

PHYSIKALISCHES GRUNDPRAKTIKUM

Versuch 18

Das Mikroskop

Praktikant:	$E ext{-}Mail:$		
Tobias Wegener	tobias.wegener@stud.uni-goettingen.de		
Christian Gass	christian.gass@stud.uni-goettingen.de		
Alexander Osterkorn	a.osterkorn@stud.uni-goettingen.de		
Tutor:	Gruppe:		
Danny Schwarzbach	6		
Durchgeführt am:	$Protokoll\ abgegeben:$		
3.3.2014	6.3.2014		
Testiert:			

Inhaltsverzeichnis

1	Ein	Einleitung		
2	The	eorie	2	
	2.1	Die Lupe	2	
	2.2			
	2.3			
			4	
3	Dui	rchführung	6	
	3.1	Messgerät: Das Mikroskop	6	
	3.2	Ablauf der Messung		
4	Aus	swertung	8	
	4.1	Motic-Mikroskop	8	
			10	
			10	
		<u> </u>	11	
5	Dis	kussion	13	
	5.1	Teil A: Messungen mit dem Motic-Mikroskop	13	
	5.2	<u> </u>	13	
${f Li}$	terat	tur	14	

1 Einleitung

In diesem Versuch wollen wir uns mit einem der wichtigsten optischen Instrumente beschäftigen, dem **Mikroskop**. Hierzu werden wir uns u.a. für verschiedene Vergrößerungen und das Auflösungsvermögen interessieren. Auch den Aufbau eines Mikroskops wollen wir besser verstehen.

2 Theorie

2.1 Die Lupe

Bei einer Lupe handelt es sich um eine Konvexlinse mit kurzer Brennweite. Befindet sich ein Gegenstand innerhalb der Brennweite f, so entsteht ein vergrößertes virtuelles Bild. Man definiert den **Abbildungsmaßstab** m einer Linse als das Verhältnis aus Bildgröße B und Gegenstandsgröße G:

$$m = \frac{B}{G} \tag{1}$$

Für das Auge ist die Betrachtung des Bildes am angenehmsten, wenn sich der Gegenstand in der Brennebene befindet, da dann parallele Strahlen auf das Auge treffen.

In diesem Fall versagt Gl. 1, da B beliebig groß wird. Man kann stattdessen jedoch die Änderung des Sehwinkels betrachtet. Dieser bleibt auch für ein unendlich weit entferntes Bild endlich. Die **Winkelvergrößerung** V ist dann wie folgt definiert:

$$V = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{G}{f} \cdot \left(\frac{G}{s_0}\right)^{-1} = \frac{s_0}{f} \tag{2}$$

Dabei ist ε_0 der Sehwinkel ohne das optische Instrument. Er hängt bei festem G natürlich vom Abstand zum Auge ab. Dieser wird per (recht willkürlicher) Konvention auf die **deutliche Sehweite** $s_0 = 25$ cm festgelegt. Dabei handelt es sich um den kleinsten Abstand, bei dem das Auge im Allgemeinen noch scharf abbilden kann. [1, S. 352 f.] [2, S. 510 f.]

2.2 Das Mikroskop

Eine noch stärkere Vergrößerung erhält man mit einem Mikroskop, wobei es sich im einfachsten Fall um eine Anordnung von zwei Konvexlinsen handelt.

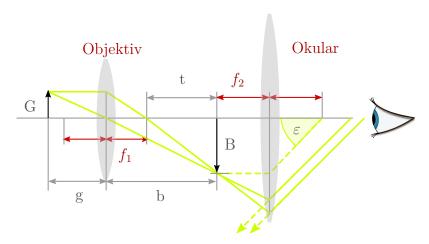


Abbildung 1: Strahlengang eines einfachen Mikroskops

Der Gegenstand der Höhe G befindet sich im Abstand g von der ersten Linse (**Objektiv**) knapp außerhalb von dessen Brennweite f_1 so, dass in der Brennebene der zweiten Linse (**Okular**) ein vergrößertes reelles Bild entsteht. Unter Anwendung des *Strahlensatzes* und der *Abbildungsformel für dünne Linsen*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{3}$$

berechnet sich der Abbildungsmaßstab $m_{\rm ob}$ des Obejktivs (Gl. 1) wie folgt:

$$m_{\rm ob} = \frac{B}{G} \stackrel{\text{Str.s.}}{=} \frac{b}{g} \stackrel{\text{Abb.f.}}{=} \frac{b - f_1}{f_1} = \frac{t}{f_1}$$
 (4)

Die Größe t wird **Tubuslänge** genannt und bezeichnet den Abstand der Brennebenen der beiden Linsen.

