## 从一个例子讲起

$$\max\ z = x_1 + 2x_2 \qquad \xrightarrow{\text{标准形式}} \qquad \max\ z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

松弛变量

### 构造初始可行解

$x^{(0)} = (0, 0, 3, 1)^T,\ z = 0$

**典则形式：用非基变量表示基变量和目标函数**

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

**显然目标函数可以改进**

$x_2$入基，$x_1$不变，$x_4 = 1 - x_2$先出基

$x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T\ \ z = 2$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 \end{cases}$$

$x_1$入基，$x_2$不变，$x_3 = 2 - x_1 + x_4 = 0$出基

$x^{(2)} = (2, 1, 0, 0)^T,\ z = 4$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

检验数$\le 0$，达到最优解

抽象形式

B: Basic  N: non-Basic

$x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$  $A=[A_B \ A_N]$

$A_B x_B + A_N x_N = b$

$A_B x_B = b - A_N x_N$

$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$

典则形式

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ C^T x = C_B^T x_B + C_N^T x_N \end{cases} \Leftarrow$$

$$= C_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\text{检验数}} x_N$$

令 $\bar{A} = A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{ij})_{m\times(n-m)}$

若非基变量 $x_j$ ($j=m+1,\cdots,n$) 的检验数

$\sigma_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i \bar{a}_{ik}$  $k=j-(m+1)$

因为 $x_{m+1}$ 对应 $\sigma_0$, $c_0$, $\bar{a}_{i0}$

求 max, 若 $\sigma_k \le 0$，则 $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ 为最优解

若 $\exists \sigma > 0$ 且 $\bar{a}_i \le 0$, $\forall i=1,\cdots,m$，则无有限最优解 ($x$越大越好)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $C_B$ | $C_N$ | |
| $x_B$ | $A_B$ | $A_N$ | $b$ |

$\rightsquigarrow A_B x_B + A_N x_N = b$

| | | 检验数 | 目标值相反数 |
|---|---|---|---|
| | 0 | $C_N - C_B^T A_B^{-1} A_N$ | $-C_B^T A_B^{-1} b$ |
| $x_B$ | $I_{m\times m}$ | $A_B^{-1} A_N$ | $A_B^{-1} b$ |

单位矩阵

$z - C_B^T A_B^{-1} b$

$= (C_N - C_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$

$x_i + \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$

$\min_{\bar{a}_{ij}>0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$ 对应的$i$出基

**举例：**

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

先化成标准形式

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

构造一组初始可行解 $(0,0,3,1)^T$ $Z=0$

先以 $x_3$, $x_4$ 为基

典则形式

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 0 | 0 | |
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 0 | 0 | |
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

入基

$x_2$入基，选谁出基？

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$x_2 + x_4 = 1$

让 $x_2$ 逐渐增大，发现先被 $x_2 + x_4 = 1$ 限制住
所以 $x_4$ 出基

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | ① |
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | ② |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | ③ |

不满足典则形式

$\Rightarrow$ ①−2×③ ②−③

入基

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | -2 | -2 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$x_1$入基，$x_3$出基

| | | $\times$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | -2 | -2 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

检验数都≤0

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | -1 | -1 | -4 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$x^* = (2, 1, 0, 0)$   $z^* = 4$

$x_5$入基，$x_8$出基

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~-2~~ | ~~1~~ | ~~-1~~ | ~~1~~ | ~~2~~ | ~~0~~ | ~~-1~~ |
| $x_1$ | 1 | 0 | -5 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 2 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 |

$\Rightarrow$ 可行解 $(4,1,0,0,1,0,0,0)$

$$\min Z = -x_2 + 2x_3$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 |
| | ~~0~~ | ~~-1~~ | ~~2~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | |
| $x_1$ | 1 | 0 | -5 | 2 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -3 | 1 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 2 | -1 | 1 | 1 |

$x_3$入基，$x_5$出基

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 | -5 | 2 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -3 | 1 | 0 | 1 |
| $x_3$ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~2~~ | ~~-1~~ | ~~1~~ | ~~1~~ |
| | 0 | 0 | 1 | -0.5 | 0.5 | 0.5 |

$\Rightarrow$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 1.5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -0.5 | 2.5 | 6.5 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 1.5 | 2.5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | -0.5 | 0.5 | 0.5 |

$(6.5, 2.5, 0.5, 0, 0)$ $Z = -1.5$

max $2x_1+3x_2-x_3-x_4$

$-2 \quad 3$

求 max

① read in

② min $\Rightarrow$ max

③ "$\geq$" 约束 $\Rightarrow$ "$\leq$"

④ "$x\leq 0$" $\Rightarrow$ $x\geq 0$

x无约束 $\Rightarrow$ $x=x_1-x_2$ $\quad x_1,x_2\geq 0$

⑤ 判断等于0的约束

两阶段法

松弛变量

6 1 松弛变量为 b

求解

6 2 两阶