Algunas aplicaciones de las bases involutivas

Rodrigo Iglesias
roiglesi@unirioja.es
Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

Palabras clave: Bases de Gröbner, Bases involutivas, bases involutivas-like, Algebras de Rees, fiabilidad

Bases L-involutivas y L-involutivas-like

Definición 1. *Una división involutiva L está definida sobre un monoide Abeliano $(\mathbb{N}_0^n, +)$, si para cualquier conjunto finito $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ se designa un subconjunto $N_{L,\mathcal{N}}(\nu) \subseteq \{1, \dots, n\}$ de índices* multiplicativos *asociados a cada multi-índice $\nu \in \mathcal{N}$ tal que los conos involutivos $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) = \nu + \mathbb{N}^n_{N_{L,\mathcal{N}}(\nu)}$ de dichos multi-índices satisfacen las siguientes dos condiciones:*

1. *Si existen dos elementos $\mu, \nu \in \mathcal{N}$ con $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu) \cap \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) \neq \emptyset$, o bien $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu) \subseteq \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu)$ o $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) \subseteq \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu)$ se mantiene.*
2. *Si $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ entonces $N_{L,\mathcal{N}}(\nu) \subseteq N_{L,\mathcal{N}'}(\nu)$ para todo $\nu \in \mathcal{N}'$.*

Aquí aplicaremos las divisiones involutivas en el anillo polinómico en n variables $R = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$, donde en lugar de multi-índices hablaremos de monomios $x^\nu \in R$. Denotamos con $\mathcal{X}_{L,\mathcal{N}}(x^\nu)$ y $\overline{\mathcal{X}}_{L,\mathcal{N}}(x^\nu)$ a los conjuntos de variables L-multiplicativas y no multiplicativas (respectivamente) del monomio x^ν dentro de un conjunto finito de monomios $\mathcal{N} \subset R$. En su lugar el cono involutivo de un monomio lo denotamos con $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(x^\nu) = x^\nu \cdot \mathbf{k}[\mathcal{X}_{L,\mathcal{N}}(x^\nu)]$

Definición 2. *Sea L una división involutiva y $\mathcal{N} \subset R$ un conjunto finito de monomios. Además, sea $(x^{\nu^{(1)}}, \dots, x^{\nu^{(t)}})$ una sucesión finita de elementos de $\mathcal{N}$ donde que cada monomio $x^{\nu^{(k)}}$ con $k < t$ tiene una variable no multiplicativa $x_j \in \overline{\mathcal{X}}_{L,\mathcal{N}}(x^{\nu^{(k)}})$ tal que $x^{\nu^{(k+1)}}|_{L,\mathcal{N}}\ x^{\nu^{(k)}} \cdot x_j$, en cuyo caso diremos que $x^{\nu^{(k+1)}}$ es divisor L-involutivo de $x^{\nu^{(k)}} \cdot x_j$. Entonces decimos que la división involutiva L es* **continua**, *si tales sucesiones consisten únicamente de elementos distintos, i. e. si $x^{\nu^{(k)}} \neq x^{\nu^{(\ell)}}$ para todo $k \neq \ell$.*

PID2020- 116641GB-I00 funded by MCIN/ AEI/ 10.13039/501100011033

Definición 3. *Sea $I \trianglelefteq R$ un ideal monomial, cuyo sistema generador mínimo denotaremos por $G(I)$. Entonces decimos que $\mathcal{H}$ es una base L-involutiva de I, si*

$$I = \langle G(I) \rangle = \bigcup_{x^\mu \in \mathcal{H}} x^\mu \cdot \mathbf{k}[\mathcal{X}_{L,\mathcal{H}}(x^\mu)]$$

Las divisiones involutivas continuas nos garantizan procesos algorítmicos constructivos de completitud, es decir, dado un conjunto (generador mínimo) de monomios existe un método algorítmico para la completitud a una base involutiva siempre y cuando la división sea continua. Si además la división es **Notheriana** la completitud a base involutiva será finita. Estas dos propiedades se encuentran en la división de Janet, lo que hacen que sea una división particularmente útil para la obtención de bases involutivas.

