Grundpraktikum der Fakultät für Physik Georg-August-Universität Göttingen

Versuch 14 Wechselstromwiderstände

Praktikant: Joscha Knolle

Ole Schumann

E-Mail: joscha@htilde.de

Durchgeführt am: 13.09.2012 Abgabe: 18.09.2012

Testiert:		

Inhaltsverzeichnis

1.	Einle	eitung	2
2.	2.2.	Impedanz	2 3 3
3.	3.1. 3.2.	Scheinwiderstand und Resonanzfrequenz in Serienschwingkreisen . Scheinwiderstand und Resonanzfrequenz in Parallelschwingkreisen Versuchsaufbau	4 4 5
4.	Durc	chführung	6
5.	5.1. 5.2. 5.3. 5.4.	Induktivität der Spule	6 7 10 10 12
6.	Disk	ussion	12
Α.	Liter	aturverzeichnis	13

1. Einleitung

In diesem Versuch wollen wir uns mit Wechselstrom und insbesondere auch mit Wechselstromwiderständen beschäftigen. Dabei wollen wir zuerst wichtige Begriffe wie kapazitive und induktive Widerstände erläutern und anschließend diese Werte aus den Versuchsdaten gewinnen.

Außerdem werden wir Phasenverschiebungen zwischen Spannung und Strom messen und erklären.

2. Theorie

2.1. Impedanz

Der in Gleichstromkreisen bekannte Begriff von Widerständen R soll nun auch auf Wechselstromkreise übertragen werden. Analog dazu wird der Quotient aus Spannung und Strom definiert, wobei hier Spannung U(t) und Strom I(t) zeitabhängig sind:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t); \tag{1}$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{2}$$

Dabei sind U_0 und I_0 die Amplituden und φ die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Im Allgemeinen wird jedoch mit komplexen Strömen und Spannungen gerechnet, um mit der handlicheren e-Funktion rechnen zu können und keine Additionstheoreme bemühen zu müssen. Dann ergeben sich die Spannungsbzw. Stromverläufe zu

$$\underline{u}(t) = U_0 e^{i\omega t}; \tag{3}$$

$$\underline{i}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}. \tag{4}$$

Das (komplexe) Verhältnis aus u(t) und i(t) bezeichnet man als Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}.\tag{5}$$

Der Scheinwiderstand $Z = |\underline{Z}|$ ist nun definiert durch

$$Z = \frac{U_0}{I_0}. (6)$$

Zusätzlich ist eine Schreibweise über den Wirkwiderstand R und den Blindwiderstand (Reaktanz) X verbreitet: $Z^2 = R^2 + X^2$. Dabei erzeugt der Wirkwiderstand

keine Phasenverschiebung, ist aber der Teil des Widerstands, der elektrische Energie in andere Energieformen umwandelt. Der Blindwiderstand X sorgt hingegen für die Phasenverschiebung und lässt die Energie nur zwischen Erzeuger und Verbraucher pendeln.

2.2. Impedanz einer Spule

Nach [TIP, S. 1134] gilt für Spulen der Zusammenhang

$$U = -U_{\text{ind}} = L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},\tag{7}$$

wobei L die Induktivität ist und $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ die Änderung des Stromes durch die Spule bezeichnet. Setzt man für U und I nun die komplexen Werte aus Gleichung (3) und (4) ein, so erhält man

$$U_0\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right] = LI_0\omega\left[i\cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi)\right]. \tag{8}$$

Da diese Gleichheit für jede Zeit t gelten soll, folgt wegen $\cos(t - \pi/2) = \sin(t)$, dass $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ gilt. Die Spannung läuft also dem Strom um eine Viertelperiode voraus.

Durch Integration von Gleichung (7) findet man weiter

$$I(t) = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t}, \tag{9}$$

woraus mit Gleichung (5) direkt $Z_L = i\omega L$ folgt. Der Blindwiderstand einer Spule wird nach Definition als Imaginärteil der Impedanz als $X_L = \omega L$ geschrieben.

2.3. Impedanz eines Kondensators

Aus dem Zusammenhang $Q=C\cdot U$ zwischen Ladung Q und Spannung U eines Kondensators und der Definition des Stroms $I=\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ findet man

$$Q(t) = C \cdot U_0 e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad I(t) = C \cdot U_0 i\omega e^{i\omega t} = C \cdot i\omega U(t)$$

$$\Rightarrow Z_C := \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{1}{i\omega C}.$$
(10)

Die Reaktanz eines Kondensators ist entsprechend $X_C = -\frac{1}{\omega C}$.

