Cronología en Álgebras de Lie Cuadráticas

Jorge Roldán
jorge.roldanl@unirioja.es
Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

Palabras clave: álgebra de Lie, álgebra de Lie cuadrática, forma bilineal, álgebra de Lie nilpotente, álgebra de Lie resoluble

Un álgebras de Lie L es espacio vectorial al que se le dota de un producto bilineal (usualmente escrito como un corchete) que cumple dos propiedades:

- se autoanula, es decir para todo $x \in L$ se tiene que $[x, x] = 0$,
- cumple la conocida como Identidad de Jacobi que impone que para todo $x, y, z \in L$ se cumple que $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Existen ejemplos sencillos de álgebras de Lie como el álgebra abeliana (con producto nulo), o el álgebra general lineal $\mathfrak{gl}(V)$ considerada sobre el espacio de endomorfismos de V con producto $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Estas álgebras reciben su nombre en honor al matemático noruego Marius Sophus Lie (1842-1899) que descubrió una forma alternativa de estudiar los entonces conocidos como grupos de Lie, útiles en el análisis de campos de vectores tangentes. Aunque más allá de la geometría de variedades, estas estructuras algebraicas también tienen importancia por ejemplo en el estudio de ecuaciones diferenciales, simetrías...

Aparte de los estudios de Lie en la década 1870, en Alemania en torno a 1880 y de forma independiente, Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923) definió las álgebras de Lie. Aunque fue menos riguroso, hizo grandes progresos al clasificar las álgebras de Lie simples de dimensión finita, así como al enunciar numerosas conjeturas que resultaron ser ciertas. Esta clasificación fue concluida años más tarde por Élie Joseph Cartan (1869-1951). Y, continuando con avances en la clasificación de estas, nos encontramos con el Teorema

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la ayuda MTM2017-83506C2-1-P del 'Ministerio de Economía, Industria y Competitividad' del Gobierno de España desde 2017 hasta 2022 y por la ayuda PID2021-123461NBC21, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por "ERDF A way of making Europe" desde 2023 en adelante. El autor también ha recibido un contrato predoctoral FPI-2018 de la Universidad de La Rioja y recibido la ayudas ATUR18/43, ATUR19/40 y ATUR21/34 de la misma universidad.

de Levi de 1905 que enuncia que toda álgebra de Lie finito dimensional se puede descomponer como suma directa de dos subálgebras, una semisimple y otra resoluble. Veamos brevemente qué significan estos conceptos:

Definición 1. Un álgebra de Lie L se dice *resoluble* si existe $m \geq 1$ tal que $L^{(m)} = 0$ donde se define $L^{(0)} = L$ y $L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$. Además, si existe $t \geq 1$ tal que $L^{t+1} = 0$ se llama *nilpotente* donde $L^1 = L$ y $L^k = [L, L^{k-1}]$. Estas últimas álgebras se conocen como t-step.

Definición 2. Un álgebra de Lie se dice *semisimple* si no posee ideales resolubles. Además se llama *simple* si no es abeliana y sus únicos ideales son los triviales (total y cero).

Una vez tenemos un vistazo general de álgebras y su clasificación inicial ya podemos entrar a definir un álgebra de Lie cuadrática.

Definición 3. Un par (L, φ) es un álgebra de Lie cuadrática si L es un álgebra de Lie que admite una forma bilineal φ que sea simétrica, no degenerada[1] e invariante respecto al producto del álgebra, es decir, para $x, y, z \in L$ se tiene que $\varphi([x, y], z) + \varphi(y, [x, z]) = 0$.

Las álgebras de Lie cuadráticas, también conocidas como métricas, aparecieron por primera vez en 1955 en la tesis de Shou-Town Tsou (1918-1993), realizada bajo la dirección de Arthur Geoffrey Walker (1909–2001). Desde su aparición ha habido muchos avances significativos que nos han aproximado a su clasificación. A continuación vamos a enunciar algunas de las publicaciones que han sentado las bases y líneas de investigación sobre las que se ha desarrollado la tesis doctoral del presente autor (ver [1]). En caso de estar interesado el lector en completar esta información, en dicha tesis se puede ver una cronología mucho más detallada.

