

考研数学线性代数基础讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）。首创“题源教学法”，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分。

欢迎使用新东方在线电子教材



目 录

第一讲 基础篇.....	1
第二讲 核心篇.....	4
第三讲 应用篇.....	9

第一讲 基础篇

行列式与矩阵

一、从行列式讲起

1. 行列式的本质定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S_{\square}$$

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是由两个 2 维向量组成，其结果为以这两个向量为邻边的平行四边形 \square 的面积。

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是由三个 3 维向量 (a_{11}, a_{12}, a_{13}) , (a_{21}, a_{22}, a_{23}) , (a_{31}, a_{32}, a_{33}) 组成，其结果为以这三个向量为邻边的平行六面体的体积。

$D_n = |A_{n \times n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是由 n 个 n 维向量组成，其结果为以这 n 个向量为邻边的

n 维图形的 n 维体积。

2. 行列式的性质

风雨考研 QQ3255076890 全程更新

- (1) 如果行列式中某一行（列）元素全为零，则行列式等于零；
- (2) 如果行列式中某两行（列）元素对应成比例，则行列式等于零；
- (3)（互换）互换行列式中某两行（列）元素的位置，行列式的值只改变正负号；
- (4)（倍乘）常数 k 乘以行列式，即行列式的某行（列）元素分别乘以 k ；
- (5)（倍加）将行列式的某一行（列）的所有元素都乘以数 k 后加到另一行（列）对应位置的元素上，行列式的值不变；
- (6)（单行可拆（加）性）如果行列式中某行（列）的每个元素都是两个数的和，则这个行列式可以拆成两个行列式的和；
- (7) 行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$ 。

3. ★重要观点: 行列式由向量组成

- (1) 如果行列式不等于零, 那么组成行列式的向量**全独立**;
 (2) 如果行列式等于零, 那么组成行列式的向量中**至少有一个多余**.

【注】二、三阶行列式的计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

二、矩阵的本质是什么?

1. 表面上, 矩阵表达系统信息.

2. 本质上, 设矩阵 $A_{m \times n}$, 满足: $\Rightarrow r(A) = k$

$$\begin{cases} \text{①存在 } k \text{ 阶子式不为 } 0, \\ \text{②任给 } (k+1) \text{ 阶子式全为 } 0, \text{ 则秩 } r(A) = k. \end{cases} \Rightarrow r(A) = k$$

$$\begin{cases} \text{①存在 } k \text{ 阶子式不为 } 0, \Rightarrow \text{存在 } k \text{ 个独立向量} \\ \text{②任给 } (k+1) \text{ 阶子式全为 } 0, \Rightarrow \text{任给 } (k+1) \text{ 个向量中至少有一个多余} \end{cases}$$

\Leftrightarrow 有且仅有 k 个独立向量 $\Leftrightarrow r(A) = k$.

★重要观点:

风雨考研 QQ3255076890 全程更新

$$\text{矩阵 } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 是由向量组成.}$$

从行上看: m 个 n 维行向量; 从列上看: n 个 m 维列向量.

其本质为秩 $r(A)$ = 组成 A 的独立向量的个数.

1) “台阶数=秩”

2) 化矩阵 A 为行(最简)阶梯形矩阵

①若矩阵 A 满足: 1) 若有零行全在矩阵下方; 2) 从行上看, 自左边起, 出现连续零的个数自上而下严格单增. 称为**行阶梯形矩阵**.

②若矩阵 A 还满足: 3) 台角位置元素为 1; 4) 台角正上方元素全为零. 称为**行最简阶梯形**.

矩阵.

3) 初等变换法——互换、倍乘、倍加

【例 1】化矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ 为行最简阶梯形矩阵.

【例 2】化矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ 为行最简阶梯形矩阵.

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

第二讲 核心篇

向量组与方程组

【综述】

风雨考研 QQ3255076890 全程更新方程组求解 \Leftrightarrow 一个向量与一组向量的关系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

★重要观点:

方程组的解就是描述一个向量与一组向量之间关系的表示系数.

一、定性研究

- ①相关性问题 (有没有多余向量)
- ②表示性问题 (如何表示多余向量)
- ③代表性问题 (极大线性无关组)
- ④等价性问题 (两个向量组之间的关系)

1. 相关性问题

 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有没有多余的向量 $\begin{cases} \text{有} \\ \text{没有} \end{cases}$

第 1 章 行列式 $\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s| = 0, \\ |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s| \neq 0 \end{cases}$ (局限于方形)

第 2 章 矩阵 $\Leftrightarrow \begin{cases} r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s, \\ r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \end{cases}$

第 3 章 向量组

风雨考研 QQ3255076890 全程更新 \Leftrightarrow 如果存在一组不全为 0 的数 x_1, x_2, \dots, x_s , 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性相关. (多余)若 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 成立, 必须要求 $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线

性无关. (独立)

第4章 方程组

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解. (齐次)}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解.}$$

【注】学会挖掘各充要条件之间的关系.

【应用】

①第一组定理

1) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性相关;

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性相关性不确定.

2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性相关性不确定;

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性无关.

②第二组定理

3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \dots, \beta_s = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \gamma_s \end{pmatrix}$ 线

性相关性不确定;

风雨考研 QQ3255076890 全程更新

若向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

4) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关;

若向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关性不确定.

【总结】部分相关 \Rightarrow 整体相关; 整体无关 \Rightarrow 部分无关; 原来相关 \Rightarrow 缩短相关; 原来无关 \Rightarrow 延长无关.

