

Métodos Numéricos I

Tema IV: Interpolación

Manuel Ruiz Galán

Curso 2017/2018
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

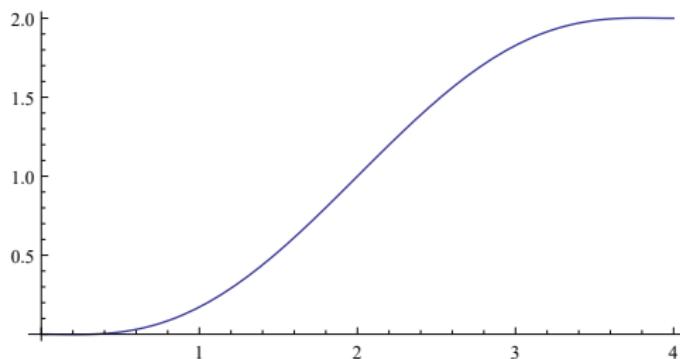
Departamento de
Matemática
Aplicada | A red, stylized letter 'M' logo, likely representing the Department of Applied Mathematics.

Índice Tema IV

- 1 Interpolación polinómica: Lagrange y Newton. Error de interpolación
 - Polinomio de interpolación tipo Lagrange
 - Forma de Newton del polinomio de interpolación
 - Error de interpolación. Convergencia y estabilidad. Polinomios de Chebyshev
 - Otros problemas de interpolación: Hermite y caso general
- 2 Interpolación mediante funciones splines
 - Funciones splines lineales
 - Funciones splines cúbicas

- Modelización
- Diseño industrial
- Problemas numéricos

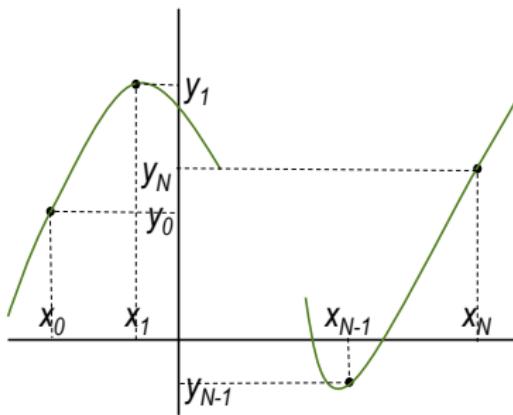
$$p \in \mathbb{P}_5 : \begin{cases} p(0) = 0 = p'(0) \\ p(2) = 1 = p'(2) \\ p(4) = 2, \quad p'(4) = 0 \end{cases}$$



$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2 : i, j = 0, 1, \dots, N \Rightarrow x_i \neq x_j$$

Existe una única función polinómica de grado menor o igual que N $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow p(x_i) = y_i$$



(Relación de Ejercicios)

Problema

Determinar explícitamente el polinomio de interpolación p

p función polinómica $\rightsquigarrow p \in \mathbb{P}_N$

Cálculo de $p \rightsquigarrow$ base en \mathbb{P}_N y sus propiedades

- $\{x^N, \dots, x, 1\}$, $p(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow p(x_i) = y_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_N x_0^N + a_{N-1} x_0^{N-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_N x_1^N + a_{N-1} x_1^{N-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \dots \quad \dots \\ a_N x_N^N + a_{N-1} x_N^{N-1} + \dots + a_1 x_N + a_0 = y_N \end{cases}$$

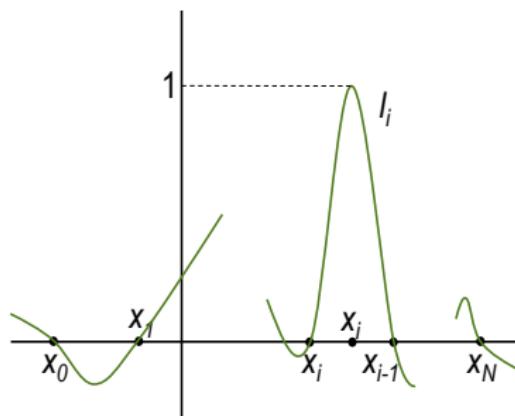
resolver sistema \rightsquigarrow uso pobre de la estructura del problema

- **Lagrange**, $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_N(x)\}$, $p(x) = \sum_{i=0}^N \underline{y_i} l_i(x)$
 - base dependiente de los x_i 's, cálculo directo
 - coeficientes determinados de forma directa \rightsquigarrow no involucran sistema
- **Newton**, $\{\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_N(x)\}$, $p(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \omega_i(x)$
 - base dependiente de los x_i 's, cálculo directo
 - coeficientes determinados de forma directa \rightsquigarrow no involucran sistema
 - añadir nodos \rightsquigarrow aprovecha cálculos anteriores

Datos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$$

base $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_N(x)\} \rightsquigarrow$ cada l_i caracterizado por propiedad interpolatoria



$$i, j = 0, \dots, N \Rightarrow l_i(x_j) = \delta_{ij}$$

propiedad interpolatoria $\Rightarrow \{l_0(x), l_1(x), \dots, l_N(x)\}$ base de \mathbb{P}_N

Cálculo explícito de $l_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, N$

$$l_i \in \mathbb{P}_N, j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N \Rightarrow l_i(x_j) = 0$$



$l_i \in \mathbb{P}_N$ divisible por $(x - x_j)$, $(j = 0, 1, \dots, N, j \neq i)$



$$\text{existe } \alpha_i : l_i(x) = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (x - x_j)$$

existe α_i : $l_i(x) = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (x - x_j)$

$$l_i(x_i) = 1 \Rightarrow l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Solución del problema

$$p(x) = \sum_{i=0}^N y_i l_i(x)$$

$$p \in \mathbb{P}_N, \quad i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow p(x_i) = y_i$$

Hemos probado:

Teorema

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$ con

$$i, j = 0, 1, \dots, N, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j,$$

entonces el único polinomio $p \in \mathbb{P}_N$ que satisface las condiciones de interpolación

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow p(x_i) = y_i$$

viene dado por

$$p(x) = \sum_{i=0}^N y_i l_i(x),$$

donde

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

La fórmula anterior se conoce como *forma de Lagrange del polinomio de interpolación* y las funciones base *polinomios de Lagrange o característicos*.

Ejemplo

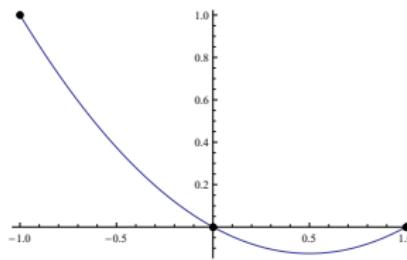
Datos: valores de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = e^x, \quad (x \in \mathbb{R})$$

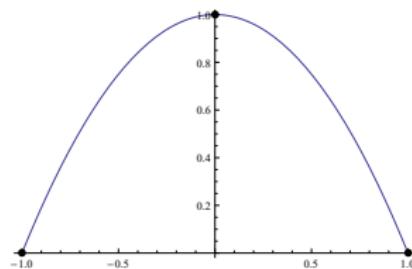
en los puntos de abscisas $-1, 0, 1$:

$$(x_0, y_0) = (-1, e^{-1}), \quad (x_1, y_1) = (0, 1), \quad (x_2, y_2) = (1, e)$$

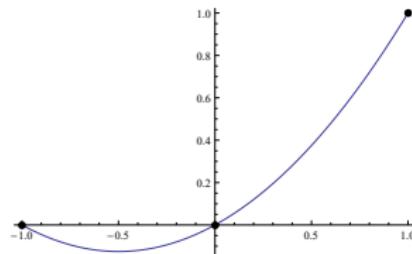
polinomio de Lagrange $l_0(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$



polinomio de Lagrange $l_1(x) = 1 - x^2$

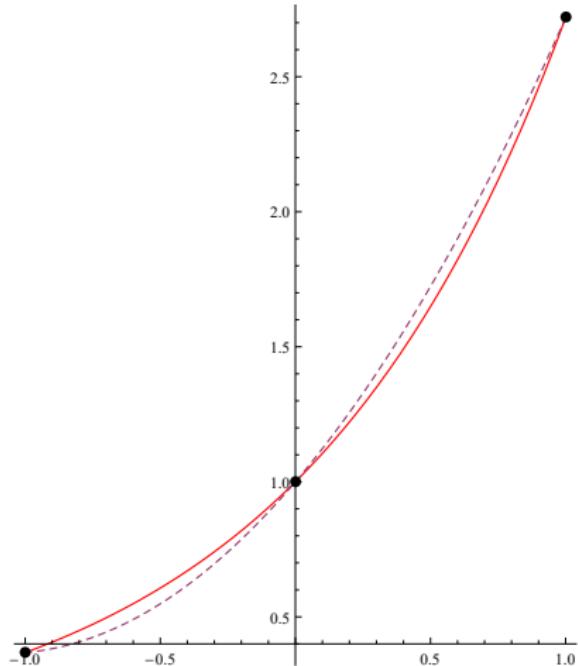


polinomio de Lagrange $l_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$



polinomio de interpolación (trazo discontinuo en la figura)

$$p(x) = \sum_{i=0}^2 e^{x_i} l_i(x) = \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \right) x + 1$$