Das reelle Bild des Objektivs liegt nun etwa in der Brennebene des Okulars, sodass dieses als Lupe wirkt. Dies führt für den Beobachter zu einem virtuellen Bild im Unendlichen, welches nochmals um die Winkelvergrößerung V vergrößert ist:

$$V_{\text{ok}} = \frac{G}{f_2} \cdot \frac{G}{s_0}^{-1} = \frac{s_0}{f_2}$$

Die Gesamtvergrößerung $V_{\rm ges}$ ist dann das Produkt der beiden Teilvergrößerungen:

$$V_{\text{ges}} = m_{\text{ob}} \cdot V_{\text{ok}} = \frac{t \cdot s_0}{f_1 \cdot f_2} \tag{5}$$

[2, S. 512 f.] [1, S. 353 f.]

2.3 Beugung und Auflösungsvermögen

Alle optischen Messungen werden mehr oder weniger stark von **Beugungs-effekten** beeinflusst. Dies führt dazu, dass Punkte nicht wieder auf Punkte abgebildet werden, sondern sog. Beugungsscheibehen entstehen. So können sich die Bilder zweier Punkte im Abstand Δx nach der optischen Abbildung teilweise überlagern und sind dann unter Umständen nicht mehr als getrennte Objekte wahrzunehmen.

Man möchte daher wissen, wie gut das beoabchtete Objekt optisch aufgelöst werden kann. Dazu kann z.B. das **Rayleigh-Kriterium** verwendet werden. Es besagt, dass zwei Punkte dann nicht mehr unterschieden werden können, wenn das Hauptmaximum des ersten Bildes näher an dem Hauptmaximum des zweiten Bildes liegt als dessen erstes Minimum. Das führt zu folgender Bedingung für den kleinsten noch aufzulösenden Winkelabstand δ_{\min} mit

$$\delta_{\min} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} \tag{6}$$

wobei λ die Wellenlänge und D der Durchmesser des optischen Elements (z.B. Linse, Spalt) ist. Der Kehrwert $R_W := \delta_{\min}^{-1}$ wird **Winkelauflösungsvermögen** genannt. [1, S. 356].

2.3.1 Auflösungsvermögen des Mikroskops

Aus diesem Winkel lässt sich nun der minimale Abstand zweier unterscheidbarer Punkte Δx_{\min} berechnen, wenn deren Entfernug g zur Linse bekannt ist. Im Falle des Mikroskops gelten $g \approx f_1$ und $D/f_1 = 2\sin\alpha$ wobei α der Öffnungswinkel des Objektivs ist).

Befindet sich zwischen Objekt und Objektiv ein Material mit Brechungsindex n, so wird die Wellenlänge zu $\lambda_n = \lambda_0/n$ (λ_0 Vakuumwellenlänge). Damit folgt:

$$\Delta x_{\min} = 0.61 \cdot \frac{\lambda_0}{n \cdot \sin a} \tag{7}$$

Dabei wird die Größe $A_N := n \cdot \sin a$ Numerische Apertur genannt. [1, S. 358 ff.] [2, S. 542 f.] In der Praktikumsanleitung wird der numerische Faktor 0.61 weggelassen, daher tun wir das auch in der Auswertung.

3 Durchführung

3.1 Messgerät: Das Mikroskop

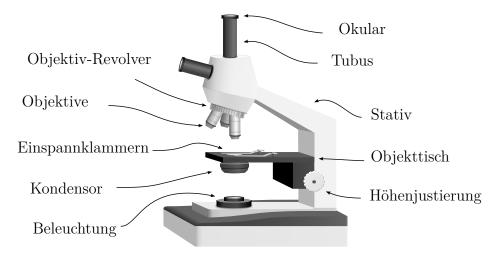


Abbildung 2: Aufbau eines Mikroskops

3.2 Ablauf der Messung

Der Versuch ist in zwei Teile mit verschiedenen Versuchsaufbauten gegliedert. In Teil A verwenden wir ein Motic-Mikroskop wie in Abbildung (2) skizziert. Für den Versuch werden die Objektive mit 10- sowie 40-facher Vergrößerung benötigt. Das Mikroskop hat neben dem eigentlichen Okular weiter eine schräg seitlich eingebrachte Öffnung, in die man mit Mattscheiben versehene Tuben einstecken kann. So kann man auf den Mattscheiben die Zwischenbilder hinter dem Objektiv sichtbar machen. Für Teil A sind folgende Messungen durchzuführen (jeweils für das 10x- und das 40x-Objektiv):

