Подвійний підрахунок і усереднення

М. В. Лешко

Багато аргументів, що використовують ймовірнісний метод в скінченному рівноймовірному виді є завуальованим подвійним підрахунком. У цій оглядовій статті ми покажемо, як поєднати аналітичну інтуїцію з комбінаторними задачами.

Зміст

§1. Середнє значення

1.1. Мотивація

(1.1.1) (Комбінаторна мотивація) Нехай X — скінченна множина, $f : X \to \mathbf{C}$ — якась функція. Суму $\sum_{x\in X} f(x)$ можна поділити на $|X|$ і переписати як $1/|X| \sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X} f(x)/|X|$, тобто надати кожному елементу (простору) X ймовірність $1/|X|$ і порахувати *середнє значення* функції f по всьому (простору) X. Таким чином, маючи функції $f : X \to \mathbf{C}$ ми ставимо їм у відповідність якесь число з $\mathbf{C}$. Відповідно функції можна розбити на $\mathbf{C}$ класів еквівалентності і працювати всередині них. Знаходження декількох функцій з цікавою інтерпритацією в одному класі еквівалентності називається *подвійним підрахунком.*

(1.1.2) (Аналітична мотивація) Маючи послідовність чисел (дійсних або комплексних) $a_1, \ldots, a_N$ можемо знайти середнє значення $a = (a_1 + \cdots + a_N)/N$ і сказати, що це *найбільш типове число* серед усіх, які там є. Далі можемо говорити про ε-типові числа x такі, що $|x - a| < \varepsilon$. Цю ситуацію можна узагальнити на довільні об'єкти: $A_1, \ldots, A_N$ — послідовність об'єктів, A — найбільши типовий (середній) об'єкт по відношенню до них. Об'єкт X називається ε-типовим, якщо він по якомусь параметру ε-близький до середнього. Таким чином, ми можемо розділити будь-який об'єкт на три частини: структуровану (типову), псевдовипадкову і помилкову. Абстрактно і детально можна почитати у відповідній статті Тао.

1.2. Оператор середнього значення і його елементарні властивості

(1.2.1)

Визначення 1.1. *Нехай X — скінченна множина, $f : X \to \mathbf{R}$ — функція на X.* ***Середнім значенням** f **по** X називається величина*

$$\mathbf{E}_{x \in X} f(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x),$$

але якщо зрозуміло з контексту будемо писати $\mathbf{E}_x f(x)$ або навіть $\mathbf{E} f$; з багатьма змінними будемо робити так само:

$$\mathbf{E}_{(x_1, \ldots, x_N) \in X_1 \times \cdots \times X_N} f(x_1, \ldots, x_N) = \mathbf{E}_{x_1, \ldots, x_N} f(x_1, \ldots, x_N)$$

(1.2.2) Одразу маємо декілька простих властивостей оператора $\mathbf{E}$.

Твердження 1.1. *Для $|X| < \infty$ та $f : X \to \mathbf{R}$ має місце*
1. $\mathbf{E}_{x \in X} c f(x) = c \mathbf{E}_{x \in X} f(x)$
2. $\mathbf{E}_{x \in X}(f(x) + g(x)) = \mathbf{E}_{x \in X} f(x) + \mathbf{E}_{x \in X} g(x)$
3. $\mathbf{E}_{(x,y) \in X \times Y} f(x) g(y) = (\mathbf{E}_{x \in X} f(x)) \cdot (\mathbf{E}_{y \in Y} f(y))$.
4. $\mathbf{E}_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) = \mathbf{E}_{x \in X} \mathbf{E}_{y \in Y} f(x, y) = \mathbf{E}_{y \in Y} \mathbf{E}_{x \in X} f(x, y)$
5. $\mathbf{E}_{x \in X} f(x) = |X_1|/|X| \mathbf{E}_{x_1 \in X_1} f(x_1) + |X_2|/|X| \mathbf{E}_{x_2 \in X_2} f(x_2)$ *для будь-якого поділу* $X = X_1 \sqcup X_2$.
6. $\exists x_0 \in X : f(x_0) \geq \mathbf{E}_{x \in X} f(x)$ *та* $\exists x_0 \in X : f(x_0) \leq \mathbf{E}_{x \in X} f(x)$.