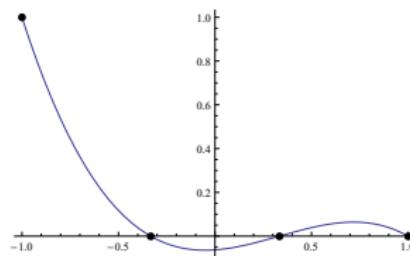


Ejemplo

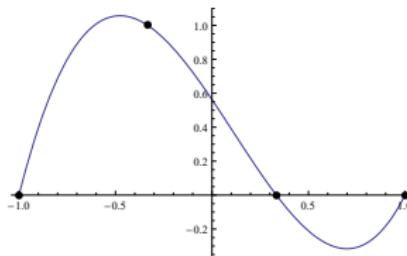
Datos

$$(x_0, y_0) = (-1, 1), (x_1, y_1) = (-1/3, 2), (x_2, y_2) = (1/3, 0), x_3 = (1, 1/4)$$

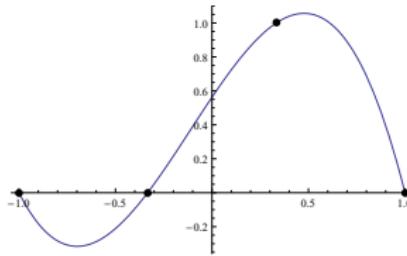
$$\text{polinomio de Lagrange } l_0(x) = -\frac{9}{16}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{x}{16} - \frac{1}{16}$$



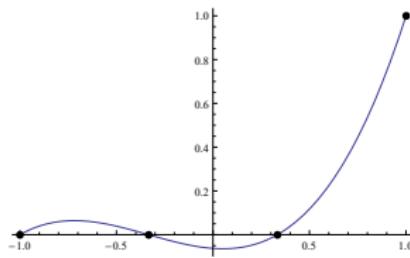
$$\text{polinomio de Lagrange } l_1(x) = \frac{27}{16}x^3 - \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{16}x + \frac{9}{16}$$



$$\text{polinomio de Lagrange } l_2(x) = -\frac{27}{16}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{27}{16}x + \frac{9}{16}$$

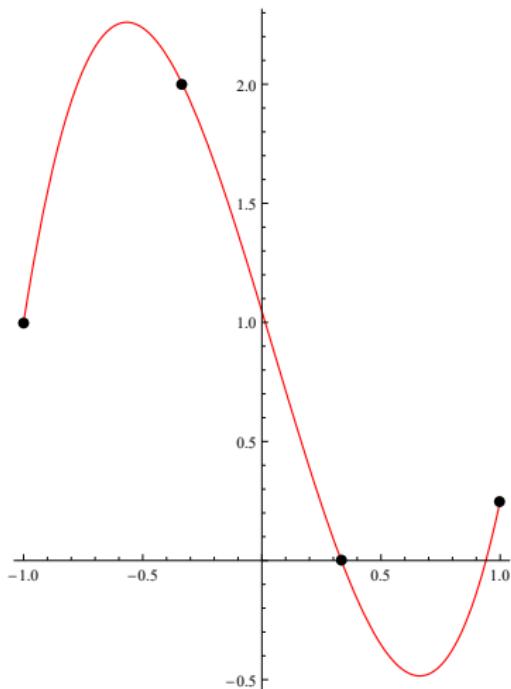


polinomio de Lagrange $l_3(x) = \frac{9}{16}x^3 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{x}{16} - \frac{1}{16}$



polinomio de interpolación

$$p(x) = \sum_{i=0}^3 y_i l_i(x) = \frac{1}{64} (189x^3 - 27x^2 - 231x + 67)$$



Primer ejemplo datos generados por función

A subconjunto no vacío de \mathbb{R} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \dots, x_N \in A$,

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow y_i = f(x_i)$$

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_n))$$

¡No restrictivo! $y_i \leftrightarrow f(x_i)$

Notación polinomio de interpolación

$$\mathbf{I}_N f(x) := \sum_{i=0}^N f(x_i) l_i(x)$$

Datos: A subconjunto no vacío de \mathbb{R} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \dots, x_N \in A$,

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow y_i = f(x_i)$$

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_n))$$

base $\{\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_N(x)\} \rightsquigarrow \omega_i \in \mathbb{P}_i$ caracterizado por una propiedad recursiva

$$p_N(x) := \mathbf{I}_N f(x) - \mathbf{I}_{N-1} f(x)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1 \Rightarrow p_N(x_i) = 0 \quad \left| \Rightarrow \text{existe } \alpha_N \in \mathbb{R} : p_N(x) = \alpha_N \prod_{i=0}^{N-1} (x-x_i)$$



$$\alpha_N \prod_{i=0}^{N-1} (x-x_i) = \mathbf{I}_N f(x) - \mathbf{I}_{N-1} f(x)$$

$$\alpha_N \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i) = \mathbf{I}_N f(x) - \mathbf{I}_{N-1} f(x)$$

$$\omega_i(x) := \begin{cases} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), & \text{si } i > 0 \\ 1, & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

(claramente $\{\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_N(x)\}$ base de \mathbb{P}_N)

$$\mathbf{I}_N f(x_N) = f(x_N) \Rightarrow \alpha_N = \frac{f(x_N) - \mathbf{I}_{N-1} f(x_N)}{\omega_N(x_N)}$$

notación

$$f[x_0, x_1, \dots, x_N] := \alpha_N$$

N-ésima diferencia dividida (de Newton)

Conclusión

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$

Fórmula recursiva

$$i = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} f[x_0] = f(x_0) \\ \mathbf{I}_0 f(x) = f(x_0) \end{array} \right.$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$\left| \begin{array}{l} f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f(x_i) - \mathbf{I}_{i-1} f(x_i)}{\omega_i(x_i)} \\ \mathbf{I}_i f(x) = \mathbf{I}_{i-1} f(x) + \omega_i(x) f[x_0, x_1, \dots, x_i] \end{array} \right.$$

Datos $(x_i, y_i) \rightsquigarrow f(x_i) := y_i$

Ejemplo

Datos

$$(x_0, y_0) = (0.5, 1), (x_1, y_1) = (1, 0.2), (x_2, y_2) = (-0.25, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (-0.5, 0.2), (x_4, y_4) = (0.2, 1/3)$$

$$f(x_i) = y_i$$

Fórmula recursiva

$$f[0.5] = 1, \quad I_0 f(x) = 1$$

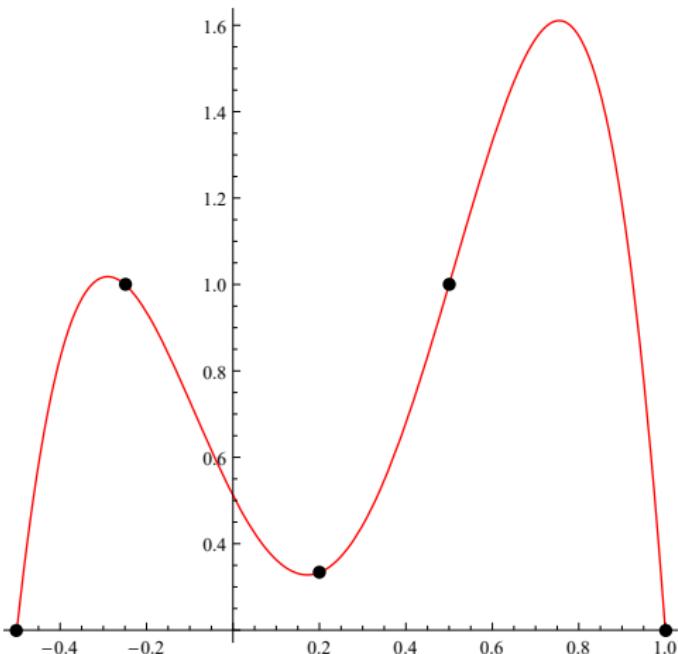
$$f[0.5, 1] = -1.6, \quad I_1 f(x) = -\frac{8}{5}x + \frac{9}{5}$$

$$f[0.5, 1, -0.25] = -1.28, \quad I_2 f(x) = -\frac{32}{25}x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{29}{25}$$

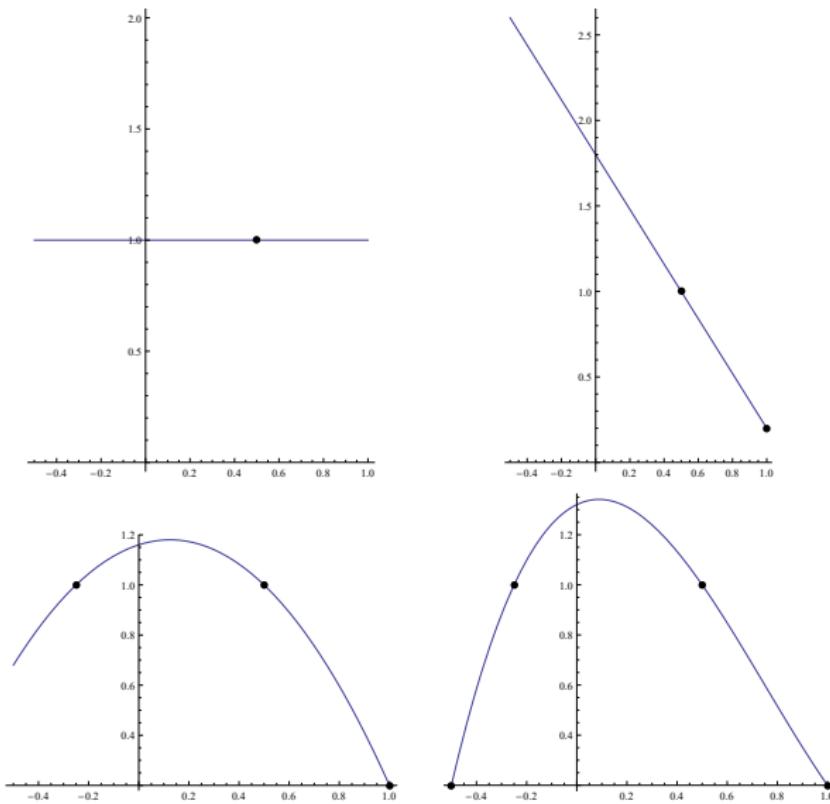
$$f[0.5, 1, -0.25, -0.5] = 1.28, \quad I_3 f(x) = \frac{32}{25}x^3 - \frac{72}{25}x^2 + \frac{12}{25}x + \frac{33}{25}$$

$$f[0.5, 1, -0.25, -0.5, 0.2] = -\frac{36664}{2835}$$

$$I_4 f(x) = -\frac{36664}{2835}x^4 + \frac{51878}{4725}x^3 + \frac{50836}{14175}x^2 - \frac{18379}{9450}x + \frac{14507}{28350}$$



