

# 考研数学高等数学基础讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）。首创“题源教学法”，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分。

欢迎使用新东方在线电子教材



## 目 录

第一讲	极限.....	1
第二讲	高等数学的基本概念串讲.....	9
第三讲	高等数学的基本计算串讲.....	13
第四讲	高等数学的基本定理串讲.....	24
第五讲	微分方程.....	27
第六讲	多元函数微积分初步.....	29

# 第一讲 极限

## 核心考点概述

1. 极限的定义
2. 极限的性质
3. 极限的计算
4. 连续与间断

## 内容展开

### 一、极限的定义

#### 1. $\lim_{x \rightarrow \bullet}$ 是什么? $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 是什么?

(1)  $\lim_{x \rightarrow \bullet}$  的情况:

① “ $x \rightarrow \bullet$ ”代表六种情形:  $x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$

② 函数极限运算的过程性——必须保证在作极限运算的过程中函数处处有定义, 否则极限过程便无从谈起, 于是极限就不会存在了。比如下面这个例子:

【例】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$ .

事实上, 在  $x=0$  点的任一小的去心邻域内, 总有点  $x = \frac{1}{k\pi} \rightarrow 0$  ( $|k|$  为充分大的正整数),

使  $\frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$  在该点没有定义, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$  不存在.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  是什么?

#### 2. 极限的定义

(1) 函数极限的定义:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

注：趋向方式六种

(2) 数列极限定义：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n - a| < \varepsilon$$

注：趋向方式只有一种

【例】以下三个说法，

(1) “ $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x > X \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{10}$ ”是“ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ”的充要条件；

(2) “ $\forall$  正整数  $N, \exists$  正整数  $K, \text{当 } 0 < |x - x_0| \leq \frac{1}{K} \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| \leq \frac{1}{2N}$ ”是

“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”的充要条件；

(3) “ $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists$  正整数  $N, \text{当 } n \geq N \text{ 时, 恒有 } |x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是“数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ”的充要条件；

正确的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

## 二、极限的性质

### 1. 唯一性

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$  不存在 (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  不存在 (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$

不存在

【例】设  $k$  为常数，且  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{e^x} - \pi}{\frac{2}{e^x} + 1} + k \cdot \arctan \frac{1}{x} \right)$  存在，求  $k$  的值，并计算极限  $I$ 。

## 2. 局部有界性

【例】函数  $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$  在下列哪个区间内有界 ( )

- (A)  $(-1, 0)$ . (B)  $(0, 1)$ . (C)  $(1, 2)$ . (D)  $(2, 3)$ .

【注】函数有界性判别法总结如下：

- (1) 理论型判别—— $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续，则  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上有界；
- (2) 计算型判别—— $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续，且极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在，则函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内有界。
- (3) 若极限不存在，则转向“四则运算规则”——有限个有界函数与有界函数的和、差、积仍为有界函数。
- (4) 若存在  $x_0$ ，使得  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ，则无界。

## 3. 局部保号性

若  $\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) = A > 0$ ，则当  $x \rightarrow \bullet$  时， $f(x) > 0$ 。

【例】设  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ，且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$ ，则  $x = 0$  是

- (A) 极大值点 (B) 极小值点 (C) 不是极值点 (D) 无法判断

## 三、极限的计算

### 1. 函数极限的计算

- (1) 化简先行

【例 1】求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sin x} (\sin x - x)}{\tan^3 x}$

【例 2】求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+5x}}{x}$

(2) 基本的七种未定型

第一组:  $\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty$

【例 1】求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【例 2】求极限  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$

第二组:  $\infty - \infty$

①有分母, 则通分

【例】求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$

②没有分母，创造分母，再通分

【例】求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$

第三组:  $\infty^0$      $0^0$      $1^\infty$

【例 1】求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$

【例 2】求极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$

(3) 核心工具——泰勒公式

①牢记 8 个公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

## ②掌握两个展开原则

i.  $\frac{A}{B}$  型——上下同阶原则

【例】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$

ii.  $A-B$  型——幂次最低原则

【例】已知  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$  与  $cx^k$  为等价无穷小, 求  $c, k$ .

【练习】设  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $p(x) - \tan x$  与  $x^3$  为同阶无穷小, 求  $a, b, c, d$ .