Властивості 1 та 2 в сумі називаються **лінійністю**, властивість 3 будемо називати **розкладанням на множники**, властивість 4 — аналог **теореми Фубіні**

Основна ідея — переписати все через суми. Доведемо, наприклад, властивість 5 і 6.

$$\mathbf{E}_{x\in X} f(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x) = \frac{1}{|X|}(\sum_{x_1\in X_1} f(x_1) + \sum_{x_2\in X_2} f(x_2)) =$$
$$\frac{1}{|X|}\sum_{x_1\in X_1} f(x_1) + \frac{1}{|X|}\sum_{x_2\in X_2} f(x_2) =$$
$$\frac{|X_1|}{|X|}\cdot\frac{1}{|X_1|}\cdot\sum_{x_1\in X_1} f(x_1) + \frac{|X_2|}{|X|}\cdot\frac{1}{|X_2|}\sum_{x_2\in X_2}\sum_{x_2\in X_2} f(x_2) =$$
$$\frac{|X_1|}{|X|}\mathbf{E}_{x_1\in X_1} f(x_1) + \frac{|X_2|}{|X|}\mathbf{E}_{x_2\in X_2} f(x_2).$$

Остання випливає з того, що $\min_{x\in X} f(x) \le \frac{1}{N}\sum_{x\in X} f(x) \le \max_{x\in X} f(x)$

1.3. Перший приклад застосування Продемонструємо використання щойно введеного позначення на наступному прикладі.

Теорема 1.1. *Нехай $v_1, \dots, v_N$ — вектори в $\mathbf{R}^n$ такі, що $|v_1| = \dots = |v_N| = 1$. Тоді існують знаки $C_i \in \{-1, 1\}$ такі, що*

$$|C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_N v_N| \ge \sqrt{N}$$

Доведення. Розглянемо середнє значення квадрату довжини вектора $C_1 v_1 + \dots + C_N v_N$ по всім можливим комбінаціям знаків і скористаємось тим, що $|v|^2 = \langle v, v\rangle$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток векторів в $\mathbf{R}^n$.

$$\mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N}|C_1 v_1 + \dots + C_N v_N|^2 = \mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N}\left(\sum_{1\le i\le N} C_i^2 (v_i\cdot v_i) + \sum_{i\ne j} C_i C_j (v_i \cdot v_j)\right)$$

Скористуємось лінійністю і тим, що $v_i \cdot v_i = |v_i|^2 = 1$

$$\mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N}|C_1 v_1 + \dots + C_N v_N|^2 = N + \mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N}\sum_{i\ne j} C_i C_j (v_i\cdot v_j)$$

Зауважимо, що другий доданок дорівнює нулю. Дійсно,

$$\mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N}\sum_{i\ne j} C_i C_j (v_i\cdot v_j) = \sum_{i\ne j}\mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N\setminus C_i,C_j}\mathbf{E}_{C_i,C_j} C_i C_j (v_i\cdot v_j) =$$
$$\sum_{i\ne j}(v_i\cdot v_j)\mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N\setminus C_i,C_j}\mathbf{E}_{C_i,C_j} C_i C_j = \sum_{i\ne j}\mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N\setminus C_i,C_j} 0 = 0.$$

Тобто,

$$\mathbf{E}_{C_1,\dots,C_N}|C_1 v_1 + \dots + C_N v_N|^2 = N$$

Отже, за властивістю 6 існує комбінація знаків така, що

$$|C_1 v_1 + \dots + C_N v_N|^2 \ge N$$

звідки слідує твердження. $\square$

§2. Технічні засоби

2.1. (f,ε)-типовість та варіація

(2.1.1)

Визначення 2.1. *Нехай $f : X \to \mathbf{R}$ — величина, що якось характеризує об'єкти скінченної множини X. Тоді об'єкт $x \in X$ називається (f,ε)-**типовим**, якщо $|f(x) - \mathbf{E}f| < \varepsilon$. Множину елементів X, що є (f,ε)-типовими будемо позначати $Typical_X(f,\varepsilon)$. В залежності від контексту, це може бути і кількість таких елементів, а також може опускатись з індексу множина X.*

(2.1.2)

Визначення 2.2. *Нехай $f : X \to \mathbf{R}$ для скінченної множини X. **Варіація** f це*

$$Var(f) = \mathbf{E}_{x\in X}(f(x) - \mathbf{E}f)^2$$

або еквівалентно

$$Var(f) = \mathbf{E}_x f(x)^2 - (\mathbf{E}_x f(x))^2.$$

Останнє зазвичай використовується частіше.