Propiedades interpolatorias de $I_0 f(x)$, $I_1 f(x)$, $I_2 f(x)$, $I_3 f(x)$



Fórmula recursivo-aditiva

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$



$$\mathbf{I}_N f(x) = \sum_{i=0}^N \omega_i(x) f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

con $f[x_0] := f(x_0)$ y $\omega_0(x) = 1$

Cálculo de las diferencias divididas recursivo ¡y sencillo!:

Proposición

Con la notación anterior

$$i \geq 1 \Rightarrow f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_i] - f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta usar las propiedades interpolatorias: consultese, por ejemplo, [2, p. 95]. □

Esta propiedad motiva el término *diferencias divididas*.

Fórmula recursivo-aditiva

$$\mathbf{I}_N f(x) = \mathbf{I}_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$



$$\mathbf{I}_N f(x) = \sum_{i=0}^N \omega_i(x) f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

con $f[x_0] := f(x_0)$ y $\omega_0(x) = 1$

Proposición anterior \rightsquigarrow cálculo recursivo de las diferencias divididas

| | | | | | | | |
|----------|----------|-------------------|----------------------------|----------|--|---------------------------|-----|
| x_0 | $f[x_0]$ | | | | | | ↓ |
| x_1 | $f[x_1]$ | $f[x_0, x_1]$ | | | | | • → |
| x_2 | $f[x_2]$ | $f[x_1, x_2]$ | $f[x_0, x_1, x_2]$ | | | | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | | | |
| x_N | $f[x_N]$ | $f[x_{N-1}, x_N]$ | $f[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N]$ | \cdots | | $f[x_0, x_1, \dots, x_N]$ | |

Ejemplo

Retomamos datos

$$(x_0, y_0) = (0.5, 1), (x_1, y_1) = (1, 0.2), (x_2, y_2) = (-0.25, 1)$$

$$(x_3, y_3) = (-0.5, 0.2), (x_4, y_4) = (0.2, 1/3)$$

Diferencias divididas ($f(x_i) = y_i = f[x_i]$)

| | | | | | | |
|-------|---------------|----------------|---------------------|--------------------|---|--|
| 0.5 | 1 | | | | | |
| 1 | 0.2 | -1.6 | | | | |
| -0.25 | 1 | -0.64 | -1.28 | | | |
| -0.5 | 0.2 | 3.2 | -2.56 | 1.28 | | |
| 0.2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{21}$ | $-\frac{1264}{189}$ | $\frac{4876}{945}$ | $-\frac{36664}{2835}$ | |

$$\begin{aligned} I_4 f(x) &= \sum_{i=0}^4 \omega_i(x) f[x_0, x_1, \dots, x_i] \\ &= -\frac{36664}{2835} x^4 + \frac{51878}{4725} x^3 + \frac{50836}{14175} x^2 - \frac{18379}{9450} x + \frac{14507}{28350} \end{aligned}$$

Teorema

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$ con

$$i, j = 0, 1, \dots, N, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j,$$

entonces el único polinomio $p \in \mathbb{P}_N$ que satisface las condiciones de interpolación

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow p(x_i) = y_j$$

viene dado por

$$p(x) = \sum_{i=0}^N f[x_0, x_1, \dots, x_i] \omega_i(x),$$

donde $f[x_0, x_1, \dots, x_i]$ es la i -ésima diferencia dividida y

$$\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

La expresión anterior es la conocida como *forma de Newton del polinomio de interpolación* y las funciones base *polinomios nodales*.

$$x_0, x_1, \dots, x_N \in [a, b], \quad f \in C([a, b]) \rightsquigarrow \mathbf{I}_N f \in \mathbb{P}_N$$

$$\mathbf{I}_N : C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{P}_N$$

bien definida (unicidad polinomio interpolación)

proyección $\mathbf{I}_N^2 = \mathbf{I}_N$

$f \in C([a, b])$

$$f \in \mathbb{P}_N \Leftrightarrow \mathbf{I}_N f = f$$

$f \in C([a, b]), x \in [a, b]$

$$\mathbf{E}_N f(x) := f(x) - \mathbf{I}_N f(x)$$

Error de interpolación

? $\mathbf{E}_N f(x)$?

$\mathbf{I}_N : C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{P}_N$ operador lineal

$$f, g \in C([a, b]), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{I}_N(f + g) = \mathbf{I}_N f + \mathbf{I}_N g \\ \mathbf{I}_N(\lambda f) = \lambda \mathbf{I}_N f \end{cases}$$

(unicidad polinomio interpolación)

$\|\cdot\|_\infty$ en $C([a, b])$ (y \mathbb{P}_N)

$$\|\mathbf{I}_N\|_\infty := \sup_{f \in C([a, b]), \|f\|_\infty=1} \|\mathbf{I}_N f\|_\infty$$

Generaliza el concepto de norma matricial inducida a operadores lineales (y continuos)

Ejercicio

Comprueba que

$$\|\mathbf{I}_N\|_\infty = \sup_{f \in C([a, b]), f \neq 0} \frac{\|\mathbf{I}_N f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

$$f \in C([a, b]) \Rightarrow \|\mathbf{I}_N f\|_\infty \leq \|\mathbf{I}_N\|_\infty \|f\|_\infty$$

Proposición

Con la notación anterior

$$\|\mathbf{I}_N\|_{\infty} = \Lambda_N,$$

donde

$$\Lambda_N := \|\lambda_N\|_{\infty}$$

es la *constante de Lebesgue* y

$$\lambda_N(x) = \sum_{i=0}^N |l_i(x)|$$

es la *función de Lebesgue*, siendo $\{l_0, l_1, \dots, l_N\}$ la base de los polinomios de Lagrange.

DEMOSTRACIÓN.

$f \in C([a, b])$, $\|f\|_\infty = 1$, forma de Lagrange del polinomio de interpolación

$$\begin{aligned}\|\mathbf{I}_N f\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{i=0}^N f(x_i) l_i(x) \right| \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^N |l_i(x)| \\ &= \Lambda_N\end{aligned}$$



$$\|\mathbf{I}_N\|_\infty \leq \Lambda_N$$

Recíprocamente

$$\xi \in [a, b] : \|\lambda_N\|_\infty = \lambda_N(\xi)$$

$f \in C([a, b])$, lineal a trozos, $i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow f(x_i) := \text{sign}(l_i(\xi))$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{l}_N(f)\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{i=0}^N f(x_i) l_i(x) \right| \\ &\geq \left| \sum_{i=0}^N f(x_i) l_i(\xi) \right| \\ &= \sum_{i=0}^N |l_i(\xi)| \\ &= \lambda_N(\xi) \\ &= \|\lambda_N\|_\infty \\ &= \Lambda_N\end{aligned}$$



Corolario

$$f \in C([a, b]) \Rightarrow \|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} \leq (1 + \Lambda_N) \inf_{p \in \mathbb{P}_N} \|f - p\|_{\infty}$$

DEMOSTRACIÓN.

$p \in \mathbb{P}_N$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} &= \|f - \mathbf{I}_N f\|_{\infty} \\ &\leq \|f - p\|_{\infty} + \|p - \mathbf{I}_N f\|_{\infty} \\ &= \|f - p\|_{\infty} + \|\mathbf{I}_N(p - f)\|_{\infty} \\ &\leq (1 + \Lambda_N) \|f - p\|_{\infty}\end{aligned}$$



$$\|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} \leq (1 + \Lambda_N) \inf_{p \in \mathbb{P}_N} \|f - p\|_{\infty}$$



$$\|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} \leq (1 + \Lambda_N) \underbrace{\inf_{p \in \mathbb{P}_N} \|f - p\|_{\infty}}$$

independiente de los nodos ↑

Además (*Teorema de aproximación uniforme de Weierstrass*, Tema V)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{p \in \mathbb{P}_N} \|f - p\|_{\infty} = 0$$

...pero

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N = \infty$$

(vid. [1, Theorem 1])

¡No podemos asegurar *convergencia uniforme*,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} = 0!$$