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ergibt sich hier nach ähnlicher Rechnung wie oben zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also eilt hier der Strom der Spannung voraus.

Vergleicht man die Impedanzen zwischen Kondensator und Spule, so erkennt man, dass die Impedanz der Spule mit wachsender Frequenz ω linear zunimmt, wohingegen die Impedanz des Kondensator antiproportional zur Frequenz ist.

3. Materialien & Methoden

3.1. Scheinwiderstand und Resonanzfrequenz in Serienschwingkreisen

Die Resonanzfrequenz ω_R ist die
jenige Frequenz, bei der die Reaktanz X verschwindet. Für einen in Reihe geschalteten Schwingkreis ad
dieren sich die Impedanzen genau wie die Widerstände in einem Gleichstromkreis. Daher gilt

$$Z_{ges} = Z_R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L. \tag{11}$$

Da die Resonanzfrequenz erreicht wird, wenn X = 0, also

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
 (12)

gilt, folgt auch, dass die Impedanz Z hier ein Minimum annimmt (|Z| = R).

Der Scheinwiderstand berechnet sich aus dem Betrag der komplexen Größe $Z_{\rm ges}$, also

$$|Z_{\rm ges}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$
 (13)

Die Phasenverschiebung φ ist der Winkel zwischen Real- und Imaginärteil der Impedanz, also

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$
(14)

3.2. Scheinwiderstand und Resonanzfrequenz in Parallelschwingkreisen

Wie bei Gleichstromkreisen addieren sich die Widerstände bzw. Impedanzen bei einer Parallelschaltung mit dem Kehrwert, also

$$\frac{1}{Z_{ges}} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \tag{15}$$

Der Betrag der Impedanz, der Scheinwiderstand, berechnet sich hier zu

$$|Z_{ges}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$
 (16)

Die Resonanzfrequenz ω_R wird erneut bei $\omega_R = (C \cdot L)^{-\frac{1}{2}}$ angenommen, jedoch besitzt die Impedanz hier ein Maximum.

Die Phasenverschiebung berechnet sich wie oben, jedoch findet man aufgrund der anderen Schaltung

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{R}\right). \tag{17}$$

3.3. Versuchsaufbau

Mit Hilfe des Schaltplans in Abbildung 1 wird der Versuch aufgebaut. Es werden also ein Widerstand, eine Spule und ein Kondensator in Reihe geschaltet und parallel dazu ein Frequenzgenerator gesetzt. Dabei werden mehrere Multimeter eingebaut, um während des Versuchs die Messgrößen überwachen und einstellen zu können. Um sich den Strom- und Spannungsverlauf graphisch anzeigen zu lassen und die Phasenverschiebung zu erkennen, wird ein Oszilloskop in den Schaltkreis hinzugefügt. Da Oszilloskope jedoch keine Ströme sondern nur Spannungen messen können, wird zur Strommessung das Oszilloskop parallel zum ohmschen Widerstand geschaltet, wo Strom und Spannung stets in Phase sind. Der zweite Eingang wird an die Spannungsquelle angeschlossen und hier die Spannung abgenommen.

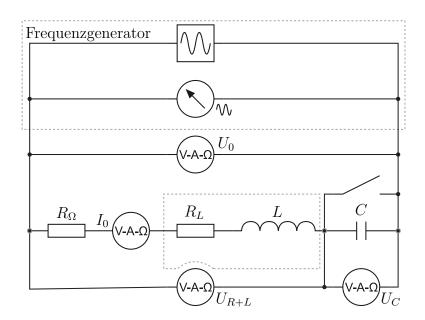


Abbildung 1: Schaltplan des Versuchs, geändert nach [LP]

4. Durchführung

Nachdem der Versuch aufgebaut wurde und das Oszilloskop an den Messbereich angepasst wurde, wird in einer ersten Messreihe der Schalter geschlossen und somit der Kondensator überbrückt. Nun wird für zehn verschiedene Frequenzen aus dem Bereich $50\,\mathrm{Hz}$ bis $500\,\mathrm{Hz}$ im Abstand von ungefähr $50\,\mathrm{Hz}$, welche am Frequenzgenerator eingestellt werden können, der Strom I und die Spannung U gemessen. Zusätzlich wird an den Kurven am Oszilloskop der Phasenunterschied abgelesen und notiert.