Визначення легко зрозуміти: $Var(f)$ вимірює наскільки сильно f флуктує (змінюється) відносно свого середнього значення.

Приклад 2.1. *Нехай $X = \{1,\dots,2N\}$ і $f(n) = (-1)^n$. Тоді $Var(f) = \mathbf{E}_n((-1)^n)^2 - (\mathbf{E}_n(-1)^n)^2 = 1$. Інтуїтивно зрозуміло, що функція $(-1)^n$ при однаковій кількості парних та непарних n змінюється відносно свого середнього значення 0 завжди на одиницю (по модулю). При $X = \{1,\dots,2N+1\}$ середнє змінюється і можна порахувати, що $Var(f) = 1 - 1/(2N+1)^2$ (змінюється менше, бо одне з значень зустрічаюється частіше, воно підтягує середнє значення, і відповідно флуктуація (варіація) функції трішки зменшується).*

Нехай $X = \{1,\dots,2N\}$ і $f(n) = n(-1)^n$. Інтуїтивно, така функція має мати велику варіацію. Дійсно,

$$Var(f) = \mathbf{E}n^2 - (\mathbf{E}n(-1)^n)^2 = \frac{1}{2N}\frac{2N(2N+1)(4N+1)}{6} - \frac{1}{2N}\frac{N}{2} = O(N^2).$$

2.2. Нерівності Маркова та Чебишева

(2.2.1) Позначення, введені в підрозділі 2.1 дає можливість застосування *методу моментів*. Ми наведемо лише базові результати.

(2.2.2)

Теорема 2.1 (Нерівність Маркова)**.** *Нехай $f : X \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ (X — скінченна множина). Тоді,*

$$\#\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \leq \frac{1}{a} \sum_x f(x)$$

Нерівність Маркова дає оцінку на кількість великих значень певної величини. Зокрема, ми можемо скористатись нею для оцінки кількості ε-типових значень.

Теорема 2.2 (Нерівність Чебишова)**.** *Нехай $f : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина). Тоді кількість $Typical_X(f, \varepsilon)$ (f, ε)-типових об'єктів в X обмежено снизу:*

$$Typical_X(f, \varepsilon) \geq |X| \left(1 - \frac{Var(f)}{\varepsilon^2}\right)$$

Іншими словами, кількість елементів X, таки, що $f(x)$ стає ε-близьким до $\mathbf{E}f$ обмежено снизу

$$\#\Big\{x \in X : |f(x) - \mathbf{E}_x f(x)| < \varepsilon\Big\} \geq |X| \left(1 - \frac{Var(f)}{\varepsilon^2}\right)$$

2.3. Приклад застосування

(2.3.1) Застосуємо нерівність Чебишова і (f, ε)-типовість для доведення наступної теореми.

Теорема 2.3. *Якщо існує K-елементна підмножина $\{1, \ldots, N\}$ з попарно різними сумами підмножин, то $n \geq (3/8)2^k/\sqrt{k}$.*

Доведення. Нехай ця множина це $X = \{x_1, \ldots, x_K\}$. Розглянемо множину 2^X і функцію $sum : 2^X \to \mathbf{N}$, що обчислює суми підмножин. Поставимо у відповідність кожній підмножині $X^- \in 2^X$ послідовність $I_1, \ldots, I_K$ ($I_i \in \{0, 1\}$), де I_i дорівнює 1, якщо x_i присутнє у підмножині X^- і 0 інакше. Тоді,

$$sum(A^-) = f(I_1, \ldots, I_K) = I_1 x_1 + I_2 x_2 + \cdots + I_K x_K$$

сума підмножини A^- представленої характеристичною послідовністю $(I_1, \ldots, I_K)$.