Ejemplo de Bernstein

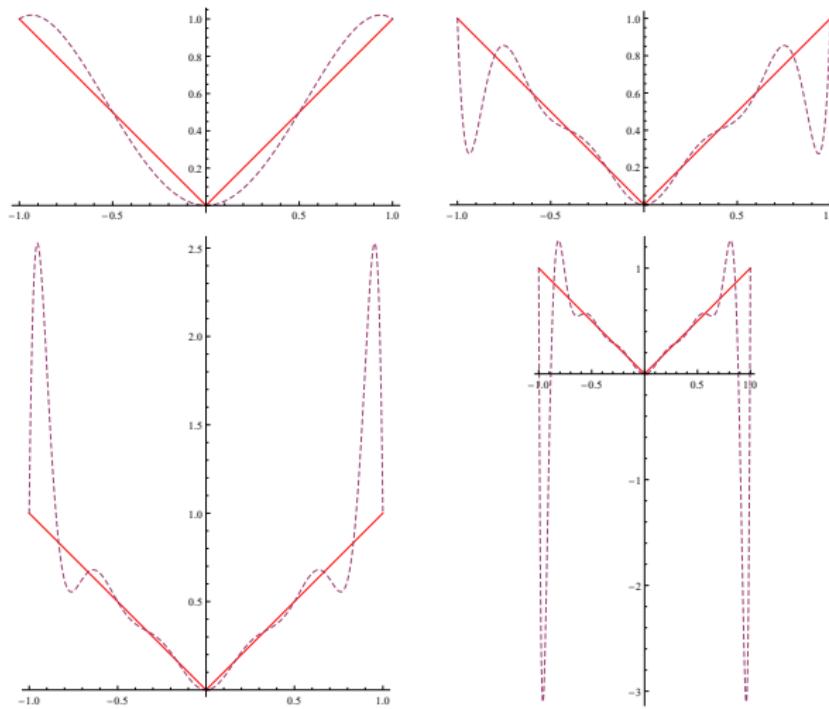
$$f(x) := |x| \quad \text{en } [-1, 1]$$

nodos igualmente espaciados

$$i = 0, 1 \dots N \Rightarrow x_i^{(N)} = -1 + \frac{2i}{N}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = \infty$$

$f \in I_N f$ (trazo discontinuo), $N = 4, 10, 12, 14$



Ejemplo de Runge

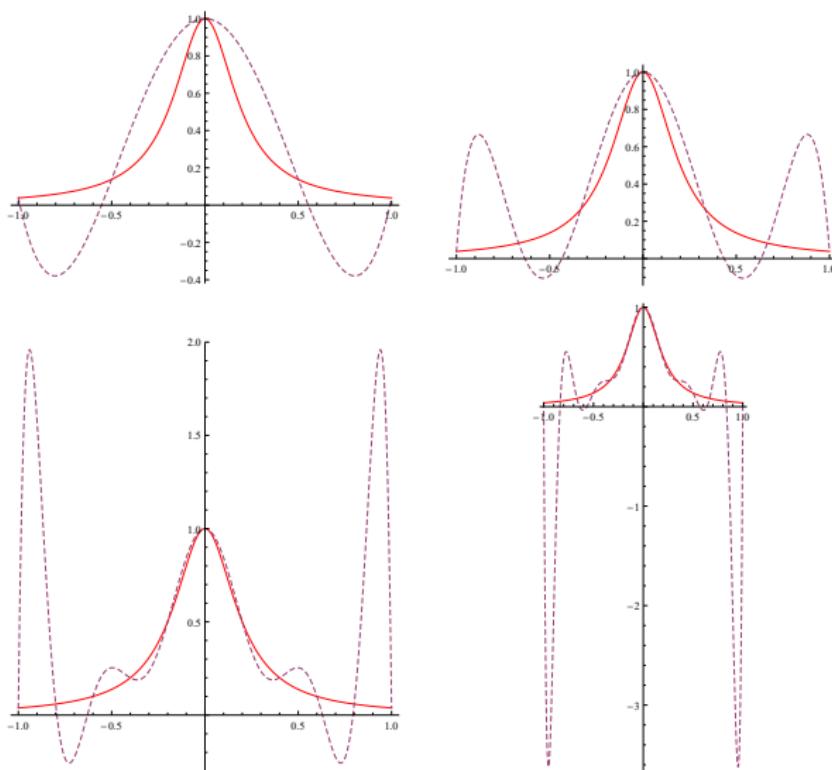
$$f(x) := \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad (x \in [-1, 1])$$

nodos uniformemente distribuidos

$$i = 0, 1 \dots N \Rightarrow x_i^{(N)} = -1 + \frac{2i}{N}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = \infty$$

$f \in I_N f$ (trazo discontinuo), $N = 4, 6, 10, 12$



Estabilidad $\rightsquigarrow \Lambda_N$

f

nodos x_0, x_1, \dots, x_N |

| |
|--|
| datos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_N))$ |
| datos perturbados $(x_0, \bar{f}(x_0)), (x_1, \bar{f}(x_1)), \dots, (x_N, \bar{f}(x_N))$ |

$$\begin{aligned} \| \mathbf{I}_N f - \mathbf{I}_N \bar{f} \|_{\infty} &= \max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{i=0}^N (f(x_i) - \bar{f}(x_i)) l_i(x) \right| \\ &\leq \Lambda_N \max_{i=0,1,\dots,N} |f(x_i) - \bar{f}(x_i)| \end{aligned}$$

Λ_N solo depende de los nodos \rightsquigarrow medida del condicionamiento

Ejemplo

$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := e^x$$

21 nodos uniformemente distribuidos en $[-1, 1]$

$$i = 0, 1, \dots, 20 \Rightarrow x_i := -1 + \frac{2i}{20}$$

datos $(x_i, f(x_i))$

datos perturbados $(x_i, \bar{f}(x_i))$, $\bar{f}(x_i) = f(x_i + (-1)^i 10^{-4})$

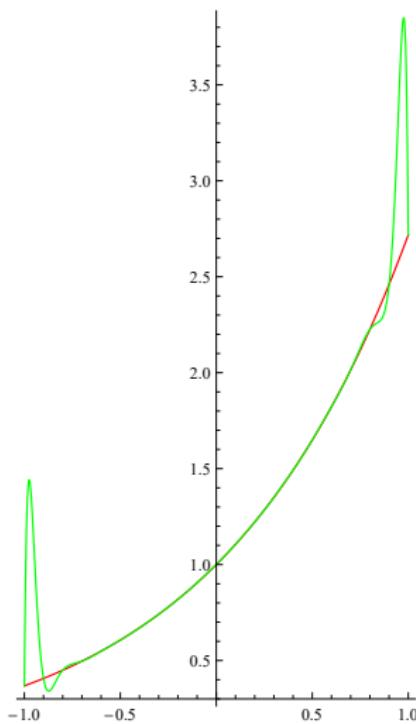
$$\max_{i=0, \dots, 20} |f(x_i) - \bar{f}(x_i)| = 2.7184 \cdot 10^{-4}$$

(redondeo)

...pero

$$\|I_{20}f - I_{20}\bar{f}\|_\infty = 1.1964$$

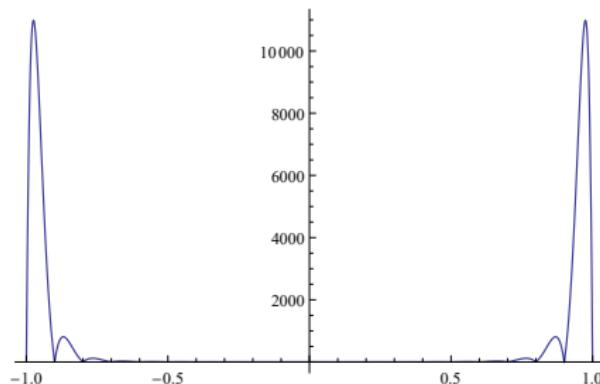
(redondeo)



Mal condicionamiento

$$\Lambda_{20} = 10986.7058$$

(redondeo)



$$\|I_{20}f - I_{20}\bar{f}\|_\infty \leq \Lambda_{20} \max_{i=0,\dots,20} |f(x_i) - \bar{f}(x_i)|$$



$$1.1964 \leq 10986.7058 \cdot 0.2718 \cdot 10^{-3} = 2.9862$$

Error de interpolación $\mathbf{E}_N f(x) = f(x) - \mathbf{I}_N f(x)$

$$\|\cdot\|_\infty, \Lambda_N \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{convergencia uniforme} \\ \text{estabilidad} \end{array}$$

Enfoque puntual:

Proposición

Sean x_0, x_1, \dots, x_N números reales distintos, sea $x \in \mathbb{R}$ y sean

$$a := \min\{x, x_0, x_1, \dots, x_N\} \quad \text{y} \quad b := \max\{x, x_0, x_1, \dots, x_N\}.$$

Supongamos además que $f \in C^{N+1}([a, b])$. Entonces existe $\xi \in]a, b[$ tal que

$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x),$$

donde ω_{N+1} es el polinomio nodal de grado $N+1$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer $i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow x \neq x_i$.

