

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,  
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

---

**Versuch Diffusion**  
**Protokoll**

---

Praktikant: Michael Lohmann  
Mitpraktikant: Kevin Lüdemann  
E-Mail: m.lohmann@stud.uni-goettingen.de  
Betreuer: Martin Ochmann  
Versuchsdatum: 30.06.2014

Testat:

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Diffusion . . . . .	3
2.2	Ficksche Gesetze . . . . .	3
2.3	Lösung der DGL . . . . .	4
2.4	Wheatstonsche Brückenschaltung und Photowiderstand . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1	Aufbau . . . . .	6
3.2	Konzentrationsverlauf . . . . .	6
3.3	Konzentrationsprofil . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Theoretische Erwartungswerte . . . . .	7
4.2	Messung 1 und 2 . . . . .	8
4.3	Messung 3 und 4 . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>10</b>
	<b>Literatur</b>	<b>10</b>

# 1 Einleitung

Die Diffusion (vom lateinischen *diffundere* 'sich ausbreiten') ist die Eigenschaft von verschiedenen Medien, sich ohne äußere Einflüsse miteinander zu vermischen, bis ein Gleichgewichtszustand erreicht ist, nur dadurch, dass sie miteinander in Kontakt stehen. So verursacht jede räumliche Inhomogenität einer physikalischen Größe einen Ausgleichstrom. Bei Materie geschieht dies aufgrund der statistischen Bewegung der Teilchen, der Braunschen Molekularbewegung. Die Diffusion ist eine sehr wichtige Eigenschaft von Teilchen, da ohne sie zum Beispiel kein Leben existieren könnte, da kein Sauerstoff in unsere Zellen transportiert werden könnte.

## 2 Theorie

### 2.1 Diffusion

Hat ein Stoff eine von 0K verschiedene Temperatur, so bewegen sich die Teilchen abhängig von dieser mit einer bestimmten Durchschnittsgeschwindigkeit in verschiedene Richtungen. Da die Teilchen gegeneinander elastisch stoßen, ändert sich in diesem Moment ihre Geschwindigkeit, sowie deren Richtung. Die so entstehenden zufälligen Bewegungen wurden schon 1827 von Brown entdeckt [Dem08, S. 8]

### 2.2 Ficksche Gesetze

Die Fickschen Gesetze beschreiben die Diffusion. Da eine Inhomogenität einer physikalischen Größe  $n(\vec{x}, t)$  (in unserem Fall Teilchen) einen Ausgleichsstrom  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  hervorruft, der abhängig davon ist, wie groß diese an einem bestimmten Ort  $\vec{x}$  zu einer bestimmten Zeit  $t$  ist, lautet das *erste Ficksche Gesetz*:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -D \nabla n(\vec{x}, t)$$

Hierbei ist  $D$  die Diffusionskonstante, welche festlegt, wie groß der Teilchenstrom bei gegebener Inhomogenität eines speziellen Mediums ist. Da die Teilchenzahl erhalten bleibt, müssen mehr Teilchen ein- bzw. ausströmen, wenn sie sich verändert.

$$\frac{\partial n(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}, t)$$

Setzt man die obige Gleichung nun für  $\vec{j}$  ein, so ergibt sich das *zweite Ficksche Gesetz*

$$\frac{\partial n(\vec{x}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\vec{x}, t)$$

Statt mit der Teilchenzahl  $n$  zu rechnen, kann man ebenfalls mit der Teilchenkonzentration  $c = \frac{n}{V}$  rechnen

## 2.3 Lösung der DGL

Die Lösung der sich aus diesen beiden Gleichungen ergebenden Differentialgleichung wird durch die Methode der Reflektion und Superposition bestimmt (Literatur: [Cra75, S. 11]). Unsere gesuchte Lösung ist die für einen Zylinder, welcher für  $x > 0$  zu  $t = 0$  eine Konzentration  $c = c_0$  besitzt und zur selben Zeit bei  $x < 0$  keine Konzentration besitzt. Die Grenzsicht ist also bei  $x = 0$ . Wir beginnen mit der Suche nach einer Lösung für eine Stoffmenge  $M$ , welche sich zur Zeit  $t = 0$  nur am Ort  $x = 0$  befindet.