- **1955** …… Tesis de Tsou: *On Metrisable Lie groups and algebras.*
- **1957** …… Tsou-Walker (ver [2]). Principales definiciones y enunciados de existencia (probados en [3]).
- **1984** …… Tesis de Keith (ver [4]). Estructura, autodualidad y relaciones de ortogonalidad entre ideales. Construcción por bi-extensión.
- **1985** …… Medina-Revoy (ver [5]). Álgebras indescomponibles construidas por doble extensión. Esta importante técnica fue desarrollada de forma independiente en esta década por varios autores.

[1] Para todo $x \in L$ existe $y \in L$ tal que $\varphi(x, y) \neq 0$.

- **1986** — Keith-Hofmann (ver [6]). Producto tensor de álgebras, técnica constructiva de la infacción e indescomponibilidad de cuadráticas mixtas.
- **1987** — Favre-Santharoubane (ver [7]). Indescomponibilidad de resolubles y doble extensión 1-dimensional.
- **1997** — Bordemann (ver [8]). Construcción por T^*-extensión.
- **1997** — Noui-Revoy (ver [9]). Álgebras 2-step nilpotentes obtenidas empleado trivectores.
- **1997** — Bajo-Benayadi (ver [10]). Ejemplos de cuadráticas mixtas de dimensión cuadrática arbitraria.
- **2007** — Bajo-Benayadi (ver [11]). Álgebras cuadráticas locales.
- **2013** — Duong (ver [12]).: Extensión T^*-abeliana para el caso 2-step.
- **2017** — Benito-de la Concepción-Laliena (ver [13]). Clasificación de nilpotentes basada en cocientes de nilpotentes libres.

Fue en este punto cuando se comenzó el desarrollo de la tesis [1], continuando varios de los resultados de investigación mencionados en la cronología. En esta, partiendo de un proceso deconstructivo se logra reducir el estudio de las álgebras de Lie cuadráticas generales a tan solo aquellas nilpotentes. Esta reducción se obtiene deshaciendo sucesivas doble extensiones sobre cocientes, una vez se localizan ciertos ideales clave. Pero como el problema es difícilmente abarcable por completo, nos enfocamos en ver el caso donde el índice de nilpotencia es 2. Empezamos presentando un nuevo método para obtener dichas álgebras empleando técnicas de álgebra multilineal, para luego demostrar que este nuevo método es equivalente a las dos técnicas clásicas principales: dobles extensiones y T^*-extensiones. En combinación con trivectores, terminamos dando una clasificación de estas álgebras hasta dimensión 17. Una vez cubierto el caso nilpotente de índice 2, comenzamos la construcción álgebras de Lie cuadráticas más grandes y generales. Esto se logra mediante dobles extensiones usando sus derivaciones antisimétricas. Después, estudiamos la familia de álgebras de Lie cuadráticas con un único ideal maximal: las álgebras locales. Más adelante pasamos a ver la estructura que presentan los ideales de álgebras de Lie cuadráticas, especialmente aquellas cuyos ideales forman una cadena por inclusión. Finalmente, presentamos un paquete computacional desarrollado para tratar con estas álgebras.

Como se puede intuir de este resumen, esta investigación ha continuado aportando nuevos resultados a esa cronología, expandiéndola con sucesivas publicaciones del autor y su directora de tesis:

2019 ······ Se introduce una nueva técnica de construcción para las cuadráticas 2-step (ver [14]).

2020 ······ Estudio de derivaciones y automorfismos en cocientes de nilpotentes libres (ver [15]).

2022 ······ Retículos finitos de idelaes de álgebras de Lie (ver [16]).