## 2. 数列极限的计算

(1) 将  $x_n$  连续化, 转化为函数的极限

【例】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \tan \frac{1}{n})^{n^2}$

(2) 当数列通项为具体已知时, 通常的解法为:

1) 夹逼准则, 2) 定积分定义, 3) 利用幂级数求和 (仅数学一要求),

【例】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$

(3) 当数列通项由递推关系式  $a_n = f(a_{n-1})$  给出时, 通常使用单调有界准则

【例】设  $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right) \quad n = 1, 2, \dots$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

#### 四、连续与间断

1. 由于“一切初等函数在其定义区间内必连续”, 则只需考虑两类特殊的点: 函数的无定义点和分段函数的分段点.

2. 所谓连续

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 处连续}$$

3. 所谓间断

(1) 跳跃间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$



(2) 可去间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

(3) 无穷间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$

(4) 振荡间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  振荡

【例】设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0 \\ 6, & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0 \end{cases}$ , 问  $a$  为何值时,

(I)  $f(x)$  在  $x=0$  连续;

(II)  $x=0$  是  $f(x)$  的可去间断点.

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

## 第二讲 高等数学的基本概念串讲

核心考点概述

内容展开

一、一元函数微分需的概念及使用

1. 考查导数定义的基本形式

【例】设  $\delta > 0$ ,  $f(x)$  在  $[-\delta, \delta]$  上有定义,  $f(0) = 1$ , 且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) + 2xf'(x)}{x^2} = 0$ ,

证明  $f'(0)$  存在, 并求  $f'(0)$ .

2. 考查导数定义中增量的广义化

【例】设  $f(0) = 0$ , 下列命题能确定  $f'(0)$  存在的是( )

- (A)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2}$  存在      (B)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h}$  存在
- (C)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h^2}$  存在      (D)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$  存在

## 二、一元函数积分学的概念及其使用

### 1. 不定积分、变限积分和定积分

#### (1) 不定积分

**原函数与不定积分** 设函数  $f(x)$  定义在某区间  $I$  上, 若存在可导函数  $F(x)$ , 对于该区间上任一点都有  $F'(x) = f(x)$  成立, 则称  $F(x)$  是  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数. 称

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

为  $f(x)$  在区间  $I$  上的不定积分, 其中  $C$  为任意常数.

**【注】**谈到函数  $f(x)$  的原函数与不定积分, 必须指明  $f(x)$  所定义的区域.

**【例 1】**试证明: 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则函数  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F'(x) = f(x)$  (本题即为变限积分函数求导的知识点).

**【例 2】**试证明: 含有第一类间断点、无穷间断点的函数  $f(x)$  在包含该间断点的区间内必没有原函数  $F(x)$ .

**【注】**第二类振荡间断点是否有原函数呢? 举例说来, 对于

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

其在  $(-\infty, +\infty)$  上不连续, 它有一个第二类振荡间断点  $x = 0$ , 但是它在  $(-\infty, +\infty)$  上存

在原函数  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  即, 对于  $(-\infty, +\infty)$  上任一点都有  $F'(x) = f(x)$  成立.

综合以上几点, 可以得出重要结论: 可导函数  $F(x)$  求导后的函数  $F'(x) = f(x)$  不一定是连续函数, 但是如果有间断点, 一定是第二类间断点 (在考研的范畴内, 只能是振荡间断点).

## (2) 定积分

**定积分存在定理** 定积分的存在性, 也称之为**一元函数的(常义)可积性**. 这里的“常义”是指“区间有限, 函数有界”, 也有人称为“黎曼”可积性, 与后面要谈到的“区间无穷, 函数无界”的“反常”积分有所区别. 在本讲中所谈到的可积性都是指的常义可积性.

**【注】**事实上, 还有一个使得定积分存在的充分条件: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调, 则  $\int_a^b f(x)dx$  存在, 不过考试大纲对此没有做要求, 考生知道即可.

**【例】**在区间  $[-1, 2]$  上, 以下四个结论,

$$\textcircled{1} f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ 有原函数, 但其定积分不存在;}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 有原函数, 其定积分也存在}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 没有原函数, 其定积分也不存在}$$

$$\textcircled{4} f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 有原函数, 其定积分也存在}$$

正确结论的个数为 ( )

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

## 2. 反常积分

### (1) 无穷区间上反常积分的概念与敛散性

$$\textcircled{1} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 的定义} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

若上述极限存在, 则称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 否则称为发散.

$$\textcircled{2} \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx \text{ 的定义} \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

若上述极限存在, 则称反常积分  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  收敛, 否则称为发散.

$$\textcircled{3} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 的定义} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx$$

若右边两个反常积分都收敛, 则称反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 否则称为发散.

