

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 14
Wechselstromwiderstände

Praktikant: Michael Lohmann
Versuchspartner: Felix Kurtz
E-Mail: m.lohmann@stud.uni-goettingen.de
Betreuer: Björn Klaas
Versuchsdatum: 08.09.2014

Eingegangen am:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Wechselspannungen und -ströme	3
2.2	Impedanz	3
2.3	Ohmscher Widerstand	4
2.4	Induktivität	4
2.5	Kapazität	5
2.6	RLC -Serienschaltung	5
2.7	LC -Parallelschaltung	5
3	Durchführung	6
4	Auswertung	8
4.1	Widerstand und Spule in Reihe	8
4.2	RLC -Serienschaltung	9
4.2.1	Teilspannungen	11
4.3	Parallelkreis	12
5	Diskussion	13
5.1	Serienschaltung	13
5.2	Resonanzfrequenz	14
5.3	Parallelschaltung	14
5.4	angenommene Fehler	14
	Literatur	15

1 Einleitung

Wechselströme spielen in der modernen Energieversorgung eine zentrale Rolle. Um so wichtiger ist es, die Effekte und genauen Eigenschaften von *Wechselstrom-Widerständen* zu kennen. Auch die Phasenverschiebung von Strom zu Spannung soll in diesem Versuch beobachtet werden.

2 Theorie

2.1 Wechselspannungen und -ströme

Unter einer Wechselspannung versteht man eine Spannung, die einen periodischen zeitlichen Verlauf besitzt. Die zumeist verwendete ist die sinusförmige mit

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad .$$

Da hierbei die maximale Spannung U_0 nur den kürzesten Teil der Zeit anliegt, ist die Definition eines *Effektivwertes* sinnvoll. Diese ist so definiert, dass eine Gleichspannung diesen Wertes die selbe Leistung erbringt, nämlich:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad .$$

Die in europäischen Haushalten übliche Wechselspannung von $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$ besitzt so eine Maximalspannung von $U_0 = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} = 311 \text{ V}$. Ebenso ist auch der Effektivstrom definiert.

Der fließende Strom I besitzt nun die Form

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

wobei φ die Phasenverschiebung ist. Diese hängt ab von der jeweiligen Schaltung ab und wird in dem Kapitel 2.2 behandelt.

2.2 Impedanz

Die Impedanz Z berechnet sich nach [Nol07, S. 236] im Allgemeinen durch

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} \quad .$$

Dies ist analog zum Ohmschen Widerstand $R = \frac{U}{I}$, wodurch sich der Name Scheinwiderstand $|Z|$ für ihren Betrag ergibt.

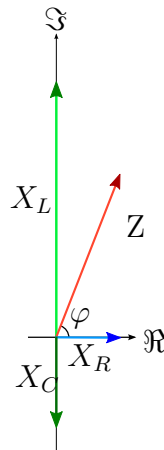


Abbildung 1: Zeigerdiagramm, welches die Realteile der Impedanz gegen ihren Imaginärteil in einer Serienschaltung aufträgt.

In Abb. 1 ist ein Beispiel aufgetragen, in dem man die verschiedenen (Blind-)Widerstände einer Schaltung erkennen kann, die an den einzelnen Bauteilen vorhanden sind. Im Resonanzfall ist $X_L = X_C$, wodurch die gesamte Impedanz Z real wird und die Phasenverschiebung $\varphi = 0$ verschwindet.

Die Phasenverschiebung ist nach [Nol07, S. 236] definiert als

$$\varphi = \arctan \frac{\Im(Z)}{\Re(Z)} \quad . \quad (1)$$

2.3 Ohmscher Widerstand

Für einen Ohmschen Widerstand gilt

$$U(t) = R \cdot I(t) \quad .$$

Strom und Spannung sind also in Phase.

