

Rayleigh Benard Konvektion

Ausarbeitung zum Versuch AG.RBK

Name: Michael Lohmann
EMail: m.lohmann@stud.uni-goettingen.de
Datum Versuchsdurchführung: 06.06.2018
Name Betreuer(in): Axel Rosenthal
Kopie der testierten Ausarbeitung erwünscht: ja ☐ nein ☐
Unterschrift:

Abgabe

Datum: Unterschrift Betreuer(in):

Testat

Datum: Name Prüfer(in):
Punktezahl: Unterschrift:
Note:

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Modell und Beschreibung	2
2.1	Bewegungsgleichung	2
2.2	Nußelt-Zahl	4
2.3	Plumes	4
2.4	Large Scale Circulation	5
3	Experiment und Setup	7
3.1	Thermistoren	7
3.2	Wheatstonebrücke	7
3.3	Nyquist-Shannon-Abtasttheorem	8
3.4	Spektrum einer Zeitserie und Korrelation	8
4	Ergebnisse	10
4.1	Schattenprojektion	10
4.2	Wahl der Messfrequenz	11
4.3	Geschwindigkeitsprofil und Abbruchfrequenz	12
4.4	Temperatur- & Geschwindigkeitsprofil	13
4.5	Langzeit- und Korrelationsmessung	14
4.6	Simulierte Profile und Daten	16
4.7	Vergleiche der Geschwindigkeiten	18
4.8	Nußelt-Zahl	20
4.9	Temperaturhistogramme	20
5	Bewertung der Ergebnisse	22
	Literatur	23

1 Motivation

Konvektion ist ein Phänomen in Strömungen, welches an den unterschiedlichsten Orten auftritt. Es beschreibt den Transport von Energie mittels eines Teilchenstroms und findet sich zum Beispiel in Erdkern und -mantel, in der Atmosphäre, aber auch in Meeresströmungen und der Kaffeetasse.

Die RAYLEIGH-BÉRNARD-Konvektion ist ein Spezialfall, wobei der Energiegradient durch eine heiße Unterseite und eine kalte Oberseite eines mit einem Fluid gefüllten Gefäßes hervorgerufen wird. Die höhere Temperatur an der Unterseite sorgt dafür, dass sich das Fluid erwärmt, wobei es eine geringere Dichte bekommt. Durch Auftriebskräfte strebt die Flüssigkeit nun nach oben, bis sie an der oberen Platte angekommen ist und sich dort abkühlt. Dabei sinkt erneut die Dichte und sie sinkt wieder nach unten.

Als Beispiel lässt sich hier die Mantelkonvektion im Inneren der Erde anbringen, da der äußere Erdkern durch radioaktiven Zerfall thermisch auf über 3000° erwärmt wird und die Erdkruste durch Abstrahlung deutlich kühler ist. Aber auch in der Atmosphäre wird der Boden durch Sonneneinstrahlung erwärmt und die Stratosphäre bildet den oberen Rand.

Auch in der Industrie ist es ein wichtiges Phänomen, welches zum Beispiel bei dem Betrieb eines Hochofens beachtet werden muss [1].

Viele der genannten Systeme sind kugelsymmetrisch, das hier vorgestellte Experiment wurde jedoch in einem Kubus durchgeführt. Es bilden sich jedoch trotzdem ähnliche Strömungsmuster, wie sich herausstellt.

2 Modell und Beschreibung

2.1 Bewegungsgleichung

Die Rayleigh-Bénard-Konvektion (RBK) wird durch die NAVIER-STOKES-Gleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{g} \alpha \Delta T \quad , \quad (2.1.1)$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1.2)$$

und Temperatur-Transport-Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (2.1.3)$$

beschrieben. Hierbei sind \vec{v} das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld, p das Druckfeld und T das Temperaturfeld. Die Konstante α der Ausdehnungskoeffizient, $\vec{g} = g\hat{e}_z$ die Erdbeschleunigung (in dem gewählten Bezugssystem in z -Richtung), ΔT die Temperaturdifferenz der Randbedingungen, ν die dynamische Viskosität und κ die thermische Leitfähigkeit. Die für die Lösung des Gleichungssystemes benötigten Randbedingungen der Geschwindigkeit sind feste Ränder, bzw. $\vec{v} = 0$ am Rand. Die Temperatur am unteren und oberen Rand bei $z = 0, L$ ist durch Heiz- bzw. Kühlelemente bestimmt (L bezeichnet die Höhe der Zelle). Am unteren Rand liegt die Temperatur $T(z = 0) = T_0$ und am oberen die Temperatur $T(z = L) = T_0 - \Delta T$ an. Um RBK zu erhalten muss $\Delta T \geq 0$ gelten, da nur so die Dichte des Fluids an der unteren Platte herabgesetzt wird. Bei dem Aufstellen der Gleichungen wurde von einem inkompressiblen Fluid ausgegangen. Allerdings wird für den Auftriebsterm in der Navier-Stokes-Gleichung (2.1.1) angenommen, dass sich die Dichte leicht mit der Temperatur variiert und somit eine lineare

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0))$$

Abhängigkeit besteht. Diese Näherung ist auch als BOUSSINESQ-Näherung bekannt. Zur besseren Vergleichbarkeit von verschiedenen Experimenten wird eine Entdimensionalisierung durchgeführt. Dazu werden alle vorkommenden Konstanten und Variablen in Abhängigkeit von charakteristischen Größen des Versuchs ausgedrückt. Z.B. Ortsvektoren in Einheiten der Höhe $\vec{r} = \vec{r}' L$, Zeiten in Einheiten der Höhe und Viskosität $t = t' \frac{L^2}{\nu}$ und Geschwindigkeiten in Einheiten des Orts und der Zeit $\vec{v} = \vec{v}' \frac{\nu}{L}$. Mit $'$ versehenen Variablen sind die korrespondierenden dimensionslosen Variablen, wobei im Folgenden der Übersichtlichkeit halber die $'$ in der Notation ausgelassen werden.

	Zelle	Erdkern	Erdmantel	Atmosphäre
α [K ⁻¹]	0.00021	1.2e-5	1.5e-5	0.0037
ρ [kg m ⁻³]	1000	12000	5000	1.29
c_p [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	4200	800	1200	1000
λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]	0.6	30	10	0.03
μ [Pa s]	0.001	0.012	1e+21	1.7e-5
ν [m ² s ⁻¹]	1e-6	1e-6	2e+17	1.3e-5
κ [m ² s ⁻¹]	1.4e-7	3.1e-6	1.7e-6	2.3e-5
L [m]	0.2	2.3e+6	2.9e+6	15000
dT [K]	10.5	2000	1000	65
Pr	7	0.32	1.2e+23	0.6
Ra	1.2e+9	9e+29	1e+7	2.6e+22

Tabelle 1: Tabelle der Parameter und wichtige Stoffgrößen, sowie typische Zahlen.

Somit lässt sich die Navier-Stokes-Gleichung auch zu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \vec{v} + Pr Ra T \hat{e}_z \quad (2.1.4)$$

umformen, wobei der Druck hier nur die Rolle eines Potentials hat, welches die Divergenzfreiheit gewährleistet. Die anderen Gleichungen haben jeweils die gleiche Form. Zu erkennen ist, dass es zwei dimensionslose Parameter gibt: Die Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.1.5)$$

welche das Verhältnis von viskoser zu thermischer Diffusion beschreibt. Sie hängt offensichtlich nur von Fluid- und nicht von Experiment-Eigenschaften ab. Die zweite ist die Rayleigh-Zahl

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T L^3}{\kappa \nu} \quad (2.1.6)$$

welche das Verhältnis von thermischem Ausgleich durch Auftrieb zu dem durch thermische Diffusion ist. Es gibt einen kritischen Wert Ra_{crit} ab dem der thermische Ausgleich von reiner Diffusion zu einer zusätzlichen advektiven Bewegung wechselt.

In Tabelle 1 sind Kennzahlen für verschiedene Systeme und die jeweiligen Stoffparameter aufgeführt.