2023 ······ Se establece la equivalencia entre distintas técnicas de construcción de álgebras cuadráticas nilpotentes (ver [17]).

2023 ······ Patrones estructurales y ejemplos de álgebras de Lie cuadraticas locales (ver [18]).

2022 ······ Álgebras de Lie cuyo retículo de ideales está en cadena (ver [19]).

2023 ······ Métricas en álgebras de Lie osciladores, un caso de álgebras cuadráticas (ver [20]).

Bibliografía

[1] Jorge Roldán-López. *Quadratic Lie algebras. Algorithms and (de)constructions.* PhD thesis, Universidad de La Rioja, 2023.

[2] Shou Town Tsou and Arthur Geoffrey Walker. Xix. metrisable Lie groups and algebras. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematical and Physical Sciences*, 64(3):290–304, 1957.

[3] Shou Town Tsou. XI. On the construction of metrisable Lie algebras. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 66(2):116–127, 1962.

[4] Verena Sabine Keith. *On invariant bilinear forms on finite-dimensional Lie algebras.* PhD thesis, Tulane University, 1984.

[5] Alberto Medina and Philippe Revoy. Algèbres de Lie et produit scalaire invariant. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 18(3):553–561, 1985.

[6] Karl Heinrich Hofmann and Verena Sabine Keith. Invariant quadratic forms on finite dimensional Lie algebras. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 33(1):21–36, Feb 1986.

[7] Gabriel Favre and Louis Joseph Santharoubane. Symmetric, invariant, nondegenerate bilinear form on a Lie algebra. *Journal of Algebra*, 105(2):451–464, 1987.

[8] Martin Bordemann. Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae. New Series*, 66(2):151–201, 1997.

[9] Lemnouar Noui and Philippe Revoy. Formes multilinéaires alternées. *Annales mathématiques Blaise Pascal*, 1(2):43–69, 1994.

[10] Ignacio Bajo and Said Benayadi. Lie algebras admitting a unique quadratic structure. *Communications in Algebra*, 25(9):2795–2805, Jan 1997.

[11] Ignacio Bajo and Saïd Benayadi. Lie algebras with quadratic dimension equal to 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 209(3):725–737, Jun 2007.

[12] Minh Thanh Duong. Two-step nilpotent quadratic Lie algebras and 8-dimensional non-commutative symmetric novikov algebras. *Vietnam Journal of Mathematics*, 41(2):135–148, Jun 2013.

[13] Pilar Benito, Daniel de-la-Concepción, and Jesós Laliena. Free nilpotent and nilpotent quadratic Lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 519:296–326, Apr 2017.

[14] Pilar Benito, Daniel de-la-Concepción, Jorge Roldán-López, and Iciar Sesma. Quadratic 2-step Lie algebras: Computational algorithms and classification. *Journal of Symbolic Computation*, 94:70–89, 2019.

[15] Pilar Benito and Jorge Roldán-López. Derivations and automorphisms of free nilpotent Lie algebras and their quotients. In Vladimir Dobrev, editor, *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pages 541–552, Singapore, Nov 2020. Springer.

[16] Pilar Benito and Jorge Roldán-López. Lie algebras with a finite number of ideals. *Linear and Multilinear Algebra*, (19):3702–3721, 2022.

[17] Pilar Benito and Jorge Roldán-López. Equivalent constructions of nilpotent quadratic Lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 657:1–31, Jan 2023.

[18] Pilar Benito and Jorge Roldán-López. Examples and patterns on quadratic lie algebras. In *International Conference on Non-Associative Algebras and Related Topics*, pages 17–27. Springer, 2023.

[19] Pilar Benito and Jorge Roldán-López. Lie structures and chain ideal lattices. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 54(2):26, 2023.

[20] Pilar Benito and Jorge Roldán-López. Metrics related to oscillator algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, pages 1–15, 2023.