### (2) 无界函数的反常积分的概念与敛散性

① 若  $b$  是  $f(x)$  的唯一奇点, 则无界函数  $f(x)$  的反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

若上述极限存在, 则称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛, 否则称为发散.

② 若  $a$  是  $f(x)$  的唯一奇点, 则无界函数  $f(x)$  的反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

若上述极限存在, 则称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛, 否则称为发散.

③ 若  $c \in (a, b)$  是  $f(x)$  的唯一奇点, 则无界函数  $f(x)$  的反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

若上述右边两个反常积分都收敛, 则称反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛, 否则称为发散.

## 第三讲 高等数学的基本计算串讲

### 核心考点概述

1. 微分学的计算
2. 积分学的计算
3. 微积分在几何上的应用

### 内容展开

#### 一、一元函数微分学的基本计算

##### 1. 四则运算

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$$

$$d[f(x) \cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

$$d\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

##### 2. 复合函数求导

【例】 $y = 2^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ , 求  $y'$

## 3. 反函数求导

设函数  $y = f(x)$ ,  $f'(x) \neq 0$ , 其反函数为  $x = \varphi(y)$ , 则  $\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$

## 4. 参数方程求导

设函数  $y = y(x)$  由  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  确定,  $t$  为参数, 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

【例】设函数由  $\begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases}$  确定, 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$

## 5. 隐函数求导

方程两边分别对  $x$  求导即可, 把方程中的  $y$  看成  $f(x)$

【例】设  $y = f(x)$  是由方程  $y - x = e^{x(1-y)}$  所确定的, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right]$

## 6. 对数求导法

【例】 $y = \sqrt[5]{\frac{(x-3)^2(x+5)^3}{(x-1)^3}}$ , 求  $y'$ .

## 7. 幂指数函数求导

【例】 $y = x^{\sin x}$ , 求  $y'$ .

## 8. 高阶导数

$$(1) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2) (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

(3) 泰勒展开式

① 设  $y = f(x)$  无穷阶可导,

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

② 根据题目所给的具体函数  $y = f(x)$ , 将其展开

③ 由展开式的唯一性  $\Rightarrow$  比较①②展开式的多项式同幂次项前面的系数

$$\Rightarrow f^{(n)}(0), f^{(n)}(x_0)$$

【例】 $y = x^3 \sin x$ , 求  $y^{(6)}(0)$ .

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列



## 9. 参数方程确定的函数的二阶导数

设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  确定, 其中  $t$  是参数, 则

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \end{cases}$$

## 10. 反函数的二阶导数

在  $y = f(x)$  二阶可导的情况下, 记  $f'(x) = y'_x, \varphi'(y) = x'_y (x'_y \neq 0)$ , 则

$$\begin{cases} y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y} \\ y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^2} \cdot \frac{1}{x'_y} \end{cases}$$

## 11. 变限积分求导公式

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right) = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x)$$

## 12. 基本初等函数的导数公式

$$(c)' = 0$$

$$d(c) = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ 实常数})$$

$$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx \quad (\alpha \text{ 实常数})$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$d \sin x = \cos x dx$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$d \cos x = -\sin x dx$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$d \tan x = \sec^2 x dx$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$d \cot x = -\csc^2 x dx$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$d \sec x = \sec x \tan x dx$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$d \csc x = -\csc x \cot x dx$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$d \log_a x = \frac{dx}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$d \ln x = \frac{1}{x} dx$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$da^x = a^x \ln a dx \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$de^x = e^x dx$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$d \arctan x = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$d \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$d \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

$$\left[ \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$d \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

## 二、一元函数积分学的基本计算

### 1. 凑微分法

$$(1) \text{ 基本思想 } \int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[g(x)]d[g(x)] = \int f(u)du$$

当被积函数比较复杂时, 拿出一部分放到  $d$  后面去, 若能凑成  $\int f(u)du$  的形式, 则凑微分成功.