Las bases involutivas fueron introducidas en [1] como un tipo de bases de Gröbner con propiedades combinatorias adicionales. Las bases de Pommaret y de Janet son dos de los tipos de bases involutivas con mayor relación al algebra conmutativa y a la geometría algebraica [2, 3].

Las bases involutivas-like fueron introducidas por Gerdt y Blinkov [4, 5] para ideales en un anillo polinómico como una generalización del concepto de bases de Janet. Tanto las bases de Janet como las Janet-like son, a su vez, tipos especiales de bases de Gröbner con propiedades adicionales.

Ambos tipos de bases surgen de una restricción de la relación de divisibilidad entre monomios mediante variables multiplicativas y no multiplicativas (para bases de Janet) y, además, *potencias* no multiplicativas (para bases Janet-lik). Principalmente haremos uso del concepto de potencias no multiplicativas; este se entiende mejor a través de su relación con las variables no multiplicativas de Janet. Véase [6, 2, 3] para una introducción a las bases involutivas, en particular a las bases de Janet. Véase [7] para obtener una descripción de los aspectos computacionales de las bases involutivas-like.

Implementación y aplicaciones

La propiedad de noetherianidad de la división de Janet es heredada por la división Janet-like y, por lo tanto, hay disponible un algoritmo de completitud para cada ideal monomial, ver [7]. En particular, una base tipo Janet es una versión más compacta de la base Janet; además, contiene suficiente información para recuperar la base de Janet. Presentamos un algoritmo optimizado para el proceso de completitud monomial de bases de Janet y Janet-like que ha sido implementado en `C++` utilizando la biblioteca de álgebra computacional `CoCoALib`[8]. Los experimentos muestran que esta implementación es muy eficiente en comparación con las anteriores para el caso particular de ideales monomiales. Cubriremos algunas de las áreas en las que hemos utilizado dichas bases para la obtención de mejoras y resultados, entre ellas destacan las resoluciones libres de Janet, la fiabilidad algebraica y en los ideales de curvas en movimiento (ideales de Rees de ideales monomiales de la parametrización de una curva monomial plana [9]).

Bibliografía

[1] Vladimir Gerdt and Yuri Blinkov. Involutive bases of polynomial ideals. *Mathematics and Computers in Simulation*, 45:519–542, 1998.

[2] Werner M. Seiler. A combinatorial approach to involution and δ-regularity I: Involutive bases in polynomial algebras of solvable type. *Applicable Algebra in Engineering, Communications and Computing*, 20:207–259, 2009.

[3] Werner M. Seiler. A combinatorial approach to involution and δ-regularity II: Structure analysis of polynomial modules with Pommaret bases. *Applicable Algebra in Engineering, Communications and Computing*, 20:261–338, 2009.

[4] Vladimir P. Gerdt and Yuri A. Blinkov. Janet-like monomial division. *Computer algebra in scientific computing. 8th international workshop, CASC 2005, Kalamata, Greece*, page 174–183, September 12–16, 2005.

[5] Vladimir P. Gerdt and Yuri A. Blinkov. Janet-like Gröbner bases. *Computer algebra in scientific computing. 8th international workshop, CASC 2005, Kalamata, Greece*, page 184–195, September 12–16, 2005.

[6] Vladimir P. Gerdt. On the relation between Pommaret and Janet bases. In Victor G. Ganzha, Ernst W. Mayr, and Evgenii V. Vorozhtsov, editors, *Computer Algebra in Scientific Computing*, pages 167–181, Berlin, Heidelberg, 2000. Springer Berlin Heidelberg.

[7] Amir Hashemi, Matthias Orth, and Werner M. Seiler. Recursive structures in involutive bases theory. *J. Symb. Comput.*, 118:32–68, 2023.

[8] J. Abbott and A. M. Bigatti. CoCoALib: a C++ library for doing Computations in Commutative Algebra. Available at `http://cocoa.dima.unige.it/cocoalib`.

[9] Teresa Cortadellas Benítez and Carlos D'Andrea. The Rees algebra of a monomial plane parametrization. *J. Symb. Comput.*, 70:71–105, 2015.