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c$$

folgt ersichtlicherweise die Lösung

$$c' = \frac{A}{\sqrt{t}} \exp(-x^2/4Dt) \quad (1)$$

mit einer Konstante  $A$ , welche an die Anfangsbedingungen angepasst wird. Die Gesamtmenge an diffundierendem Stoff beträgt

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} c' dx$$

Was durch Einsetzen von Gleichung (1) und Substitution zu dem Ergebnis

$$M = 2A\sqrt{\pi D}$$

führt, was umgestellt nach  $A$  und in Gleichung (1) eingesetzt heißt

$$c' = \frac{M}{2\sqrt{\pi D}} \exp(-x^2/4Dt) \quad .$$

Diese spezielle Lösung kann nun verwendet werden, um unsere gesuchte herzuleiten. Da hierbei die Hälfte des Stoffes in die positive und die andere Hälfte in die negative  $x$ -Richtung diffundierte, kommt zu unserer Lösung ein Faktor 2 hinzu ("Reflektion").

Durch Superposition dieser Lösung für alle  $x > 0$  kommt man letztlich zu dem Ergebnis, dass

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (2)$$

mit der Gaußschen Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-v^2) dv$$

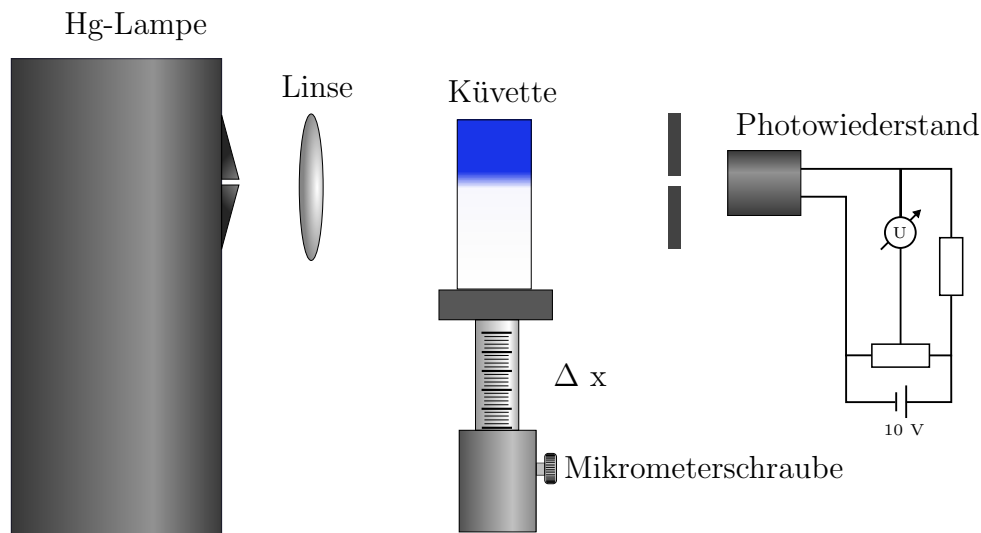
## 2.4 Wheatstonsche Brückenschaltung und Photowiderstand

Die Wheatstonsche Brückenschaltung ist ein Bauelement, welches zur Bestimmung von Widerständen genutzt wird. Sie baut auf dem Prinzip der Spannungsverteilung an in Reihe geschalteten Widerständen auf. Hat man zwei bekannter Größe und einen regelbaren, so kann man mithilfe eines Voltmeters einen unbekannten vermessen.

Dazu schaltet man je zwei Widerstände in Reihe (die beiden konstanten und den unbekannten mit dem regelbaren) und diese jeweils parallel. Das Voltmeter wird nun zwischen den in Reihe geschalteten angebracht. Dann wird der regelbare so lange verstellt, bis das Voltmeter keine Spannung mehr anzeigt. Zu diesem Zeitpunkt ist das Verhältnis vom unbekannten zum regelbaren gleich dem Verhältnis der beiden konstanten Widerstände.