2.4 Induktivität

Nach [Gri99, S. 313] gilt für eine Spule

$$U_{\text{Ind}} = -U_L = -L \frac{dI}{dt} \quad . \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet L die Induktivität, welche von der Spulengeometrie abhängt. Nimmt man nun wieder die Sinus-Spannung an, so folgt:

$$\begin{aligned} U_0 \cdot \sin(\omega t) &= L \frac{dI}{dt} \\ \Rightarrow I(t) &= U_0 \frac{1}{\omega L} \cos(\omega t) \quad . \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Spannung dem Strom für eine Schaltung, welche nur aus einer Spule bestehet, um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ voraus eilt.

Man kann nun den *Blindwiderstand* für eine Spule definieren:

$$X_L := \frac{U(t)}{I(t)} = L\omega \quad . \quad (3)$$

2.5 Kapazität

Für einen Kondensator gilt nach [Gia10, S. 822]:

$$\begin{aligned} Q &= CU = CU_0 \sin(\omega t) \\ \Rightarrow I(t) &= \dot{Q} = CU_0 \omega \cos(\omega t) \quad . \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Strom der Spannung um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ voraus eilt.

Auch für einen Kondensator kann man so einen *Blindwiderstand* definieren:

$$X_C := \frac{U(t)}{I(t)} = -\frac{1}{\omega C} \quad (4)$$

2.6 RLC-Serienschaltung

Ein *RLC*-Serienschaltkreis wie in Abb. 2 muss nun aus einer Zusammensetzung der beiden erfolgen. Dafür definiert man die *Impedanz*:

$$|Z_{\text{Serie}}| = |R + i(X_L + X_C)| = \left| R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} \quad . \quad (5)$$

Die Phasenverschiebung lässt sich (wie in Abb. 1 zu erkennen und nach [Gia10, S. 1042]) durch

$$\varphi = \arctan \left(\frac{X_L + X_C}{R} \right) \quad (6)$$

berechnen.

2.7 LC-Parallelschaltung

Ist ein *LC*-Parallelschaltkreis wie in Abb. 3 vorhanden, so berechnet sich die Impedanz nach der Spannungsregel für Parallelkreise durch

$$Z_{\parallel} = \frac{-i}{\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}} = \left(\frac{1}{R_L + i\omega L} + i\omega C \right)^{-1} \quad (7)$$

und dem Blindwiderstand

$$|Z_{\parallel}| = \left[\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right)^2 + \left(\frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (8)$$

3 Durchführung

Der Aufbau besteht aus einem Frequenzgenerator, welcher einem veränderlichen Stromkreis aus Widerstand, Kondensator und Luftspule Spannung bereitstellt. Die verschiedenen Parameter Ausgangsspannung U , Spannung an Widerstand und Spule U_{L+R} , Spannung am Kondensator U_C und Gesamtstrom I werden mit einem Oszilloskop bzw. Spannungs- und Strom-Messgeräten vermessen.

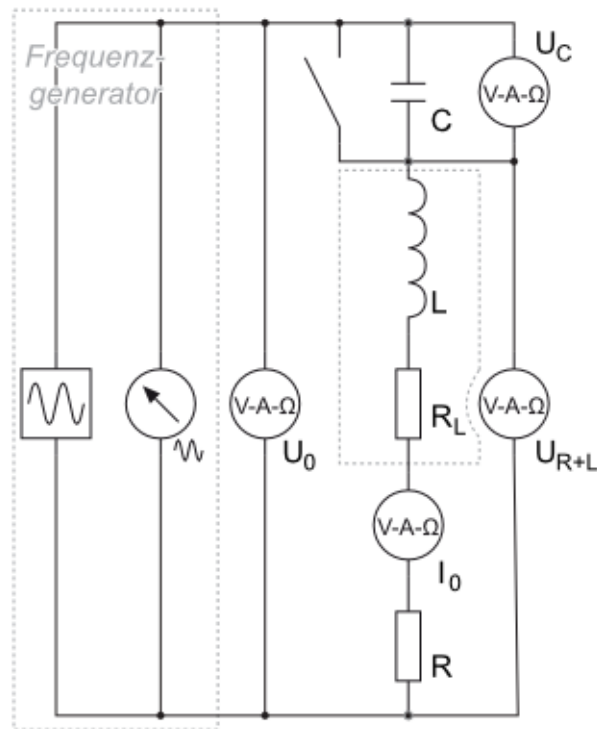


Abbildung 2: Schaltplan der Serienschaltung nach [LP1, 4.10.2014, 15:30].