Als zweite Messung wird der Schalter geschlossen und in dem entstandenen Schwingkreis werden die Werte I, $U_{\rm ges}$, φ , U_C und U_{R+L} in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Dazu wird zunächst erneut das Raster der Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$ bis $500\,\mathrm{Hz}$ in Schritten von $50\,\mathrm{Hz}$ durchlaufen und anschließend der Resonanzbereich in kleineren Schritten genau untersucht.

Anschließend wird ein Parallelkreis aus Spule und Kondensator aufgebaut und es werden wieder Wertepaare aus Spannung und Strom in Abhängigkeit von der Frequenz notiert.

Mit Hilfe des Multimeters werden die einzelnen ohmschen Widerstände vermessen, der Innenwiderstand des Ampèremeters notiert und die Spulendaten aufgeschrieben. Außerdem wird der Widerstand R_L der Spule und die Kapazität C des Kondensators vermessen.

5. Auswertung

5.1. Induktivität der Spule

Zuerst wollen wir aus der Spannung und dem Strom die Induktivität der Spule bestimmen. Dazu berechnen wir die Impedanz, beziehungsweise genauer das Impedanzquadrat Z^2 über $Z^2 = U^2/I^2$. Zusätzlich bestimmen wir aus der Frequenz f die Kreisfrequenz ω über $\omega = 2\pi f$.

Aus Gleichung (13) kann man folgern, dass

$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L \tag{18}$$

gilt, da der Kondensator in diesem Teil noch durch den Schalter überbrückt wird. Trägt man nun Z^2 gegen ω^2 auf, so erwartet man einen linearen Zusammenhang. Führt man weiter eine lineare Regression $g(x) = m \cdot x + b$ durch, so erhält man die Zusammenhänge

$$L = \sqrt{m} \quad \text{und} \quad R = \sqrt{b}.$$
 (19)

In Abbildung 2 sind sowohl unsere Messwerte als auch die Regression eingezeichnet. Für unsere Werte lieferte gnuplot $m=(0.1616\pm0.0004)\,\mathrm{H^2}$ und $b=(0.0047\pm0.0017)\,\mathrm{k\Omega^2}$. Daher können wir die Induktivität der Spule und den Gesamtwiderstand im Stromkreis zu

$$L = (0.4020 \pm 0.0006) \,\text{H}$$
 bzw. $R = (68.3 \pm 6.4) \,\Omega$ (20)

bestimmen.

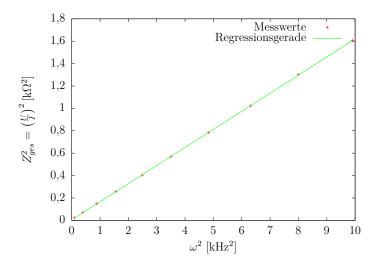


Abbildung 2: Impedanzquadrat Z^2_{ges} als Funktion des Kreisfrequenzquadrats ω^2

Der Fehler berechnet sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu

$$\sigma_L = \sigma_m \frac{1}{\sqrt{L}}$$
 bzw. $\sigma_R = \sigma_b \frac{1}{\sqrt{R}}$. (21)

Für die Spannung U haben wir einen Fehler von $\sigma_U = 0,005 \,\mathrm{V}$ und für den Strom einen Fehler von $\sigma_I = 0,005 \,\mathrm{mA}$ angenommen. Die Fehlerbalken sind allerdings so klein, dass sie in dem Diagramm nicht erkennbar wären und wurden deshalb nicht eingezeichnet.

5.2. Resonanzfrequenz und Impedanzen im Serienresonanzkreis

Für die Auswertung des zweiten Versuchsteils ist in Abbildung 3 die Kreisfrequenz ω der Wechselspannung gegen den Betrag der Gesamtimpedanz Z_{ges} aufgetragen. Dabei hat man die Kreisfrequenz aus der abgelesenen Frequenz durch $\omega = 2\pi f$ und den Betrag der Impedanz aus den gemessenen Spannungen und Stromstärken durch $|Z_{ges}| = U/I$ bestimmt.