2.2 Nußelt-Zahl

Zur Beschreibung des Wärmetransportes wird die Nußelt-Zahl

$$Nu = \frac{\text{gesamter Wärmetransport}}{\text{diffusiver Wärmetransport}}$$

verwendet. Diese ist unterhalb der kritischen Rayleigh-Zahl $Nu = 1$, da hier ausschließlich diffusiver Transport stattfindet. Oberhalb dieser steigt Nu kontinuierlich an, da die Wärme zunehmend durch Konvektion transportiert wird. Aufgrund der Randbedingung der Geschwindigkeit gibt es an den Rändern keine Advektion, wesshalb sich also eine diffusive Randschicht ausbildet. Ist die Advektion im Inneren der Zelle ausreichend groß, so wird dort keine Wärme mehr diffusiv übertragen und somit nimmt die Dicke der thermischen Grenzschicht δ ab. Aus einfachen Überlegungen lässt sich schnell nachvollziehen, dass für die Nußelt-Zahl in erster Näherung gilt

$$Nu = \frac{L}{2\delta} \quad . \quad (2.2.1)$$

Desweiteren kann in Simulationen zur Bestimmung eine zweite Definition der Nußelt-Zahl verwendet werden:

$$Nu = \int \nabla T \, dA \quad (2.2.2)$$

Eine weitergehende Beschreibung der Nußelt-Zahl und möglicher Abhängigkeiten zu den anderen Parameters kann im Buch von J.S. Turner [2] in den Kapiteln 7.1.1, 7.1.3 und 7.3.1 nachgelesen werden.

2.3 Plumes

Bisher wurden nur über lange Zeiträume gemittelte Effekte näher betrachtet. Es stellt sich jedoch heraus, dass es auch spontane, die Symmetrie brechende Effekte gibt, beispielsweise Plumes. Plumes sind durch Dichteunterschiede auftretende Strömungen, welche von einer Auftriebsquelle ausgehen. Sie sind ähnlich zu einem Jet, allerdings sind diese verursacht durch einen initialen Geschwindigkeitsunterschied. Eine schematische Darstellung eines Plumes ist in der Abbildung 1 zu sehen. Mantelplumes (Plumes im Erdmantel) sind eine Quelle für vulkanische Aktivität. Häufig gut zu beobachten sind sie an den Schornsteinen von großen Kraftwerken: Man sieht dort häufig kleine „Wolkenstöße“ nacheinander kommen. Dieses Phänomen kann man auch in Abb. 2 sehen, wo sich die Plumes deutlich in den Abgasen des Vulkans *Mount Bromo* erkennen lassen.

¹<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plume-schematisch.png> vom 05.06.2018 11:30

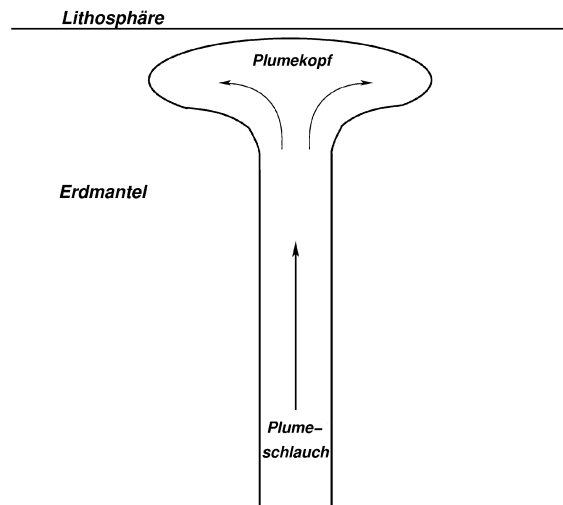


Abbildung 1: Schema eines Mantelplumes.¹Der untere Teil des Plumes besteht aus einer auftriebsgetriebenen Aufströmung, welche oben an der Grenze des Mantels eine pilzkopfartige Form annimmt. An dem Ort des Auftreffens steigt die Wahrscheinlichkeit vulkanischer Aktivität.



Abbildung 2: Plumes sichtbar am Beispiel des Mount Bromo (10.1.2017). Gut erkennbar sind die vielen kleinen pilzkopfartigen Dampfbüschel.

2.4 Large Scale Circulation

Auf großen Zeit- und Längenskalen dominiert die großräumige Zirkulation (Large Scale Circulation, LSC). Sie wird durch Reibungseffekte kontinuierlich abgebremst, und durch

zeitlich und räumlich statistisch auftretende Plumes im Mittel angetrieben. Die möglichen Formen der LSC sind sehr vielfältig und können zum Beispiel hexagonal oder auch walzenförmig sein. In Abbildung 3 ist eine walzenförmige aus einer Simulation für eine Rayleigh-Zahl von 10^5 gut erkennbar. Um diese Formen auch in sehr turbulenten Strömungen zu erkennen, muss das Geschwindigkeitsfeld zeitlich gemittelt werden. Je kleiner die Rayleigh-Zahl, desto kleiner die Turbulenz und desto kürzer muss der Zeitraum der Mittelung sein, um LCS zu sehen.

Time=5
Surface: Concentration, c
Arrow: Velocity field

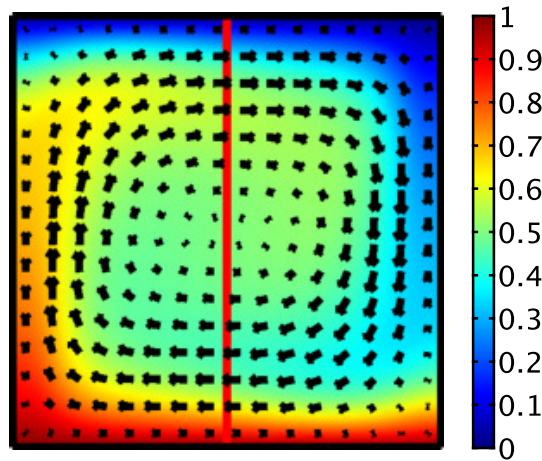


Abbildung 3: Ergebnis einer Simulation für $Ra = 10^5$. Gut erkennbar ist, dass eine großräumige kreisförmige Strömung existiert, welche an den Rändern und im Zentrum zum Erliegen kommt.

Wie häufig ein Plume entsteht und wie stark er (im stochastischen Mittel) eine LSC antreibt hängt von der Rayleigh-Zahl ab und spiegelt sich im Turbulenzgrad wieder. Diese Plumes sind gut zu messen, da sie einen deutlichen Temperatur- und damit und Dichte-Unterschied zur Umgebung aufweisen. Hierauf wird in den Kapiteln 4.1 und 4.4 näher eingegangen.

3 Experiment und Setup

Die RBK wird in einer kubischen Plexiglas Zelle mit 20cm vermessen. Sie wird unten durch eine Metallplatte geheizt und oben gekühlt entsprechen der Randbedingung. Innerhalb der Zelle befinden sich Thermistoren (s.u.) um die Temperatur zu messen. Einer ist frei in z -Richtung verfahrbar, die anderen sind in festen Abständen aufgereiht. Erste dienen zur zeitlichen Korrelation auf-, oder absteigender Strukturen, wie z.B. Plumes. Letzter wird zur Messung der mittleren Temperatur an bestimmten Orten verwendet. Ebenfalls sind Thermistoren zu Messung der Plattentemperaturen vorhanden.

Die Widerstände der Thermistoren können durch ein Multimeter oder eine Wheatstonebrücke (ebenfalls s.u.) bestimmt werden.

3.1 Thermistoren

Ein Thermistor ist ein temperaturabhängiger Widerstand. Ist diese Abhängigkeit bekannt, so kann aus dem gemessenen Widerstand die Temperatur zurückgerechnet werden. Die hier verwendeten Thermistoren sind sogenannte Heißleiter, also Widerstände die mit steigenden Temperaturen geringer werden (NTC-Widerstände).

3.2 Wheatstonebrücke

Eine Wheatstonebrücke ist eine Schaltung, bei der durch mehrere bekannte Widerstände und der Messung einer Spannung ein Widerstand bestimmt werden kann. Ein Schaltplan kann in der Abbildung 4 eingesehen werden.

