



Master Forschungspraktikum

Schwerpunkt Astro- und Geophysik (M.phy.401)

Versuchsanleitung zu AG.RBK

Rayleigh-Bénard-Konvektion

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Versuchsvorbereitung	2
2.1	Theorie der Rayleigh-Bénard-Konvektion	2
2.2	Versuchsaufbau	4
2.2.1	Thermistoren	4
2.2.2	Keithley-Multimeter	4
2.2.3	Wheatstone-Brücke und Analog-Digital-Wandler	4
2.3	Fragen zur Vorbereitung	5
3	Versuchsdurchführung	7
3.1	Bestimmung der Plattentemperaturen	7
3.2	Numerische Simulation	7
3.3	Visuelles Abschätzen der Geschwindigkeit	7
3.4	Temperaturzeitreihen	8
3.4.1	Störfrequenzen	8
3.4.2	Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil mittels eines einzelnen Thermistors	9
3.4.3	Start der Messung zur Geschwindigkeitsbestimmung mittels Korrelation	9
4	Datenauswertung	10
A	Anhang	13
A.1	Wichtige Stoffkonstanten	13
A.2	Thermistorpositionen	13

1 Einleitung

Thermische Konvektion ist ein wichtiger Antriebsmechanismus für geophysikalisch relevante Strömungen in der Atmosphäre, den Ozeanen, dem Erdmantel, dem Erdkern und auf anderen Planeten und Sternen.

In diesem Versuch werden einige grundlegende Eigenschaften der Konvektion untersucht. Ein mit Wasser gefüllter Würfel wird von unten geheizt und von oben gekühlt. Die Konvektionsbewegung wird dann optisch und mit lokalen Temperatursonden charakterisiert. Eine numerische Simulation begleitet das Experiment. Ergebnisse des Versuchs sind die qualitative Bewegungsform, die Bildung von Randschichten, Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile, sowie Spektren und Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Temperatur.

2 Versuchsvorbereitung

2.1 Theorie der Rayleigh-Bénard-Konvektion

Zunächst sollen einige grundlegende Dinge, die aus Vorlesungen bekannt sein müssten, nochmal zusammengefasst werden. Unter Rayleigh-Bénard Konvektion versteht man den Wärmetransport innerhalb eines Fluids auf Grund von Dichteunterschieden, welche wiederum auf Temperaturunterschieden beruhen.

Wird ein Fluid von unten geheizt und von oben gekühlt, so steigt das weniger dichte Material vom Boden auf, kühlt sich ab, wird dichter und sinkt wieder. Dieser Vorgang wird durch die Navier-Stokes-Gleichung, die Kontinuitätsgleichung und die Wärmetransportgleichung beschrieben. Meist genügt es, diese Gleichungen innerhalb der sogenannten Boussinesq-Näherung zu verwenden. Diese besteht in der Annahme, dass die Materialkonstanten (kinematische Viskosität ν , thermische Diffusivität κ , und thermischer Ausdehnungskoeffizient α) weder vom Druck noch von der Temperatur abhängen, also tatsächlich konstant sind. Von der Dichte wird angenommen, dass sie durch $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ mit der Temperatur verknüpft ist, wobei ρ_0 und T_0 Dichte und Temperatur in einem Referenzzustand sind. Die Dichtevariation wird außerdem nur im Auftriebsterm berücksichtigt. Mit diesen Näherungen entstehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{g} \alpha \Delta T \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (2.3)$$

Legt man die z -Koordinate längs der Vertikalen und nennt man L die Höhe der Zelle, so kommen noch Randbedingungen dazu:

$$\vec{v} = 0 \quad \text{bei} \quad z = 0, L \quad (2.4)$$

$$T = T_0 \quad \text{bei} \quad z = 0 \quad (2.5)$$

$$T = T_0 - \Delta T \quad \text{bei} \quad z = L \quad (2.6)$$

Hinzu kommen noch Bedingungen an den Seitenrändern. Durch Entdimensionalisierung dieser Gleichungen stellt man fest, dass in Wirklichkeit nur zwei unabhängige Parameter in ihnen vorkommen:

Prandtl-Zahl

Das Verhältnis aus kinematischer Viskosität und thermischer Diffusivität wird durch die Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.7)$$

beschrieben und ist damit eine Eigenschaft des Fluids selbst, unabhängig von der Art der Strömung und der Geometrie der Problemstellung.

