feldmessung der dicken Spule wird diese Formel nicht zu verwenden sein.

2.2.1 Das Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares

Das Helmholtz-Spulenpaar ist definiert durch 2 Ringspulen mit dem Radius R , die den Abstand $d = R$ haben. Durch beide Spulen fließt der Strom in die selbe Richtung und hat den gleichen Betrag. Um nun das Feld um die Symetrie-Achse z zu bestimmen, addiert man zunächst einmal die einzelnen Felder auf die am Punkt z wirken.

$$B(z) = B_1 \left(z + \frac{d}{2} \right) + B_2 \left(z - \frac{d}{2} \right) \quad (22)$$

Mit der Gleichung(15) kann nun das Feld bestimmt werden.

$$B(z) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \left(\frac{1}{\left[\left(z + \frac{d}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[\left(z - \frac{d}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (23)$$

Durch eine Taylor-Entwicklung um $z = 0$ kann man diesen Term etwas vereinfachen.

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{\left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[1 + \frac{3 \cdot (d^2 - R^2)}{2 \cdot \left(\frac{d^2}{4} + R^2 \right)^2} \cdot z^2 \right] \quad (24)$$

Nun kann man die Bedingung $d = R$ einsetzen. Der quadratische Term wird zu null und es bleibt für $B(z)$

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 \cdot I}{\left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot R} \quad (25)$$

2.3 Messmethoden zur Bestimmung der Magnetfelder

2.3.1 Die Hall-Sonde

Mit der Hall-Sonde ist es sehr bequem ein magnetisches Feld zu bestimmen. Die Hall-Sonde besteht aus einem quadarförmigen Aufnahmesender, der meist aus einem Halbmetall besteht, da hier wenig freie Elektronen vorhanden sind. Durch diesen wird ein Strom I geschickt, sodass vom senkrecht auf die Elektronenflussrichtung stehenden magnetischen Feld eine Lorentzkraft ausgeht, die die Elektronen im Plättchen in die dritte Dimnsion

ablenkt. Es entsteht eine Ladungstrennung, die eine Spannung hervorruft. Die sogenannte Hall-Spannung (U_H). Diese Ladungstrennung wird so lange vollzogen, bis sich das el. und magn. Feld ausgleichen. Es gilt dann für die Hallspannung:

$$U_H = E_y \cdot b = v \cdot B \cdot b \quad . \quad (26)$$

Aus dieser Gleichung kann dann die magn. Flußdichte B bestimmen. Die Konstanten b , v stehen für die materialspezifische Beweglichkeit der Ladungsträger im Plättchen (b) und für die Geschwindigkeit (v), die diese haben. Zum Glück zeigt die Hallsonde jedoch auf ihrer Anzeige direkt die magn. Flussdichte an, sodass wir nicht all zu viel rum rechnen müssen. Wichtig bei der Benutzung von Hallsoden ist, dass man die Sonde senkrecht zum Feld einführt, damit das gesamte Feld gemessen wird und nicht nur der Anteil des Feldes der senkrecht zur Sonde steht.

2.3.2 Das Drehspuhl-Galvanometer

Desweiteren wird das magnetische Feld durch eine Induktionsspule gemessen, die an ein Drehspuhl-Galvanometer angeschlossen ist. Dabei wird durch Ein bzw. Ausschalten des Magnetfeldes der Primärspule in die Induktionsspule eine Spannung induziert. Der dadurch erzeugte Strom I im Sekundärkreis ergibt einen Ausschlag am Galvanometer. Der Maximalausschlag des Galvanometers ist Proportional zur Ladung Q die durch ihn geflossen ist. Damit kann ohne Probleme auf das Magnetfeld der Primärspule geschlossen werden (A : Querschnittsfläche der Induktionsspule, R : Widerstand im Induktionskreis, N : Anzahl der Windungen der Induktionsspule)

$$Q = \int I \cdot dt = -\frac{NA}{R} B \quad . \quad (27)$$

(Ohmsches Gesetz und Induktionsgesetz)