2. 表示性问题

β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\begin{cases} \text{能} \\ \text{不能} \end{cases}$

第 1 章 行列式 $\begin{cases} \Rightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta| = 0, \\ \Leftarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s| \neq 0 \end{cases}$ (反推均不成立) (局限于方形)

第 2 章 矩阵 $\begin{cases} \Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \\ \Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + 1 \end{cases}$

第 3 章 向量组

\Leftrightarrow 如果存在一组数 x_1, x_2, \dots, x_s , 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$ 成立, 则称 β 可由

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

风雨考研 QQ3255076890 全程更新

不存在任何一组数 x_1, x_2, \dots, x_s , 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$ 成立, 则称 β 不可由

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

第 4 章 方程组

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \beta$ 有解. (非齐次)

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \beta$ 无解.

3. 代表性问题——极大线性无关组

①定义：从向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中取出向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r} (r \leq s)$ ，若其满足

1) 线性无关；2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任一向量 α_i 均可由其表示。

则称向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组。

②应用——若 $Ax = 0$ 有无穷多个解向量，一般用基础解析来表示。

★重要观点： $Ax = 0$ 的无穷多解的极大无关组 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 的基础解析。

注：基础解析的定义：

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ ，若其满足：

1) 是 $A_{m \times n} x = 0$ 的解；

2) 线性无关；

3) $Ax = 0$ 的任一解均可由其表示；

则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系，其中 $s = n - r(A)$ 。

4. 等价性问题——研究一组向量与一组向量之间的关系（在定量描述中讲解）

设 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

若①
$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{12}\beta_2 + \dots + k_{1t}\beta_t \\ \alpha_2 = k_{21}\beta_1 + k_{22}\beta_2 + \dots + k_{2t}\beta_t \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_s = k_{s1}\beta_1 + k_{s2}\beta_2 + \dots + k_{st}\beta_t \end{cases}$$
，则称 (I) 可由 (II) 线性表示。

若②
$$\begin{cases} \beta_1 = l_{11}\alpha_1 + l_{12}\alpha_2 + \dots + l_{1s}\alpha_s \\ \beta_2 = l_{21}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \dots + l_{2s}\alpha_s \\ \dots\dots\dots \\ \beta_t = l_{t1}\alpha_1 + l_{t2}\alpha_2 + \dots + l_{ts}\alpha_s \end{cases}$$
，则称 (II) 可由 (I) 线性表示。

二、定量描述

1. 解 $Ax = 0$ （齐次方程组）

当 $r(A) = n \Rightarrow Ax = 0$ 只有 0 解；

当 $r(A) < n \Rightarrow Ax = 0$ 有非 0 解（无穷多解）

则其求解步骤为：

风雨考研 QQ3255076890 全程更新

①写出系数矩阵 A ，化 A 为行（最简）阶梯形矩阵，求出 $r(A)$ ；

②按列找出一个秩为 $r(A)$ 的子矩阵, 则剩余位置的变量即为自由变量;

③按照基础解系的定义反着走③ \rightarrow ② \rightarrow ①

④全部解 (通解) $= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$

【例】求
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$
 的全部解

2. 解 $Ax = \beta$ (非齐次)

若 ξ 为 $Ax = 0$ 的任一解, η^* 为 $Ax = \beta$ 的某一特解, 则 $A\xi = 0, A\eta^* = \beta \Rightarrow A(\xi + \eta^*) = \beta$;

故 $Ax = \beta$ 的全部解 $= Ax = 0$ 的全部解 $+ Ax = \beta$ 的一个特解;

即全部解 (通解) $= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s + \eta^*$.

【例】
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$
 , 当 a, b 为何值时, 方程组有解, 并求出全部解.

(等价性问题的内容见前面)

第三讲 应用篇

特征值与二次型

引例

风雨考研 QQ3255076890 全程更新

(1) 给出 $x^2 + xy + y^2 = 1$, 通过某正交变换, 变成: $\frac{x'^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1$

(2) 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

矩阵形式: $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$, 其中:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}; \text{其中, 只含平方项的二次型, 称为二次型的标准形.}$$

化二次型为标准形, 也就是“化 $A \rightarrow \Lambda$ ”成为关键:

①若存在可逆矩阵 C , 使得 $C^{-1}AC = B$, 则称 A 与 B 相似.

②若存在可逆矩阵 D , 使得 $D^{-1}AD = \Lambda$, 则称 A 相似于 Λ .

注: 若存在非零向量 ξ_i , 使得 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i$, 则称 λ_i 为矩阵 A 的特征值, ξ_i 为 λ_i 对应的特征向量.

【练习】 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值 λ_i 与对应的特征向量 ξ_i .

③若存在正交矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ ，则称 A 相似于 Λ 。

注：若矩阵 P 满足 $PP^T = E$ ，则称矩阵 P 为正交矩阵，且有 $P^{-1} = P^T$ 。

则： $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T P^T APy = y^T \Lambda y$

【总结】正交变换法：

1°把二次型表示为矩阵形式 $x^T Ax$ ；

2°求出 A 的全部互异特征值 λ_i ，设 λ_i 是 n_i 重根；

3°对每个特征值 λ_i ，解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$ ，求得基础解系，即属于 λ_i 的特征向量；

4°将 A 的属于同一个特征值的特征向量正交化；

5°将全部向量单位化；

6°将正交单位化后向量为列，且按 λ_i 在对角矩阵的主对角线上的位置构成正交矩阵 P ；

7°令 $x = Py$ ，得 $x^T Ax = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 。

风雨考研 QQ3255076890 全程更新