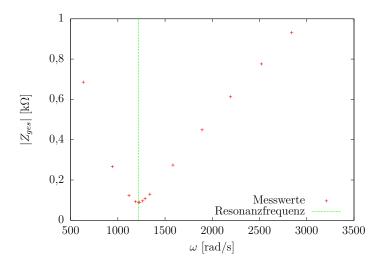


Abbildung 3: Impedanzbetrag $|Z_{qes}|$ als Funktion der Kreisfrequenz ω

Im Bereich des Minimums der Impedanzkurve wurden Werte an den Frequenzen 189 Hz, 194 Hz und 196 Hz aufgenommen, wobei bei 194 Hz das Minimum der Impedanz von allen Messwerten liegt. Wir nehmen daher diese Frequenz als Resonanzfrequenz mit dem Fehlerintervall [189 Hz; 196 Hz] an. In der Kreisfrequenz erhält man also einen maximalen Fehler $\sigma = 32 \, \text{rad/s}$, und man erhält gerundet

$$\omega_R = (1220 \pm 40) \,\text{rad/s}.$$
 (22)

Ebenso ermittelt man den gesamten ohmschen Widerstand der Schaltung zu

$$R_{qes} = (89 \pm 3) \,\Omega.$$
 (23)

In Abbildung 4 ist aus dem gleichen Versuchsteil die Winkelfrequenz ω gegen die Phasenverschiebung ϕ aufgetragen. Hier erkennt man die Resonanzfrequenz daran, dass die Phasenverschiebung an der Resonanzfrequenz verschwindet ($\phi = 0$), und verifiziert leicht unser vorheriges Ergebnis aus Gleichung (22).

Der gesamte ohmsche Widerstand der Schaltung ist bestimmt durch die Reihenschaltung aus dem einzelnen ohmschen Widerstand $R_{\Omega} = 10 \,\Omega$, dem Amperemeter mit Innenwiderstand $R_A = (10,40 \pm 0,05) \,\Omega$ und dem ohmschen Widerstand der Spule R_L . Da die ersten beiden bekannt sind, lässt sich der ohmsche Widerstand der Spule berechnen zu

$$R_L = R_{ges} - R_{\Omega} - R_A = (69 \pm 4) \Omega,$$
 (24)

wobei sich der Fehler nach dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung berechnen lässt durch

$$\sigma_{R_L} = \sqrt{\sigma_{R_{ges}}^2 + \sigma_{R_\Omega}^2 + \sigma_{R_A}^2}. (25)$$

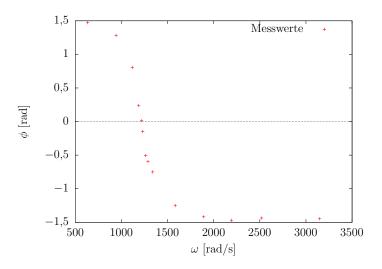


Abbildung 4: Phasenverschiebung ϕ als Funktion der Kreisfrequenz ω

Im Falle der Resonanzfrequenz gilt nach Gleichung (13)

$$R_{ges} = \sqrt{R_{ges}^2 + \left(\omega_R L - \frac{1}{\omega_R C}\right)^2}.$$
 (26)

Umgestellt ergibt sich der Zusammenhang

$$C = \frac{1}{\omega_R^2 L},\tag{27}$$

sodass man mit dem Fehler

$$\sigma_C = C\sqrt{4\frac{\sigma_{\omega_R}^2}{\omega_R^2} + \frac{\sigma_L^2}{L^2}} \tag{28}$$

den Wert $C = (1.67 \pm 0.11) \,\mu\text{F}$ erhält.

gesamter ohmscher Widerstand		$(89 \pm 3) \Omega$
ohmscher Widerstand		$(10\pm1)\Omega$
Resonanzfrequenz	ω_R	$(1220 \pm 40) \text{rad/s}$
Induktivität der Spule		$(0.4020 \pm 0.0006) \mathrm{H}$
ohmscher Widerstand der Spule		$(69 \pm 4) \Omega$
Kapazität des Kondensators		$(1,67 \pm 0,11) \mu \text{F}$
Innenwiderstand des Amperemeters		$(10,40\pm0,05)\Omega$

Tabelle 1: Parameter des Serienresonanzkreises

Die Ergebnisse für die Parameter des Serienresonanzkreises sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

5.3. Spannungen im Serienresonanzkreis

In Abbildung 5 sind die Spannungen U, U_C und U_{R+L} gemeinsam mit der Kreisfrequenz ω eingetragen. Hier erkennt man erneut, dass die Resonanzfrequenz bei etwa $\omega_R = 1220\,\mathrm{Hz}$ liegt. Dieser Wert ist durch eine senkrechte Markierung eingetragen.