Zunächst baut man den Serienschaltkreis aus Abb. 2 auf.

Dabei wird der Kondensator zunächst überbrückt und erst nach 10 Messungen mit verschiedenen Frequenzen, bei denen Strom I und Spannung U protokolliert werden, hinzugeschaltet. Alle gemessenen Parameter sollen nun für möglichst viele verschiedene Frequenzen f aufgezeichnet werden. Mit aktivem Kondensator müssen zusätzlich noch U_C und U_{R+L} sowie die Phasenverschiebung φ notiert werden. Das Oszilloskop wird zur Bestimmung dieser einerseits zur Vermessung der Ausgangsspannung U und andererseits zum Bestimmen des Stroms verwendet. Dies gelingt, indem man die Spannung über dem Ohmschen Widerstand abnimmt, da dies bis auf den Faktor R_ω identisch ist. Es kann nun die beiden Kurven mit Hilfe des Mathe-Modus direkt auf deren Phasenverschiebung hin auswerten. Damit dies zuverlässig geschieht, ist darauf zu achten, dass die jeweiligen

y -Achsen so gewählt sind, dass die Kurven ungefähr die selben Ausschläge zeigen. Auch muss mehr als eine Periode angezeigt werden. Dabei ist der Resonanzbereich besonders genau zu untersuchen.

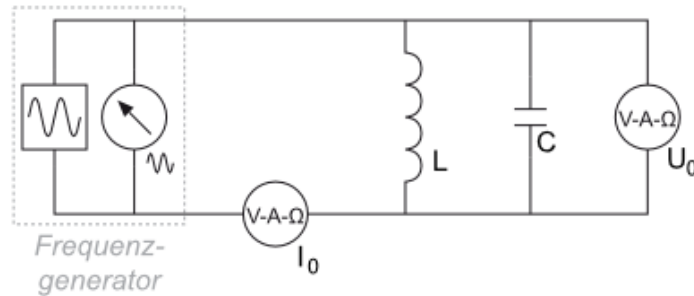


Abbildung 3: Schaltplan der Parallelschaltung von [LP1, 4.10.2014, 15:30].

Im zweiten Versuchsteil soll ein Parallelkreis aus Kondensator und Spule vermessen werden. In dieser Messung sollen die Spannung U und der Gesamtstrom I für verschiedene Frequenzen ausgewertet werden. Auch hier soll die Resonanzstelle wieder besonders genau untersucht werden.

Für die Auswertung werden abschließend die Daten der einzelnen Bauteile aufgezeichnet. Dies sind:

- Einzelner ohmscher Widerstand R_Ω
- Ohmscher Widerstand der Spule R_L
- Innenwiderstand des Amperemeters R_A
- Kapazität des Kondensators C .

Während der Messungen ist darauf zu achten, dass die hier verwendeten Spannungen *tödlich* sein können und dass deshalb auf keinen Fall blanke Kabelenden herumliegen dürfen. Auch muss vor jeder Änderung am Aufbau sichergestellt werden, dass die Spannung abgeschaltet ist.