• Zuerst wollen wir die Gesamtvergrößerung des Mikroskops bestimmen. Hierzu spannen wir das Objektmikrometer auf den Objekttisch und stellen die dortige Skala scharf. Mit einem parallel angelegten Maßsstab bestimmen wir die Größe des Bildes. Nun setzen wir den kurzen Tubus mit Mattscheibe in die schräge Öffnung und variieren dessen Höhe so, dass das zu sehende Zwischenbild scharf auf der Mattscheibe erscheint. Nun vermessen wir das Zwischenbild. Dieser gesamte Messvorgang wird für beide Objektive jeweils dreimal durchgeführt. Zwischen den Messungen wird das Objektmikrometer jeweils neu fokussiert.

• Um die Fokuslänge der Objektive zu bestimmen, vermessen wir nun erneut das Zwischenbild hinter dem Objektiv. Nun verwenden wir aber zwei unterschiedlich lange Tuben, die jeweils bis zum Anschlag in der schrägen Öffnung angebracht werden. Für jeden Tubus vermessen wir dreimal das Zwischenbild. Natürlich sind die Tubuslängen wichtig für die Auswertung und müssen deshalb aufgenommen werden.

Für Teil B des Versuches wechseln wir nun den Versuchsaufbau. Neben dem Motic-Mikroskop ist dieser vorbereitet. Er besteht aus einer optischen Schiene, auf der eine Leuchte, ein Farbfilter, ein Glasmaßstab, ein Spalt und ein Tubus befestigt sind. Für den Versuch wird später noch ein Plexiglasstab benötigt. Sollte dieser sich noch im Aufbau befinden, so muss er für die ersten Messungen entfernt werden. Der Versuch läuft nun folgendermaßen ab:

- Es ist darauf zu achten, dass der Spalt (\triangleq Aperturblende) geöffnet ist. Wir stellen zuerst den Glasmaßstab scharf auf das Mikroskop. Danach schließen wir den Spalt gerade so weit, bis der Maßstab nicht mehr aufgelöst wird und messen den Abstand des Spaltes vom Glasmaßstab. Jetzt entfernen wir den Glasmaßstab. Um die Apertur des Spaltes zu messen, verschieben wir diesen so lange, bis er im Mikroskop scharf abgebildet wird. Die Spaltbreite vermessen wir mit dem Mikrometerbetrieb des Mikroskops.
- Nun ändern wir den Versuchsaufbau: Glasmaßstab und Spalt werden durch den Plexiglasstab ersetzt. Dieser sollte so montiert werden, dass die polierte Seite scharf eingestellt werden kann und die eingezeichnete Skala auf der Rückseite des Stabes liegt. Nachdem die Vorderseite dann scharf gestellt wurde, wird das Okular durch eine Lochblende ersetzt, welche bis zum Anschlag eingesetzt werden muss. Dann liegt sie nämlich genau in der Ebene des Zwischenbildes. Nun können mittels der eingezeichneten Skala die Breite des ankommenden Lichbündels messen, indem wir die Anzahl der erkennbaren Linien bestimmen. Die Länge des Plexiglasstabes ist wichtig für die Auswertung!

4 Auswertung

4.1 Motic-Mikroskop

Ziel des ersten Versuchsteils ist es, die Vergrößerung des Okulars sowie die Brennweite der Objektive mit 10- und 40-facher Vergrößerung zu bestimmen. Leider haben wir vergessen, die Objektivvergrößerungen für den langen und den kurzen Tubus auch für das Objektiv mit 40-facher Vergrößerung durchzuführen und können deshalb nicht die Brennweite dieses Objektivs bestimmen. Ein Strahlengang für diesen Aufbau ist in Abbildung 1 skizziert.