(2) 归纳总结凑微分的思维结构

① 熟练掌握教材中的基本积分公式及常用的凑微分公式.

② 当被积函数可分为  $f(x)g(x)$  或  $\frac{f(x)}{g(x)}$  时, 其中  $f(x)$  较复杂时, 对  $f(x)$  求导数 (或其主

要部分) 求导, 一般得到  $g(x)$  的倍数, 既可以是常数倍, 也可以是函数倍, 从而凑微分进行计算.

③ 当对  $f(x)$  求导得不到  $g(x)$  的倍数时, 考虑“被积函数的分子分母”, 同乘以或同除以一个适当的因子, 恒等变形以达到凑微分的目的. 一般而言, 因子应根据题设函数给出, 常用的有  $e^{\alpha x}$ ,  $x^\beta$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  等.

【例】求  $\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x(1 + \cos x e^{\sin x})} dx$

## 2. 换元法

(1) 基本思想  $\int f(x) dx = \int f[g(u)] d[g(u)] \Big|_{u=g^{-1}(x)} = \int f[g(u)] g'(u) du \Big|_{u=g^{-1}(x)}$

当被积函数不容易积分（比如含有根式，含有反三角函数）时，可以通过换元的方法从  $d$  后面拿出一部分放到前面来，就成为  $\int f[g(u)] g'(u) du$  的形式，若  $f[g(u)] g'(u)$  容易积分，则换元成功。

(2) 归纳总结换元的思维结构

①三角函数代换——当被积函数含有如下根式时，可作三角代换。

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin t, |t| < \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a \sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2} (x > a) \end{cases}$$

②恒等变形后作三角函数代换——当被积函数含有根式  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  时，可化为以下三种形式

$\sqrt{\varphi^2(x) + k^2}$ ,  $\sqrt{\varphi^2(x) - k^2}$ ,  $\sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$ , 再做三角代换。

③根式代换——当被积函数含有根式  $\sqrt[n]{ax+b}$ ,  $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ,  $\sqrt{ae^{bx}+c}$  等时，一般令根式

$\sqrt[n]{*} = t$ . 对既含有  $\sqrt[n]{ax+b}$ , 也含  $\sqrt[m]{ax+b}$ , 一般取  $m, n$  的最小公倍数，令  $\sqrt[n]{ax+b} = t$ .

④倒代换——当被积函数分母的幂次比分子高两次及以上时，作倒代换，令  $x = \frac{1}{t}$ .

⑤复杂函数的直接代换——当被积函数中含有  $a^x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arctan x$  等时，

可考虑直接令复杂函数  $= t$ , 值得指出的是，当  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arctan x$  与  $P_n(x)$  或  $e^{ax}$  作乘除时，优先考虑分部积分法。

【例】求  $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

### 3. 分部积分法

基本思想  $\int u dv = uv - \int v du$ ，一目了然，这个方法主要适用于“求  $\int u dv$  比较困难”，而  $\int v du$  比较容易积分的情形.

【例】计算  $\int_0^1 x \arcsin x dx$

### 4. 有理函数积分

(1) 定义 形如  $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx (n < m)$  的积分称为有理函数的积分.

(2) 方法 先将  $Q_m(x)$  因式分解，再把  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  拆成若干最简有理分式之和.

(3) 分解的基本原则

①  $Q_m(x)$  的一次因式  $(ax+b)$  产生一项  $\frac{A}{ax+b}$ ；

②  $Q_m(x)$  的  $k$  重因式  $(ax+b)^k$  产生  $k$  项，分别为  $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$ ；

③  $Q_m(x)$  的二次单因式  $px^2+qx+r$  产生一项  $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$ ；

④  $Q_m(x)$  的  $k$  重二次因式  $(px^2+qx+r)^k$  产生  $k$  项

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}.$$

【例】 $\int \frac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$  的结果中不含对数函数，则  $a, b$  应满足什么条件？

## 5. 关于定积分的计算

### ① 用好基本积分法

【例 1】设  $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ ，求  $\int_0^1 xf(x)dx$ 。

【例 2】设  $I_1 = \int_1^e \ln x dx$ ， $I_2 = \int_1^e \ln^2 x dx$ ，求  $I_2 + 2I_1$ 。

### ② 用好重要公式

【例】求  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx$ 。

【注】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的奇数} \end{cases}$

### ③ 注意识别定积分与反常积分

【例】求  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}$

### 三、应用

#### 1. 导数应用

##### ① 极值的判别

【结论】设  $f(x)$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,

但  $f^{(n)}(x_0) \neq 0, (n \geq 2)$ , 则:

当  $n$  为偶数时,  $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ 极小值} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ 极大值} \end{cases}$

【例】设  $y = y(x)$  为  $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - y' = e^{\cos x}$  满足  $y'(2) = y''(2) = y'''(2) = 0$  的解, 讨论  $x = 2$  时, 函数的性态.