Función auxiliar: $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto G(t) := \mathbf{E}_N f(t) - \frac{\mathbf{E}_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} \omega_{N+1}(t)$$

$$G(t) = \mathbf{E}_N f(t) - \frac{\mathbf{E}_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} \omega_{N+1}(t)$$

$G \in C^{N+1}([a, b])$ admite al menos $N + 2$ ceros

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, \dots, N \Rightarrow G(x_i) = 0 \\ G(x) &= 0 \end{aligned}$$

Teorema de Rolle

- G' tiene al menos $N + 1$ ceros
- G'' posee al menos N ceros
- ...
- $G^{N+1})$ se aula al menos en un $\xi \in (a, b)$

$$G^{N+1}(t) = f^{N+1}(t) - \frac{\mathbf{E}_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} (N+1)!$$



$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$



$$f(x) = \mathbf{I}_N f(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$

Análoga a fórmula de Taylor

Corolario

Bajo las condiciones de la proposición anterior

$$\|\mathbf{E}_N f\|_\infty \leq \frac{\|f^{(N+1)}\|_\infty}{(N+1)!} (b-a)^{N+1}$$

Convergencia uniforme: $f \in C^\infty([a, b])$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\|f^{(N+1)}\|_\infty}{(N+1)!} (b-a)^{N+1} = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = 0$$

- $f \notin C^\infty([a, b])$ Bernstein

- $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\|f^{(N+1)}\|_\infty}{(N+1)!} (b-a)^{N+1} \neq 0$ Runge

$$\frac{f^{(i)}(1)}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, 10 \text{ (redondeo)}$$

0.8, -3.2, -3.2, 76.8, -243.2, -563.2, 7116.8, -17203.2, -73523.2,

638156.8, $-1.0822 \cdot 10^6$

Ejemplo

$$f(x) = e^x, \quad (x \in [a, b])$$

$$\frac{\|f^{N+1}\|_{\infty}}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} = \frac{e^b}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

↓

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} = 0$$

Ejemplo

$$f(x) = \cos x, \quad (x \in [a, b])$$

$$\frac{\|f^{N+1}\|_{\infty}}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} \leq \frac{1}{(N+1)!}(b-a)^{N+1} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

↓

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} = 0$$

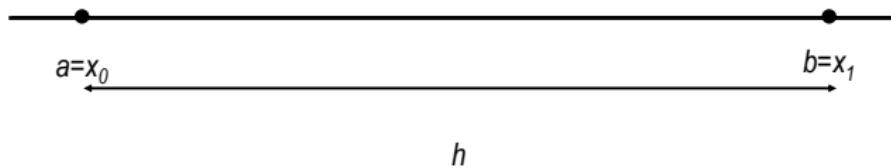
Elección de nodos influye en el error de interpolación

$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$

Primer enfoque: nodos x_0, x_1, \dots, x_N uniformemente distribuidos en $[a, b]$

Ejemplo: 2 puntos

$$[a, b] = [x_0, x_1], h := x_1 - x_0$$



- error de interpolación puntual: $f \in C^2([a, b]), x \in [a, b] \rightsquigarrow \text{existe } \xi \in]a, b[:$

$$\mathbf{E}_1 f(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_0)(x - x_1)$$

- estimación uniforme para error de interpolación:

$$\|\mathbf{E}_1 f\|_{\infty} \leq \frac{\|f''\|_{\infty}}{2} h^2$$

estimación mejorable (acotación de $\omega_2(x)$)

$x \in [x_0, x_1] \Rightarrow \text{existe } 0 \leq t \leq 1 : x = x_0 + th$

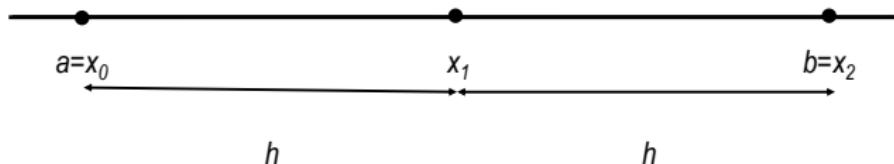
$$\begin{aligned} |(x - x_0)(x - x_1)| &= (x - x_0)(x_1 - x) \\ &= th(1 - t)h \\ &\leq \frac{h^2}{4} \end{aligned}$$



$$\|\mathbf{E}_1 f\|_{\infty} \leq \frac{\|f''\|_{\infty}}{8} h^2$$

Ejemplo: 3 puntos igualmente espaciados

$$[a, b] = [x_0, x_2], \quad x_1 = \frac{x_2 + x_0}{2}, \quad h := x_1 - x_0 = x_2 - x_1$$



- error de interpolación puntual: $f \in C^3([a, b]), x \in [a, b] \rightsquigarrow \text{existe } \xi \in]a, b[:$

$$\mathbf{E}_2 f(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

- estimación uniforme para error de interpolación:

$$\|\mathbf{E}_2 f\|_{\infty} \leq \frac{\|f'''\|_{\infty}}{6} h^3$$

estimación mejorable (acotación de $\omega_3(x)$): $x = x_0 + th, 0 \leq t \leq 2$, análogo al caso de 2 puntos (detalles en Relación de Ejercicios)

En general, aun siendo mejorable, para nodos equidistantes

$$\|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(N+1)}\|_{\infty}}{(N+1)!} h^{N+1}$$

error de interpolación de orden $O(h^{N+1})$

Elección de nodos x_0, x_1, \dots, x_n no trivial \rightsquigarrow minimizar $\|\omega_{N+1}\|_\infty \rightsquigarrow$ minimizar error de interpolación

$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$

nodos (y polinomios) de Chebyshev

$[-1, 1], [a, b] \rightsquigarrow [-1, 1]$ isomorfismo afín

$\theta \in \mathbb{R}, N \geq 1$

$$\cos(N+1)\theta + \cos(N-1)\theta = 2 \cos \theta \cos N\theta$$



$$\cos(N+1)\theta = 2 \cos \theta \cos N\theta - \cos(N-1)\theta$$



$$\text{existe } T_n \in \mathbb{P}_N : T_N(\cos \theta) = \cos N\theta$$

$\cos : [0, \pi] \longleftrightarrow [-1, 1]$ biyección

$$x = \cos \theta$$

$$\cos(N+1)\theta = 2\cos\theta\cos N\theta - \cos(N-1)\theta$$

y

$$T_N(\cos \theta) = \cos N\theta$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow T_{i+2}(x) = 2xT_{i+1}(x) - T_i(x)$$

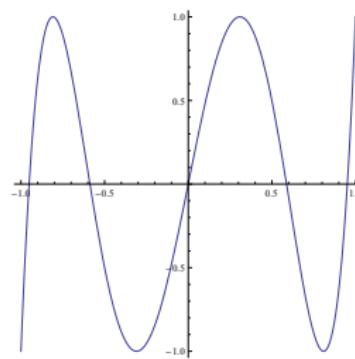
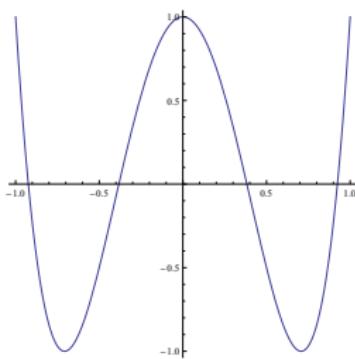
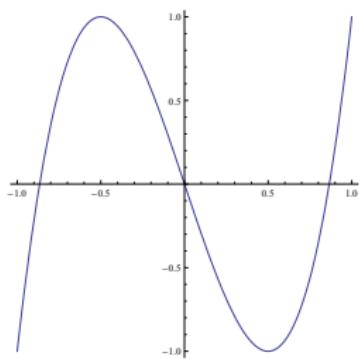
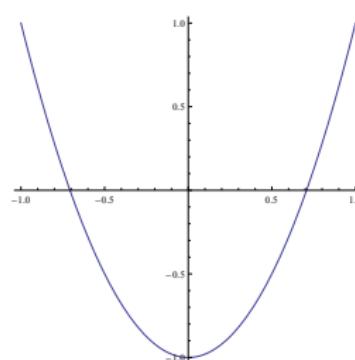
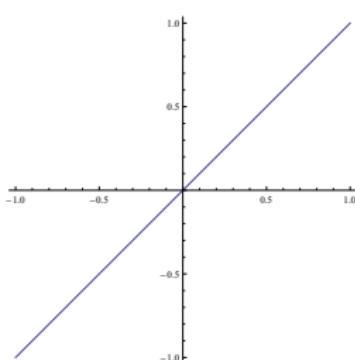
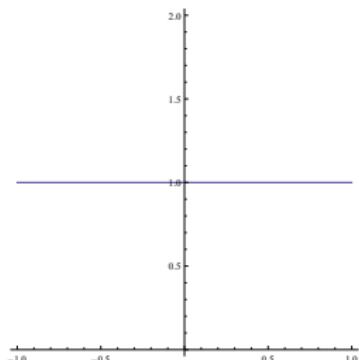
T_i **polinomio de Chebyshev** de grado i

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$



Propiedades importantes

- $T_N \in \mathbb{P}_N$ con N ceros reales, todos en $[-1, 1]$, y coeficiente líder 2^{N-1}
- $T_N \in C([-1, 1])$, $\|T_N\|_\infty = 1$

recurrencia \rightsquigarrow coeficiente líder 2^{N-1}

$$\left. \begin{array}{l} T_N \in \mathbb{P}_N \\ T_N(\cos \theta) = \cos N\theta \\ \cos N\theta = 0 \end{array} \right| \Rightarrow x_i^{(N)} = \cos \frac{2i+1}{2N}\pi, \quad (i = 0, \dots, N-1) \text{ los } N \text{ ceros de } T_N$$

nodos de Chebyshev

$$x \in [-1, 1] \Rightarrow x = \cos \theta$$

$$T_N(x) = T_N(\cos \theta) = \cos N\theta \Rightarrow |T_N(x)| \leq 1$$

$$|T_N(x)| = 1 \Leftrightarrow \cos N\theta = \pm 1 \Leftrightarrow x = y_i^{(N)} = \cos \frac{i}{N}\pi, \quad (i = 0, \dots, N)$$

$\frac{1}{2^{N-1}} T_N$ coeficiente líder 1, $\frac{1}{2^{N-1}} T_N \in C([-1, 1])$

$$\left\| \frac{1}{2^{N-1}} T_N \right\|_{\infty} = \frac{1}{2^{N-1}}$$

Teorema de Chebyshev

Sea $N \geq 1$ y sea $p \in \mathbb{P}_N$ un polinomio con coeficiente líder 1. Entonces

