Physikalisches Praktikum

Versuch 22

Mikroskop

Praktikanten:	**Johannes Dörr** mail@johannesdoerr.de physik.johannesdoerr.de	Gruppe:	14
		Datum:	28.09.2006
	Katharina Rabe kathinka1984@yahoo.de	Assistent:	Sebastian Geburt

1 Einleitung

In diesem Versuch beschäftigen wir uns mit einem der wichtigsten optischen Instrumente, dem Mikroskop. Der Versuch ist in zweit Teile geteilt, wobei wir uns im ersten Teil mit der Vergrößerung beschäftigen, während der zweite Teil dann das Auflösungsvermögen und die numerische Apertur des Mikroskops umfasst.

2 Theorie

2.1 Vergrößerung des Mikroskops

Das Mikroskop verdankt seine Vergrößerung dem Phänomen der Brechung, wie es im Protokoll zu Versuch 25, "Polarisation" beschrieben ist. Die Brechung erfolgt an einer Linse, dem Objektiv, mit der Brennweite f_1, die ein reeles Zwischenbild am Ende eines Tubuses erzeugt. Dieses Zwischenbild wird nun mit einer weiteren Linse, dem Okular, mit der Brennweite f_2, lupenartig beobachtet.

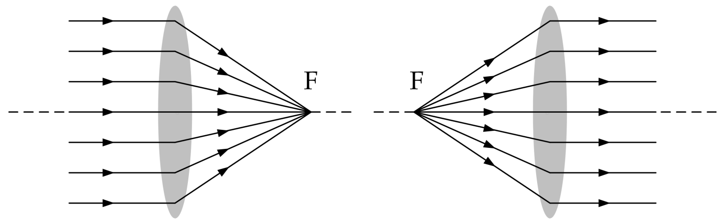

Figure 1: Strahlengang durch eine Sammellinse

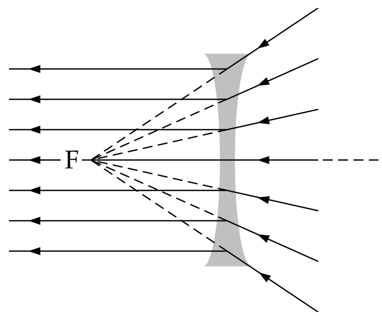

Figure 2: Strahlengang durch eine konkave Linse

2.1.1 Linsen

Linsen sind optische Geräte mit einer gleichförmig gekrümmten, kugelförmigen Oberfläche, an denen Licht gebrochen wird, da der Brechungsindex des Materials größer ist, als der der umgebenden Luft. Man unterscheidet zwei Sorten von Linsen:

1. Die konvexen Linsen oder auch Sammellinsen vereinigen achsenparallel auf die Linse treffende Strahlen in einem Punkt hinter der Linse. Den Abstand zwischen dem Linsenmittelpunkt und dem Sammelpunkt nennt man Brennweite f (siehe Abb. 1).
2. Die konkaven Linsen oder auch Streulinsen erzeugen aus achsparallelen Strahlen ein gestreutes Bild. Der Brennpunkt einer solchen Linse ist durch den Punkt definiert, an dem die Verlängerung der gestreuten Strahlen sich in einem Punkt vor der Linse sammelt. Somit ist auch hier die Brennweite f als Abstand des Linsenmittelpunkts zum Brennpunkt definiert(siehe Abb.2).

2.1.2 Funktionsweise des Objektivs

Das Objektiv im Mikroskop ist eine Sammellinse, in dessen einfacher bis doppelten Brennweite ein Objekt aufgestellt ist. Somit schneiden sich in einem Punkt hinter der Linse, welcher außerhalb der doppelten Brennweite liegt, der Mittelpunktsstrahl, der Brennpunktsstrahl und der zur optischen Achse parallele Strahl, welche von einem Punkt des Objektes ausgehen.
Dieses geschieht, da der Brennpunktsstrahl und der achsenparallele Strahl an der Linse gebrochen werden, sodass der Brennpunktsstrahl als achsenparalleler Strahl aus der Linse kommt und der achsenparallele Strahl zum Brennpunktsstrahl wird und somit hinter der Linse durch den Brennpunkt verläuft. Der Mittelpunktsstrahl wird nicht gebrochen (siehe Abb. 3)
Somit wird durch das Objektiv L_1 vom Objekt G, welches im Abstand g (Gegenstandsweite) vor der Linse steht, ein reeles Zwischenbild B erzeugt, welches in Abstand b (Bildweite) hinter der Linse auf dem Kopf steht. Mit Hilfe des Strahlensatz weiß man, dass die Vergrößerung durch folgendes beschrieben werden kann:

$$V_{ob} = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \tag{1}$$

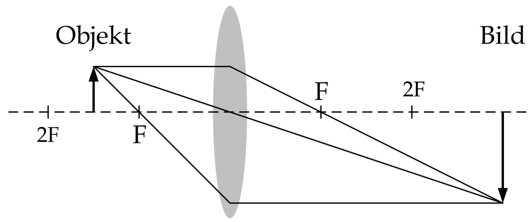

Figure 3: Strahlengang durch das Objektiv

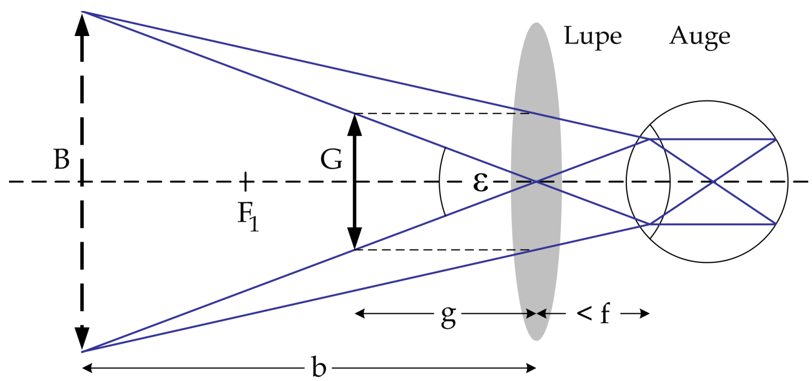

Figure 4: Strahlengang durch das Okular

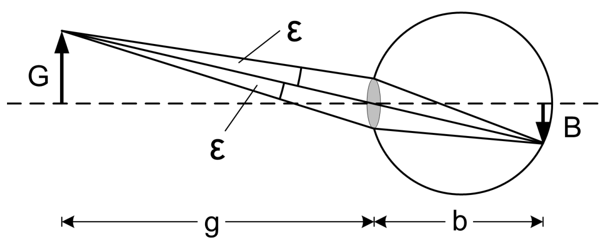

Figure 5: Der Sehwinkel

2.1.3 Funktionsweise des Okulars

Das Okular hat die Funktionsweise einer Lupe. Das heißt das vom Objektiv erzeugtes Zwischenbild B liegt innerhalb der Brennweite unseres Okulars, welches wiederum eine konkave Linse ist, die eine sehr geringe Brennweite hat. Aus diesem Zusammenhang ergibt sich, dass die drei Strahlen (Mittelpunkts-, Brennpunkts- und achsenparalleler) nach der Linse auseinander laufen (siehe Abb.4). Verlängert man diese aus der Linse tretenden Strahlen nun wieder vor die Linse, erhält man einen Punkt an dem sich die drei Strahlen treffen. An diesem Punkt entsteht ein neues virtuelles Bild B', welches außerhalb der Brennweite liegt, somit ist es wiederum vergrößert. Diese Vergrößerung wird negativ gezählt, damit die Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ erfüllt ist (Gerthsen II Kap. 9.5).
Da durch den Augendurchmesser die Bildweite vorgegeben ist, kann nur der Sehwinkel ϵ die Bildgröße B“ auf der Netzthaut verändern. Dabei ist der Sehwinkel als halber Öffnungswinkel der Linse beschrieben
Es gilt für den Sehwinkel:

$$\epsilon \approx \tan \epsilon = \frac{G}{g} \tag{2}$$

Somit wird das Bild zwar groß, aber noch lange nicht scharf auf die Netzhaut abgebildet. Damit dass Bild scharf wird, darf eine gewisse deutliche Sehweite, die Bezugssehweite s_0 nicht unterschritten werden, die beim Menschlichen Auge bei ca. $s_0 = 25cm$ liegt. Somit kann das Auge maximal ein Sehwinkel von $\epsilon_0 = \frac{B}{s_0}$ haben.