Обчислимо середнє значення f:

$$\mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K} \sum_i I_i x_i = \sum_i \mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K} I_i x_i = \sum_i \mathbf{E}_{I_i} I_i x_i = \sum_i x_i/2 = \frac{x_1 + \cdots + x_K}{2}$$

На другому кроці, обчислимо варіацію f. Для того щоб це зробити нам потрібно обчислити

$$\mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K}(I_1 x_1 + \cdots + I_k x_K)^2 = \mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K}(I_1^2 x_1^2 + \cdots + I_k^2 x_K^2) + \mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K} \sum_{i \neq j} I_i I_j x_i x_j$$

Оскільки $I_i^2 = I_i$ маємо

$$\mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K}(I_1^2 x_1^2 + \cdots + I_k^2 x_K^2) = \frac{x_1^2 + \cdots + x_K^2}{2}$$

Продовжуємо з другим доданком

$$\mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K} \sum_{i \neq j} I_i I_j x_i x_j = \sum_{i \neq j} x_i x_j \mathbf{E}_{I_1,\ldots,I_K \setminus I_i, I_j} \mathbf{E}_{I_i, I_j} I_i I_j = 1/4 \sum_{i \neq j} x_i x_j$$

Отже,

$$Var(f) = \frac{x_1^2 + \cdots + x_K^2}{2} + \frac{\sum_{i \neq j} x_i x_j}{4} - \frac{(x_1 + \cdots + x_K)^2}{4} = \frac{x_1^2 + \cdots + x_K^2}{2}.$$

Зауважимо, що $x_1, \ldots, x_K \in \{1, \ldots, N\}$ тому $x_i^2 \leq N^2$. Маємо,

$$Var(f) \leq N^2 K/2.$$

Застосуємо теорему 2.2

$$Typical_{I_1,\ldots,I_K}(f, N\sqrt{K}) \geq 2^K \left(1 - \frac{N^2 K}{4\varepsilon^2}\right)$$

Щоб позбавитись від виразу в дужках візьмемо $\varepsilon = \sqrt{N^2 K}$

$$Typical_{I_1,\ldots,I_K}(f, N\sqrt{K}) \geq 2^K \cdot \frac{3}{4}.$$

З іншої сторони, кожна підмножина має унікальну суму, тому

$$Typical_{I_1,\ldots,I_K}(f, N\sqrt{K}) \leq 2N\sqrt{K}.$$

Порівнюючи ці дві нерівності (застосовуючи *подвійний підрахунок*)

$$\frac{3}{4} 2^K \leq 2N\sqrt{K}$$

$$N \geq \frac{3}{8} 2^K / \sqrt{K}.$$

□

2.4. Скалярний добуток, L^p норми та нерівності

(2.4.1) Для повноти далі напеведено певні базові речі з аналізу.

Визначення 2.3. ***Скалярним добутком*** *$\langle f, g \rangle$ двох функцій $f, g : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина) називається $\mathbf{E}_{x \in X} f(x) g(x)$.*

Твердження 2.1. *Нехай $f, f_0, g : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина) і $C \in \mathbf{R}$ Тоді*

1. $\langle f, 1 \rangle = \mathbf{E}_{x \in X} f(x)$,
2. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,
3. $\langle Cf, g \rangle = \langle f, Cg \rangle = C \langle f, g \rangle$,
4. $\langle f + f_0, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f_0, g \rangle$.

(2.4.2)

Визначення 2.4. *Нехай $f : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина), тоді p-**нормою** називається*

$$\|f\|_p = (\mathbf{E}_{x\in X}|f(x)|^p)^{1/p}.$$

Якщо $p = \infty$, то

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in X}|f(x)|.$$

Варто зазначити, що часто будемо користуватись тим, що $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle$.

(2.4.3) Доведемо класичним аргументом нерівність Коші-Шварца.

Теорема 2.4. *Для будь-яких функцій $f, g : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина) має місце*

$$\|f\|_2\|g\|_2 \geq \langle f, g\rangle.$$

Доведення. Піднесемо у квадрат обидві частини.

$$\langle f, g\rangle^2 \leq_? \|f\|_2^2\|g\|_2^2$$

і скористуємось тим, що $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle$ щоб переписати як

$$\langle f, g\rangle^2 - \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle \leq_? 0$$

Щоб перетворити ліву частиву в дискримінант помножимо і поділимо на 4,

$$\langle f, g\rangle^2 - 4\langle f, f\rangle\frac{\langle g, g\rangle}{4} \leq_? 0$$

Квадратний тричлен, що відповідає цьому дискримінанту це

$$\langle f, f\rangle u^2 + \langle f, g\rangle u + \langle g, g\rangle/4$$

Розпишемо скалярні добутки по визначенню

$$\left(\mathbf{E}_{x\in X}f(x)^2\right)u^2 + \left(\mathbf{E}_{x\in X}f(x)g(x)\right)u + \left(\mathbf{E}_{x\in X}g(x)^2\right)/4$$