4 Auswertung

4.1 Widerstand und Spule in Reihe

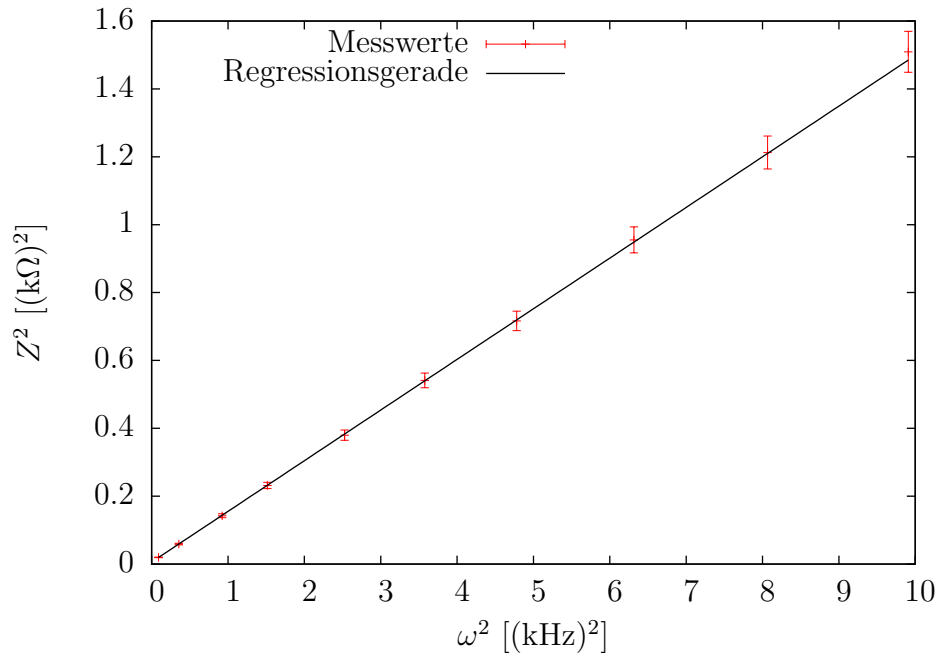


Abbildung 4: Quadrat des Scheinwiderstands als Funktion des Quadrates der Kreisfrequenz.

Da zu Beginn der Kondensator überbrückt ist, ergibt sich aus der quadrierten Gleichung (5) nur

$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2 \quad .$$

Trägt man also ω^2 gegen Z^2 auf, so ergibt sich eine Gerade $y = mx + b$ mit $b = R^2$ und $m = L^2$. Aus dem Fit der Abb. 4 ergibt sich so:

$$L = (386.3 \pm 0.6) \text{ mH} \quad \text{und} \\ R = (77.3 \pm 1.1) \Omega \quad .$$

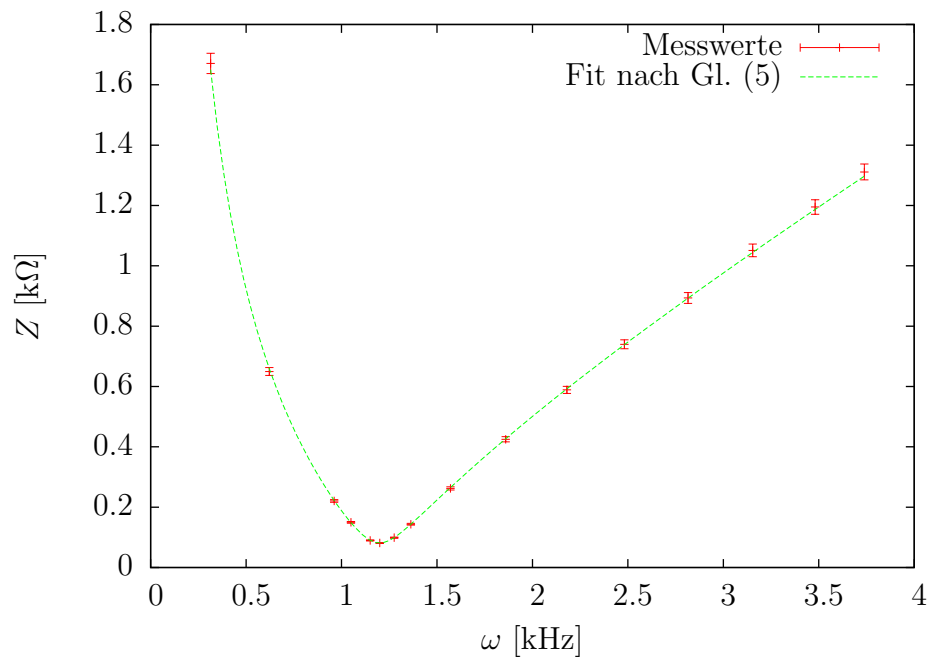


Abbildung 5: Scheinwiderstand des Serienresonanzkreis als Funktion der Kreisfrequenz.

