Álgebras de Lie cuadráticas

Javier Rández-Ibáñez
jarandez@unirioja.es
Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

Palabras clave: Álgebra de Lie, forma invariante, extensiones de álgebras

Las *álgebras de Lie* son estructuras matemáticas que estudian las propiedades de simetría y transformaciones continuas en geometría y física. Su definición parte de un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ junto con un producto bilineal, $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamado *corchete de Lie* y que verifica las siguientes identidades:

1. $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.
2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[x, z], y] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Cuando se trabaja sobre cuerpos de característica distinta de 2, la identidad 1 es equivalente a $[x, y] = -[y, x]$, $x, y \in \mathfrak{g}$. La identidad 2 se conoce como *Identidad de Jacobi*. Uno de los ejemplos más importantes de álgebras de Lie es el conjunto $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ de endomorfismos sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V en el que la composición de aplicaciones $f \circ g$ es sutituida por el corchete $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. Este álgebra de Lie se denomina *álgebra general lineal* y se denota $\mathfrak{gl}(V)$. Para definiciones y propiedades básicas de álgebras de Lie ver primeros capítulos de [1].

A menudo las álgebras aparecen con estructura extra. Este es el caso de las *álgebras de Lie cuadráticas*. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice cuadrática si admite una forma bilineal $\varphi\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ simétrica y no degenerada que satisface la propiedad de invarianza:

$$\varphi([x, y], z) = \varphi(x, [y, z]) \tag{1.1}$$

para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Esta estructura añadida impone una simetría notable en el conjunto de ideales. Un subespacio $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que cumple $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = \langle [x, y] : x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{g} \rangle \subset \mathfrak{h}$ se dice *ideal*. El conjunto de todos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Fortalece 2023/03 de la Comunidad Autónoma de La Rioja y por PID2021-123461NB-C21 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “ERDF: A way of making Europe”.

los ideales $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ está ordenado mediante la inclusión y las operaciones suma e intersección de ideales proporcionan al conjunto $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ una estructura de *retículo*. En un álgebra cuadrática, si $\mathfrak{h}$ es ideal su ortogonal, $\mathfrak{h}^{\perp}$, también lo es. Además, $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{i})^{\perp} = \mathfrak{h}^{\perp} + \mathfrak{i}^{\perp}$, $(\mathfrak{h} + \mathfrak{i})^{\perp} = \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{i}^{\perp}$ y $(\mathfrak{h}^{\perp})^{\perp} = \mathfrak{h}^{\perp}$ para cualquier par de ideales $\mathfrak{h}, \mathfrak{i}$. Así, la aplicación $\Delta \colon \mathfrak{I}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ definida como $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}^{\perp}$ es un homomorfismo antiinvolutivo de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ (Δ^2 es la identidad e invierte contenidos). Por tanto, los retículos de ideales de álgebras cuadráticas son autoduales.

Todas las álgebras cuadráticas aparecen usando un procedimiento de construcción denominado *doble extensión*. Partimos de un álgebra de Lie cuadrática $(\mathfrak{g}, \varphi)$ y necesitamos otra álgebra de Lie $\mathfrak{m}$ de forma que exista un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\rho \colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) := \{f \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid f \text{ lineal}\},$$

por tanto, $\rho\left([m,n]_{\mathfrak{m}}\right) = \left[\rho(m), \rho(n)\right]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}$, tal que que las imágenes $\rho(m)$, satisfacen dos condiciones adicionales. Por un lado son aplicaciones lineales *φ-antiautoadjuntas*:

$$\varphi\left(\rho(m)(x), y\right) = -\varphi\left(x, \rho(m)(y)\right), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

Por otro, deben ser derivaciones del álgebra $\mathfrak{g}$:

$$\rho(m)\left([x,y]_{\mathfrak{g}}\right) = \left[\rho(m)(x), y\right]_{\mathfrak{g}} + \left[x, \rho(m)(y)\right]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

Bajo estas condiciones podemos definir una estructura de álgebra de Lie en el espacio vectorial $\mathfrak{d} := \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}^*$ ($\mathfrak{m}^* = \{\alpha \colon \mathfrak{m} \to \mathbb{K} \mid \alpha \text{ lineal}\}$) mediante el producto corchete:

$$\begin{aligned}[m + x + \mu, n + y + \nu]_{\mathfrak{d}} = {} & [m,n]_{\mathfrak{m}} + [x,y]_{\mathfrak{g}} + \rho(m)(y) - \rho(n)(x) \\ & + \varphi\left(\rho(\cdot)x, y\right) - \nu\left([m,\cdot]_{\mathfrak{m}}\right) + \mu\left([n,\cdot]_{\mathfrak{m}}\right).\end{aligned}$$

Además, la forma bilineal

$$\psi(m + x + \mu, n + y + \nu) := \mu(y) + \nu(x) + \varphi(x,y),$$

es invariante y no degenerada. Esto nos lleva al álgebra de Lie cuadrática $(\mathfrak{d}, \psi)$ que se dice doble extensión de $(\mathfrak{g}, \varphi)$ por el álgebra de Lie $\mathfrak{m}$.

La clasificación por doble extensión de álgebras de Lie cuadráticas es un problema salvaje. Por este motivo, en la literatura de este tipo de álgebras aparecen otras construcciones vinculadas a familias concretas (álgebras nilpotentes o resolubles cuadráticas) o con clases de álgebras con propiedades especiales. Destacamos tres de ellas en orden cronológico:

- 1987: Favre y Santharoubane trabajan las dobles extensiones de álgebras de Lie abelianas en [2]. Las conocidas álgebras osciladoras reales se obtienen mediante este tipo de construcción.

- 1997: Bordemann introduce la llamada T^*-extensión para describir todas las nilpotenetes cuadráticas en [3]. La clasificación en esta clase sigue siendo complicada.

- 2004: Kath y Olbrich con su "twofold extension" llegan a la clasificación de las cuadráticas reales con centro isotrópico maximal de dimension menor o igual que dos en [4].

En esta ponencia partiendo de las definiciones, propiedades y procedimientos clásicos de construcción en álgebras de Lie cuadráticas, presentaremos algunos problemas y resultados en los que estamos trabajando.

Bibliografía

[1] Nathan Jacobson. *Lie Algebras.* Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, 1st edition by this publisher, corrected printing edition, 1979.

[2] G Favre and LJ Santharoubane. Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear form on a lie algebra. *Journal of Algebra*, 105(2):451–464, 1987.

[3] Martin Bordemann. Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. *Acta Math. Univ. Comenian.(NS)*, 66(2):151–201, 1997.

[4] Ines Kath and Martin Olbrich. Metric lie algebras with maximal isotropic centre. *Mathematische Zeitschrift*, 246:23–53, 2004.