##### ② 拐点的判别

【结论】设  $f(x)$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 且  $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,

但  $f^{(n)}(x_0) \neq 0, (n \geq 3)$ , 则:

当  $n$  为奇数时,  $(x_0, f(x_0))$  为曲线的拐点.

【例】设  $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ , 则其拐点为 ( )

- (A) (1,0)      (B) (2,0)      (C) (3,0)      (D) (4,0)

## ③渐近线

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , 则函数存在渐近线  $x = a$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ , 则函数存在渐近线  $y = b$ ;
- 3)  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = k \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b \end{cases}$ , 则函数存在渐近线  $y = kx + b$ .

【例】曲线  $y = \sqrt{4x^2 + x} \ln(2 + \frac{1}{x})$  的渐近线有\_\_\_\_\_条

- (A) 1          (B) 2          (C) 3          (D) 4

## ④求最值 (推广: 求值域)

若给出  $[a, b]$ , 找三类点

- 1)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_0$  (驻点)
- 2)  $f'(x)$  不存在  $\Rightarrow x_1$  (不可导点)
- 3) 端点  $a, b$

比较  $f(x_0), f(x_1), f(a), f(b)$ , 取其最小者为最小值, 最大者为最大值

【注】若给出  $(a, b)$ , 则端点考虑取极限值。

【例】求  $f(x) = e^{-x^2} \sin x^2$  的值域

## 2. 积分应用

## ①求面积

1) 直角坐标系:  $S = \int_a^b |y_2(x) - y_1(x)| dx$

2) 极坐标系:  $S = \frac{1}{2} \int_a^b |r_2^2 - r_1^2| d\theta$

②求体积

1)  $V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx$

2)  $V_y = \int_a^b 2\pi x |f(x)| dx$

【例】设曲线  $y = e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x}$  在  $x \geq 0$  的部分与  $x$  轴所围成平面区域记为  $D$ , 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体体积  $V$ .

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列



## 第四讲 高等数学的基本定理串讲

### 1. 涉及函数 $f(x)$ 的中值定理

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则

**定理 1 (有界定理)**  $|f(x)| \leq M (M > 0)$

**定理 2 (最值定理)**  $m \leq f(x) \leq M$ , 其中  $m, M$  分别为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最小值与最大值.

**定理 3 (介值定理)** 当  $m \leq \mu \leq M$  时,  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \mu$ .

**定理 4 (零点定理)** 当  $f(a) \cdot f(b) < 0$  时,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

### 2. 涉及导数 (微分) $f'(x)$ 的中值定理

**定理 5 (费马定理)**

设  $f(x)$  满足在  $x_0$  点处  $\begin{cases} (1) \text{可导,} \\ (2) \text{取极值} \end{cases}$  则  $f'(x_0) = 0$ .

**定理 6 (罗尔定理)**

设  $f(x)$  满足  $\begin{cases} (1) [a, b] \text{上连续,} \\ (2) (a, b) \text{内可导, 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使得 } f'(\xi) = 0. \\ (3) f(a) = f(b), \end{cases}$

**定理 7 (拉格朗日中值定理)**

设  $f(x)$  满足两条  $\begin{cases} (1) [a, b] \text{上连续,} \\ (2) (a, b) \text{内可导,} \end{cases}$  则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

或者写成  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**定理 8 (柯西中值定理)**

设  $f(x), g(x)$  满足  $\begin{cases} (1) [a, b] \text{上连续,} \\ (2) (a, b) \text{内可导, 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使得 } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \\ (3) g'(x) \neq 0, \end{cases}$

**定理 9 (泰勒公式)**

(1) 带拉格朗日余项的  $n$  阶泰勒公式

设  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内有  $n+1$  阶导数存在, 则对该邻域内的任意点  $x$  均有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \text{ 其中 } \xi \text{ 介于 } x, x_0 \text{ 之间.}$$

于  $x, x_0$  之间.