4.2 *RLC*-Serienschaltung

In Abb. 5 wird der Scheinwiderstand gegen die Kreisfrequenz aufgetragen. Der Fit nach der theoretischen Kurve (5) ermittelte so

$$\begin{aligned}
 R &= (80.9 \pm 0.5) \, \Omega \quad , \\
 L &= (386.1 \pm 1.0) \, \text{mH} \quad \text{und} \\
 C &= (1.799 \pm 0.005) \, \mu\text{F}
 \end{aligned}$$

als Werte.

Die gewichteten Mittelwerte aus den bisherigen Werten betragen:

$$\begin{aligned}
 \overline{L} &= (386.2 \pm 0.6) \, \text{mH} \\
 \overline{R} &= (80.3 \pm 0.5) \, \Omega
 \end{aligned}$$

Nach [Tip98, S. 954] gilt:

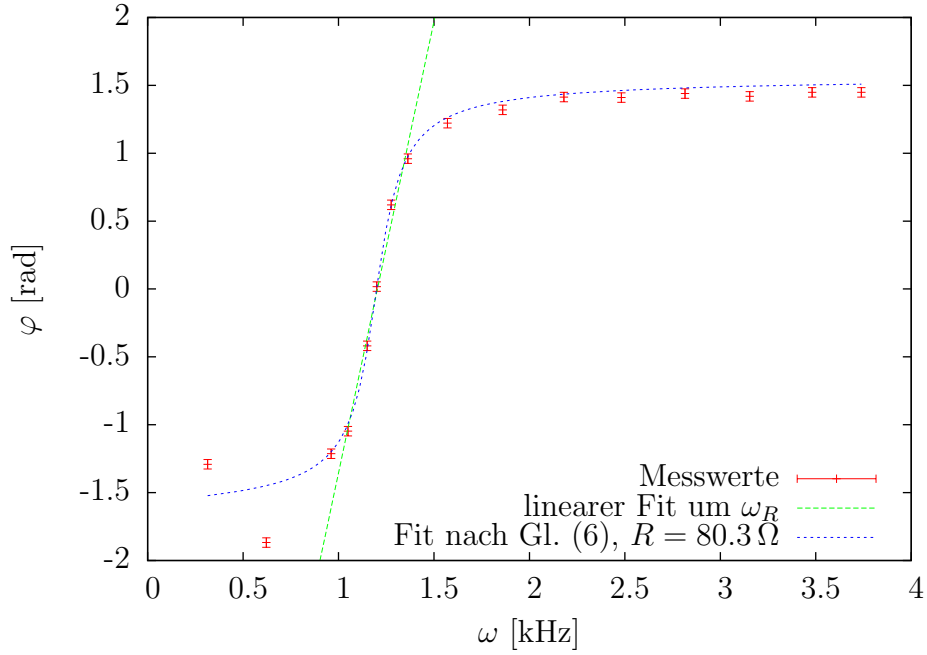


Abbildung 6: Phasenverschiebung des Serienresonanzkreises.

$$\omega_{R\,LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{mit}$$

$$\sigma_{\omega_{R\,LC}} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_L^2}{L^2} + \frac{\sigma_C^2}{C^2}}}{2 \cdot \sqrt{CL}}$$

$$\omega_{R\,LC} = (1199.9 \pm 2.3) \text{ Hz}$$

wobei die Werte aus dem Fit von Abb. 5 stammen. Aus dem Fit nach Gleichung (6) von Abb. 6 kann man L und C bestimmen. Dies ist möglich, da für $R = 80.3 \Omega$ der Mittelwert der vorigen Messungen verwendet wurde. Ohne diese Angabe ergeben sich Fehler der Werte von 3000%. Es ergeben sich:

$$C = (1.80 \pm 0.23) \mu\text{F} \quad \text{und}$$

$$L = (390 \pm 50) \text{ mH} \quad .$$

Da um die Resonanzfrequenz ω_R der Arcustangens ungefähr linear ist, lässt sich in diesem Bereich eine Gerade $y = m \cdot x + b$ an die Messwerte fitten, für die gilt:

$$\omega_{\text{Phase}} = -\frac{b}{m}$$

$$\sigma_{\omega_{\text{Phase}}} = \frac{1}{m^2} \cdot \sqrt{b^2 \cdot \sigma_m^2 + m^2 \cdot \sigma_b^2}$$

$$\omega_{\text{Phase}} = (1200 \pm 120) \text{ Hz}$$

4.2.1 Teilspannungen

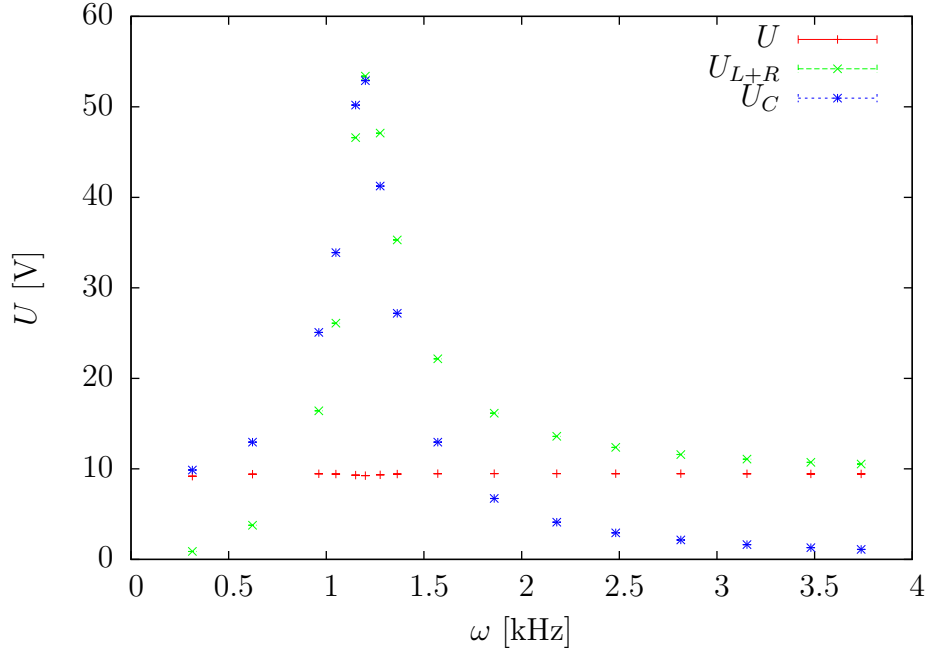


Abbildung 7: Teilspannungen des Serienresonanzkreises.

In Abb. 7 sind alle Spannungen in Abhängigkeit der Frequenz aufgetragen. Dabei fällt auf, dass die Teilspannungen U_C und U_{L+R} beide ihr Maximum bei der Resonanzfrequenz haben. Außerdem sind diese hier ungefähr gleich groß, wie schon in Kapitel 2.2 erwähnt. In der Abbildung 8 sind die Spannungen U_C und U_{L+R} sowie die Gesamtspannung U maßstabsgetreu eingezeichnet, welche sich bei der Messung der Resonanzfrequenz ergeben. Dazu werden die Messwerte bei einer gemessenen Phasenverschiebung von 1° verwendet: $U = 9.26 \text{ V}$, $U_C = 52.9 \text{ V}$ und $U_{L+R} = 53.4 \text{ V}$. Der eingezeichnete Winkel $\varphi = \arccos\left(\frac{U}{U_{L+R}}\right) = 80^\circ = 1.396 \text{ rad}$ ist die Phasenverschiebung zwischen U_{L+R} und dem Strom I . Da hier kein kapazitiver Widerstand vorhanden ist, kann man diese Verschiebung auch mit der Formel (6) ausrechnen. Dazu wird $C = 0$ gesetzt:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega_R L}{R}\right).$$

Da alle drei Größen fehlerbehaftet sind, folgt mit der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{(L\omega_R)^2 + R^2} \cdot \sqrt{(LR)^2 \sigma_{\omega_R}^2 + (L\omega_R)^2 \sigma_R^2 + (R\omega_R)^2 \sigma_L^2}.$$