Man sollte nur die Stromstärke gering halten, da es sonst zu einer Selbstinduktion kommt, die unsere Rechnung beeinträchtigen würde. Da wir den maximal Ausschlag des Galvanometers messen und nicht direkt die Ladung die durch das Galvanometer fließt, müssen wir unser Galvanometer zu nächst einmal eichen. Wie in Versuch 11 schon verdeutlicht, gilt:

$$\varphi = m \cdot Q \quad (28)$$

hierbei ist der Ausschlag durch φ angegeben und m ist die Proportionalitätskonstante für das Galvanometer. So lässt sich nun einfach das Magnetfeld bestimmen:

$$Q = \frac{\varphi}{m} = \frac{NA}{R} B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\varphi R}{mNA} \quad (29)$$

3 Durchführung

- Das Galvanometer ist ballistisch zu eichen
- Durch sehr kurzes Einschalten des Primärstroms wird eine Spannung in den Sekundärkreis induziert. Der Ausschlag des Galvanometers wird in Abhängigkeit vom Abstand zwischen der Sekundärspule und der Mitte der Primärspule gemessen. (Begin in der Mitte der Primärspule, dann in 2cm Schritten nach außergehen, auch außerhalb der Spule weitermessen).
- Die Induktionsspule wird in die Mitte der Primärspule gebracht. Nun wird die Ladung in Abhängigkeit von der Stromstärke (in 0,1 A Schritten) bestimmt. Dies geschieht für beide Spulen.
- Bei einem Strom von 0,5 A in der Spule ist das Magnetfeld mit der Hallsonde für beide Spulen auszumessen. Das selbe gilt für die Helmholtzspule. Dabei soll die Position auf der Längsachse pro Schritt um 1 cm von der Mitte entfernt werden.
- Es sind alle benötigten Spulendaten zu notieren

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Eichkonstante des Galvanometers

Der Strom, der durch das Galvanometer bei der Eichung fließt, ergibt sich wie folgt:

$$U_X = \frac{R_X}{R_X + R_1} \cdot 2V = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_X}} \cdot 2V = \frac{2V}{1002} \quad , \quad (30)$$

dabei ist R_X der Widerstand, den R_2 und R_3 in der Parallelschaltung bilden. Da wir den Widerstand des Galvanometers und der Induktionsspule vernachlässigen können, ergibt sich dann für den Strom durch das Galvanometer:

$$I_X = \frac{U_X}{R_3} = 1,996 \cdot 10^{-6} A \quad . \quad (31)$$

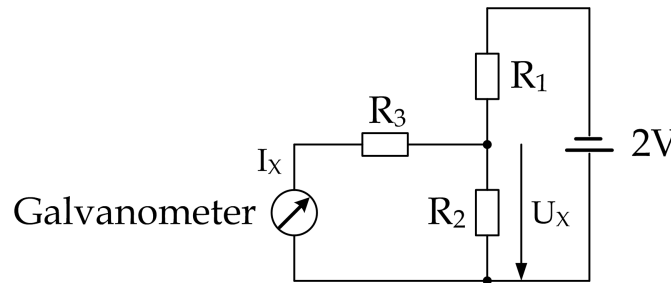


Figure 2: Eichschaltung

Mit der Intervallzeit Δt , die der Zeitschalter vorgibt, ergibt sich mit $Q = I \cdot \Delta t$ die geflossene Ladung. Bei der Eichung bestimmen wir die Proportionalitätskonstante m zwischen Auslenkung des Galvanometers und der geflossenen Ladung. Abbildung 4.1 zeigt die Regression der Messwerte der drei Zeitintervalle ($84ms$, $252ms$ und $396ms$).

4.2 Feldverlauf der längeren Spule (1. und 2.)

Abbildung 4.2 zeigt den Feldverlauf, der mit der Induktionsspule und dem Galvanometer gemessen wurde, sowie die Hallsonden-Messreihe. Außerdem sind zwei theoretische Reihen eingezeichnet, wobei die eine nur in der Mitte Gültigkeit hat (siehe Theorie).