Benutzen wir nun unser Okular, verändert sich unser Sehwinkel $\epsilon = \frac{B‘}{s}$, wobei s der Abstand von der Netzhaut zum virtuellen Bild $B‘$ ist.
Die Vergrößerung V_{Ok} ist definiert als das Verhältnis der Sehwinkel mit und ohne Instrument, sodass gilt:

$$V_{ok} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{s_0 \cdot B‘}{s \cdot B} = \frac{s_0 \cdot b}{s \cdot g} \tag{3}$$

Die Vergrößerung nimmt allerdings nur so lange zu, bis das virtuelle Bild B‘ die Bezugssehweite erreicht hat, die auch hier nicht unterschritten werden sollte ($\Rightarrow s = -b = s_0$). Somit vereinfacht sich die maximale Vergrößerung des Okulars durch die Linsengleichung zu:

$$V_{ok} = \frac{s_0}{f_2} + 1 \tag{4}$$

Somit erhält man also für sehr kleine Brennweiten des Okulars große Vergrößerungen. Für den Fall, dass das Bild genau in der Brennebene liegt, treffen die 3 Strahlen genau parallel ins Auge und das neue vergrößerte Bild erscheint im Unendlichen. Der Sehwinkel wird somit zu $\epsilon \approx \tan\epsilon = \frac{B'}{s_0} = \frac{B}{f_2}$, sodass sich die Vergrößerung V durch Folgendes beschreiben lässt.

$$V_{ok} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{B \cdot s_0}{f \cdot B} = \frac{s_0}{f_2} \tag{5}$$

Die Vergrößerung ist also um einen kleiner als bei dem Bild das in der Brennweite liegt.

2.1.4 Aufbau und tatsächliche Vergrößerung des Mikroskops

Da wir unseren Gegenstand fast in die Brennebene der ersten Linse legen, kann man annehmen, dass unser Zwischenbild fast ganz am Ende unsers Tubuses liegt. Also gilt $b \approx t$ sodass unsere Vergrößerung des Objektivs zu

$$V_{ob} = \frac{t}{f_1} \tag{6}$$

wird. Genau genommen ist t jedoch nicht die Tubuslänge, sondern um die Brennweite des Okular f_2 reduzierte Tubuslänge, die sogenannte optische Tubuslänge. Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops wird dann durch die Vergrößerung durch das Okular (Gl.5), welches ein negatives Bild gibt und somit die Vergrößerung negativ macht, vervollständigt, sodass für die Gesamtvergrößerung gilt:

$$V_M = \frac{t}{f_1} \cdot -\frac{s_0}{F_2} = -\frac{t \cdot s_0}{f_1 \cdot f_2} \tag{7}$$

2.2 Auflösung und numerische Apertur des Mikroskops

Bei dem optischen Auflösungsvermögen handelt es sich um den kleinsten Abstand den zwei Punkte haben können, sodass sie noch getrennt voneinander erscheinen. Das Problem ergibt sich aus dem Phänomen der Beugung. Betrachtet man nun einen Punkt P_1 des Objekts, welcher im Abstand $g \approx f_1$ durch die Linse L_1 geht, die einen Durchmesser D hat, kann man im Abstand b hinter der Linse L_1 ein Beugungsbild erkannt werden, für welches gilt:

$$d_{beug} = 2,44\frac{\lambda \cdot b}{D} \tag{8}$$

Damit man nun einen zweiten Punkt vom ersten noch getrennt sehen kann, darf das nullte Beugungsmaximum des ersten Punktes gerade mit dem ersten Beugungsminima des zweiten Punktes zusammen fallen. Somit muss der Abstand von 2 Beugungsmaxima $0{,}5d_{beug}$ sein. Dieses entspricht nach der Abbildungsgleichung einem Objektabstand der beiden Punkte:

$$\Delta x_{min} = \frac{1}{2}d_{beug}\frac{f}{b} = 1{,}22\lambda\frac{f}{D} \tag{9}$$