Okularvergrößerung Zuerst bestimmen wir die Gesamtvergrößerung des Mikroskops. Hierzu müssen wir die Bildgröße B und die Gegenstandsgröße G kennen. Die Gegenstandsgröße können wir aus der Anzahl N der vermessenen Striche gewinnen: Für die Messskala ist ein Wert von 20 Strichen pro mm angegeben. Damit gilt $G = \frac{N}{20}$ mm. Die Bildgröße B vermessen wir direkt. Da die beiden Skalen bei der Messung direkt übereinander liegen, reicht es, für die Bildgröße einen Fehler anzunehmen. Diesen schätzen wir unter Berücksichtigung der Strichbreite bei 10- bzw. 40-facher Vergrößerung und der kleinsten Skaleneinheit beim Metermaß ab mit

$$\sigma_B = \begin{cases} 2 \text{ mm, beim 10x-Objektiv} \\ 5 \text{ mm, beim 40x-Objektiv.} \end{cases}$$

Mit der Gesamtvergrößerung $V_{\text{Ges}} = \frac{B}{G}$ ist dann $\sigma_{V_{\text{Ges}}} = \left| \frac{\sigma_B}{G} \right|$. Analog verfahren wir mit der Objektivvergrößerung m_{Ob} . Hier haben wir die Größe B' des Zwischenbildes sowie die Gegenstandsgröße G und somit $m_{\text{Ob}} = \frac{B'}{G}$. In diesem Teil können wir genauer messen, da die Striche des Objektmikrometers im Zwischenbild deutlich schmaler sind als im Gesamtbild, ansonsten schätzen wir den Fehler aber nach dem gleichem Prinzip ab. Es ergibt sich

$$\sigma_{B'} = \begin{cases} 0.5 \,\text{mm}, & \text{beim 10x-Objektiv} \\ 1 \,\text{mm}, & \text{beim 40x-Objektiv}. \end{cases}$$

Damit haben wir $\sigma_{m_{\text{Ob}}} = \left| \frac{\sigma_{B'}}{G} \right|$. Jeden dieser Werte haben wir insgesamt dreimal gemessen, nur den Wert bei der Objektivvergrößerung beim 40x-Objektiv viermal. Die gewichteten Mittelwerte mit Fehlern finden sich in Tabelle 1. Nun berechnen wir die Okularvergrößerung V_{Ok} nach Gleichung 5.

Mit vorgegebener Gesamt- und Objektivvergrößerung ergibt sich dann

$$\begin{split} V_{\rm Ok} &= \frac{V_{\rm Ges}}{m_{\rm Ok}} \quad {\rm mit} \\ \sigma_{V_{\rm Ok}} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{V_{\rm Ges}}}{m_{\rm Ob}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m_{\rm Ob}} \cdot V_{\rm Ges}}{m_{\rm Ob}^2}\right)^2} \end{split}$$

Aus den Daten vom 40x- und vom 10x-Objektiv können wir nun den gewichteten Mittelwert berechnen. Es ergibt sich dann

$$V_{\rm Ok} = 10.5 \pm 0.2.$$

	V	$V_{ m Obj}$
10x-Objektiv	100 ± 3	9.7 ± 0.2
40x-Objektiv	397 ± 15	36 ± 2

Tabelle 1: Die Gesamt und Objekttivvergrößerungen des Mikroskops für das 10x- und das 40x-Objektiv.

Brennweite des Objektivs Die Brennweite des Objektivs lässt sich nach Gleichung 4 berechnen. Wie bereits erwähnt haben wir hier die Messung für das 40x-Objektiv vergessen und können deshalb nur die Werte für das 10x-Objektiv auswerten. Für die unterschiedlichen Tubuslängen $t_{\rm lang}$ und $t_{\rm kurz}$ ist die Differenz der Vergrößerungen

$$\Delta V = V_{\text{lang}} - V_{\text{kurz}} = \frac{t_{\text{lang}} - t_{\text{kurz}}}{f} = \frac{\Delta t}{f}, \tag{8}$$

wobei Δt die Differenz der Tubenlängen ist. Umstellen nach f liefert die Brennweite des Objektivs. Die Fehler der Vergrößerungen berechnen sich wie gehabt. Den Fehler für die Tubuslängen schätzen wir mit $\sigma_t = 2$ mm. Hierbei war die kleinste Skaleneinteilung zwar 1 mm, da wir aber von außen nicht genau sehen konnten, wo das Okular lag, verdoppeln wir hier diesen Fehler. Damit ergibt sich der Fehler von Δt zu $\sigma_{\Delta t} = 3$ mm (nach Aufrunden). Da die Fehler von $V_{\rm lang}$ und $V_{\rm kurz}$ gleich sind, ist $\sigma_{\Delta V} = \sqrt{2}\sigma_{V_{\rm lang}}$. Damit gilt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(rac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta V}\right)^2 + \left(rac{\sigma_{\Delta V}\Delta t}{\Delta V^2}\right)^2}$$