Der hier vermessene Widerstand ist ein Photowiderstand. Dieser besteht aus einem Halbleitermaterial, welches ohne Licht nur wenige freie Elektronen besitzt. Der von Albert Einstein entdeckte Photoelektrische Effekt kann jedoch Elektronen aus den Atomen lösen, welche dann zu einem besseren Stromfluss beitragen. Dadurch hat er einen von der einfallenden Strahlung abhängigen Widerstand, welcher sinkt, je mehr Licht einfällt. Durch messen eben dieses kann man also direkte Rückschlüsse auf die Intensität des Lichtes ziehen.

In unserem Fall (da unsere Lichtquelle konstant gelehchtet hat) also darauf, wie viel Licht von dem Methylenblau absorbiert wurde und dadurch, wie hoch dessen Konzentration an dem Ort der Küvette war, welche durchleuchtet wurde.



**Abbildung 1:** Versuchsaufbau

## 3 Durchführung

### 3.1 Aufbau

Der Aufbau ist in Abb. 1 dargestellt. Das wichtigste Element hierbei ist eine Glasküvette, welche von einer Quecksilberdampflampe beleuchtet wird. Das Licht der Lampe wird vorher von einer Blende und einer Linse gebündelt auf die Küvette mitsamt der darin enthaltenen Flüssigkeit gelenkt. Nachdem es sie durchquert hat, nimmt eine Fotodiode das verbleibende Licht auf. Der sich dadurch verändernde Widerstand der Diode wird nun mithilfe der Wheatstonschen Brückenschaltung vermessen.

### 3.2 Konzentrationsverlauf

#### Messung 1

Für Messung 1 wird der verstellbare Widerstand solange angepasst, bis das Voltmeter keine Spannung mehr anzeigt, wenn der Graufilter  $c_0/16$  eingelegt ist. Dann wird die Messküvette zu  $3/4$  mit Wasser gefüllt und darüber Methylenblau der Konzentration  $c_0$  geschichtet. Nun wird die Küvette vorsichtig in das Stativ gesteckt und mit der Mikrometerschraube der Ort gesucht, an dem das Voltmeter ebenfalls keine Spannung zeigt. Dieser Ort wird nun notiert und eine Stoppuhr gestartet. Im Abstand von 30s wird nun immer wieder die jeweilige Höhe bestimmt, zu der die Konzentration der Flüssigkeit gerade  $c_0/16$  beträgt. Diese Werte werden notiert, bis die Werte von 30min aufgenommen sind. Nach Beendigung der Messung wird die Stoppuhr weiterlaufen gelassen, sowie die Küvette vorsichtig entfernt und in einem Ständer für die spätere Weiterverwendung gelagert.

#### Messung 2

Messung 2 erfolgt analog zu Messung 1, nur mit einer Konzentration von  $c_0/32$ . Dabei wird eine neue Küvette, sowie eine neue Stoppuhr benutzt. Auch hier wird die Stoppuhr nach Beendigung der Messung weiter laufen gelassen.

### 3.3 Konzentrationsprofil

#### Messung 3

Nach Beendigung von Messung 2 (ungefähr 40min nach Beginn) wird von der zweiten Küvette das Konzentrationsprofil ermittelt. Dafür steckt man in den zweiten Ständer des Stativs nacheinander Graufilter verschiedener Intensität ( $c_0/2, c_0/4, c_0/8, c_0/16, c_0/32$ ) und eicht jeweils die Wheatstonsche Brücke auf deren Helligkeit. Dann fährt man das Stativ vorsichtig zur Küvette und bestimmt die entsprechende Höhe, in der die Konzentration gleich ist. Dazu notiert man ebenfalls die Zeit nach Beginn von Messung 2, zu

der dies abgelesen wird. Dies tut man jeweils für auf- und absteigende Konzentrationen, bis man 10 Messwerte aufgenommen hat.