4.3 Bestimmung der Influenzkonstante μ_0 bei der längeren Spule (4.)

Die Messwerte geben die magneticsche Flussdichte an, mit der Formel berechnen wir die magnetische Feldstärke. Mit

$$B = \mu_0 H \quad (32)$$

können wir dann auf den Wert der Influenzkonstante μ_0 schließen. Jeweils für die Messung mit der Induktionsspule bzw. mit der Hallsonde bestimmen wir für jede Entfernung μ_0 und geben dann den Mittelwert an. Wir erhalten:

Induktionsspule:	$\mu_0 = 1,42(8) \cdot 10^{-6} Vs/Am$
Hallsonde:	$\mu_0 = 1,40(2) \cdot 10^{-6} Vs/Am$

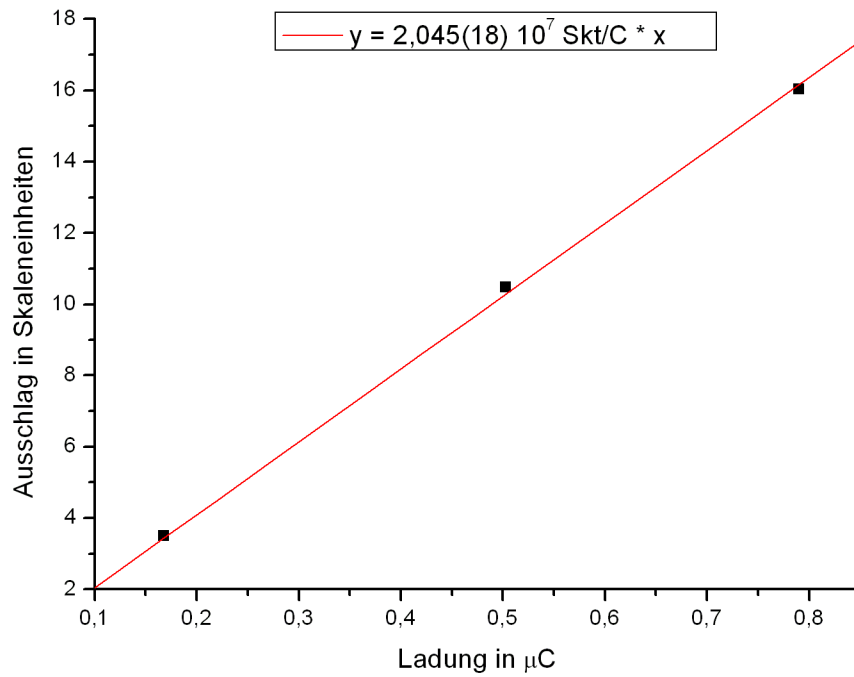


Figure 3: Eichgerade: Skalenteile pro Ladung in C

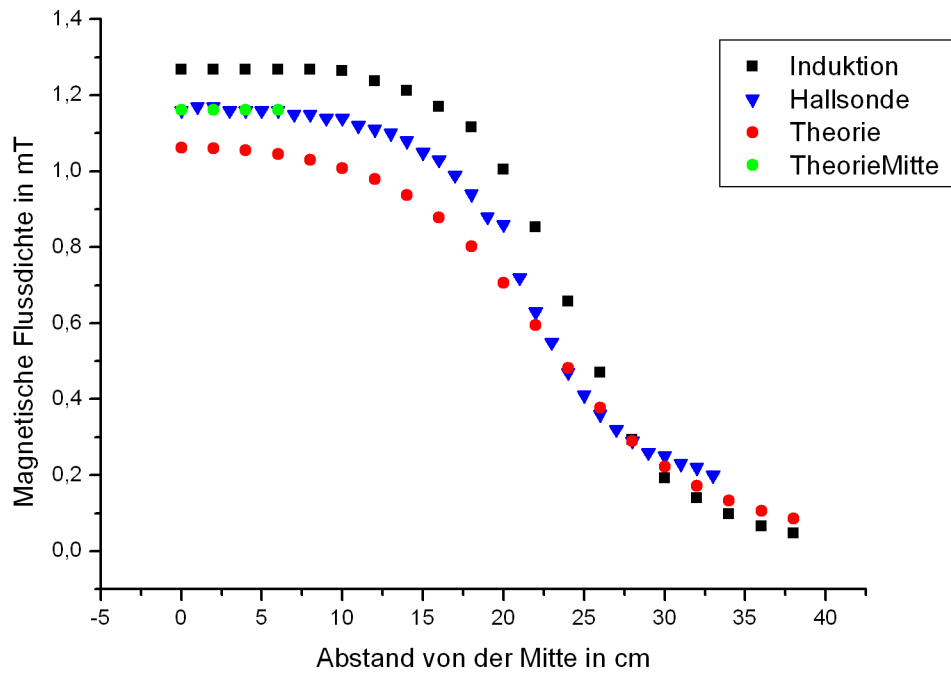


Figure 4: Feldverlauf der längeren Spule, gemessen mit der Induktionsspule, der Hallsonde, sowie zweimal theoretisch berechnet

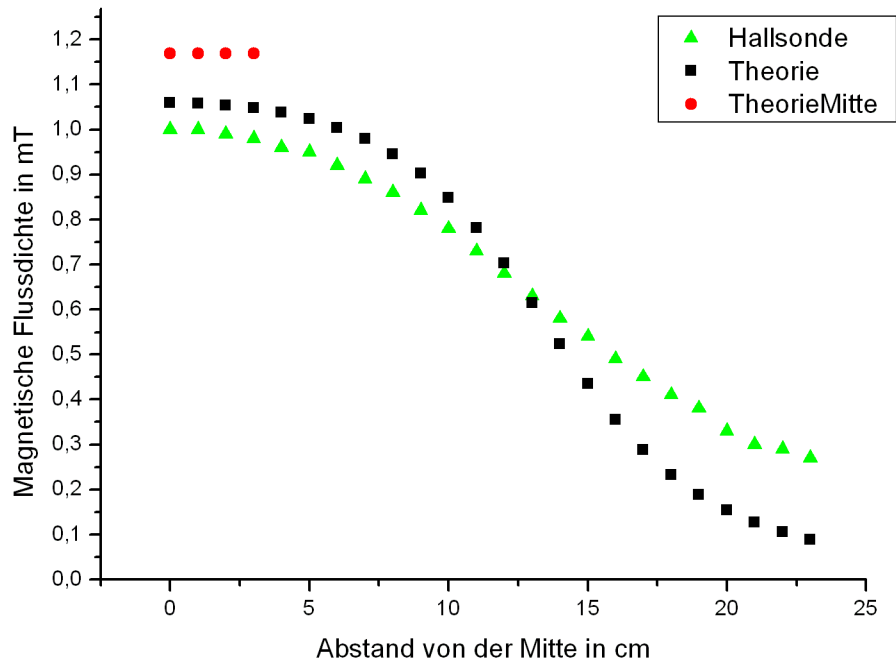


Figure 5: Feldverlauf der dicken Spule, gemessen mit der Hallsonde, sowie theoretisch berechnet

4.4 Feldverlauf der dicken Spule (2.)

Abbildung 4.6 zeigt den Feldverlauf der dicken Spule. Außerhalb der Spule weichen die gemessenen Werte von den theoretischen Werten stark ab. Die theoretische Näherung in der Mitte der Spule setzt voraus, dass der Radius gegenüber der Länge wesentlich kleiner ist. Aus diesem Grund ist es wenig verwunderlich, dass diese Werte abweichen.

4.5 Bestimmung der Influenzkonstante μ_0 bei der dicken Spule (4.)

Wie bei der längeren Spule berechnen wir hier auf die gleiche Weise die Influenzkonstante.

$$\text{Hallsonde: } \mu_0 = 1,7(2) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$$

4.6 Feldverlauf der dicken Spule (2.)

Da sich bei den drei betrachteten Spulen die Windungszahlen und Abmessungen unterscheiden, ist offensichtlich, dass die Magnetfelder unterschiedliche Stärken aufweisen. Es fällt jedoch auf, dass das Feld der Helmholtzspule außerhalb stärker abfällt als bei den anderen Spulen. Dafür ist das Feld innerhalb der zwei Spulen sehr homogen, während besonders bei der Dicken Spule das Feld auch dort bereits abfällt.