(2) 带佩亚诺余项的  $n$  阶泰勒公式

设  $f(x)$  在点  $x_0$  处  $n$  阶可导, 则存在  $x_0$  的一个邻域, 对于该邻域中的任一点, 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

【注 1】当  $x_0 = 0$  时的泰勒公式称为麦克劳林公式, 即

$$\textcircled{1} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$\textcircled{2} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n).$$

【注 2】几个重要函数的麦克劳林展开式

$$\textcircled{1} e^u = 1 + u + \frac{1}{2!} u^2 + \cdots + \frac{1}{n!} u^n + o(u^n).$$

$$\textcircled{2} \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(u^{2n+1}).$$

$$\textcircled{3} \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + o(u^{2n}).$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n).$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^{n-1} u^n + o(u^n).$$

$$\textcircled{6} \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + o(u^{n+1}).$$

$$\textcircled{7} (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} u^n + o(u^n).$$

【例 1】证明积分中值定理: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则至少存在  $\eta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a).$$

【例 2】设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上具有一阶连续导数,  $f(0)=0$ , 证明至少存在一点  $\xi \in [0,1]$ , 使得  $f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx$ .

【例 3】设  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的一阶导函数连续, 在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内二阶可导, 且  $f(0)=0$ ,  $f(1)=3$ ,  $f(\frac{\pi}{2})=1$ . 证明:  $\exists \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使得  $f'(\xi) + f''(\xi) \tan \xi = 0$ .

## 第五讲 微分方程

### 一、概念及其使用

1. 微分方程:  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

2. 微分方程的阶数: 方程中  $y$  的最高阶导数的次数

3. 通解: 解中所含独立常数的个数等于方程的阶数

【例】设  $y_1, y_2$  是一阶线性非齐次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解, 若常数  $\lambda, \mu$  使  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是该方程的解,  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是该方程对应的齐次方程的解, 求  $\lambda, \mu$ .

### 二、基本方程的求解

仅一阶方程.

#### ① 变量可分离型

形如:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

【例】求  $y \sin \frac{x}{2} dx - \cos \frac{x}{2} dy = 0$  的通解

## ② 齐次型

形如:  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

令  $\frac{y}{x} = u$ , 则  $y = ux$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ , 代入得

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

【例】求  $xdy = y(\ln y - \ln x)dx$  的通解

## 3. 一阶线性型

形如:  $y' + p(x)y = q(x)$

两边同乘积分因子  $e^{\int p(x)dx}$  得

$$e^{\int p(x)dx} (y' + p(x)y) = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

两边积分得

$$e^{\int p(x)dx} y = \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C \right]$$

【例】求  $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$  的通解.

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列

## 第六讲 多元函数微积分初步

### 一、多元函数微分学

#### 1. 极限的存在性

**定义 1** 设二元函数  $f(x, y)$  定义在区域  $D$  上, 点  $P_0(x_0, y_0)$  在  $D$  内或者在  $D$  的边界上 (这样的点严格来说叫做聚点). 如果存在常数  $A$ , 对于任给的正数  $\varepsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 只要点  $P(x, y) \in D$  满足  $0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ , 恒有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$  成立, 则称  $A$  为函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限. 记为  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ . 该极限也称为二重极限.

**【例】**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

#### 2. 连续性

如果  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ , 则称  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续.

**【注】** 若上式不成立  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  为不连续点, 但不讨论间断类型.

#### 3. 偏导数存在性

**定义 2** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数, 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z'_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f'_x(x_0, y_0).$$

于是,

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

【例】设  $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^6}}$ , 求  $f'_x(0, 0)$ ,  $f'_y(0, 0)$ .

#### 4. 可微

定义 3 如果函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全增量  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$

其中,  $A, B$  不依赖于  $\Delta x, \Delta y$  而仅与  $x, y$  有关, 则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微, 而称

$A\Delta x + B\Delta y$  为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的全微分, 记作  $dz$ , 即  $dz = A\Delta x + B\Delta y$ .

【例】设  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ,

求  $f'_x(0, 0)$ ,  $f'_y(0, 0)$ , 并讨论  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处是否可微.