Für das gewichtete Mittel erhalten wir dann

$$f = (18.3 \pm 0.5) \,\text{mm}.$$

4.2 Teil B

4.2.1 Messungen mit Glasmaßstab

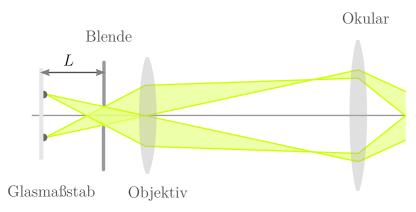


Abbildung 3: Strahlengang mit Glasmaßstab

Die Abstandsmessung von Blende und Glasmaßstab erfolgt durch die Schiebelehre mit abgeschätztem Fehler: $L=(40\pm1)\,\mathrm{mm}$

Die Breite d der Blendenöffnung, bei der der Maßstab gerade nicht mehr aufgelöst wird, wird mit dem Millimetertrieb des Okulars vermessen. Nach fünfmaliger Wiederholung dieser Messung ergibt sich der Fehler aus der Standardabweichung der Messwerte und dem entsprechenden Student-t-Faktor für n=5:

$$d = (0.08 \pm 0.01) \,\mathrm{mm}$$

Der Skalierung des Glasmaßstabs ist angegeben zu "100/cm", das entspricht einem Strichabstand von $s=0.1\,\mathrm{mm}$. Diese Größe ist auch der kleinste theoretisch auflösbare Abstand $x_{\mathrm{min}}=s$ bzw. $A=x_{\mathrm{min}}^{-1}=10\,\mathrm{mm}^{-1}$ das Auflösungsvermögen.

Der Sinus des Öffnungswinkels berechnet sich nach dem Strahlengang (Abb. 3) zu

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{L}$$
 mit $\sigma^2(\sin(\alpha)) = \left(\frac{\sigma_d}{L}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma_L}{L^2}\right)^2$.

Analog folgt mit Formel 7

$$x_{\min} = \frac{\lambda}{n\sin(\alpha)} = \frac{\lambda L}{d}$$

und die Fehlerfortpflanzung

$$\sigma^{2}(x_{\min}) = \left(\frac{\sigma_{\lambda}L}{d}\right)^{2} + \left(\frac{\lambda\sigma_{L}}{d}\right)^{2} + \left(\frac{\sigma_{d}\lambda L}{d^{2}}\right)^{2},$$

wobei hier für den Brechungsindex $n\approx 1$ angenommen wurde. Für den Wellenlängenbereich des den Rotfilter passierenden Lichts wird abgeschätzt $\lambda=(710\pm80)\,\mathrm{nm}$.

Einsetzen der bekannten Werte liefert $x_{\min} = (0.36 \pm 0.07) \,\mathrm{mm}$. Daraus folgt das Auflösungsvermögen

$$A = \frac{1}{x_{\min}} = (2.8 \pm 0.5) \,\mathrm{mm}^{-1}$$

mit der Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_A = \frac{\sigma(x_{\min})}{x_{\min}^2}$$

Das experimentell bestimmte Auflösungsvermögen liegt unterhalb des entsprechenden theoretisch möglichen Wertes, enthält diesen aber leider nicht in seinen Fehlergrenzen. Die beiden Werte stimmen zumindest in der Größenordnung überein.

4.2.2 Messung mit Plexiglasstab

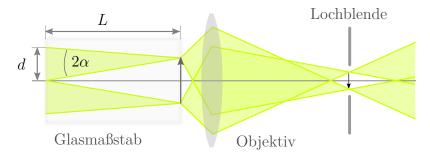


Abbildung 4: Strahlengang mit Plexiglasstab

Für den Strahlengang im "Plexiglasdreieck" in Abb. 4 erhält man mit dem Satz des Pythagoras:

$$\sin(\alpha) = \frac{d/2}{\sqrt{d^2/4 + L^2}}$$

Die numerische Apertur ist definiert als

$$N = n\sin(\alpha) = n\frac{d/2}{\sqrt{d^2/4 + L^2}}$$

mit dem in der Anleitung angegebenen Brechungsindex n=1.49 und dem Fehler

$$\sigma_N^2 = \left(\frac{4L^2\sigma_d}{(d^2 + 4L^2)^{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{4dL\sigma_L}{(d^2 + 4L^2)^{3/2}}\right)^2$$