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{N-1}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Reductio ad absurdum

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| < \frac{1}{2^{N-1}}$$

$$q(x) := \frac{1}{2^{N-1}} T_N - p(x) \in \mathbb{P}_{N-1}$$

$$q(y_0^{(N)}) > 0, \ q(y_1^{(N)}) < 0, \ q(y_2^{(N)}) > 0, \dots, \ (-1)^N q(y_N^{(N)}) > 0$$

$q \in \mathbb{P}_{N-1}$ al menos N ceros reales distintos $\rightsquigarrow q = 0$ ¡contradicción! \uparrow

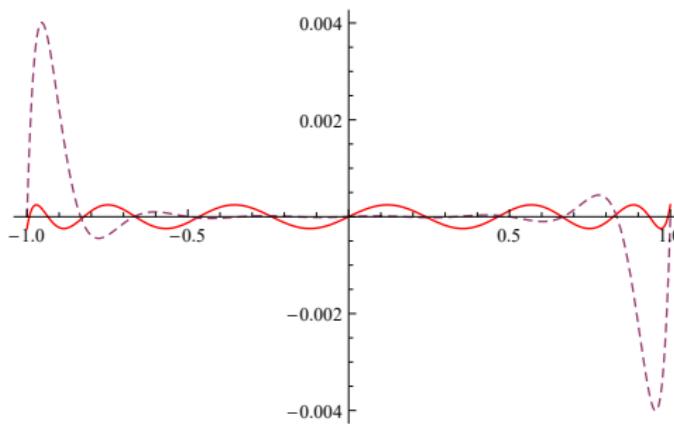


Corolario

Sean $N \geq 1$, $x_0, \dots, x_N \in [-1, 1]$ y sean $x_0^{(N+1)}, x_1^{(N+1)}, \dots, x_N^{(N+1)}$ los nodos de Chebyshev. Entonces, en el espacio normado $C([-1, 1])$,

$$\left\| \prod_{i=0}^N (x - x_i) \right\|_\infty \geq \left\| \prod_{i=0}^N (x - x_i^{(N+1)}) \right\|_\infty = \frac{1}{2^N}.$$

Polinomios nodales con nodos de Chebyshev e igualmente espaciados (trazo discontinuo), $N = 12$

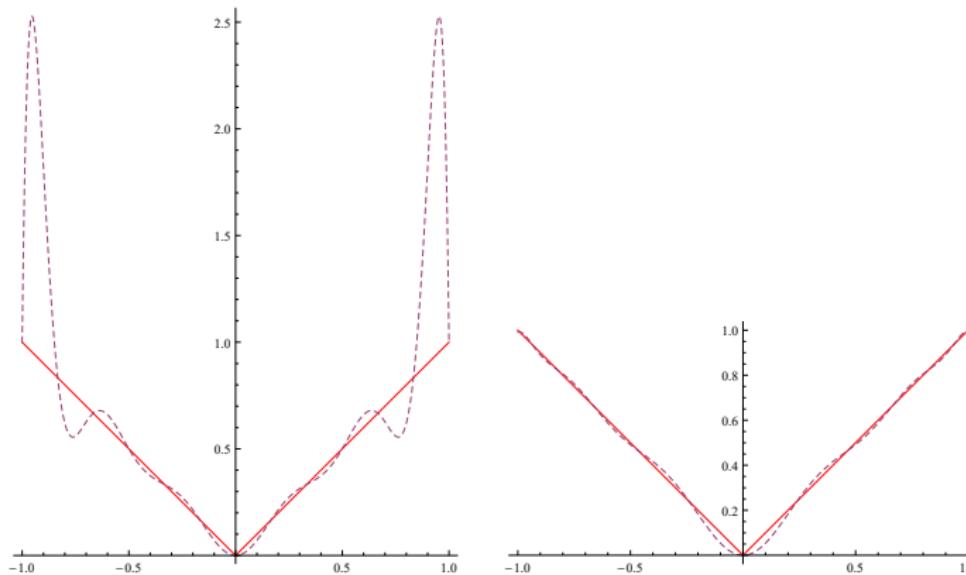


Nodos de Chebyshev

$$\|\mathbf{E}_N f\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{N+1}\|_{\infty}}{(N+1)!} \frac{1}{2^N}$$

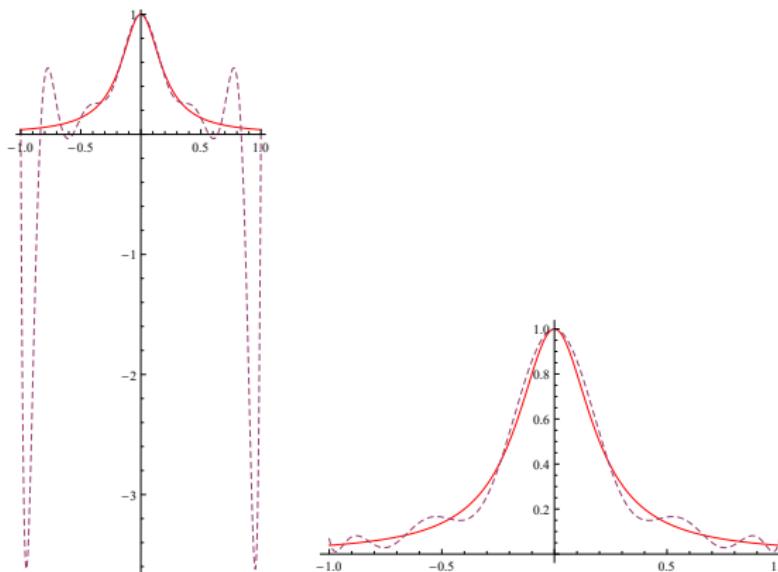
Ejemplo

Función de Bernstein con nodos uniformes y de Chebyshev, $N = 12$



Ejemplo

Función de Runge con nodos uniformes y de Chebyshev, $N = 12$



nodos distintos $x_0, x_1, \dots, x_N \in [a, b]$

órdenes de derivación $m_0, m_1, \dots, m_N \geq 0$

función $f \in C^M([a, b])$, $M := \max_{i=0, \dots, N} m_i$

Problema de interpolación de Hermite

encontrar $p \in \mathbb{P}$ de grado mínimo K con

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow [j = 0, 1, \dots, m_i \Rightarrow p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)]$$

| | |
|---------|----------|
| Enfoque | Lagrange |
| | Newton |

$$p \in \mathbb{P}_K : p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \Leftrightarrow L(p) = f^{(j)}(x_i)$$

con $L : \mathbb{P}_K \rightarrow \mathbb{R}$ forma lineal

$$p \mapsto L(p) := p^{(j)}(x_i)$$

Problema general de interpolación

E espacio vectorial (real) de dimensión N , $L_1, \dots, L_N : E \rightarrow \mathbb{R}$ formas lineales,
 $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{R}$

encontrar un único $p \in E : [i = 1, \dots, N \Rightarrow L_i(p) = d_i]$

Proposición

Sea E un espacio vectorial (real) de dimensión $N \geq 1$, sean $L_1, \dots, L_N : E \rightarrow \mathbb{R}$ formas lineales y sea $\{p_1, \dots, p_N\}$ una base de E . Entonces, el problema general de interpolación admite una única solución, cualesquiera sean $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{R}$, si, y solo si,

$$\det [L_i(p_j)]_{i,j=1}^N \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta usar la linealidad de las formas L_1, \dots, L_N y el hecho de que $\{p_1, \dots, p_N\}$ es base de E , reduciendo el razonamiento al estudio de un sistema de ecuaciones lineales. □

$[L_i(p_j)]_{i,j=1}^N$ matriz de coeficientes de un sistema cuadrado

unisolvencia para cualesquiera $d_1, \dots, d_n \Leftrightarrow$ unisolvencia para $d_1 = \dots = d_N = 0$

Enfoque | **Lagrange**
 Newton

Problema general de interpolación

E espacio vectorial (real) de dimensión N , $L_1, \dots, L_N : E \rightarrow \mathbb{R}$ formas lineales,
 $d_1, \dots, d_N \in \mathbb{R}$

encontrar un único $p \in E$: [$i = 1, \dots, N \Rightarrow L_i(p) = d_i$]

$\{l_1, \dots, l_N\}$ base de E de Lagrange

$$i, j = 1, \dots, N \Rightarrow L_i(l_j) = \delta_{ij}$$

\Downarrow

$$p := \sum_{i=1}^N d_i l_i$$

solución del problema general de interpolación

(¡comprobar como ejercicio!)

dificultad \leadsto determinar la base de Lagrange (¡siempre existe!)