Занесемо u^2, u та $1/4$ всередину середніх значень

$$\mathbf{E}_{x\in X}(uf(x))^2 + \mathbf{E}_{x\in X}uf(x)g(x) + \mathbf{E}_{x\in X}(g(x)/2)^2$$

$$\mathbf{E}_{x\in X}(uf(x))^2 + uf(x)g(x) + (g(x)/2)^2$$

$$\mathbf{E}_{x\in X}(uf(x) + g(x)/2)^2$$

Останній вираз очевидно невід'ємний. Функції під квадратами лінійні, отже є максимум одне значення в якому досягається нуль. Отже, у квадратного тричлена максимум один корінь, а відповідно дискримінант недодатний. $\square$

Наслідок 2.1. *Для будь-якого $f : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина) має місце*

$$|\mathbf{E}_x f(x)|^2 \leq \mathbf{E}_x |f(x)|^2$$

Доведення. За нерівністю Коші-Шварца застосованої до f та 1,

$$\mathbf{E}_{x \in X} f(x) = \langle f, 1 \rangle \leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \left(\mathbf{E}_{x \in X} |f(x)|^2\right)^{1/2}$$

□

2.5. Нерівність Гельдера Узагальнимо нерівність Коші-Шварца.

Теорема 2.5. *Для функцій $f, g : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина) та $p, q \geq 1$ таких, що $1/p + 1/q = 1$ має місце*

$$\|f\|_p \|g\|_q \geq \langle f, g \rangle.$$

Нерівність Коші-Шварца це випадок $p = q = 1/2$.

Доведення. Поділимо все на ліву частину,

$$\langle f/\|f\|_p, g/\|g\|_q \rangle \leq 1.$$

Позначимо ці 'нормалізовані' функції, як F та G; зауважимо, що

$$\|F\|_p = (\mathbf{E}_x |f(x)|^p / \|f\|_p^p)^{1/p} = (\mathbf{E}_x |f(x)|^p)^{1/p} / \|f\|_p = 1.$$

$$\|G\|_q = \cdots = 1.$$

Замітимо, що для всіх $a, b > 0$ та $p, q > 1$ таких, що $1/p + 1/q = 1$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Дійсно, через випуклість

$$\ln(a/p + b/q) \geq \ln a/p + \ln b/q = \ln(a^{1/p} b^{1/q})$$

Зауважимо, що

$$|F(x)G(x)| \leq \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q}$$

$$\mathbf{E}_x |F(x)G(X)| \leq \frac{\mathbf{E}_x |F(x)|^p}{p} + \frac{\mathbf{E}_x |G(x)|^q}{q} = \frac{\|F\|_p^p}{p} + \frac{\|G\|_q^q}{q} = 1.$$

Залишається лише довести прости випадок $p = 1, q = \infty$. □

(2.5.1) Мають місце й інші цікаві факти з аналізу. Продемонструємо аналогії, наприклад, з теоремою Фубіні.

Теорема 2.6. *Нехай $f : X \to \mathbf{R}$ (X — скінченна множина). Припустимо, що для деяких $0 < p < q < \infty$ має місце $\|f\|_p, \|f\|_q \leq 1$. Тоді для будь-якого r в (p, q) також має місце $\|f\|_r \leq 1$.*

Доведення. Легко показати нерівність $|f|^r \leq |f|^p + |f|^q$ подивившись на випадки $f(x) > 1$ та $f(x) < 1$ та $f(x) = 1$. Але тоді отримаємо лише $\|f\|_r \leq 2$. Доведемо, що $\|f\|_r^M \leq 2$ для будь-якого натурального M і перейдемо до границі при $M \to \infty$.

Застосуємо tensor power trick. Розглянемо функцію $f^{\otimes M}(x_1, \ldots, x_M) = f(x_1) \ldots f(x_M)$. Тепер

$$\|f^{\otimes M}\|_p^p = \mathbf{E}_{x \in X^M} |f^{\otimes M}|^p = \mathbf{E}_{x_1, \ldots, x_M \in X} |f(x_1)|^p \ldots |f(x_M)|^p = (\mathbf{E}|f|^p)^M \leq 1;$$