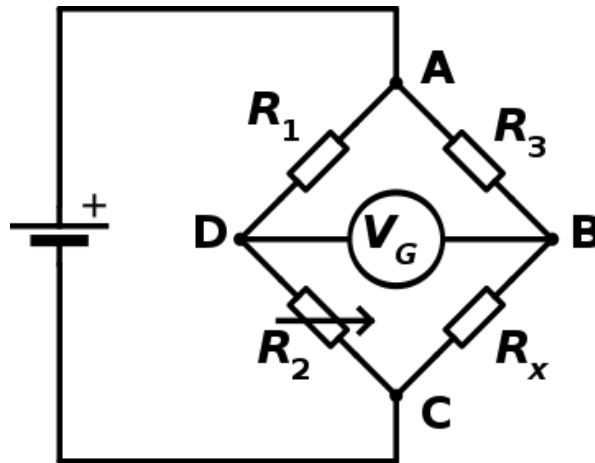


Abbildung 4: Schaltung einer Wheatstonebrücke.²

²<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wheatstonebridge.svg> vom 01.06.2018 10:40

Die Widerstände R_1 und R_3 sind bekannt. Das Potentiometer R_2 wird zur Eichung der Brücke verwendet und der unbekannte Widerstand $R_x = R_{th}$ ist der Thermistor. Ist die Brücke abgeglichen, sprich die Spannung $V_G = 0$, so kann man unter Zuhilfenahme der Regeln für das Abfallen von in Reihe geschalteten Widerständen leicht sehen, dass gilt

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \quad .$$

Ändert sich der Widerstand $R_1 \rightarrow R_1 + \Delta R$, so kann durch Nachrechnen der Kirchhoffschen Knoten- und Maschenregel folgende Identität für das Spannungsverhältnis hergeleitet werden:

$$\frac{U_5}{U} = \frac{1+v}{1+v+k} - \frac{1}{1+k} \quad . \quad (3.2.1)$$

Dabei bezeichnet $v = \frac{\Delta R_1}{R_1}$ die Verstimmung und $k = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_x}{R_3}$ das Brückenverhältnis. Die Spannung wird mittels eines Analog zu Digitalwandlers (ADC) gemessen. Bei der Auslegung des Schaltkreises muss man bedenken in welchem Spannungsbereich der ADC messen kann, wenn die Widerstände und die Spannung passend gewählt werden. Andernfalls benötigt man einen Verstärker, der wiederum Rauschen in die Messwerte einbringt.

3.3 Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

Das NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorem besagt, dass man zur korrekten Rekonstruktion eines Signals S dieses mit mehr als der doppelten maximal darin vorkommenden Frequenz $f_{\max, S}$ messen muss. Andernfalls kann es zu sogenannten "Sampling-Effekten" kommen, bei denen das rekonstruierte Signal eine deutlich geringere Frequenz aufweist, als das tatsächliche. Dieses ist in Grafik 5 gut zu erkennen (in den unteren Zeilen ist zusätzlich zu dem tatsächlichen Signal in gestrichelt noch ein niederfrequenteres Signal eingezeichnet, welches ebenfalls zu den Messwerten (Punkten) passt).

3.4 Spektrum einer Zeitserie und Korrelation

Das Spektrum eines Signales beschreibt, welche Frequenzen in ihm vorkommen. Nimmt man eine Zeitserie der Temperatur an einem Ort auf, so entspricht das fouriertransformierte Signal den Frequenzen mit der Temperaturschwankungen auftreten. Diese kommen durch Plumes zustande.

Möchte man nun deren Geschwindigkeit messen, so bietet es sich an, eine Thermistor-Kette zu nehmen und mit ihr eine Langzeitmessung zu machen. Korreliert man die Daten benachbarter Thermistoren miteinander, so kann man mittels ihres Abstandes und des Maximums in der Korrelation die mittlere Geschwindigkeit der Plumes feststellen.

³https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nyquist_Aliasing.svg vom 17.06.2018 14:45

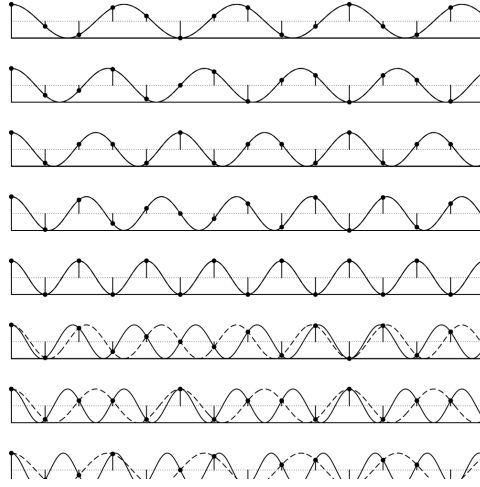


Abbildung 5: Beispiel, weshalb eine geringere Messfrequenz als $2f_{\max, s}$ nicht ausreichend ist.³

Natürlich gibt es keine perfekte Korrelation, da sich die Form der Plumes während des Aufsteigens verändert. Sie berechnet sich aus der Faltung der beiden Signale:

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad . \quad (3.4.1)$$

Das Maximum in der Kurve gibt nun an, mit welcher Abstand die meisten Plumes an den beiden Thermistoren vorbeikamen.

Die Fourier-Transformation eines Signales s gibt an, welche Frequenzen mit welchen Amplituden und Phasenschüben in ihm vorkommen. Sie berechnet sich mittels

$$\hat{s}(f) = \int s(t)e^{-2\pi itf}dt \quad .$$

Da das Ausrechnen des Integrals für alle Zeiten t sehr rechenintensiv ist, kann man stattdessen vom *Faltungstheorem* Gebrauch machen, welches besagt

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad .$$

Dadurch muss man nur noch das Produkt der Fouriertransformierten ausrechnen und das Ergebnis rücktransformieren.

4 Ergebnisse

4.1 Schattenprojektion

Bei einer Schattenprojektion wird ein Fluid mittels einer hellen Lampe angestrahlt und hinter dem Fluid wird ein Schirm beobachtet. Durch diesen Aufbau sind Dichteunterschiede erkennbar, da sie in Brechungsindex-Variationen resultieren, welche dann zu helleren bzw. dunkleren Regionen auf dem Schirm führen. Um die Geschwindigkeit der Plumes zu bestimmen wird die Bewegung ihrer Schatten auf einem Schirm beobachtet und die Laufzeit durch bestimmte Abstände gemessen. Die gemessene Lauflänge der Schatten auf den Schirm muss noch mithilfe des Strahlensatzes umgerechnet werden um die korrekte Strecke, welche die Plumes tatsächlich durchlaufen haben, zu erhalten. Dabei wird angenommen, dass die Plumes in der Mitte der Zelle aufsteigen.

Um die Position der Plumes in der Zelle genauer bestimmen zu können wird orthogonal zur ersten Richtung ein zweites Mal gemessen. Dadurch lässt sich ermitteln, in welchem Quadranten die Plumes auf und absteigen. In Abb. 6 ist die Rotationsrichtung skizziert, wie sie am Tag der Messung vorlag.

Der Abstand zwischen Lampe und Mitte der Zelle beträgt in Ost-West-Richtung etwa 2.5m (bzw. 2.75m in Nord-Süd) und der Abstand von Lichtquelle bis zum Schirm ist 2.93m in O-W-Richtung (3.2m in N-S-Projektion). In Tabelle 2 sind die Ergebnisse

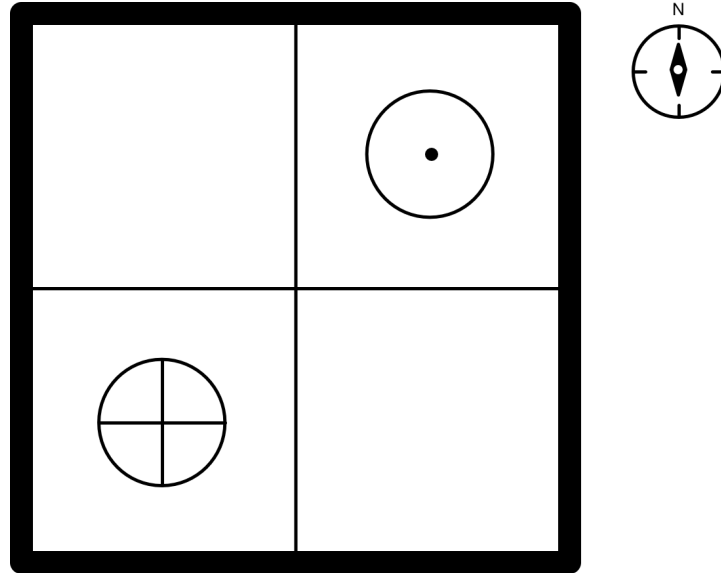


Abbildung 6: Draufsicht auf die Zelle. Der durch die Schattenprojektion ermittelte Aufstiegs- (☉) bzw. Abstiegsort (⊕) ist eingezeichnet. Dies war jedoch bei der Langzeitmessung nicht der Fall, da diese Messung an einem anderen Tag stattgefunden hat. Das Thermistorarray befand sich an dem mit T markierten Ort. Der Kreislauf schließt sich oben von ☉ zu ⊕ und an der Unterseite der Zelle umgekehrt.

aufgetragen. Es ist jedoch anzumerken, dass bei der Messung vor allem die gut sichtbaren Plumes vermessen wurden. Da diese augenscheinlich einen größeren Unterschied im Brechungsindex haben, ist ihr Temperaturunterschied vermutlich auch größer und es besteht die Gefahr einer systematischen Überschätzung der Geschwindigkeit.