Rayleigh-Zahl

Die Rayleigh-Zahl ist von der Form

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha\Delta TL^3}{\kappa\nu} \quad (2.8)$$

wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist. Die Rayleigh-Zahl ist eine dimensionslose Kennzahl, die den Charakter der Wärmeübertragung innerhalb eines Fluids beschreibt. Überschreitet Ra den kritischen Wert Ra_{crit} so setzt Konvektion ein und Wärme wird nicht mehr ausschließlich durch Diffusion übertragen. Letzteres wird auch durch eine weitere Größe beschrieben: die Nusselt-Zahl.

Nusselt-Zahl

Zur Beschreibung des Wärmetransports dient die Nusselt-Zahl Nu . Sie ist eine weitere dimensionslose Größe der Form

$$\text{Nu} = \frac{\text{gesamter Wärmetransport}}{\text{diffusiver Wärmetransport für ruhendes Fluid}} \quad (2.9)$$

Unterhalb der kritischen Rayleigh-Zahl gilt $\text{Nu} = 1$, das heißt der gesamte Wärmetransport erfolgt durch Diffusion. Mit steigender Rayleigh-Zahl erfolgt der Wärmetransport zunehmend durch Advektion. Die Advektion ist aber Null direkt an den Platten. Da dort der Wärmetransport nur diffusiv möglich ist, muß dort der Temperaturgradient größer sein als im Innern der Zelle: Es bilden sich Randschichten. Falls der Transport im Innern in guter Näherung ausschließlich advektiv ist, wird dort der mittlere Temperaturgradient Null, und die Nusselt-Zahl ist gegeben durch:

$$\text{Nu} = \frac{L}{2\delta} \quad (2.10)$$

wobei δ die Dicke der thermischen Grenzschicht ist.

2.2 Versuchsaufbau

Zum Versuch benutzen wir eine kubische Plexiglaszelle mit der Kantenlänge 20cm. Die untere mit Silber beschichtete Kupferplatte wird mittels einer Heizfolie erwärmt und die obere durch Wasser aus einem Wärmebad gekühlt.

In der Mitte der Zelle befindet sich ein vertikal verschiebbarer Thermistor (Th_8) mit dem sowohl ein Temperatur- als auch Geschwindigkeitsprofil gemessen werden kann. An der Seite befindet sich eine Serie von Thermistoren (Ta_1 bis Ta_6), ebenfalls zur Geschwindigkeitsmessung. Die Positionen der einzelnen Thermistoren sind dem Anhang zu entnehmen. Zusätzlich können die Plattentemperaturen durch zwei in den Platten befestigten Thermistoren genau abgelesen werden.

Die Messungen erfolgen mittels zweier unterschiedlicher Methoden. Zum einen werden die Widerstände der Thermistoren über das Keithley-Multimeter direkt eingelesen und gespeichert, zum anderen werden die Widerstände über eine Wheatstonesche Brückenschaltung mit Hilfe eines Analog-Digital-Wandlers an Hand der aufgezeichneten Spannungen bestimmt.

2.2.1 Thermistoren

Alle Messungen erfolgen mit Hilfe von Thermistoren. Das sind in diesem Fall kleine mit Epoxid beschichtete Halbleiter, die einen temperaturabhängigen Widerstand besitzen. In unserem Experiment werden so genannte NTC-Widerstände (auch Heißleiter genannt) benutzt, deren Widerstand mit steigender Temperatur abnimmt.