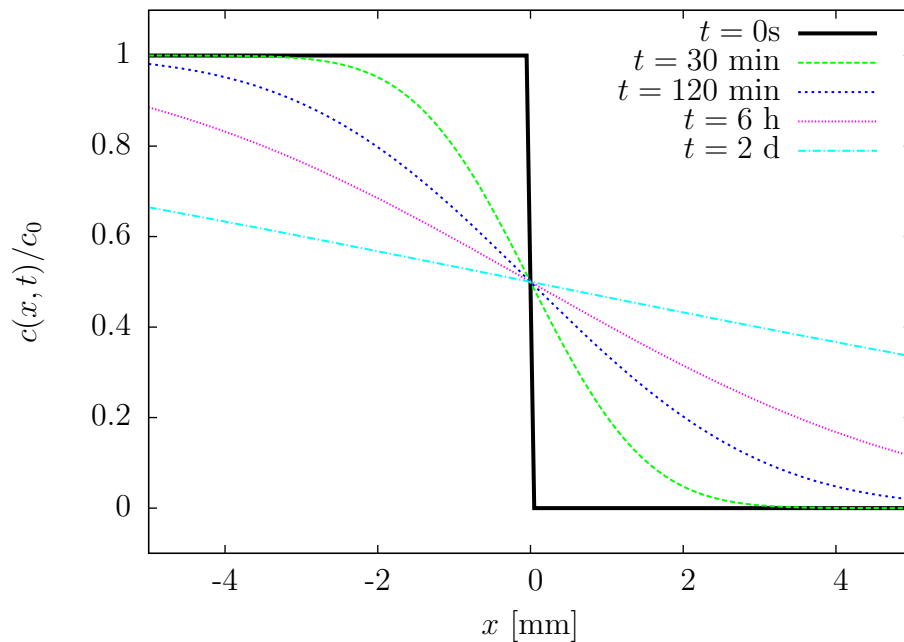
### Messung 4

Messung 4 ist analog zu Messung 3, nur mit Küvette 1. Sie erfolgt ca. 100min nach Beginn von Messung 1.

## 4 Auswertung

### 4.1 Theoretische Erwartungswerte

In der Theorie sollte für ein



**Abbildung 2:** Theoretische Erwartungswerte der Diffusionskurven für verschiedene Zeiten mit einem Diffusionskoeffizienten von  $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

## 4.2 Messung 1 und 2

Um die Diffusionskonstante von Messung 1 zu Bestimmen ist nach der Formel (2) mit  $c = \frac{c_0}{16}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{16} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{7}{8} &= \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right)\end{aligned}$$

Woraus sich unter Zuhilfenahme von WolframAlpha<sup>®</sup> mit der Umkehrfunktion ergibt

$$\begin{aligned}1.0848 &\approx \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \\ \Rightarrow x^2 &= 1.0848^2 \cdot 4Dt \\ x^2 &= 4.7071 \cdot Dt\end{aligned}$$

Die Steigung, welche in Abb. 3 zu erkennen ist, ist  $m_1 = \frac{x^2}{t}$ , da der Ort quadratisch gegen die Zeit aufgetragen ist.

$$\Rightarrow D_1 = \frac{m_1}{4.7071} \quad (3)$$

Analog ergibt sich für Messung 2 mit  $c = \frac{c_0}{32}$

$$\begin{aligned}\frac{15}{16} &= \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \\ \Rightarrow D_2 &= \frac{m_2}{6.9395}\end{aligned} \quad (4)$$

Um das  $x$  zu berechnen, muss man den Anfangsort  $x'(t=0)$  von allen gemessenen Werten  $x'(t)$  abziehen, damit die Grenzschicht tatsächlich bei  $x = 0$  liegt.