#### 5. 多元微分法

(1) 链式求导规则:

① 复合函数的中间变量均为一元函数的情形.

设  $z = f(u, v)$ ,  $u = \varphi(t)$ ,  $v = \psi(t)$ , 则  $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ , 且  $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$ .

② 复合函数的中间变量均为多元函数的情形.

设  $z = f(u, v)$ ,  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$ , 则  $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ , 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

③ 复合函数的中间变量既有一元函数, 又有多元函数的情形.

$z = f(u, v)$ ,  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(y)$ , 则  $z = f[\varphi(x, y), \psi(y)]$ , 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dy}$$

(2) 无论  $z$  对谁求导, 也无论  $z$  已经求了几阶导, 求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构.

(3) 注意书写规范

【例】设  $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

## 二、二重积分

1. 概念 设二元函数  $f(x, y)$  定义在有界闭区域  $D$  上, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

注 (1) 将  $D$  无限分割的  $[\Delta \sigma_i > 0]$ ,  $\lambda$  为所有  $\Delta \sigma_i$  的直径的最大值, 强调该极限与对区域  $D$  的分割方式无关;

(2) 其几何背景是以  $f(x, y)$  为曲顶、有界闭区域  $D$  为底的曲顶柱体的体积:

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

(3) (数学一二要求) 其物理背景是以  $f(x, y)$  为面密度的平面区域  $D$  的质量:

$$M = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

(4) 要了解二重积分的存在性, 也称为二元函数的可积性. 设平面有界闭区域  $D$  由一



条或者几条逐段光滑闭曲线所围成, 当  $f(x, y)$  在  $D$  上连续时, 或者当  $f(x, y)$  在  $D$  上有界, 且在  $D$  上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的, 则它在  $D$  上可积, 也就是二重积分存在.

## 2. 二重积分的对称性

引例

$$\iint_{D_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1} (2x^2 + 3y^2) dx dy \stackrel{?}{=} \iint_{D_1: \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} \leq 1} (2y^2 + 3x^2) dy dx$$

若把  $x$  与  $y$  对调, 区域  $D$  不变 (或称区域  $D$  关于  $y = x$  对称), 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dy dx$$

这就是轮换对称性.

【例】设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $f(x)$  为  $D$  上的正值连续函数,  $a, b$  为

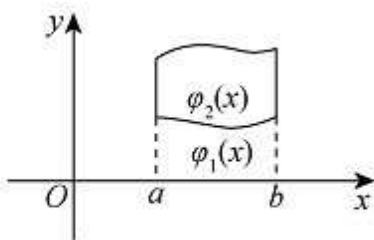
常数, 求  $I = \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma$ .

## 3. 计算

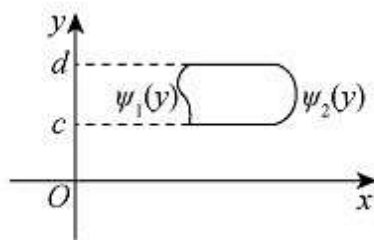
(1) 直角坐标系下的算法

①  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  其中  $D$  为  $X$  型区域:  $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ;

②  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$  其中  $D$  为  $Y$  型区域:  $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ .



(1)



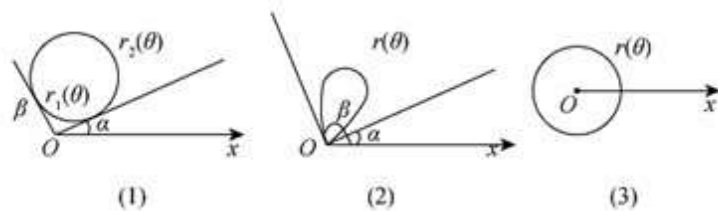
(2)

(2) 极坐标系下的算法

$$\textcircled{1} \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (\text{极点 } O \text{ 在区域 } D \text{ 外部})$$

$$\textcircled{2} \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (\text{极点 } O \text{ 在区域 } D \text{ 内部})$$

$$\textcircled{3} \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (\text{极点 } O \text{ 在区域 } D \text{ 边界上})$$



【例】计算  $I = \iint_D \sqrt{1-r^2} \cos 2\theta r^2 \sin \theta dr d\theta$ , 其中  $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$ .

新东方在线

www.koolearn.com

网络课堂电子教材系列