2.2.2 Keithley-Multimeter

Das Keithley-Multimeter kann die Widerstände mehrerer Thermistoren direkt aufnehmen. Dazu muss ihm die Kanalnummer, an die die Thermistoren angeschlossen sind übergeben werden, sowie die Anzahl der Messungen und die Zeitdifferenz zwischen zwei Messungen. Diese Methode wird verwendet um die Plattentemperaturen mittels dem Programm `Plattentemperatur.exe` zu bestimmen.

2.2.3 Wheatstone-Brücke und Analog-Digital-Wandler

Die Temperaturmessung kann auch über eine Wheatstone-Brückenschaltung erfolgen. Diese klassische Brückenschaltungen besteht aus zwei festen Widerständen R_1 und R_2 sowie einem Potentiometer R_P . Die Widerstände R_2 und R_1 sind bekannt und R_{Th} ist der gesuchte Widerstand. Ist die Brücke abgeglichen (d.h. die abgegriffene Spannung U ist Null), so gilt $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{Th}}{R_P}$.

Um nun mittels Thermistoren die Temperaturschwankungen zu bestimmen, wird die Spannungsänderung zum vorher definiertem abgeglichenen Zustand bestimmt. Der Widerstand ändert sich $R_{Th} \rightarrow R_{Th} + \Delta R_{Th}$ und somit auch die gemessene Spannung U .

Für das Verhältnis aus Brückenspannung U_0 zu gemessener Spannung U ergibt sich nun mit dem Brückenverhältnis $k = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_P}{R_{Th}}$ und mit $\theta = \frac{\Delta R_{Th}}{R_{Th}}$:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1 + \theta}{1 + \theta + k} - \frac{1}{1 + k} \quad (2.11)$$

Diese Spannungsänderungen wurden mit einer bei 10°C abgeglichenen Brücke in Abhängigkeit von der Temperatur geeicht. Die kontinuierlichen Spannungsänderungen werden dann über den AD-Wandler diskretisiert und für jeden Thermistor eingelesen und abgespeichert.

2.3 Fragen zur Vorbereitung

1. Entdimensionalisierung:

Zur numerischen Lösung müssen die Bewegungsgleichungen von Dimensionen befreit werden. Drücken Sie hierzu alle Längen, Zeiten, Geschwindigkeiten und Terme der Form $T - T_0$ in Vielfachen von L , L^2/κ , κ/L und ΔT aus. Dabei die Randbedingungen nicht vergessen! Als Ergebnis stehen Gleichungen da, in denen keine dimensionsbehaftete Größe mehr vorkommt, dafür aber die Parameter Ra und Pr.

2. Kennzahlen:

Berechnen sie die Rayleigh- und Prandtl-Zahlen für die im Versuch verwendete Zelle für $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, für den Erdkern, den Erdmantel und die Atmosphäre. Welche sinnvollen Annahmen müssen dabei gemacht werden (benötigte Stoffgrößen befinden sich im Anhang bzw. können im Internet nachgeschaut werden)? Was für eine Strömung ist jeweils zu erwarten. Welche kritische Rayleighzahl erwartet man für die Zelle?

3. Profile:

Welche Form des zeitlich gemittelten Temperaturprofils für die Zelle und des zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofils ist als Funktion von z zu erwarten? Was sind Grenzschichten, wie entstehen sie und existieren diese sowohl für die Temperatur als auch für die Geschwindigkeit?

4. Konvektion:

Welche Arten von Strukturen können sich bilden? Was sind Plumes und was ist Large Scale Circulation (LSC)? Welche Formen haben diese? Wovon hängt die Form ab?

5. Wheatstone-Brücke:

Für eine Eingangsspannung von $U_0 = 1\text{V}$, $R_1 = 20\text{k}\Omega$ und $R_2 = 10\text{k}\Omega$ wurde eine Spannung U von 0.103V gemessen. Wie groß ist θ ?

In diesem Praktikumsversuch wurde das Signal-Rauschen-Verhältnis der Temperaturmessungen nicht optimiert. Wie hätte man die Brückenschaltungen bedienen müssen, damit der Rauschpegel im Vergleich zum Signal möglichst niedrig liegt?