4.7 Bestimmung der Influenzkonstante μ_0 aus Durchführung 2 (4.)

Aus den Messwerten aus Durchführung 2 berechnen wir nochmals die Influenzkonstante. Da immer in der Mitte der Spule gemessen wurde, verwenden wir für den theoretischen Wert die einfache Formel (??) für die magnetische Feldstärke.

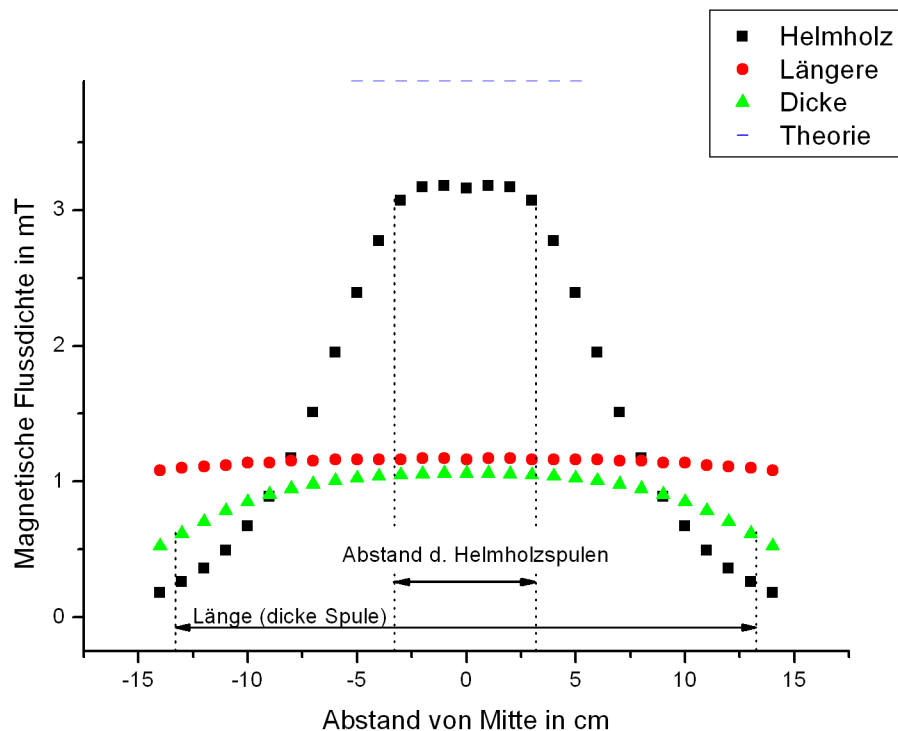


Figure 6: Vergleich der Felder der Spulen nach Homogenität

Wie in Auswertung 1 verwenden wir auch hier die Formel

$$B = \frac{\varphi R}{N A m} , \quad (33)$$

um von dem Ausschlag des Galvanometers auf die magnetische Flussdichte zu schließen. Als Mittelwerte aus den Messungen mit verschiedenen Stromstärken erhalten wir für die Influenzkonstante:

Längere Spule:	$\mu_0 = 1,30(1) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Dicke Spule:	$\mu_0 = 1,83(3) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

Der Literaturwert für die Influenzkonstante liegt bei $\mu_0 = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$. Die letzte Messung ergab sowohl den besten (längere Spule, 4%) als auch den schlechtesten (dicke Spule, 45%) auf. Zum letzten Wert muss gesagt werden, dass wir die verwendete Formel für den theoretischen Wert der magnetischen Feldstärke eigentlich nur bei langen Spulen mit verhältnismäßig kleinem Radius zu exakten Ergebnissen führt.

5 Diskussion

Schöner Versuch, der ohne Probleme durchzuführen war. Die Auswertung war auch sehr angenehm zu machen, mit Praktikumsbuch ohne Probleme in kurzer Zeit zu erledigen, und vor allem ohne stundenlange Diskussionen, warum alles so ist wie es ist oder auch nicht. So einen Versuch sollte es öfters Mal geben, auch wenn er nicht wirklich thematisch etwas Neues gebracht hat. Unsere Werte kommen ausnahmsweise mal in Richtung des Literaturwerts. Also nichts zu klagen.