Der Öffnungswinkel der Linse L_1 wird durch

$$2\sin\alpha = \frac{D}{f} \tag{10}$$

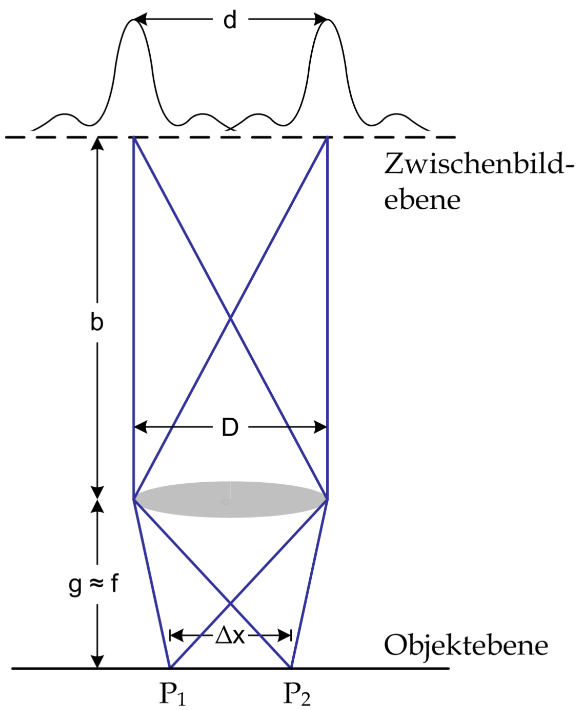

Figure 6: Herleitung zum Auflösungsvermögen

beschrieben, sodass wir für unseren Mindestabstand schreiben können, mit $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$:

$$\Delta x_{min} = 1{,}22 \frac{\lambda_0}{2n \cdot \sin\alpha} = 1{,}22 \frac{\lambda_0}{2 \cdot N} \quad . \tag{11}$$

Dabei ist N die numerische Apertur ($N = n \cdot \sin\alpha$).

Es muss aber auch zu jeder Zeit die Abbesche Sinusbedinugung erfüllt sein

$$\frac{n_\alpha \sin\alpha}{n_\beta \sin\beta} = \frac{b}{g} = V_{ob} \quad . \tag{12}$$

Mit b als Bildweite α bzw. β als Gegenstands- bzw. bildseitigem Öffnungswinkel, sodass das Verhältnis der numerischen Aperturen die Vergrößerung der Linse ist.
Wir gehen nun davon aus, dass wir im Bildraum als Medium Luft zur Verfügung haben und somit $n_\beta = 1$ gilt. So kann man die folgenden Umformungen anstreben

$$n_\beta \sin\beta \approx \beta \approx \frac{D}{b} = \frac{D}{V_{ob} \cdot a} \approx \frac{D}{V_{ob} \cdot x_{min} \frac{D}{\lambda}} = \frac{\lambda}{V_{ob} \cdot x_{min}} \tag{13}$$

Setzt man diese Erkenntnis nun in Gl. 12 ein, bekommt man einen neuen Ausdruck für den Mindestabstand von zwei Punkten, die noch aufgelöst werden können.

$$x_{min} = \frac{\lambda}{n_\alpha \sin\alpha} \tag{14}$$

Somit können wir für das Auflösungsvermögen A, das als Kehrwert des Mindestabstands definiert ist, schreiben:

$$A = \frac{N}{\lambda} \tag{15}$$

Somit löst das Mikroskop am besten für kleine Wellenlängen λ und für große numerische Aperturen der Gegenstandsseite auf. Dieses kann man erreichen, indem man eine Immersionsflüssigkeit, eine stark brechende Flüssigkeit, wie zum Beispiel Zedernöl $n = 1,5$, in das Gebiet zwischen dem Objekt und das Objektiv bringt. Auf

diesem Weg wird die Numerische Apertur größer und somit auch das Auflösungsvermögen.
Das Okular hat keinen Einfluss auf das Auflösungsvermögen vom Mikroskop.