6. Spektrum einer Zeitserie:

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Fluids wird das Spektrum von Temperaturzeitreihen betrachtet. Aber was genau ist überhaupt das Spektrum einer Zeitserie? Welchen Effekt hat das Zerteilen der Zeitserie in Blöcke, die einzeln transformiert werden und über die am Ende gemittelt wird?

Die Wahl der Abtastfrequenz ist entscheidend für den Versuch, da hochfrequente Störungen auftreten. Die Wahl einer niedrigen Abtastfrequenz beseitigt diese Frequenzen nicht, sie tauchen durch 'Aliasing' bei anderen Frequenzen wieder auf. Warum und wo?

3 Versuchsdurchführung

3.1 Bestimmung der Plattentemperaturen

Typische Einstellungen für dieses Experiment sind eine Heizspannung von 36V, eine Temperatur des Wasserthermostaten von 10°C, und eine Brückenspannung von 1V.

Die Bestimmung der Plattentemperaturen erfolgt mit dem Programm `Plattentemperatur.exe`. Die Plattentemperaturen sollten im Verlauf des Versuchs mehrmals überprüft werden, um deren Schwankungen zu registrieren.

3.2 Numerische Simulation

Vor den Messungen am Experiment sollen Simulationen am Computer durchgeführt werden. Dafür steht ein vorgefertigtes Modell für das Programmpaket `Comsol Multiphysics` zur Verfügung. Auch hier soll ein Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil erstellt werden. Da die Werte zu jedem einzelnen Zeitpunkt von dem zu erwartenden Profil abweichen können, ist eine Mittelwertbildung (im 'statistisch stationären' Zustand) sinnvoll. Dazu können die Daten als ASCII-Datei exportiert und mit anderen Programmen (z.B.: Matlab, gnuplot) weiterverarbeitet werden (es existiert ein Matlab-Skript `mittelung.m`, welches die Mittelwertbildung übernimmt). Die numerische Behandlung erfordert jedoch Einschränkungen in der Wahl der Parameter.

Das Modell ist als `.mph`-Datei im Ordner `Praktikum-Comsol` gespeichert. Hier wird das Ergebnis für eine Rechnung mit einer Rayleigh-Zahl von $Ra = 10^7$ dargestellt. Es soll außerdem noch die Konvektion bei vier weiteren Rayleigh-Zahlen simuliert werden (10^3 , 10^4 , 10^5 und 10^6). Die Werte können direkt unter `Options` → `Constants` eingegeben werden.

Wie lang das Programm rechnen soll, kann unter `Solve` → `Solver Parameters` eingestellt werden. Die gesamte Zeitdauer, die benötigt wird, ist ausreichend sobald die Nusselt-Zahl konstant bleibt bzw. um einen gut definierten Mittelwert fluktuiert.

Unter dem Menüpunkt `Postprocessing` → `Cross-Section plot parameters` werden die Profile der Temperatur (diese Variable heisst allerdings Konzentration c in dem verwendeten Comsol-Modell) und Geschwindigkeit erstellt. Welche Koordinaten und welcher Zeitpunkt dabei geplottet werden soll, muss per Hand festgelegt werden. Die Graphen der Profile und Nusselt-Zahlen können dann als ASCII-Tabelle gespeichert und weiterverarbeitet werden.

3.3 Visuelles Abschätzen der Geschwindigkeit

Zur Abschätzung wird in einer Schattenprojektion die Bewegung einzelner Plumes verfolgt. Man misst die Zeit, die diese brauchen, um einen Weg von 2.5 cm zurückzulegen und bildet den Mittelwert über mindestens 10 Messungen für jeweils ansteigende und absteigende Plumes.