Die Fehler der beiden Diffusionskonstanten werden mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_1} &= \sigma_{m_1} \frac{1}{4.7071} \\ \sigma_{D_2} &= \sigma_{m_2} \frac{1}{4.7071}\end{aligned}$$

Die Steigung der gefitteten Geraden von Messung 1 aus Abb. 3 beträgt  $(1.34 \pm 0.03) \cdot 10^{-9} \text{m}^2/\text{s}$  und die von Messung 2  $(2.81 \pm 0.07) \cdot 10^{-9} \text{m}^2/\text{s}$ . Daraus ergibt sich nach (3) und (4)

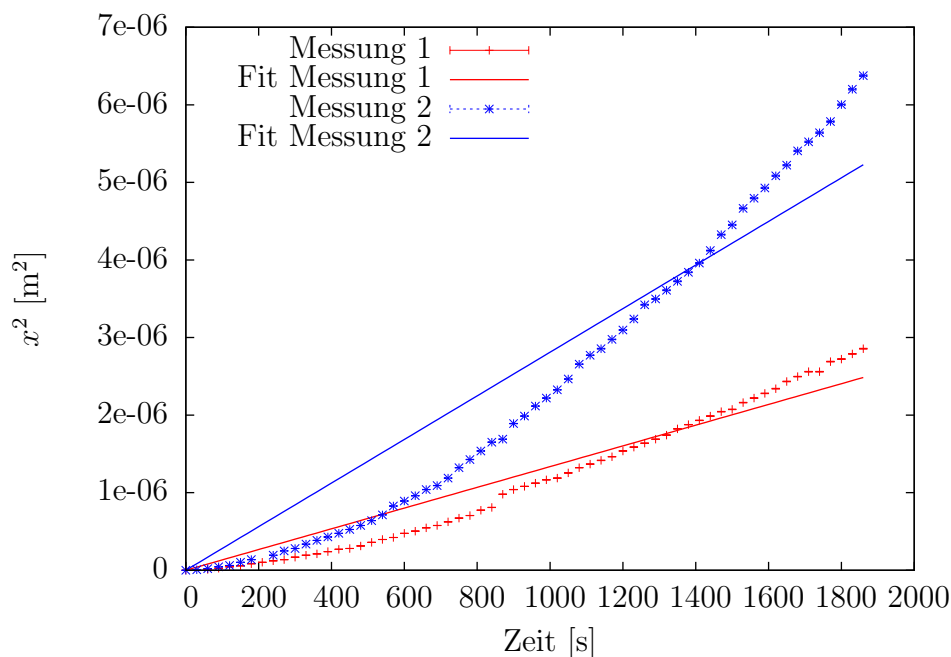
$$\begin{aligned}D_1 &= (2.8 \pm 0.1) \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{s} \\ D_2 &= (4.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{s}\end{aligned}$$



Aus dem gewichteten Mittelwert von  $D_1$  und  $D_2$  ergibt sich

$$D = (3.0 \pm 0.1) \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{s}$$

Dies ist 25% kleiner, als der im Praktikumshandbuch vorgeschlagenen Wert von  $D = 4.0 \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{s}$ .