3 Durchführung

3.1 Teil A

1. Messung der Gesamtvergrößerung: Das Objektmikrometer wird in den Objekttisch gespannt, und der Vergleichsmaßstab wird neben den Tisch gestellt, so dass beide Maßstäbe parallel liegen. Nun kann mit einem Auge durch das Mikroskop geschaut und mit dem anderen der Vergleichsmasstab betrachtet werden. (3 Messungen pro Okular / für jede Messung neu fokussieren)
2. Der Tubus mit dem Okular wird entfernt und der Tubus mit verschiebarer Mattscheide wird aufgesetzt. Nun wird durch Verschieben der Mattscheibe das reelle Zwischenbild fokussiert. Jetzt wird mit dem Messschieber das Objektivbild für jede Objektiv-Okular-Kombination vermessen. (3 Messungen für jedes Okular/ nicht am Objektivrad drehen)
3. Die Verschiebbare Mattscheibe wird aus dem Tubus entfernt und die Objektivvergrößerung wird für zwei verschiedene Tubuslängen gemessen
   - Durch Auflegen einer Matscheide auf den oberen Tubusrand (3 Messungen/ jede Messung neu fokussieren)
   - Durch Abnehmen des Tubuses und Auflegen der Mattscheibe auf den unteren Rand. Bitte die Länge t des Tubuses messen (3 Messungen / jede Messung neu fokussieren)
4. Das Okularmikrometer wird am Objektmikrometer geeicht und es wird die Haardicke gemessen, in dem man ein Haar zwischen zwei Objektträger legt und diese auf dem Objekttisch legt.

3.2 Teil B

1. Ein Glasmaßstab wir in das Mikroskop gebracht und dieser wird scharf eingestellt. Eine Aperturblende wird in das System eingefügt und dann so weit zugedreht, bis die einzelnen Maßstabeinteilungen grade nicht mehr aufgelöst werden.
2. Die Apertur der Anordnung wird bestimmt, in dem erstens der Spalt verschoben wird, bis es zu einer scharf stellung kommt. Der Abstand zwischen Gegenstand und Aperturblende wird bestimmt. Zweitens wird die Spaltbreite des Mikrometertriebs ausgemessen.
3. Die polierte Seite des Plexiglasstabes wird scharf im Mikroskop eingestellt. Nun wir das Okular durch eine Lochblende ersetzt. Durch die Lochblende wird die auf der Rückseite des Plexiglastabes eingeritzte Skala beobachtet und so der Bündeldurchmesser in der Skalenebene bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Teil A: Zeiss-Mikroskop

4.1.1 Okularvergrößerung (2.)

Die Vergrößerung V_{Ok} des Okulars ergibt sich aus dem Quotient von Gesamtvergrößerung des Mikroskops V_M, also mit Objektiv und Okular, und Vergrößerung V_{Ob} des Objektivs allein:

$$V_{Ok} = \frac{V_M}{V_{Ob}} \quad . \tag{16}$$

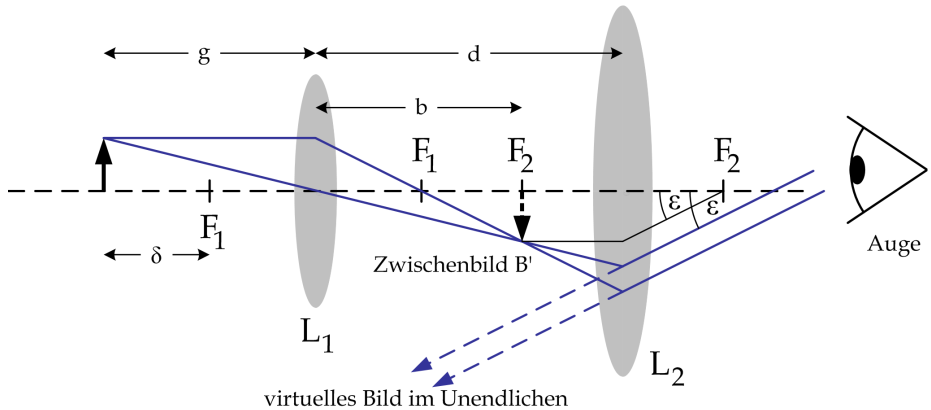

Figure 7: Aufbau des Mikroskops und dessen Strahlengang

Erstere wurde mit dem Vergleichsmaßstab, zweitere mit der verstellbaren Mattscheibe und Schieblehre bestimmt.