Richtung	Geschwindigkeit [cm s^{-1}]	Reynolds Zahl
Ost-West auf	0.87(16)	42
Ost-West ab	0.73(16)	39
Nord-Süd auf	0.93(15)	44
Nord-Süd ab	0.75(06)	39

Tabelle 2: Aus den Schattenprojektionsdaten berechnete Geschwindigkeiten und korrespondierende Reynolds Zahlen. Die Fehler ergeben sich aus der Standardabweichung der aufgenommenen Messwerte.

4.2 Wahl der Messfrequenz

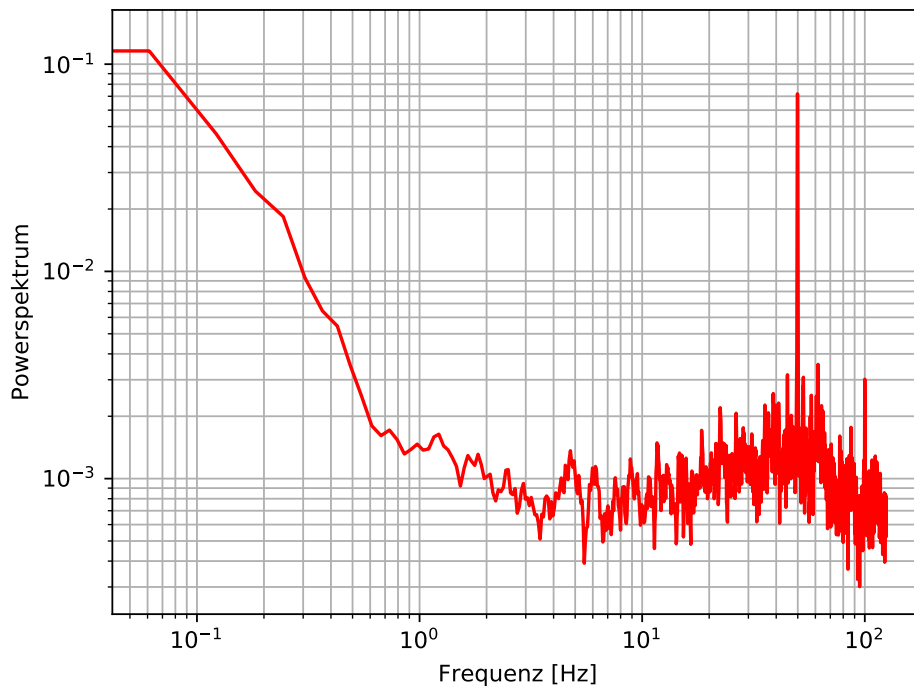


Abbildung 7: Spektrum der Störfrequenz-Messung in der Mitte der Zelle mit einer Messfrequenz von 250Hz. Die größte Störfrequenz von 50Hz, welche der Netzspannungsfrequenz entspricht, ist klar erkennbar.

Da jede Messung natürlich externe Störsignale beeinflusst wird, maßen wir einige Minuten im Zentrum der Zelle mit 250 Hz. In Abb. 7 sind die gemessenen Frequenzen aufgetragen. Deutlich zu erkennen ist die Netzfrequenz bei 50 Hz. Desweiteren sind auch die harmonischen (vielfachen) dieser Frequenz zu erkennen, allerdings am besten bei 200 Hz.

Unterhalb von etwa 10 Hz ist starkes Rauschen im zeitlichen Signal sichtbar. Zudem sind einige kleinere weitere Linien im Spektrum erkennbar, welche beispielsweise von den internen Frequenzen der umliegenden Geräten stammen könnten.

Das Aliasing ist ein Effekt, der nach dem Shannon-Nyquist-Abtasttheorem zustande kommt, wenn die zu messende Frequenz nicht mit mehr als der doppelten Frequenz gesampelt wird. Dann kann es dazu kommen, dass eine hohe Frequenz durch Samplen in verschiedenen Zyklen im Signal von einer viel geringeren Frequenz ununterscheidbar ist. Um dies zu unterdrücken muss eine Messfrequenz f_s bestimmt werden bei der diese Störfrequenzen durch den Aliasing Effekt nicht übermäßig im verwendeten Teil des Spektrums auftreten. Die sogenannte *Aliasing Frequenz* f_a , welche der gemessenen Frequenz eines eigentlich wesentlich höherfrequenten Signals f entspricht, berechnet sich aus

$$f_a = |f - n \cdot f_s| \quad , \quad (4.2.1)$$

da negative Frequenzen durch die Symmetrie des Kosinus auch auf die positive Achse gespiegelt werden können (oder anders: es kommt nur auf die absolute Differenz der Signale an).

Bei uns lag die optimale Messfrequenz bei etwa 9.1 Hz, so dass die folgenden Messungen mit ebendieser Frequenz aufgenommen wurden. Für diese Frequenz wurden in Abb. 8 die nach Formel 4.2.1 geshifteten Daten aufgetragen.

4.3 Geschwindigkeitsprofil und Abbruchfrequenz

Im Spektrum eines Signales eines Thermistors kann man bestimmen, welche Frequenzen noch einen nennenswerten Beitrag zum Signal geben. Ab einer gewissen Abbruchfrequenz ist der Beitrag des Signals dem Rauschen gegenüber zu vernachlässigen. Ab dieser ist im Spektrum nur noch weißes Rauschen (eine nahezu konstante Amplitude) zu erkennen.

Um sie zu bestimmen kann man am einfachsten eine Wendetangente an die abfallende Flanke des Spektrums legen und den Schnittpunkt mit einer Ausgleichsgeraden des linearen Bereichs des weißen Rauschens bestimmen. Da dies schwer algorithmisch durchführbar ist, haben wir dies mittels Augenmaß gemacht, da frühere Durchführungen dieses Versuches zeigten, dass die Akkuratheit hinreichend groß ist. Die Konstruktion des Punktes ist beispielhaft in Grafik 9 dargestellt.

Das Geschwindigkeitsfeld wurde in der unteren Hälfte im Zentrum der Zelle mit dem beweglichen Thermistor vermessen. Da die Geschwindigkeit der Plumes mit maßgeblich dafür verantwortlich ist, mit welcher Frequenz die Temperatur fluktuiert, ist anzuneh-

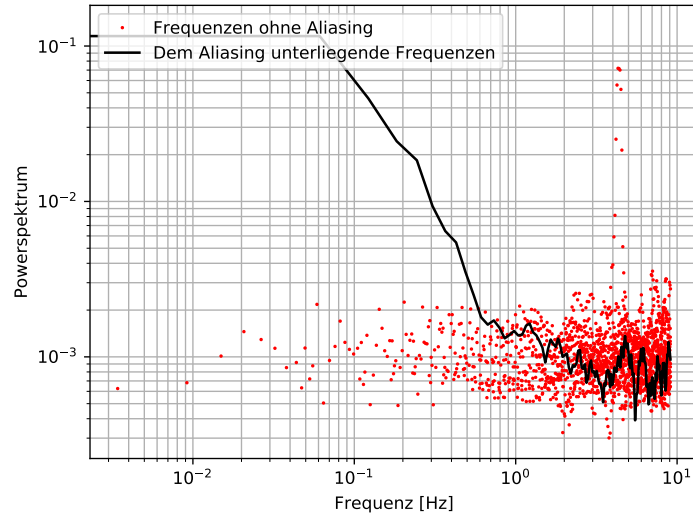


Abbildung 8: Nach Formel 4.2.1 berechnetes Powerspektrum. Weiterhin ist die Netzfrequenz deutlich zu erkennen, jedoch in einem irrelevanten Frequenzbereich. Im relevanten ist das Powerspektrum annähernd konstant.

men, dass die Geschwindigkeit linear mit der Abbruchfrequenz skaliert. Es können jedoch keinerlei absoluten Werte abgelesen werden. In Abbildung 10 sind die Abbruchfrequenzen aus verschiedenen Höhen aufgetragen. Wie zu erwarten ist die Geschwindigkeit in minimaler Höhe gering, da aus den Modellen hervorgeht, dass sie in der Grenzschicht verschwindend ist. Dann steigt sie zunächst an, was auch bei den Simulationen der Fall ist, wenn man sich nicht genau in dem aufsteigenden Bereich befindet, nur um ab ungefähr 5 cm konstant auf niedrigem Niveau zu sein. Dies entspricht genau dem Fall im Inneren der LSC (siehe Kapitel 4.6).