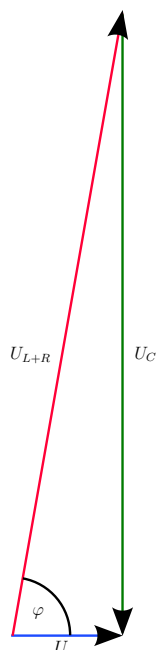


Abbildung 8: Zeigerdiagramm der Spannungen U , U_C und U_{L+R} der Serienschaltung bei der Resonanzfrequenz ω_R

Für die gewichteten Mittelwerte $\overline{\omega_R} = (1199.9 \pm 2.3) \text{ Hz}$, $\overline{R} = (80.3 \pm 0.5) \Omega$ und $\overline{L} = (386.2 \pm 0.6) \text{ mH}$ ergibt sich eine Phasenverschiebung von

$$\varphi = (1.399 \pm 0.001) \text{ rad} \quad .$$

4.3 Parallelkreis

In Abb. 9 ist der Scheinwiderstand Z gegen die Kreisfrequenz für den Parallelkreis aufgetragen. Aus dem Fit nach Formel (8) dieser Abbildung ergibt sich

$$\begin{aligned} R_L &= (68 \pm 5) \text{ k}\Omega \quad , \\ L &= (370 \pm 10) \text{ mH} \quad \text{und} \\ C &= (1.88 \pm 0.05) \mu\text{F} \quad . \end{aligned}$$

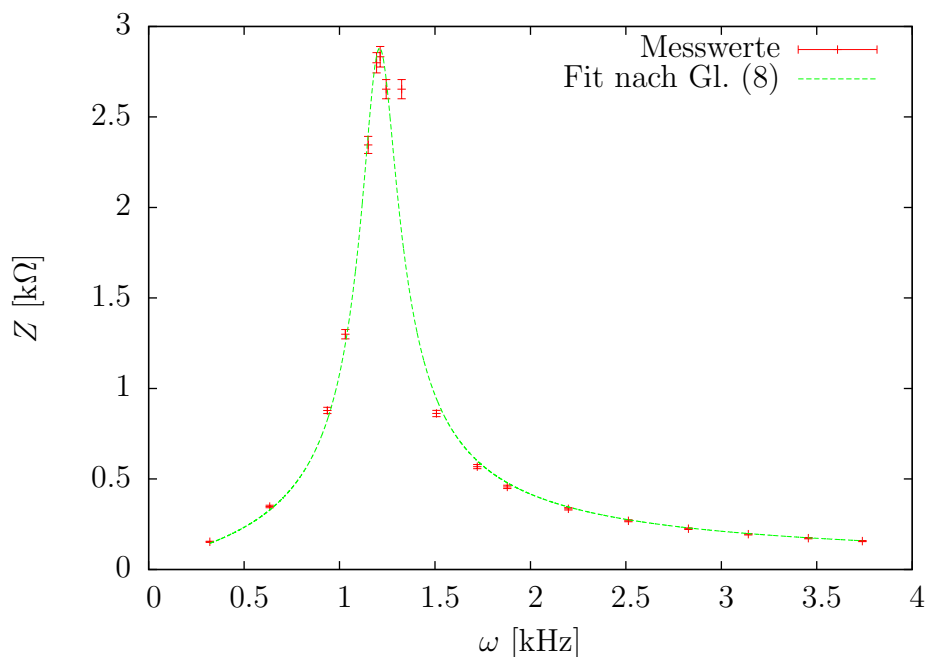


Abbildung 9: Scheinwiderstand des Parallelkreises als Funktion der Kreisfrequenz.

5 Diskussion

5.1 Serienschaltung

In Abb. 9 ist zu erkennen, dass der 2. aufgezeichnete Wert deutlich von der Theoriekurve abweicht, obwohl die anderen relativ dicht an ihr liegen. Schon während der Messung stach dieser Wert aus den anderen heraus. Dies könnte daran liegen, dass das Oszilloskop statt (-107°) $(+107^\circ)$ angezeigt hat, was -73° entspräche und gut in die Kurve passte. Dies würde die großen Fehler im Fit dieser Daten erklären und die daraus resultierenden Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Kapazität C und der Induktivität L .

