La geometría de las raíces: Un problema de clasificación topológica

Víctor Álvarez-Aparicio
victor.alvarez@unirioja.es
Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

Palabras clave: Monodromía, Polinomios, Clasificación, Topología Algebraica, Combinatoria.

Encontrar raíces de polinomios es un problema que ha preocupado a muchos matemáticos desde hace siglos. Las clásicas fórmulas de Cardano-Ferrari permiten encontrar analíticamente todas las raíces de polinomios de grado bajo (menor o igual que 5), y en la actualidad disponemos de diversos métodos numéricos potentísimos y muy estudiados (como Newton, Chebyshev, Halley,...) capaces de aproximar las raíces de polinomios de grado millones de veces mayor.

En esta charla, veremos cómo la Topología Algebraica puede ayudarnos no sólo a encontrar raíces, sino también a entender mejor el comportamiento de los polinomios en un entorno de un punto cualquiera, e incluso llegar a describir una tabla de clasificación completa para ciertas familias de polinomios. Los prerrequisitos de la charla se mantendrán al mínimo.

Un polinomio complejo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de grado n es una función analítica de la forma $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. También podemos pensar en un polinomio como una transformación analítica del plano de los números complejos aumentado $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (llamado esfera de Riemann); es decir, un polinomio es una aplicación $\tilde{p} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que $\tilde{p}(z) = p(z), \forall z \in \mathbb{C}$ y $\tilde{p}(\infty) = \infty$. A los elementos del conjunto $C(p) = \{z \in \mathbb{C} | p'(z) = 0\}$ de las raíces de la derivada de p los llamamos puntos críticos, y a sus imágenes $V(p) = \{p(z) | z \in C(p)\}$ las llamamos valores críticos. Estos puntos son particularmente importantes por la siguiente razón: La ecuación

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = b$$

El autor ha sido parcialmente financiado por el proyecto PID2020-118753GB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España y por la Universidad de La Rioja (REGI22/63).

tendrá exactamente n soluciones distintas si b no es un valor crítico, y tendrá soluciones repetidas si lo es.

Esto es una consecuencia de un fenómeno llamado monodromía, que (coloquialmente) describe cómo se comporta una función en los alrededores de un punto. Esta herramienta, muy presente en el campo de la Topología Algebraica, nos permitirá estudiar las raíces de los polinomios, y numerosas cualidades más de esta familia de funciones. Gracias a la monodromía podremos establecer relaciones entre distintos campos de las Matemáticas como la Topología, el Análisis, el Álgebra, o la Geometría, y comentaremos algunas de sus aplicaciones en distintos ámbitos (clasificación combinatoria, cálculo de raíces,. . .).

La monografía [1] es una buena introducción a este tema, y en el repositorio [2] se pueden encontrar diversos algoritmos basados en estas técnicas.

Bibliografía

[1] Sergei Lando and Alexander Zvonkin. *Graphs on Surfaces and Their Applications*, volume 141. 01 2004.

[2] V. Álvarez-Aparicio. PathLifting.jl, 7 2023. `https://github.com/valvarezapa/PathLifting.jl` [Online].