Die Vergrößerung V ist der Quotient aus abgebildeter Größe s_A und Objektgröße s_O:

$$V = \frac{s_A}{s_O} \quad . \tag{17}$$

Die folgende Tabellle zeigt die Zwischen- und Endergebnisse der Rechnung:

Okular	V_M	V_{Ob}	V_{Ok}	$V_{Ok,Angabe}$	**Abweichung**
1	$113{,}3 \pm 3{,}3$	$9{,}767 \pm 0{,}067$	$\Rightarrow\ 11{,}60 \pm 0{,}03$	12,5	7,2%
2	$83{,}0 \pm 3{,}0$	$9{,}67 \pm 0{,}03$	$\Rightarrow\ 8{,}58 \pm 0{,}06$	8,0	7,3%

Die Fehlerangabe für die Vergrößerung des Okulars ergibt sich mit:

$$\sigma_{V_{Ok}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{V_M}}{V_{Ob}}\right)^2 + \left(\frac{V_M \cdot \sigma_{V_{Ob}}}{V_{Ob}^2}\right)^2} \quad , \tag{18}$$

wobei σ_{V_M} und $\sigma_{V_{Ob}}$ die Standardabweichung der drei Messdurchgänge sind, bei denen die Mittelwerte für V_M und V_{Ob} bestimmt wurden.

4.1.2 Brennweite des Objektivs (3.)

In Durchführung 3 ermitteln wir die Vergrößerungen im Strahlengang mit (V_o) und ohne Tubus (V_u). Im Folgenden werden wir die verschiedenen Größen mit dem Index o für oben und u für unten versehen, je nach dem, ob die Konfiguration mit Tubus oder ohne gemeint ist. Mit Hilfe des Linsengesetzes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad , \tag{19}$$

wobei a die Enfernung des Objekts zum Objektiv und b die Entfernung vom Objektiv zum Bild ist, und der Relation für die Vergrößerung

$$V = \frac{b}{a} \tag{20}$$

formen wir wie folgt um, mit t als Tubuslänge:

$$\frac{1}{f} \quad = \quad \frac{1}{b_u} + \frac{1}{a_u} = \frac{1 + V_u}{b_u} \tag{21}$$

$$= \frac{1}{b_o} + \frac{1}{a_o} = \frac{1+V_o}{b_o} = \frac{1+V_o}{b_u+t} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1+V_o}{f(1+V_u)+t} \quad (23)$$

$$\Rightarrow f = \frac{t}{V_o - V_u} \quad . \quad (24)$$

Die folgende Tabelle zeigt die Zwischenergebnisse für die Berechnung der Vergrößerungen, die Werte für die Tubuslänge und das Ergebnis für die Brennweite des Objektivs, jeweils alles für die beiden verwendeten Tubusse:

Tubus	**Tubuslänge** t	V_o	V_u	**Brennweite** f
1	91,60 mm	8,88(6)	3,62(8)	$\Rightarrow$ 17,41(56) mm
2	120,25 mm	10,63(2)	3,62(8)	$\Rightarrow$ 17,15(73) mm

Die Fehler der Brennweiten ergeben sich aus der Formel:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{t \cdot \sigma_{V_o}}{V_o^2}\right)^2 + \left(\frac{t \cdot \sigma_{V_u}}{V_u^2}\right)^2} \quad . \quad (25)$$

Der gewichtete Mittelwert ergibt hierbei eine Brennweite von $17,314(5)$ mm.