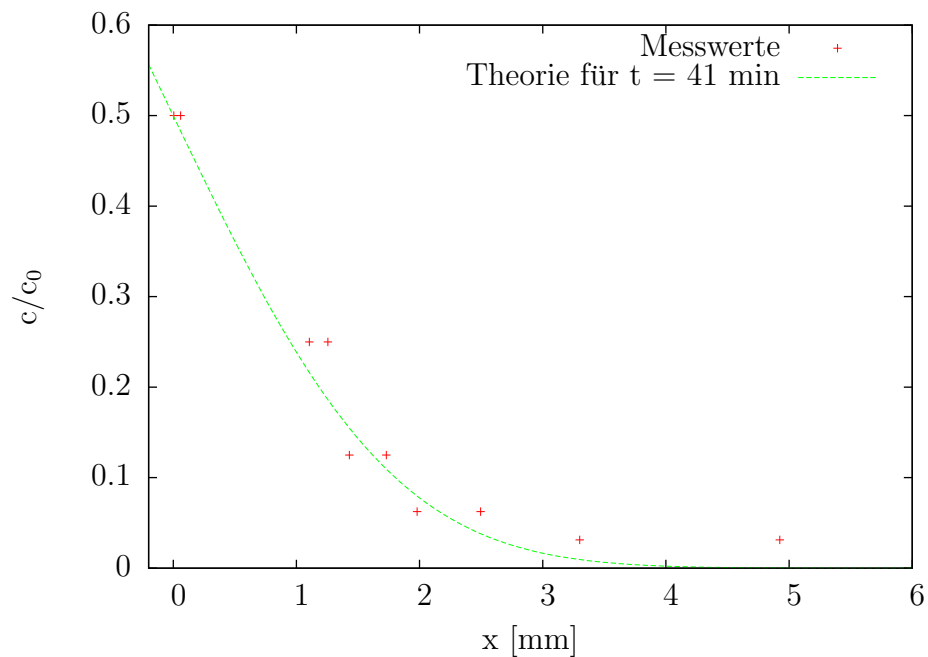


**Abbildung 3:** Messung 1 und 2: Auftragung der Höhe der Konzentration  $c_0/16$  und  $c_0/32$  im Quadrat gegen die Zeit mit dem zugehörigen Fit

### 4.3 Messung 3 und 4

## 5 Diskussion

Trägt man die Messwerte von Messung 1 in einem Diagramm auf, so ist offensichtlich zwischen 14min und 14.5min ein Sprung in den Werten. Dieser ist durch einen Stoß an den Tisch zu erklären, welcher die Vermischung der Flüssigkeiten in dem Moment extrem beschleunigt hat.

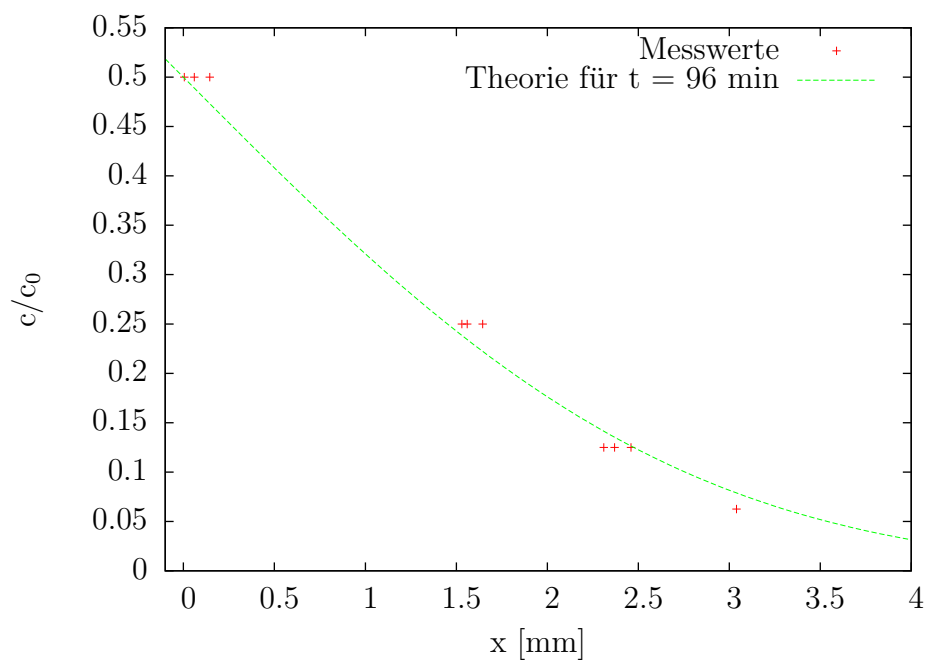


**Abbildung 4:** Messung von Versuch 3 zusammen mit dem theoretischen Wert für die durchschnittliche Zeit der Messung

## 6 Anhang

### Literatur

- [Cra75] J. Crank. *Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press Oxford, 1. Auflage edition, 1975.
- [Dem08] W. Demtröder. *Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5. Auflage edition, 2008.



**Abbildung 5:** Messung von Versuch 4 zusammen mit dem theoretischen Wert für die durchschnittliche Zeit der Messung