4.4 Temperatur- & Geschwindigkeitsprofil

In Grafik 11 ist das höhenabhängige Temperaturprofil im Zentrum der Zelle aufgetragen. Dabei stellt die rote Kurve den Mittelwert dar und der blaue Bereich zeigt die zeitliche Standardabweichung an. Deutlich zu erkennen ist die Grenzschicht an der unteren Heizplatte. In ihr ist auch die Standardabweichung gering, was darauf schließen lässt, dass das Fluid dort kaum turbulent ist und so thermisch stabil (was aufgrund der Theorie auch so zu erwarten ist).

Der Plot 12 zeigt die aus der Langzeit-Korrelationsmessung gewonnenen Geschwindigkeitsdaten in Abhängigkeit der Höhe. Zu erkennen ist, dass die Geschwindigkeit dichter am Boden mit 0.8 cm s^{-1} deutlich größer ist, als in der Mitte mit $\approx 0.6 \text{ cm s}^{-1}$. In 80% der Zellenhöhe beträgt sie dann nur noch 0.5 cm s^{-1} .

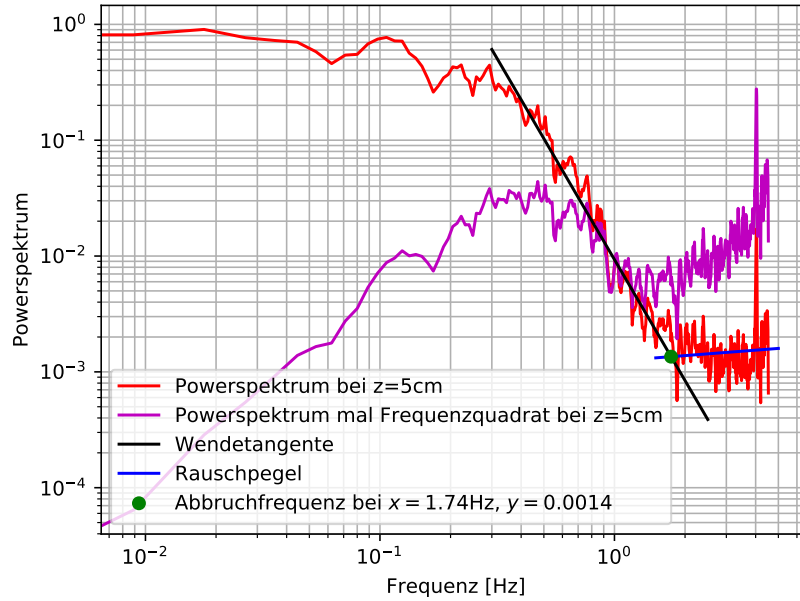


Abbildung 9: Konstruktion der Abbruchfrequenz. Zunächst wird die Wendetangente (schwarz) bei der abfallenden Kurve angelegt. Zeitgleich wird bei den hohen Frequenzen mit annähernd konstantem Level eine lineare Regression durchgeführt (blau). Der Schnittpunkt der sich ergebenden Geraden (grün) liegt nun bei der Abbruchfrequenz. Dies sollte in etwa mit dem Minimum des mit dem Frequenzquadrat multiplizierten Powerspektrums (lila) übereinstimmen.

4.5 Langzeit- und Korrelationsmessung

In Abbildung 13 ist die Korrelation zwischen benachbarten Thermistoren aufgetragen. Dabei wurde die Zeit-Achse mit dem jeweiligen inversen Abstand skaliert, da sich diese unterschieden und somit die Position der Maxima nicht vergleichbar war. Es ist zu erkennen, dass sich die Position des Maximum und damit die durchschnittliche Geschwindigkeit sich zwischen den unterschiedlichen Thermistoren unterscheidet. Dies ist auch in Figure 12 zu erkennen, in der die Geschwindigkeiten (basierend auf der Peak-Position) aufgetragen sind.

Die Breite der Korrelation kann man nicht ohne weiteres auswerten, da dort noch zahlreiche Effekte herein spielen, wie die Entstehung eines Plumes beeinflusst die Bildung eines weiteren und noch wichtiger: ein Plume bildet in den Messdaten keinen δ -Peak, sondern er ist in der Größenordnung des Abstands der Thermistoren. Dadurch verschwindet die Korrelation nicht bei $t = 0$ und die Breite des Peaks ist nicht nur durch die Geschwindigkeitsverteilung unterschiedlicher Plumes beeinflusst. Die Breite der Peaks ist jedoch im Inneren der Zelle kleiner, als am Rand. Daher könnte man vermuten, dass die Strömung dort weniger turbulent und homogener ist was die Größe und Geschwindigkeit der Plumes angeht.

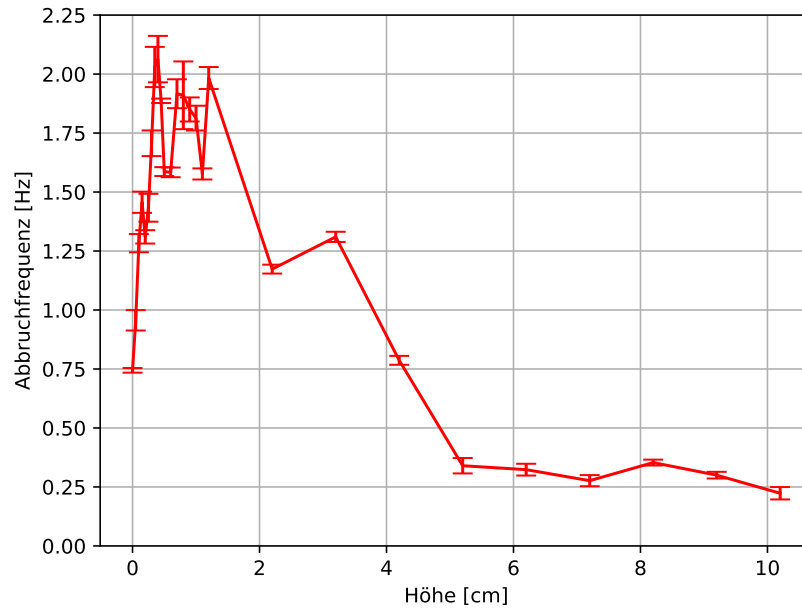


Abbildung 10: Ermittelte Abbruchfrequenz aufgetragen gegen die Messhöhe.

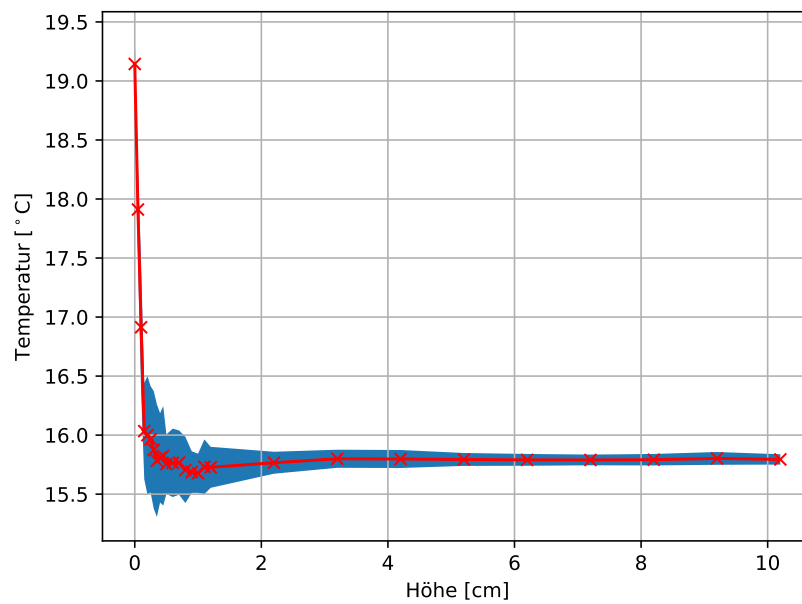


Abbildung 11: Gemessenes Temperaturprofil in Abhängigkeit der Höhe. Die rote Kurve beschreibt den Mittelwert und die blaue Fläche die Standardabweichung der Temperatur in der jeweiligen Höhe. Zu erkennen ist, dass die Temperatur oberhalb der wärmeren Grenzschicht nahezu konstant ist.

