Homología efectiva de grupos

Juan Antonio Delgado Tejada
juan-antonio.delgado@unirioja.es
Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

Palabras clave: Homología Efectiva, Resoluciones, Homología de Grupos, Extensiones de Grupos, Sucesión Espectral de Lyndon-Hochschild-Serre.

Como bien menciona Brown en [2], la *Teoría de (co)Homología de Grupos* surge tanto en un contexto topológico como en un contexto algebraico. Para la topología, la homología de grupos aparece tras la introducción de los grupos de homotopía de orden superior de un espacio topológico punteado (X, x_0), denotados por $\pi_n(X, x_0)$, por parte de Cech. Esta generalización natural del grupo fundamental suscitó el interés de numerosos matemáticos, entre ellos Hurewicz, el cual, entre otras cosas, estudió los *espacios aesféricos*: espacios tales que $\pi_n(X, x_0) = 0$ para todo $n > 1$. Hurewicz probó que estos espacios quedan completamente determinados, salvo tipo de homotopía, por su grupo fundamental. De esta manera, podemos definir la homología de un grupo G sobre un anillo R como

$$H_n(G; R) := H_n(K(G, 1); R)$$

donde $K(G, 1)$ denota el único espacio aesférico que tiene a G por grupo fundamental. Por otro lado, para el álgebra, la homología de grupo se define a través de *resoluciones*. Una resolución $F_\bullet$ de un grupo G es un complejo de cadenas acíclico de $\mathbb{Z}G$-módulos, es decir, $H_n(F_\bullet; \mathbb{Z}G) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y que además satisface las condiciones: $F_{-1} = \mathbb{Z}$ y $F_i = 0$ para todo $i < -1$, donde $\mathbb{Z}G$ representa el anillo integral del grupo G. Dada una resolución libre $F_\bullet$ podemos definir el complejo de cadenas de $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_\bullet$ de la siguiente manera: para cada $n \geq 0$, $C_n := (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_\bullet)_n$ y la diferencial es la inducida por el producto tensorial. Un resultado clásico asegura que dadas dos resoluciones $F_\bullet$ y $F'_\bullet$ de un mismo grupo G se tiene que $H_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_\bullet; \mathbb{Z}) \cong H_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F'_\bullet; \mathbb{Z})$. De esta manera, podemos definir la homología integral de un grupo G como

$$H_n(G; \mathbb{Z}) := H_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_\bullet; \mathbb{Z}).$$

Ayuda PID2020-116641GB-I00 financiada por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

El primer acercamiento presenta una mayor interpretación en términos topológicos, mientras que el segundo permite una mayor flexibilidad a la hora de realizar cálculos. Es en esta disyuntiva donde una tercera vía, a caballo entre las dos anteriores, se presenta en [11, 12]. Esta vía geométrica está basada en la noción de *homología efectiva* introducida por Sergeraert en [13]. Esta teoría se define como un conjunto de técnicas en álgebra homológica y topología computacional que permiten tanto la construcción de espacios topológicos complejos como suspensiones, espacios clasificantes y espacios de lazos, como el cálculo explícito de sus grupos de homología. Uno de los conceptos troncales de esta teoría es la noción de *reducción* entre dos complejos de cadenas C_* y D_*. Esta no es más que un caso concreto de equivalencia de cadenas que es susceptible de ser modificada, bajo buenas circunstancias, por perturbaciones en las diferenciales de C_* y D_* mediante la acción de los lemas de perturbación, ver [7, 8]. La homología efectiva no es solo una herramienta teórica sino que también es una herramienta computacional que ha dado lugar a programas como Kenzo [4].

En esta charla se expondrán todos estos conceptos introductorios sobre la homología de grupos así como el estado actual de nuestra investigación. Nuestro trabajo pretende aplicar y extender los resultados obtenidos en [3] en los que, mediante técnicas de la *Teoría discreta de Morse* introducida por Forman en [6], se obtienen campos de vectores discretos sobre los espacios clasificantes de grupos simpliciales reducidos. Algunas de estas nuevas vías de estudio involucran, por ejemplo, los trabajos de Ellis [5] y Wall [14] en el caso general de conocer resoluciones sobre extensiones de grupos, el trabajo de Álvarez et al. [1] en el caso de que la extensión venga dada por un producto semidirecto exterior o el estudio desde un punto de vista efectivo de la sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre, ver [9, 10].

Bibliografía

[1] Álvarez, V., Armario, J. A., Frau, M. D., and Real, P. Homological models for semidirect products of finitely generated Abelian groups. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 23*, 1-2 (2012), 101–127.

[2] Brown, K. S. *Cohomology of groups*, vol. 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[3] Delgado, J. A., Romero, A., Rubio, J., and Sergeraert, F. Discrete vector fields on the classifying space. *Artículo sin publicar* (2024).

[4] Dousson, X., Rubio, J., Sergeraert, F., and Siret, Y. The Kenzo program. `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/`.

[5] Ellis, G., Harris, J., and Sköldberg, E. Polytopal resolutions for finite groups. *J. Reine Angew. Math. 598* (2006), 131–137.

[6] Forman, R. A user's guide to discrete Morse theory. *Sém. Lothar. Combin. 48* (2002), Art. B48c, 35.

[7] Gugenheim, V. K. A. M., and Lambe, L. A. Perturbation theory in differential homological algebra. I. *Illinois J. Math. 33*, 4 (1989), 566–582.

[8] Gugenheim, V. K. A. M., Lambe, L. A., and Stasheff, J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. II. *Illinois J. Math. 35*, 3 (1991), 357–373.

[9] Hochschild, G., and Serre, J.-P. Cohomology of group extensions. *Trans. Amer. Math. Soc. 74* (1953), 110–134.

[10] Lyndon, R. C. The cohomology theory of group extensions. *Duke Math. J. 15* (1948), 271–292.

[11] Romero, A., Ellis, G., and Rubio, J. Interoperating between computer algebra systems: computing homology of groups with Kenzo and GAP. In *ISSAC 2009—Proceedings of the 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (2009), ACM, New York, pp. 303–310.

[12] Romero, A., and Rubio, J. Computing the homology of groups: the geometric way. *J. Symbolic Comput. 47*, 7 (2012), 752–770.

[13] Sergeraert, F. The computability problem in algebraic topology. *Adv. Math. 104*, 1 (1994), 1–29.

[14] Wall, C. T. C. Resolutions for extensions of groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 57* (1961), 251–255.