Ejemplo: interpolación polinomial clásica

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2 : i, j = 0, 1, \dots, N \Rightarrow x_i \neq x_j$

$E := \mathbb{P}_N, \quad \{1, x, \dots, x^N\}$ base

$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow L_i(p) := p(x_i)$

encontrar un único $p \in E : [i = 0, \dots, N \Rightarrow L_i(p) = y_i]$

$\det [L_i(x^{j-1})]_{i,j=1}^{N+1} \neq 0 \rightsquigarrow$ unisolvencia

(Vandermonde)

base de Lagrange \rightsquigarrow polinomios de Lagrange $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_N(x)\}$

Ejemplo: interpolación de Hermite_caso i

$(x_0, y_0, d_0), (x_1, y_1, d_1), \dots, (x_N, y_N, d_N) \in \mathbb{R}^3 : i, j = 0, 1, \dots, N \Rightarrow x_i \neq x_j$

$E := \mathbb{P}_{2N+1}, \quad \{1, x, \dots, x^{2N+1}\}$ base

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow \begin{cases} L_{2i}(p) := p(x_i) \\ L_{2i+1}(p) = p'(x_i) \end{cases}$$

encontrar un único $p \in E : \left[i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow \begin{cases} p(x_i) = y_i \\ p'(x_i) = d_i \end{cases} \right]$

$\det [L_i(p_j)]_{i,j=0}^{2N+1} \neq 0 \iff$ problema homogéneo

$$p(x_0) = p'(x_0) = 0 \Rightarrow p(x) = (x - x_0)^2 q_0(x), \text{ para cierto } q_0 \in \mathbb{P}_{2N-1}$$

$x_1, \dots, x_N \rightsquigarrow \rightsquigarrow$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = \alpha \prod_{i=0}^{N+1} (x - x_i)^2$$

$$p \in \mathbb{P}_{2N+1} \rightsquigarrow p = 0$$

Unisolvencia

base de Lagrange \rightsquigarrow polinomios de Hermite $\{h_0(x), h_1(x), \dots, h_{2N+1}(x)\}$

razonamiento análogo al caso polinomial clásico

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow \begin{cases} h_{2i}(x) = (1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i))l_i^2(x) \\ h_{2i+1}(x) = (x - x_i)l_i(x)^2 \end{cases}$$

$\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_N(x)\}$ polinomios de Lagrange

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Solución

$$p(x) = \sum_{i=0}^N (y_i h_{2i}(x) + d_i h_{2i+1}(x))$$

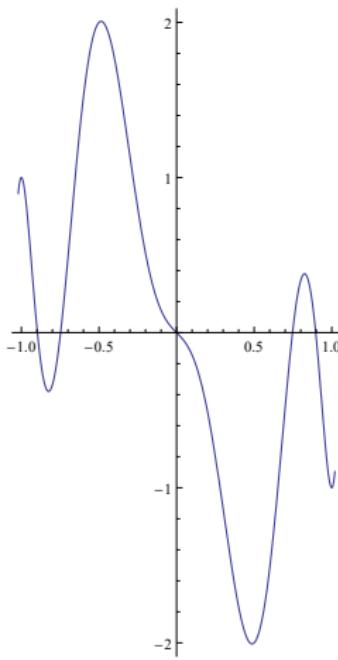
Estudio del error de interpolación similar al caso polinomial clásico

Datos concretos

nodos: $x_0 = -1, x_1 = -0.5, x_2 = 0, x_3 = 0.5, x_4 = 1$

valores: $y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = -2, y_4 = -1$

derivadas: $d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = -1, d_3 = 1, d_4 = 0$



$$p(x) = -x - \frac{833}{18}x^3 + \frac{385}{2}x^5 - \frac{740}{3}x^7 + \frac{904}{9}x^9$$

Ejemplo: interpolación de Hermite_caso ii

$$(x_0, d_0, d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N+2}$$

$$E := \mathbb{P}_N, \quad \{1, x, \dots, x^N\} \text{ base}$$

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow L_i(p) := p^{(i)}(x_0)$$

encontrar un único $p \in E$: $\left[i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow p^{(i)}(x_0) = d_i \right]$

$$\det [L_i(p_j)]_{i,j=0}^N = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 0 & 1 & 2x_0 & \cdots & Nx_0^{N-1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & N(N-1)x_0^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N! \end{bmatrix} \neq 0$$

Unisolvencia

base de Lagrange \leadsto polinomios de Taylor $\{t_0(x), t_1(x), \dots, t_N(x)\}$

razonamiento análogo al caso polinomial clásico

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow t_i(x) = \frac{(x - x_0)^i}{i!}$$

Solución

$$p(x) = \sum_{i=0}^N \frac{d_i}{i!} (x - x_0)^i$$

$d_i \leadsto f^{(i)}(x_0)$ polinomio de Taylor

Ejercicio

Decide razonadamente si el problema de interpolación

encontrar $p \in \mathbb{P}_3 :$

$$\left| \begin{array}{l} p(0) = 0 \\ p'(0) = 0 \\ p'(-1) = 0 \\ p''(-0.5) = 0 \end{array} \right.$$

es unisolvante.

Mejorar precisión \rightsquigarrow partición de $[a, b]$ y grado polinomial bajo

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$$

partición de $[a, b]$

Definición

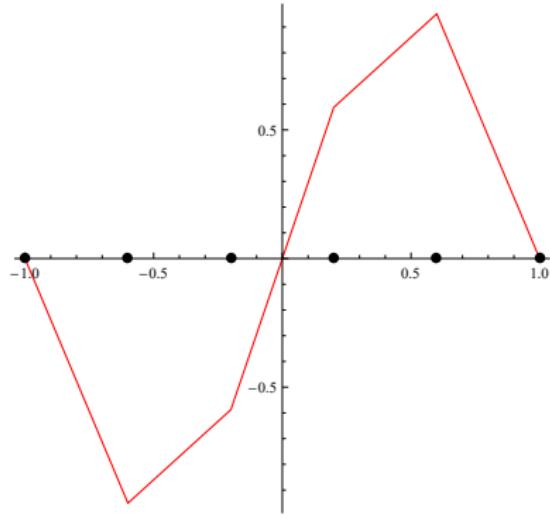
Dados un intervalo $[a, b]$ y una partición P del mismo, el *espacio de funciones splines* de clase k y grado m viene dado por

$$\mathbb{S}_m^k(P) := \{s \in C^k([a, b]) : i = 0, 1, \dots, N - 1 \Rightarrow s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m\}$$

Espacio vectorial

$$\mathbb{S}_m^m = \mathbb{P}_m \rightsquigarrow k < m$$

$$\mathbb{S}_1^0(P)$$



$$\dim \mathbb{S}_1^0(P) = 2N - (N - 1) = N + 1$$

base usual $\{B_0(x), B_1(x), \dots, B_N(x)\}$

Definición

Sean $a < b$ y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. La **base usual** del espacio $\mathbb{S}_1^0(P)$ viene dada por

$$i = 0, 1, \dots, N, \Rightarrow B_i(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{fuera} \end{cases} .$$

Ejercicio

Comprueba que, efectivamente, las $N + 1$ funciones splines anteriores forman una base de $\mathbb{S}_1^0(P)$.

(Indicación: para la independencia lineal basta observar que

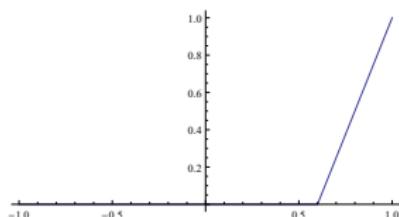
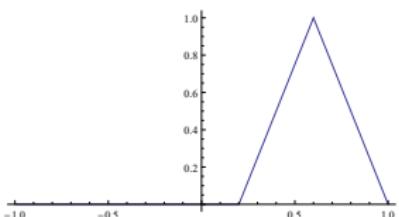
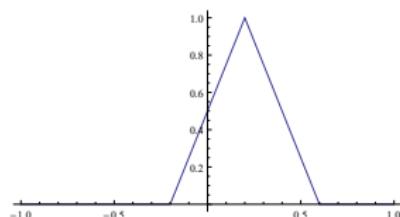
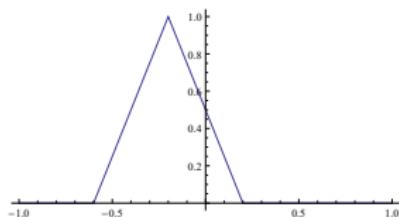
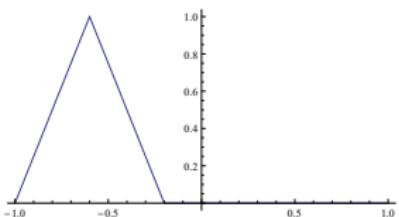
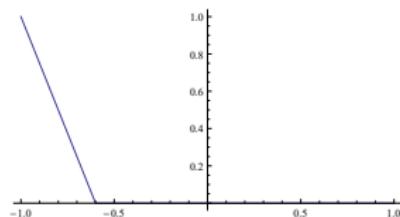
$$i, j = 0, 1, \dots, N \Rightarrow B_i(x_j) = \delta_{ij},$$

mientras que para probar que forman un sistema de generadores, solo hay que demostrar que

$$s \in \mathbb{S}_1^0(P) \Rightarrow s(x) = \sum_{i=0}^N s(x_i)B_i(x).$$

$$P = \left\{ -1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right\}$$

$N = 5$



Problema de interpolación en $\mathbb{S}_1^0(P)$

Dados un intervalo $[a, b]$, una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ y una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se considera el problema de interpolación

$$\text{encontrar } s \in \mathbb{S}_1^0(P) : [i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow s(x_i) = f(x_i)]$$

Estructura de problema de interpolación general claramente unisolvante
(¡comprobar!)