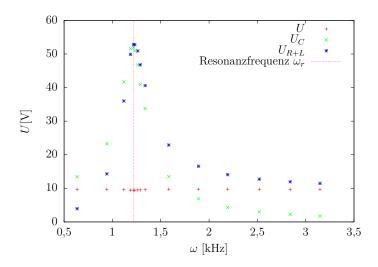


Abbildung 5: Spannungen U_i als Funktionen der Kreisfrequenz ω

Auffällig ist zudem, dass bei Frequenzen mit $\omega < \omega_r$ der Spannungsabfall am Kondensator höher ist als an Spule und Widerstand zusammen. Jedoch kehrt sich dies um, nachdem die Resonanzfrequenz erreicht wurde: Für $\omega > \omega_R$ gilt stets $U_{R+L} > U_C$.

Dieses Verhalten ist anhand von Gleichung (13) zu erklären: Ist ω klein, so ist der Summand ωL auch klein gegenüber $1/\omega C$, wodurch dieser Teil überwiegt und die Impedanz am meisten beeinflusst. So fällt hier eine höhere Spannung ab. Im Gegensatz dazu wird für hohe Frequenzen der Term ωL sehr groß gegenüber dem Einfluss des Kondensators, so dass an der Spule eine höhere Spannung gemessen wird.

Wie erwartet ist die Spannung U während der Messung weitestgehend konstant.

5.4. Zeigerdiagramm und Phasenverschiebung

Nun wollen wir die Darstellung der Spannungen U, U_C und U_{R+L} im Zeigerdiagramm betrachten. Dazu nehmen wir als Resonanzfrequenz den Messwert an, der am nächsten an der Resonanzfrequenz lag, also $f=194\,\mathrm{Hz}$ oder $\omega=1219\,\mathrm{Hz}$. Für diesen Messwert sind in Abbildung 6 die drei genannten Spannungen eingezeichnet: Die Spannung U besitzt ausschließlich einen Realteil, da sie stets phasengleich

mit dem Strom verläuft. Die Spannung U_C wird an keinem ohmschen Widerstand abgenommen, so dass sie nur einen Imaginärteil besitzt. Aus Gleichung (10) wissen wir, dass die Reaktanz durch $X = -1/\omega C$ gegeben ist, also zeigt im Diagramm dieser Spannungspfeil nach unten. Im Gegensatz dazu besitzt die Spannung U_{R+L} sowohl einen Real- als auch Imaginärteil, da diese sowohl über der Spule als auch über einem ohmschen Widerstand abgenommen wird. Da diese Spannung über den gesamten ohmschen Widerstand gemessen wird, müssen die Realteile der Spannungen U und U_{R+L} übereinstimmen. Der Betrag von U_{R+L} haben wir durch unsere Messung ermittelt, so dass dadurch auch der Imaginärteil eindeutig bestimmt ist.

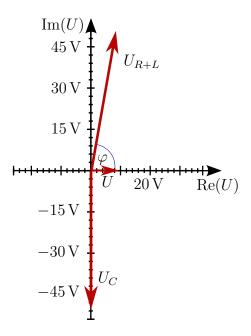


Abbildung 6: Zeigerdiagramm

Der Winkel φ zwischen I und U_{R+L} lässt sich nun über die Gleichung

$$\cos(\varphi) = \frac{U}{U_{R+L}} \tag{29}$$

bestimmen, da U und I stets gleichphasig sind.

Mit den abgelesenen Werten von $U=9,46\,\mathrm{V},\,U_C=51,9\,\mathrm{V}$ und $U_{R+L}=52,8\,\mathrm{V}$ erhalten wir einen Wert für φ von

$$\varphi = (79,67878 \pm 0,00018)^{\circ}. \tag{30}$$

Dabei haben wir $\sigma_U=0.005\,\mathrm{V}$ und $\sigma_{U_{R+L}}=0.05\,\mathrm{V}$ angenommen und den Fehler nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\frac{\sigma_{U_{R+L}}^2 \cos^2 \varphi + \sigma_U^2}{U_{R+L}^2 - U^2}} \tag{31}$$

berechnet.