3.4 Temperaturzeitreihen

Die Messung von Temperatur als Funktion der Zeit erfolgt dem Programm `aiscan.exe`. Dieses Programm liest die Spannungen aus dem AD-Wandler und speichert diese ab. Nach dem Start des Programms muss es initialisiert werden. Einzutragen sind die Messfrequenz (major frequency) und die Anzahl der Messungen. Diese muss eine Potenz von 2 sein. Der Gain Code sollte auf 5 gestellt werden, da unsere Messwerte zwischen 0 und 0.4 V liegen.

Für diesen Versuch stehen zwei Rechner zur Verfügung. Der eine läuft unter Windows und dient in erster Linie der Steuerung des Experiments. Der andere läuft unter Linux und ist zur Datenauswertung da. Es empfiehlt sich, einen zentralen Ordner auf dem Linux-Rechner anzulegen und dort alle Daten zu speichern. Der Zugriff ist auch von dem Windows-Rechner aus möglich.

Zur Auswertung der Zeitreihen gibt es das Programm `Praktikum.exe`. Dieses Programm dient zur Umrechnung der Ausgabe von `aiscan.exe` und hat drei Menüpunkte:

- **Temperaturmessung:** Hier werden die Spannungen in Temperaturen umgerechnet und der Mittelwert gebildet. Diese werden in der Datei mit dem Präfix `tem_` gespeichert. Es wird nach der Quelldatei der Daten, der Messfrequenz und der Anzahl der Messpunkte gefragt.
- **Geschwindigkeitsmessung:** In diesem Menüpunkt führt das Programm zusätzlich noch eine Fourietransformation durch. Das Spektrum wird zum einen in der Datei mit dem Präfix `Power_` gespeichert, zum anderen mit f^2 multipliziert und in der Datei mit dem Präfix `Powerfq_` gespeichert.

Als drittes wird noch das mittlere Schwankungsquadrat berechnet und in die Datei mit dem Präfix `RMS_` gespeichert. Es wird nach der Quelldatei der Daten, der Messfrequenz und der Anzahl der Messpunkte gefragt.

- **Korrelation:** Hier werden die Spannungen in Temperaturen umgerechnet und die Korrelationen der Zeitreihen berechnet. Es wird nach der Quelldatei der Daten, der Messfrequenz und der Anzahl der Messungen gefragt. Diese werden in die Datei mit dem Präfix `Geschwindigkeit_` gespeichert.

Berechnet werden als Funktion einer Zeitverschiebung τ das zeitliche Mittel von $(T_i(t) - T_j(t + \tau))^2$, wobei i und j die Thermistoren nummerieren. Abgespeichert werden die Korrelationen als Funktion von τ in Spalten für benachbarte Thermistoren: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6).

Zur Auswertung der Daten vor Ort steht Gnuplot zur Verfügung.

3.4.1 Störfrequenzen

Zum Test wird zunächst eine Zeitserie in etwa in der Mitte der Zelle aufgenommen, bei einer Abtastfrequenz von 250 Hz und einer Länge von mindestens 2^{14} Punkten. Daraus wird dann die optimale Abtastfrequenz bestimmt?.

3.4.2 Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil mittels eines einzelnen Thermistors

Mit Hilfe des beweglichen Thermistors Th_8 wird das Temperaturprofil aufgenommen. Um die Dicke der Randschicht aus den Daten ermitteln zu können sind Messungen im Abstand von 0.5 mm sinnvoll. Die erste Messung soll dabei direkt an der Platte erfolgen. Zur Bestimmung des Nullpunktes der z -Achse muß man zunächst wissen, wann der Thermistor die Platte berührt. Dies ist dann der Fall, wenn er sein Spiegelbild in der Platte berührt.

Um einen guten Mittelwert der Temperatur zu erhalten sollte eine Messdauer von ca. 2 Minuten (entsprechend 1024 Messpunkten) ausreichen. Während der Messung können somit die ersten Daten schon ausgewertet und das Temperaturprofil geplottet werden. So kann man auch feststellen, wann die Messabstände von 0.5 mm nicht mehr nötig sind und größere Abstände genügen.