4.1.3 Haardicke (4.)

Die Eichung des Okularmikrometers ergab, dass ein Skalenteil 0,017 mm entspricht. Hiermit ermittelten wir eine Haardicke von 0,085 mm (Katharina) bzw. 0,068 mm (Johannes).

4.2 Teil B: Optische Schiene

Der Strahlengang durch die Apperatur ist durch Abb.7 für den Versuchsteil 1. und durch Abb.8 für den Versuchsteil 3 dargestellt.

4.2.1 Auflösungsvermögen (2.)

Der Abstand zwischen dem Gegenstand und der Blende betrug im Versuch $a = 4,6cm$, während der Lochabstand bei $D = 0{,}52 \pm 0{,}04mm$ liegt. Somit lässt sich unsere Auflösungsvermögen durch Gl. 14 und Gl. **??** bestimmen.

$$A = n \cdot \sin\alpha = \frac{D}{a\lambda} = 17{,}4 \pm 1{,}3mm^{-1} \Rightarrow x_{min} = \frac{1}{A} = 0{,}057 \pm 0{,}004mm \quad (26)$$

Die Wellenlänge λ beträgt laut Praktikumsbuch $6500\dot{A}$. Da wir wissen, dass die Striche in einem Abstand von 0,1 mm angebracht waren, ist unser erwarteter Wert für das Auflösungsvermögen bei $0{,}1mm$. Somit haben wir eine Abweichung von 43%.

4.2.2 Auflösungsvermögen und Numerische Apertur aus Plexiglasstab (3.)

Der in die Apperatur eingebaute Plexiglasstab hat die Länge $l = 5cm$ und einen Brechungsindex $n_{pl} = 1{,}49$ wie es im Praktikumsbuch beschrieben ist. Da wir im Versuch 12 Striche auf der Hinterseite des Plexiglasstabes sehen konnten, nachdem wir die Lochblende eingeführt hatten, wissen wir, dass dieses einer Distanz von $d = 6mm$ entspricht. Durch die Dreiecksbedingengen können wir nun den $\sin\alpha$ ausdrücken, sodass wir das Folgende für N erhalten:

$$N = n \cdot \sin\alpha = n \cdot \frac{d/2}{\sqrt{l^2 + d^2/4}} = 0{,}089 \quad . \quad (27)$$

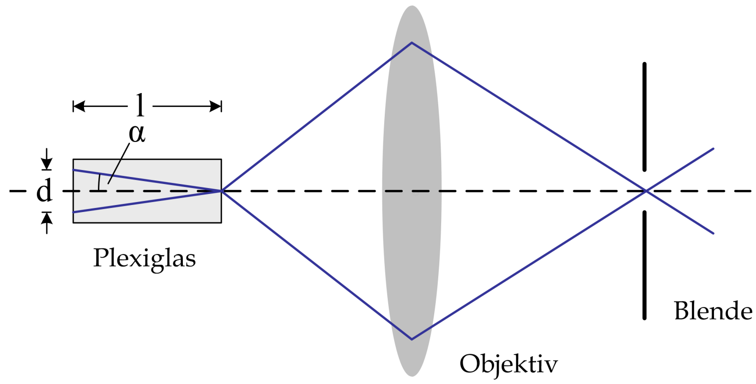

Figure 8: Strahlengang zum Versuchsteil B.3

Da wir die Wellenlänge von $\lambda = 650nm$ kennen, können wir somit auch das Auflösungsvermögen berechnen (Gl. 15).

$$A = \frac{N}{\lambda} = 137{,}2mm^{-1} \tag{28}$$

5 Diskussion

Der erste Versuchsteil war gut durchzuführen und auch die Auswertung zeigt, dass man mit diesem Versuch durchaus zufrieden sein kann. Der zweite Versuchsteil war jedoch nicht so berauschend. Schon bei der Versuchsdurchführung, wie sie im Praktikumsbuch beschrieben war, hakte es. Auch die Auswertung war nicht zufriedenstellend, sodass wir beim Auflösungsvermögen keinen guten Wert bekommen konnten, da die Blende sehr schwer auszumessen war. Bei der Geschichte mit dem Plexiglas konnte man dann mit dem Praktikumsbuch gar nichts mehr anfangen.