Der Strahldurchmesser wurde zu 4.0 ± 0.5 Stricheinheiten bestimmt, die Länge des Plexiglasstabes zu $L=(50.0\pm0.5)\,\mathrm{mm}$. Bei dem in der Praktikumsanleitung angegebenen Strichabstand von $0.5\,\mathrm{mm}$ entspricht das einem Bündeldurchmesser von $d=(2.0\pm0.3)\,\mathrm{mm}$. Daraus wiederum berechnet man die numerische Apertur

$$N = (0.030 \pm 0.005) \,\mathrm{mm}$$

und das Auflösungsvermögen zu

$$A = \frac{N}{\lambda} = (42 \pm 8) \,\mathrm{mm}^{-1}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\sigma_N}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{N\sigma_\lambda}{\lambda^2}\right)^2$$

und dem oben angegebenen λ -Bereich.

5 Diskussion

5.1 Teil A: Messungen mit dem Motic-Mikroskop

Für die Brennweite des 10x-Objektivs wie auch für die Vergrößerung des Okulars haben wir keine Vergleichsgrößen und können deshalb schlecht direkt bewerten, wie gut die Ergebnisse sind. Wir sehen jedoch, dass die Messergebnisse für die Objektivvergrößerung sowohl bei dem 10x- als auch bei dem 40x-Objektiv auch unter Berücksichtigung der Fehlerschranken geringfügig unter dem angegebenen Wert (nämlich 10 bzw. 40) liegen. Nehmen wir an, dass die vom Hersteller angegebenen Werte stimmen, dürfte die Okularvergrößerung nach Gleichung 5 etwas zu groß gemessen worden sein.

Systematische Fehler sollten in diesem Versuchsteil eigentlich gering ausfallen, wenn man davon ausgeht, dass der Hersteller versucht hat, solche zu minimieren. Etwas fehleranfällig war die Messung der Gesamtvergrößerung, da es sich etwas schwierig gestaltete, das Bild mit dem angelegten Maßsstab in Deckung zu bringen und weiterhin die Skalenstriche auf dem Bild, vor allem bei dem 40x-Objektiv, ziemlich breit waren. Hier konnte man nicht genau die Bildgröße bestimmen. Das erklärt auch den relativ großen Fehler bei der Gesamtvergrößerung mit dem 40x-Objektiv. Durch mehrere Messungen kann man diesen Fehler aber gut verringern.

5.2 Teil B: Messungen des Auflösungsvermögens

Die beiden Ergebnisse für das Auflösungsvermögen wurden bereits in der Auswertung verglichen. Ein kritischer Punkt dieser Messung ist die Bestimmung des Spaltdurchmessers, bei dem der Glasmaßstab gerade nicht mehr aufgelöst werden kann. Es ist sehr schwierig, dafür einen bestimmten Wert zu bestimmen, da die Auflösungseigenschaft des Glasmaßstabs sich über einen größeren Spaltbreitenbereich nur langsam ändert. Es wurde versucht, die daraus resultierenden statistischen Schwankungen durch eine größere Zahl von Messungen zu minimieren. Die doch signifikante Abweichung des experimentell bestimmten Auflösungsvermögen zum theoretisch möglichen legt aber nahe, dass hier mit zu kleinem Fehler gerechnet wurde. Die Messung des Abstandes Blende-Glasmaßstab ist deutlich robuster.

Im zweiten Teil wurde ein deutlich höheres Auflösungsvermögen festgestellt, als im ersten Versuchsteil. Der erhöhte Brechungsindex innerhalb des Plexiglasstabes scheint also positive Auswirkungen auf die Auflösung zu haben. Aber auch die Bestimmung der Bündelbreite ist mangels scharfer Konturen fehleranfällig. Da kein Vergleichswert vorliegt, kann der angegebene Fehler nicht auf seine Güte überprüft werden.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. Experimentalphysik 2. Springer Spektrum, 6 edition, 2013.
- [2] Dieter Meschede. Gerthsen Physik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 24 edition, 2010.