Zur Bestimmung des Profils der Geschwindigkeit begnügen wir uns zuerst mit einer relativen Messung. Um ein Maß für die Geschwindigkeit zu erhalten wird aus jeder Messreihe das Leistungsspektrum berechnet. Dieses geht bei höheren Frequenzen in weißes Rauschen über. Dieser Übergang wird als Abbruchfrequenz f_c bezeichnet. Je größer die Geschwindigkeit, je größer der Wert von f_c .

In verschiedenen Höhen der Zelle werden somit parallel zur Temperaturbestimmung die Werte für die Bestimmung dieser Abbruchfrequenz benutzt (hier genügt es alle 2 Messpunkte mit mind. doppelt so langer Messdauer (2048 Messpunkte) zu messen).

Plottet man f_c in Abhängigkeit von der Höhe, so erhält man eine Kurve, die mit dem Geschwindigkeitsprofil korreliert. f_c kann man direkt aus dem Leistungsspektrum ablesen. Bequemer ist es jedoch, dieses erst mit f^2 zu multiplizieren und dann nach dem Minimum dieses Wertes zu suchen (Diese Methode versagt allerdings bei niedrigen Geschwindigkeiten).

3.4.3 Start der Messung zur Geschwindigkeitsbestimmung mittels Korrelation

Als weitere Möglichkeit, die Geschwindigkeit zu messen, gibt es die Verwendung des Thermistorarrays. Löst sich ein kalter Plume von der oberen Platte in der Nähe des Arrays und sinkt nach unten, so wird er zuerst einen Temperaturschlag am obersten Thermistor auslösen und nach einiger Zeit am zweiten.

Zeitreihen der Thermistoren werden mit dem Programm `aiscan.exe` aufgenommen. Man berechnet die Korrelation zwischen den Zeitreihen zweier Thermistoren für verschiedene Zeitdifferenzen τ . Die Korrelation sollte den höchsten Wert bei der Zeitdifferenz haben, die der Zeit entspricht, die ein Plume braucht, um von dem einen zum anderen Thermistor zu gelangen. Dies wird für alle Thermistorenpaare des Arrays gemacht.

Um ein gutes Maximum der Korrelation zu erhalten benötigt man eine Messdauer von mind 30 h. Das wird bei einer Abtastfrequenz von ca. 10 Hz mit 2^{20} Punkten erreicht.

4 Datenauswertung

7. Wie groß ist die Rayleigh-Zahl des Experiments? Bestimmen Sie diese aus den gemessenen Plattentemperaturen.
8. Beschreiben Sie qualitativ den Strömungsverlauf innerhalb der Zelle, soweit man ihn aus der Schattenprojektion bestimmen kann. Wie groß ist die typische Geschwindigkeit? Welche Reynolds-Zahl ergibt sich daraus?
9. Welche Störfrequenzen tauchen bei der Messung mit einer Abtastfrequenz von 250 Hz auf? Bei welchen Frequenzen erscheinen die Störungen im Spektrum, wenn die gewählte Abtastfrequenz benutzt wird? Inwiefern ist diese Abtastfrequenz also eine sinnvolle Wahl?
10. Zeichnen Sie Mittelwert und rms der Temperatur als Funktion vom Plattenabstand. Deuten Sie den Verlauf der beiden Profile.
11. Zeichnen Sie für die numerischen Daten Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile. Interpretieren Sie die Profile.
12. Die lange Messung, die zur Korrelation verwendet wurde, kann auch dazu dienen, Mittelwert und Schwankungsquadrat zu berechnen. Wie vergleichen sich diese mit den Ergebnissen, die Sie auf der Mittellinie der Zelle erhalten haben? Was fällt auf?
13. Zeichnen Sie das Geschwindigkeitsprofil, das aus der Abbruchfrequenz f_c bestimmt wurde. Hat das Geschwindigkeitsfeld auch eine Randschicht? Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit der Verlauf von f_c ein getreues Abbild des Geschwindigkeitsprofils liefert?
14. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit aus den Korrelationsmessungen. Wie passt diese zu den Ergebnissen aus dem Schattenwurf? Ändert sich die Geschwindigkeit mit der Höhe? Wenn ja warum?
15. Vergleichen Sie nun eine Geschwindigkeit V , die Sie aus den Messungen erhalten haben, mit zwei einfachen Rechnungen:
 - (a) Die Geschwindigkeit des freien Falls (welche Geschwindigkeit hat ein Teilchen nach einem Fall aus der Höhe L , wenn es mit $g\alpha\Delta T$ beschleunigt wird?) und
 - (b) die Endgeschwindigkeit, die beim Fallen durch ein viskoses Medium erreicht wird (d.h. das Gleichgewicht in der Navier-Stokes-Gleichung besteht aus den Termen $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \approx \nu \nabla^2 \vec{v}$, was in Größenordnung zu der Gleichung $V^2/L \approx \nu V/L^2$ führt).
16. Bestimmen Sie aus der Dicke der thermischen Randschicht der numerischen Daten die Nusselt-Zahl. Schätzen Sie den Fehler ab.