Messgröße	Gewichteter Mittelwert
$\overline{\omega_R}$	$(1199.9 \pm 2.3) \text{ Hz}$
\overline{R}	$(80.3 \pm 0.5) \Omega$
\overline{L}	$(386.2 \pm 0.6) \text{ mH}$
\overline{C}	$(1.800 \pm 0.005) \mu\text{F}$

Tabelle 1: Mittelwerte aus allen Messungen

Die graphische Auswertung der Teilspannungen aus Abb. 8 liefert eine Phasenverschiebung von $\varphi = 1.396 \text{ rad}$, was von dem theoretischen Wert von $\varphi = (1.399 \pm 0.001) \text{ rad}$ um 3‰ abweicht. Der Wert liegt zwar nicht im Fehlerintervall, aber dies könnte auch an einer falschen graphischen Darstellung liegen.

Die Messwerte außer der Resonanzfrequenz (siehe Abschnitt 5.2) zeigten zwar größere Streuungen um die Mittelwerte, aber ihre Fehlerintervalle überschneiden sich. Da der Gesamtwiderstand in einer Reihenschaltung sich addiert, müsste $R = R_L + R_\omega$ sein. Das die mit einem Multimeter gemessenen Widerständen $R_L + R_\omega = 75.7 \Omega$ statt der berechneten $R_{L+\omega} = 80.3 \Omega$ betragen (eine Abweichung von 6%) liegt vermutlich daran, dass das Amperemeter noch in dem Stromkreis mit eingeschlossen war.

5.2 Resonanzfrequenz

Aus allen Messungen sticht die der Resonanzfrequenz positiv heraus. Die Werte für die Resonanzfrequenz ω_R waren durchgehend auffallend konsistent und wichen von dem gewichteten Mittelwert von $\overline{\omega_R} = (1199.9 \pm 2.3) \text{ Hz}$ um höchstens 2 Hz ab. Dies ist insofern bemerkenswert, als dass die Fehlerintervalle bis zu 10% des Messwertes ausmachten. Es spricht dafür, dass keine der Messungen einen systematischen Fehler diesbezüglich aufweist.

5.3 Parallelschaltung

Da mit der Parallelschaltung nur einen Versuch durchgeführt wurde, sind keine Vergleiche möglich. Allerdings ist der gemessene Spulenwiderstand R_L mit $R_L = (68 \pm 5) \text{ k}\Omega$ nur um 4% größer, als der gemessene mit $R_L = (65.6 \pm 0.1) \Omega$. Dieser Wert liegt auch in dem sehr großen Fehlerintervall.

5.4 angenommene Fehler

Die Fehler der Widerstandsmessungen wurden mit 0.1Ω abgeschätzt, da das Messgerät diese Genauigkeit bereitstellte. Die Frequenzmessungen wurden als präzise eingestuft, da hier die kleinsten Fehler zu erwarten waren und somit die anderen Messungen im Verhältnis deutlich unpräziser sind. Bei den Spannungsmessungen wurden Fehlerintervalle von 0.01 V angenommen, was die Genauigkeit der Messgeräte von $(0.25\% + 1 \text{ Digit})$ nach oben abschätzt. Ebenso wurde die Strommessung mit $\sigma_I = 2\%$ abgeschätzt, was höher als die eigentliche Ungenauigkeit von $(1\% + 1 \text{ Digit})$ ist.

Literatur

- [Gia10] Giancoli, Douglas C.: *Physik - Lehr- und Übungsbuch*. Pearson Education Deutschland, München, 3. Auflage, 2010, ISBN 978-3-8689-4023-7.
- [Gri99] Griffith, David J.: *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 3. Auflage, 1999, ISBN 0-13-805326-X.
- [LP1] *Lehrportal der Universität Göttingen*. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4165>.
- [Nol07] Nolting, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 8. Auflage, 2007, ISBN 978-3-540-71251-0.
- [Tip98] Tipler, Paul A.: *Physik*. Spektrum-Verlag Heidelberg Berlin, 2. Auflage, 1998, ISBN 3-86025-122-8.