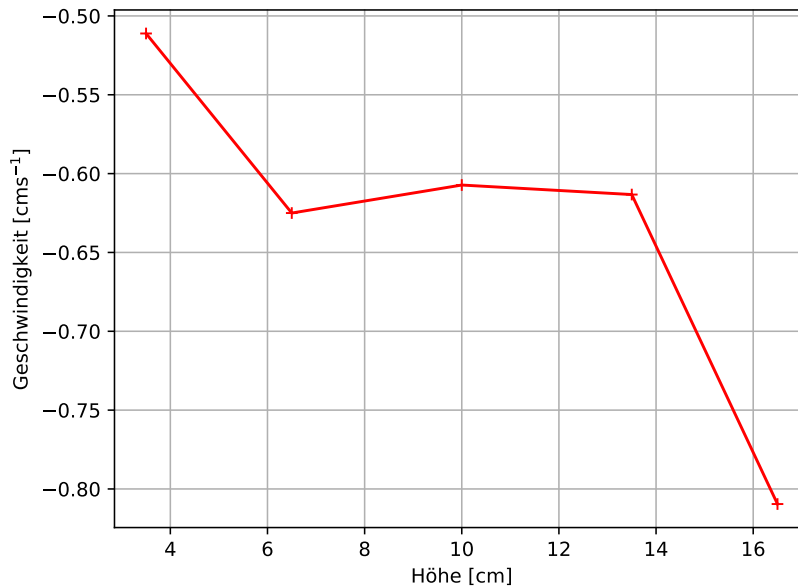


Abbildung 12: Aus der Korrelationsmessung bestimmte Geschwindigkeit in verschiedenen Höhen. Ermittelt durch fitten von Gauß-Peaks an die relevanten Intervalle von Abb. 13.

Aus der Langzeitmessung kann man jedoch die Temperaturdaten für die einzelnen Höhen nutzen, um diese miteinander im Mittelwert zu vergleichen. Selbiges ist in Grafik 14 aufgetragen. Zu sehen ist, dass die Standardabweichung sehr viel größer ist, als die Schwankungen der Mittelwerte in verschiedenen Höhen. Dies steht im Einklang mit der Theorie, da die Wärme ja im Inneren des Containers konvektiv an allen Thermistoren vorbeigeleitet wird, ohne dabei nennenswert Energie zu verlieren oder zu gewinnen.

4.6 Simulierte Profile und Daten

Da die Konstruktion und Durchführung von Experimenten mit unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen aufwändig ist, greifen Experimentatoren in diesem Bereich gerne auf Simulationen zurück. Allerdings steigt der Rechenaufwand für große Rayleigh-Zahlen rasant an, so dass es irgendwann nicht mehr sinnvoll ist. Auch sind die hier in dem Finite-Elemente-Simulationsprogramm Comsol durchgeführten Simulationen nur zweidimensional, wodurch bestimmte Effekte des Experiments nicht rekonstruiert werden können. Dennoch stimmen die Ergebnisse im Allgemeinen gut mit den Messwerten überein.

In Abb. 15 sind die Ergebnisse einer Simulation für Rayleigh-Zahlen zwischen 10^3 und 10^7 dargestellt. Anstelle einer Temperatur wurde mit Comsol mit einem Konzentrationsgradienten gerechnet und die Ergebnisse sind in 15b dargestellt. Da diese aber Formeln der selben Form folgt, sind die Ergebnisse äquivalent zu einem Temperaturprofil. In 15a sind die Geschwindigkeitsprofile gezeigt. Dabei ist zu sehen, dass für $Ra = 10^3$ die

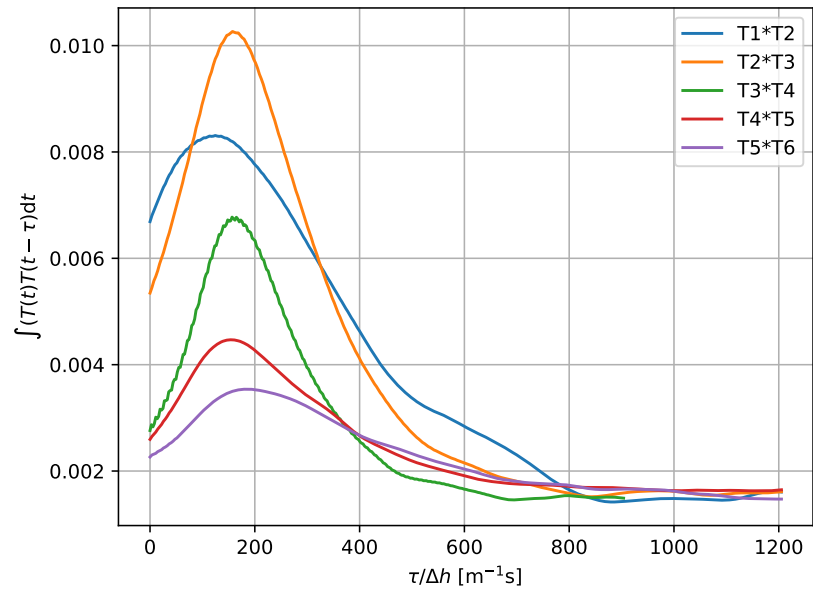


Abbildung 13: Korrelation benachbarter Thermistoren aufgetragen gegen die mit dem jeweiligen inversen Abstand skalierte Zeitdifferenz.

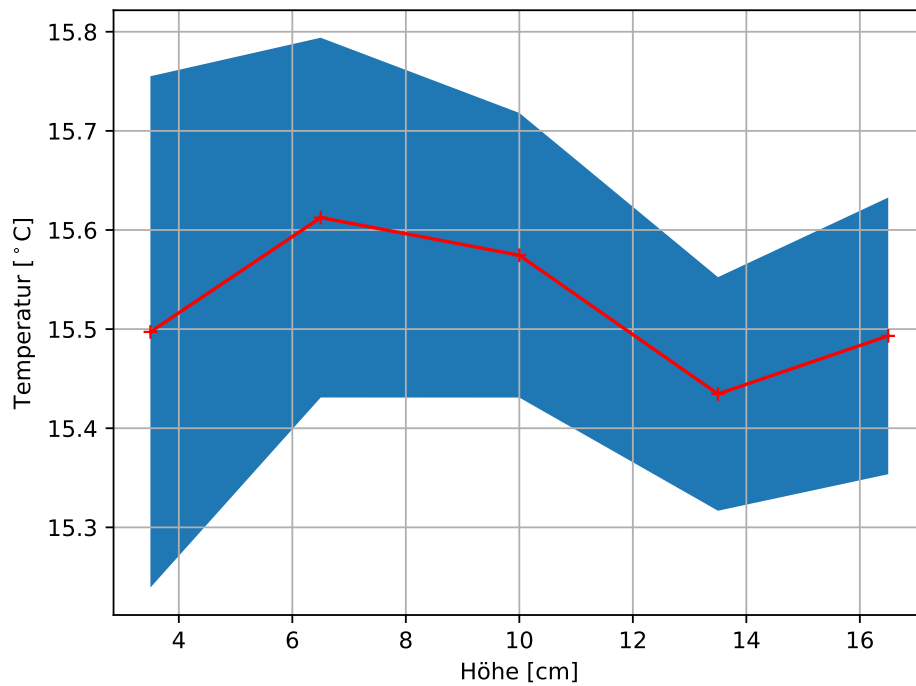


Abbildung 14: Temperatur aus der Korrelationsmessung

Geschwindigkeit überall verschwindend ist. Dies bedeutet, dass noch keine Konvektion eingesetzt hat und der Energiefluss noch rein diffusiv ist. Dies kann man auch in den anderen Graphen erkennen: So ist das Temperaturprofil linear und die Nußelt-Zahl im Equilibrium eins.

Für größere Rayleigh-Zahlen setzt die LSC jedoch ein und es ist zu erkennen, dass im Zentrum der Zelle die Geschwindigkeit abnimmt. Dies liegt daran, dass sich, wie in Abb. 3 zu sehen, ein Wirbel bildet mit dem Auge im Zentrum. An den Rändern ist (durch die Randbedingung vorgegeben) ebenfalls keine Strömung vorhanden. Dies liegt daran, dass dort durch die Reibung mit der Wand eine Grenzschicht entsteht. Außerdem kann man leicht sehen, dass mit größerer Rayleigh-Zahl auch die Geschwindigkeit ansteigt. Dies ist insofern nachvollziehbar, als dass bei größerem konvektiven Anteil des Wärmeflusses natürlich die LSC auch stärker angetrieben wird.