17. Innerhalb der Simulation kann die Nusselt-Zahl als das zeitliche Mittel eines Flächenintegrals (in 2D eines Linienintegrals) bestimmt werden. Welches Integral ist das? Vergleichen sie die so ausgerechneten Nusselt-Zahlen mit denjenigen, die man aus dem entsprechenden Temperaturprofil bestimmen kann. Was fällt auf?
18. Zeichnen Sie die Nusselt- als Funktion der Rayleigh-Zahl, indem Sie experimentelle und numerische Daten in einem doppelt logarithmischen Graphen vereinen. Läßt sich $Nu(Ra)$ durch ein Potenzgesetz nähern?
19. Zuletzt verwenden wir die langen Zeitreihen dazu, Histogramme bzw. Wahrscheinlichkeitsdichten der Temperatur zu erstellen. Schreiben Sie ein Programm, das die Histogramme erzeugt, und zeichnen Sie diese mit einer logarithmischen Skala für die Häufigkeit. Deuten Sie die Form des Histogramms. Wie sieht das Histogramm vermutlich auf den diametral gegenüber liegenden Punkten in der Zelle aus?

Literatur

- [1] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1988.
- [2] K.-Q. Xia, S. Lam, S.-Q.Zhou. *Heat-Flux Measurements in High-Prantl-Number turbulent Rayleigh-Benard convection*. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 2002.
- [3] A. Tilgner, A. Belmonte, and A. Libchaber. Temperature and velocity profiles of turbulent convection in water. *Phys. Rev. E*, 47:R2253–R2256, 1993.
- [4] A. Belmonte, A. Tilgner, and A. Libchaber. Boundary layer length scales in thermal turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 70:4067–4070, 1993.
- [5] G. Zocchi, E. Moses, and A. Libchaber. Coherent structures in turbulent convection, an experimental study. *Physica A*, 166:3 p.387-407, 1990.

A Anhang

A.1 Wichtige Stoffkonstanten

Stoffkonstanten Für den Erdkern, Erdmantel, die Atmosphäre und die Zelle ¹:

	Erdkern	Erdmantel	Atmosphäre	Zelle
thermischer Ausdehnungskoeffizient $\alpha \left[\frac{1}{K} \right]$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
Dichte $\varrho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	12000	5000	1.29	1000
spezifische Wärmekapazität $c_p \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$	800	1200	1000	4187
Wärmeleitfähigkeit $\lambda \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$	30	10	0.03	0.6
dynamische Viskosität $\mu [Pa \cdot s]$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{21}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$

A.2 Thermistorpositionen

Thermistor	Kanal	Abstand vom Deckel [mm]
Ta_1	1	20
Ta_2	2	50
Ta_3	3	80
Ta_4	4	120
Ta_5	5	150
Ta_6	6	180
Th_8	8	0-200

¹Quelle: F.D. Stacey, P.M. Davis „Physics of the earth“; Wikipedia