Base de Lagrange $\rightsquigarrow \{B_0(x), B_1(x), \dots, B_N(x)\}$

Solución: notando $s = \mathbf{S}_N^1 f$

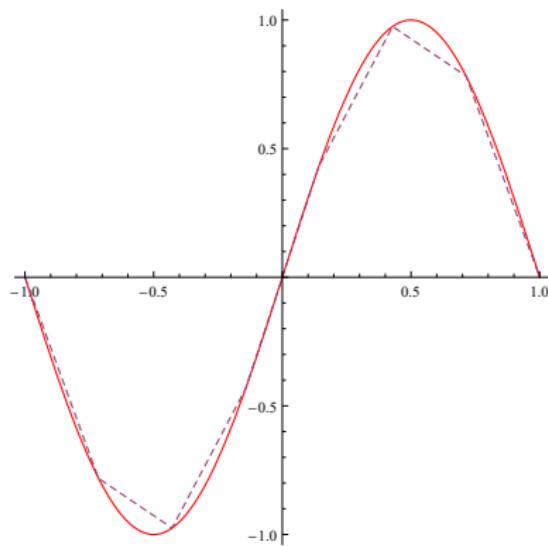
$$\mathbf{S}_N^1 f(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i) B_i(x)$$

Ejemplo

P partición uniforme de $[-1, 1]$ en $N = 7$ subintervalos

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad (x \in [-1, 1])$$

$\mathbf{S}_7^1 f(x)$ trazo discontinuo



Error de interpolación

$$\mathbf{E}_N f(x) = f(x) - \mathbf{S}_N^1 f(x)$$

$$f \in C^2([a, b])$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow |f(x) - \mathbf{S}_N^1 f(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} (x_{i+1} - x_i)^2$$

↓

$$\|f - \mathbf{S}_N^1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} \left(\max_{i=0, \dots, N-1} (x_{i+1} - x_i) \right)^2$$

Hemos probado:

Proposición

Con la notación anterior, si $f \in C^2([a, b])$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{i=0, \dots, N-1} (x_{i+1} - x_i) = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \mathbf{S}_N^1 f\|_\infty = 0.$$

Ejercicio

Sea $f \in C([a, b])$, sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ y sea $\mathbf{S}_N^1 f$ el único elemento de $\mathbb{S}_1^0(P)$ que interpola a f en los nodos de P , i.e.,

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow \mathbf{S}_N^1 f(x_i) = f(x_i).$$

- Comprueba que si $i = 0, 1, \dots, N - 1$ y $x \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\mathbf{S}_N^1 f(x) \leq \max\{f(x_i), f(x_{i+1})\}.$$

- Deduce que

$$\|\mathbf{S}_N^1 f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

- Demuestra que

$$\|f - \mathbf{S}_N^1 f\|_\infty \leq 2 \inf_{s \in \mathbb{S}_1^0(P)} \|f - s\|_\infty.$$

$\mathbb{S}_3^1(P)$ datos Hermite \rightsquigarrow tratamiento similar problema de interpolación general

$\mathbb{S}_3^2(P)$ \rightsquigarrow tratamiento alternativo

$$\dim \mathbb{S}_3^2(P) = 4N - 3(N - 1) = N + 3$$

Funciones splines cúbicas naturales

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow s(x_i) = f(x_i)$$

$$2 \text{ condiciones adicionales: } s''(a) = 0 = s''(b)$$

Construcción directa de las funciones splines cúbicas naturales en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Por comodidad expositiva puntos distribuidos uniformemente en $[a, b]$

$$h = (b - a)/N, \quad i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow x_i = a + ih$$

Notación

$$s := \mathbf{S}_N^2 f$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1 \Rightarrow s_i := \mathbf{S}_N^2 f|_{[x_i, x_{i+1}]}$$

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow y_i := s(x_i), \quad d_i := s'(x_i), \quad c_i := s''(x_i)$$

- $i = 1, \dots, N, s_{i-1} \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow s''_{i-1} \in \mathbb{P}_1$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow s''_{i-1}(x) = c_{i-1} \frac{x_i - x}{h} + c_i \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

Automáticamente

$$i = 1, \dots, N \Rightarrow s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) \tag{1}$$

Integrando 2 veces

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow s_{i-1}(x) = c_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h} + c_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \alpha_{i-1}(x - x_{i-1}) + \beta_{i-1}$$

• Condiciones de interpolación

$$i = 1, \dots, N-1 \Rightarrow s_{i-1}(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad s_{i-1}(x_i) = y_i$$



$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(c_i - c_{i-1}) \\ \beta_{i-1} = y_{i-1} - c_{i-1} \frac{h^2}{6} \end{array} \right.$$

Automáticamente $s \in C([a, b])$

¡Los d_i 's no intervienen!

- $s \in C^1([a, b]) (\Rightarrow s \in C^2([a, b]) \text{ por (1)})$

$$i = 1, \dots, N - 1 \Rightarrow s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$$



$$i = 1, \dots, N - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}c_{i-1} + 2c_i + \frac{1}{2}c_{i+1} = \rho_i,$$

$$\rho_i := \frac{3}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

Sistema de $N - 1$ ecuaciones lineales y $N + 1$ incógnitas \rightsquigarrow añadimos 2 ecuaciones que impliquen trivialmente las condiciones $s''(a) = s''(b) = 0$

$$2c_0 = 0$$

$$2c_N = 0$$

Resumen: $i = 1, \dots, N$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow s_{i-1}(x) = c_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h} + c_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \alpha_{i-1}(x - x_{i-1}) + \beta_{i-1}$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(c_i - c_{i-1}) \\ \beta_{i-1} = y_{i-1} - c_{i-1} \frac{h^2}{6} \end{array} \right.$$

Los c_i 's solución del sistema

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 2 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{array} \right] = \frac{3}{h^2} \left[\begin{array}{c} 0 \\ y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ \vdots \\ y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2} \\ 0 \end{array} \right]$$

Ejemplo

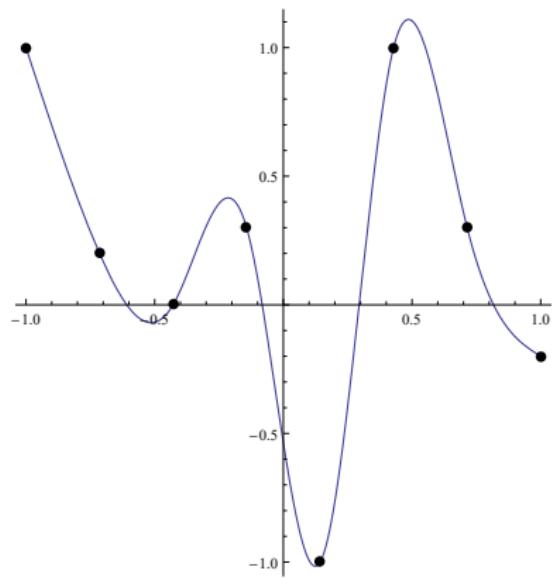
$$[-1, 1], \quad N = 7$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0.2, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.3, \quad y_4 = -1, \quad y_5 = 1, \quad y_6 = 0.3, \quad y_7 = -0.2$$

Solución del sistema (redondeo)

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 5.3882, \quad c_2 = 22.5474, \quad c_3 = -58.8278, \quad c_4 = 95.1637, \quad c_5 = -79.277$$

$$c_6 = 23.4942, \quad c_7 = 0$$



Ejemplo

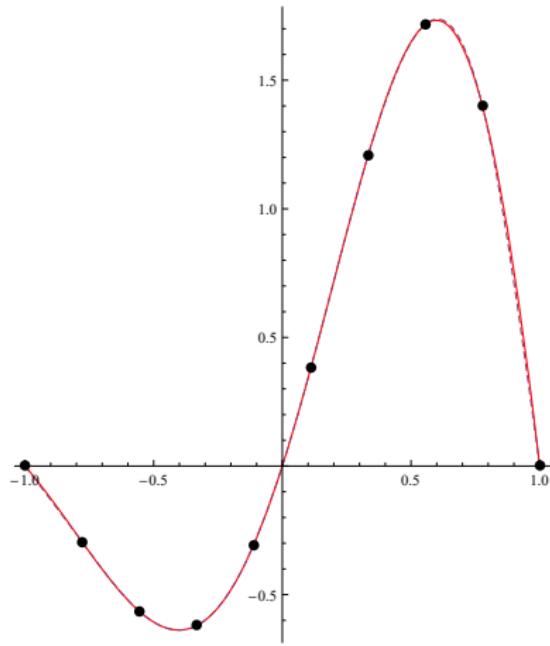
$$[-1, 1], \quad N = 9, \quad f(x) = \sin(\pi x)e^x$$

Solución del sistema (redondeo)

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -0.3741, \quad c_2 = 4.6056, \quad c_3 = 7.98, \quad c_4 = 8.4266, \quad c_5 = 3.7284$$

$$c_6 = -6.5546, \quad c_7 = -16.2233, \quad c_8 = -28.8036, \quad c_9 = 0$$

$s = \mathbf{S}_9^2 f$ trazo discontinuo



Error de interpolación

Proposición

Con la notación anterior, si $f \in C^4([a, b])$ entonces

$$j = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \|f^{(j)} - \mathbf{S}_N^2 f^{(j)}\|_{\infty} \leq K_j h^{4-j} \|f^{(4)}\|_{\infty},$$

donde $K_0 = 5/384$, $K_1 = 1/24$, $K_2 = 3/8$ y $K_4 = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [3].



Principio de mínima energía

Proposición

Sean $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g \in C^2([a, b])$ de forma que

$$i = 0, 1, \dots, N \Rightarrow g(x_i) = f(x_i).$$

Si además s es la función spline cónica natural que satisface la misma condición de interpolación, entonces

$$\int_a^b s''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx,$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $g = s$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [2].



- ① P. Erdos, *Problems and results on the theory of interpolation II*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **12** (1961), 235–244.
- ② W. Gautschi, *Numerical analysis*, second edition, Springer, New York, 2012.
- ③ A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical mathematics*, second edition, Texts in Applied Mathematics **37** Springer–Verlag, Berlin, 2007.