Die Nußelt-Zahl wurde als Pfadintegral über den Temperaturgradienten am oberen Rand berechnet. In Grafik 15c sieht man die Entwicklung der Nußelt-Zahl im zeitlichen Verlauf der Simulation. Zu erkennen ist, dass gerade die Kurven größerer Rayleigh-Zahlen deutlich mehr Fluktuationen aufweisen. Dies kommt daher, dass mit steigendem Turbulenzgrad auch mehr Plumes statistisch entlang der Linie über die integriert wird auftreten.

4.7 Vergleiche der Geschwindigkeiten

Hier sollen die unabhängigen Messungen der Geschwindigkeiten aus der Schattenprojektion (Kapitel 4.1) und der Korrelation (Kapitel 4.4) miteinander verglichen werden.

Die durch die Schattenprojektion bestimmten Werte für die Geschwindigkeit liegen zwischen 0.7 cm s^{-1} und 0.9 cm s^{-1} , wohingegen die durch die Korrelation ermittelten Werte im Bereich von 0.5 cm s^{-1} bis 0.8 cm s^{-1} liegen. Zusätzlich zu der in Kapitel 4.1 geäußerten Vermutung, dass durch das Selektieren der gut sichtbaren Plumes eine systematische Präferenz der schnelleren Plumes stattfand, kommt, dass die Messungen an unterschiedlichen Zellen gemacht wurden.

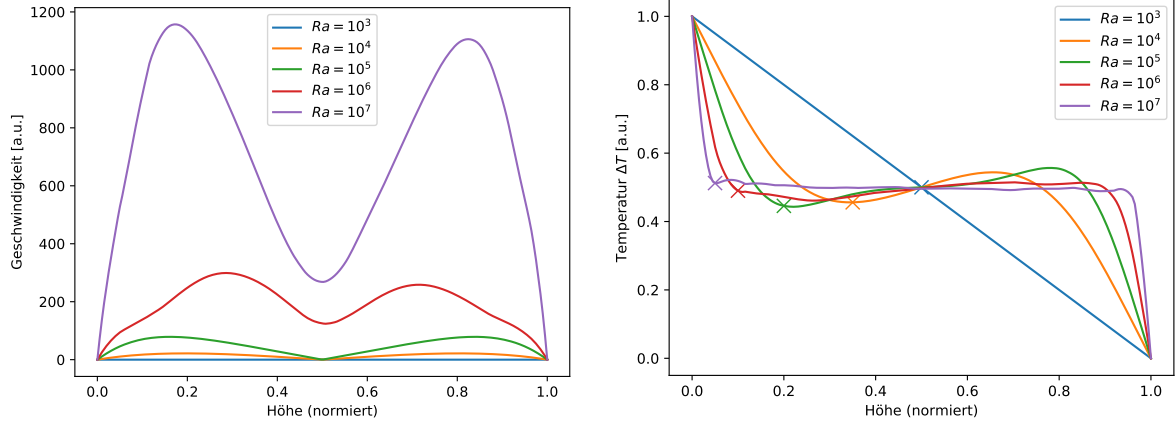
Man kann sich nun zwei theoretische Geschwindigkeiten angucken, welche in der Zelle gelten: zum einen die durch den freien Fall, für die gilt

$$v_{\text{Fall}} = \sqrt{Lg\alpha\Delta T} \approx 7 \text{ cm s}^{-1}$$

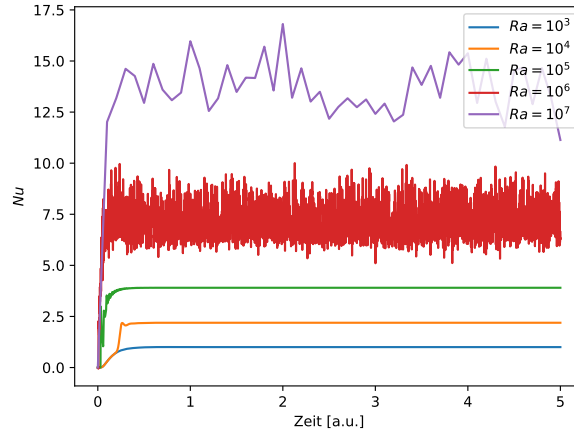
da durch den Temperaturdifferenz ΔT ein zu $\alpha\Delta T$ proportionaler Dichteunterschied zustande kommt, der über die Höhe L der Zelle mit der Erdbeschleunigung g Auftrieb erfährt.

Laut Praktikumshandbuch sollte die viskose Endgeschwindigkeit

$$v_{\text{End}} = \frac{\nu}{L} \approx 5 \times 10^{-2} \text{ cm s}^{-1}$$



(a) Geschwindigkeitsprofile in Abhängigkeit der Höhe. (b) Temperaturprofile in Abhängigkeit der Höhe. Die Position der x zeigt die in Kapitel 4.8 angenommene Grenzschichtdicke an.



(c) Nusselt-Zahlen im zeitlichen Verlauf der Simulation.

Abbildung 15: Simulationen für verschiedene Rayleigh-Zahlen.

betragen. Allerdings kann man anhand der Herleitung sehen, dass dabei keinerlei Auftriebskräfte mit einberechnet wurden. Noch bedeutender ist, dass diese Formal impliziert, dass in viskoserer Flüssigkeiten eine höhere Endgeschwindigkeit erreicht würde. Dies erscheint physikalisch nicht sinnvoll für den hier vorliegenden Fall.

Nimmt man jedoch die durch die STOKES-Reibung verringerte Geschwindigkeit, die aus dem Gleichsetzen der Stokesschen Reibungskraft mit der Auftriebskraft berechnet werden kann, so kommt man auf:

$$v_{\text{Stokes}} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_{\text{Plume}} - \rho_{\text{Fluid}})}{\eta} g R^2 = \frac{2}{9} \frac{g R^2 \alpha \Delta T}{\nu} \approx 11 \text{ cm s}^{-1}$$

wobei für den Radius der Plumes $R = 0.5 \text{ cm}$ angenommen wurde. Dies sollte die maximal erreichbare Geschwindigkeit sein (sieht man davon ab, dass bei der Herleitung von einem sphärischen starren Körper ausgegangen wird). Zu erkennen ist, dass diese Geschwindigkeit noch immer zu hoch im Vergleich zu den Messwerten ist. Zumal man bei der Schattenprojektion schon wenige Zentimeter vom Boden entfernt keine signifikante Beschleunigung mehr mit bloßem Auge erkennbar war. Vermutlich liegt es daran, dass durch den flüssigen Plume zusätzliche Wirbel entstehen können, welche wieder Energie vernichten. Auch wird ein Anteil des Impulses von dem Plume an die LSC abgegeben um diese anzutreiben. Andererseits müsste die effektive Geschwindigkeit durch die Strömung sogar geringer sein.

4.8 Nußelt-Zahl

Die Nußelt-Zahl kann entweder nach Formel 2.2.1 aus der Dicke der Grenzschicht oder (in Simulationen) aus dem Integral über den Temperaturgradienten (Gleichung 2.2.2) bestimmt werden. In Abb. 16 sind für die Simulationen beide Auswertungen aufgetragen. Es fällt auf, dass die Werte der Integral-Auswertung oberhalb derjenigen der aus der Grenzschichtdicke liegen. Dies liegt vermutlich daran, dass zur Bestimmung der Grenzschichtdicke nicht das erste Minimum in den Temperaturkurven genommen werden sollte, sondern jeweils ein Punkt vorher, bei dem die Steigung noch nicht verschwindend ist. Die verwendete Dicke ist in dem Plot 15b in Form von Kreuzen eingetragen.

Beide folgen jedoch augenscheinlich Potenzgesetzen und die aus Fits bestimmten Ergebnisse betragen $Nu_{\text{Grenz}} = 0.15Ra^{0.25}$ und $Nu_{\text{Int}} = 0.16Ra^{0.28}$.

Die aus dem Temperaturverlauf in Kapitel 4.4 bestimmten Nußelt-Zahlen sind ebenfalls im Plot 16 dargestellt. Die Werte liegen dichter an der Kurve für die Integrale, was wiederum dafür spricht, dass es einen systematischen Fehler bei der Bestimmung der Grenzschichtdicke gab.