Der theoretische Wert berechnet sich nach Gleichung (14) zu

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_{\Omega} + R_L}\right) = (80,84941 \pm 0,00006)^{\circ}.$$
 (32)

Die Werte für L, R_{Ω} und R_L wurden Tabelle 1 entnommen. Der Fehler berechnet sich nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\tan \varphi}{\omega L \left(\tan^2 \varphi + 1\right)} \sqrt{L^2 \sigma_{\omega}^2 + \omega^2 \sigma_L^2 + \left(\sigma_{R_{\Omega}}^2 + \sigma_{R_L}^2\right) \left(\tan^2 \varphi + 1\right)}.$$
 (33)

5.5. Impedanz des Parallelschwingkreises

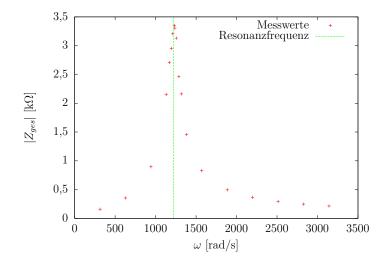


Abbildung 7: Impedanz $|Z_{\rm ges}|$ als Funktion der Kreisfrequenz ω

Zur Auswertung der dritten Versuchsreihe, der Messung des Parallelschwing-kreises aus Kondensator und Spule, ist in Abbildung 7 die Impedanz gegen die Kreisfrequenz aufgetragen. Da die gleichen Bauteile verwendet wurden wie im Serienschwingkreis, ist es nicht verwunderlich, dass man wieder die gleiche Resonanzfrequenz $\omega_R \approx 1220\,\mathrm{rad/s}$ findet.

6. Diskussion

Zur Beurteilung der Versuchsergebnisse sind in Tabelle 2 alle Werte eingetragen, die wir sowohl mit dem Multimeter als auch über die Spannungs- und Stromstärkemessungen an den Schwingkreisen bestimmt haben.

Messgröße	durch Multimeter	durch Schwingkreis
Spulenwiderstand R_L	$(67,50 \pm 0,05) \Omega$	$(69 \pm 4) \Omega$
Kapazität C	$(1,6870 \pm 0,0005) \mu\text{F}$	$(1,67 \pm 0,11) \mu \text{F}$

Tabelle 2: Vergleich von Versuchsergebnissen

Man erkennt gut, dass die Multimeterwerte immer in den Fehlerintervallen der Werte liegen, die aus den Schwingkreisen gewonnen wurden. Hier lieferte der Versuch also zufriedenstellende Werte.

Im ersten Teil der Auswertung wurde der Gesamtwiderstand des Stromkreises zu

$$R = (68.3 \pm 6.4) \,\Omega \tag{34}$$

bestimmt. Dieser Wert erscheint aber wenig verlässlich, da allein der Spulenwiderstand R_L diesen Wert übersteigt (bzw. knapp darunter liegt) und die Widerstände des ohmschen Widerstands R_{Ω} und der Innenwiderstand des Amperemeters noch einmal jeweils $10\,\Omega$ betragen. Verlässlicher erscheint hier der Wert aus Gleichung (23), welcher einen Gesamtwiderstand von etwa $R=89\,\Omega$ prognostiziert. Dieser Wert deckt sich somit sehr gut mit der Summe aus den vom Multimeter bestimmten Werten von R_L , R_{Ω} und R_A .

Die Resonanzfrequenz wurde mit verschiedenen Messreihen bestimmt. Der erhaltene Wert von $\omega_r = 1220 \,\mathrm{rad/s}$ kann als sehr präzise angenommen werden, da man auch über die vom Multimeter bestimmen Werte für C und L über Gleichung (12) auf einen Wert in der gleichen Größenordnung kommt.

A. Literaturverzeichnis

- [LP] Lehrportal Physik. Wechselstromwiderstände. Online im Internet: http://lp.uni-goettingen.de/get/text/4165, abgerufen am 12.09.12, 17:31 Uhr.
- [TIP] Paul Tipler & Gene Mosca. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Sechste Auflage. Berlin, 2009.