4.9 Temperaturhistogramme

In Abbildung 17 ist ein Histogramm der Temperaturen der Thermistoren in verschiedenen Höhen aufgetragen. Es ist erkennbar, dass alle Thermistoren ihr Maximum in etwa bei der selben Temperatur haben. Die mittleren Thermistoren zeigen jedoch eine deutlich schmalere Temperaturverteilung. Die äußersten Temperatursensoren haben deutlich mehr niedrigere bzw. höhere Temperaturwerte. Das dies nicht andersherum ist, spricht dafür, dass sich kalte Plumes von der oberen Platte lösen und sich die LSC damit anders herum dreht, als bei der Messung der Schattenprojektion. Dies steht ebenfalls in Einklang mit den Temperaturdaten aus Kapitel 4.5, welche niedriger sind, als diejenigen aus Kapitel 4.4, was wiederum den Verdacht nahe legt, dass sich das Thermistorarray in dem abwärts fließenden Teil der LSC befindet.

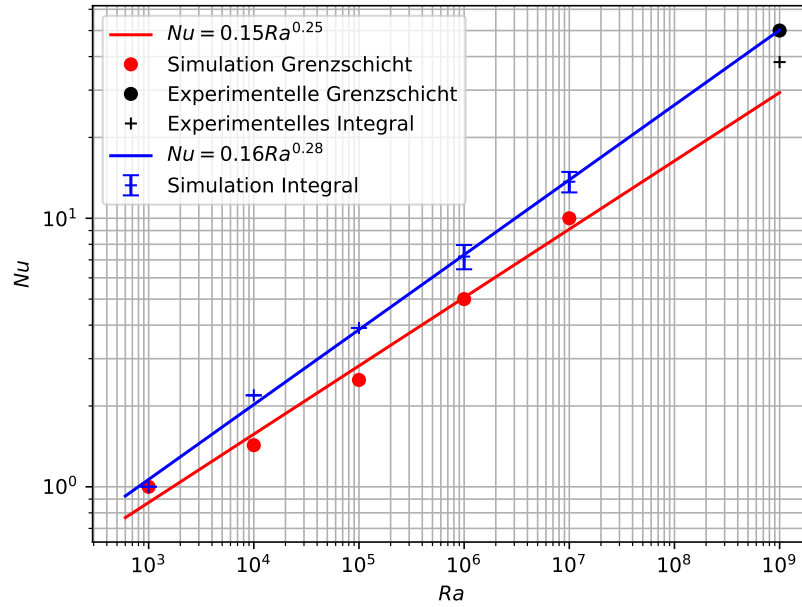


Abbildung 16: Nußelt-Zahl gegen Rayleigh Zahl aufgetragen. In blau sind die aus der Comsol-Simulation durch Auswertung des Linienintegrals über den Temperaturfluss an der Oberseite der Zelle bestimmten Werte gezeichnet.

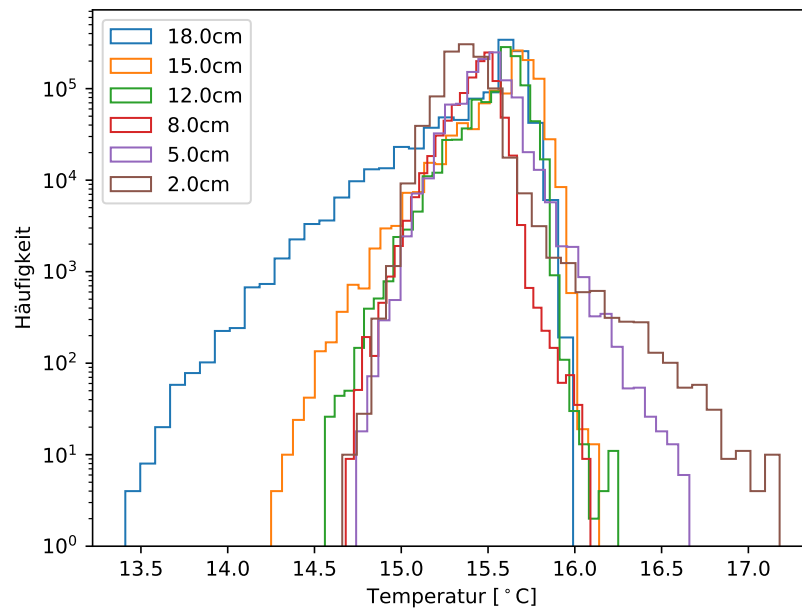


Abbildung 17: Histogramm der Temperaturen

5 Bewertung der Ergebnisse

In diesem Versuch wurde die Rayleigh-Bérnard-Konvektion sowohl in Experiment, als auch in der Simulation untersucht. Es zeigte sich, dass beide Ansätze wichtige Beiträge zum Verständnis liefern, da die praktische Umsetzung zwar in 3D ist und durch verschiedene Messmethoden weite Einblicke in die realen Umstände gibt. Allerdings ist in Experimenten die Variation der Rayleigh-Zahl nur schwer machbar. Deren Einfluss konnte mithilfe der Simulationen (wenn auch nur in 2D) untersucht werden. Zusätzlich kann bei Simulationen das komplette Geschwindigkeits- sowie Temperaturfeld ermittelt werden. Daher können deutlich tiefere Einblicke in die physikalischen Phänomene, welche an der Grenzschicht stattfinden, gewonnen werden. Aber auch die Simulationen haben ihre Grenzen, was die Rechenkapazität angeht. So konnten die vorliegenden Verhältnisse nicht simuliert werden, allerdings stimmen die Extrapolationen gut mit den Messwerten überein.

Das Temperaturfeld konnte mittels eines beweglichen Thermistors vermessen werden und zeigte dabei große Übereinstimmung mit den Simulationsdaten, obwohl durch die dreidimensionalität der Zelle mehr Freiheitsgrade existieren, als in der Simulation. Auch konnten aus dieser Messung durch die Ermittlung der Abbruchfrequenzen ein Maß für die Geschwindigkeiten bestimmt werden, welche jedoch weniger gut zu den simulierten Daten passen. Dies kann an der hohen Fehleranfälligkeit liegen, da schon alleine deren Bestimmung wie in Kapitel 4.3 beschrieben Unsicherheiten aufweist, zusätzlich zu den Störfrequenzen, die Aliasing hervorrufen kann.

Die Geschwindigkeiten, welche aus der Schattenprojektion und der Korrelationsmessung ermittelt wurden, lagen in der selben Größenordnung und die Unterschiede lassen sich vermutlich durch die Selektion der gut sichtbaren Plumes erklären. Die Diskrepanzen zwischen den in Kapitel 4.7 berechneten theoretischen und gemessenen Geschwindigkeiten kommen vermutlich von den Annahmen in den Modellen.

Die Nusselt-Zahl konnte sowohl in der Simulation als auch im Experiment auf zwei verschiedene Arten berechnet werden und zeigte, dass die Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl zwar qualitativ ähnlich, jedoch nicht gleich ist. Dies liegt vermutlich daran, dass die Grenzschichtdicke nicht korrekt abgeschätzt wurde.

In diesem Versuch wurden viele verschiedene Methoden verwendet um Temperatur- und Geschwindigkeiten zu vermessen. Im hier durchgeführten Experiment konnte dies nur stichprobenartig gemacht werden. Um wie in den Simulationen das komplette Geschwindigkeitsfeld rekonstruieren zu können müsste man auf Verfahren wie *Particle Image Velocimetry* zurückgreifen (die Bewegung kleinster Partikel in der Flüssigkeit wird gefilmt und daraus die Geschwindigkeit des Fluids zurückgerechnet). Auch sind die hier verwendeten Thermistoren nur eindimensional bewegbar, was die Datenaufnahme weiter einschränkt. Die Umsetzbarkeit von Experimenten mit verschiedenen Größenordnungen an Rayleigh- und Prandtl-Zahlen ist vermutlich schwierig, weshalb auch in Zukunft vermutlich auf Simulationen zurückgegriffen wird.

Literatur

- [1] Robin Schott, Christian Malek und Hans-Klaus Schott. „Effizienzsteigerung des Reduktionsmitteleinsatzes im Hochofen zur CO₂-Minderung und Kostenersparnis“. In: *Chemie Ingenieur Technik* 84.7 (2012). DOI: 10.1002/cite.201100224.
- [2] J.S. Taylor. *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, 1979.