так само отримуємо для $\|f^{\otimes M}\|_q^q \leq 1$. Тому, аналогічно до початку доведення, маємо, що $|f^{\otimes M}(x)|^r \leq |f^{\otimes M}(x)|^p + |f^{\otimes M}(x)|^q$,

$$\mathbf{E}|f^{\otimes M}|^r \leq \mathbf{E}|f^{\otimes M}|^p + \mathbf{E}|f^{\otimes M}|^q \leq 2.$$

Але, переписуючи

$$(\mathbf{E}|f|^r)^M = \mathbf{E}|f^{\otimes M}|^r \leq 2$$

і переходячи до границі при $M \to \infty$ маємо результат. □

§3. Індикатори

3.1. Індикаторні функції

(3.1.1) Перейдемо до комбінаторики. Кожну скінченну множину можна розцінювати як підмножину $\{1, \ldots, N\}$ для певного достатньо великого N.

(3.1.2)

Визначення 3.1 (Індикаторна функція)**.** *Нехай $X \subset \{1, \ldots, \mathbf{N}\}$. Тоді **індикаторною функцією** X називаєтьcя функція $1_X : \{1, \ldots, N\} \to \{0, 1\}$ така, що*

$$1_X(n) = \begin{cases} 1, & n \in X \\ 0, & n \notin X. \end{cases}$$

(3.1.3)

Визначення 3.2 (Щільність)**.** ***Щільність*** *підмножини $X \subset \{1, \ldots, N\}$ це таке число δ таке, що $|X| = \delta N$.*

Визначення 3.3 (Збалансована індикаторна функція)**.** *Нехай $X \subset \{1, \ldots, N\}$, а 1_X — індикаторна функція підмножини X. Тоді,* ***збалансованою індикаторною функцією*** *(або скорочено збалансованим індикатором) називається*

$$\mathcal{I}_Y(x) := 1_Y(x) - \delta,$$

де δ (таке, що $|X| = \delta N$) — щільність X в $\{1, \ldots, N\}$.

3.2. Властивості індикаторів

(3.2.1) Деякі з властивостей індикаторів зібрані в наступній теоремі. Доведення тривіальні.

Теорема 3.1. *Нехай A та B — підмножини $\{1, \ldots, N\}$.*

1. $\mathbf{E}_x 1_A(x) = |Y|/|X|$ *(середнє по індикатору — щільність).*
2. $\mathbf{E}_x \mathcal{I}_A(x) = 0$ *(середнє по збалансованому індикатору — 0).*
3. $|A \cap B|/|X| = \langle 1_A, 1_B \rangle$ *(щільність перетину — скалярний добуток індикаторів).*
4. *Якщо* $|A| = |B| = \delta N$ *then* $\langle \mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B \rangle = \langle 1_A, 1_B \rangle - \delta^2 = \frac{1}{N}(|A \cap B| - \delta^2 N)$.
5. *Якщо* $|A| = \delta N$ *то* $\|\mathcal{I}_A\|_2^2 = \delta(1 - \delta)$.

§4. Комбінаторні застосування

4.1. Існує розбиння на дві долі з щільністю 1/2

Теорема 4.1. *Нехай G — граф з m ребрами. Тоді існує розбиття $A \sqcup B$ (кожна вершина міститься рівно в одній множині) таке, що існує є хоча б $m/2$ ребер (a, b) таких, що $a \in A$ і $b \in B$.*

Доведення. Нехай $B = V(G) \setminus A$. Нехай $e(U, V)$ — це кількість ребер (u, v) таких, що $u \in U$ та $v \in V$. Нехай $e(A, B) = m - e(A, A) - e(B, B)$. Замітимо, що

$$\mathbf{E}_{A \subset V}(m - e(A, A) - e(V \setminus A, V \setminus A)) = m - 2\mathbf{E}_{A \subset V} e(A, A).$$

Розглянемо праву частину

$$\mathbf{E}_{A \subset V} e(A, A) = \mathbf{E}_{A \subset V} \sum_{(a,b) \in E} 1_A(a) 1_A(b) = \sum_{(a,b) \in E} \mathbf{E}_{A \subset V} 1_A(a) 1_A(b) =$$
$$= \sum_{(a,b) \in E} \mathbf{E}_{A \subset V; a,b \in A} 1.$$

Проте, оскільки рівно дві вершини A визначені (в найправішій частині) ми можемо обчислити кількість таких підмножин: 2^{N-2}, де N — кількість вершин.

$$\mathbf{E}_{A \subset V} e(A, A) = \sum_{(a,b) \in E} \frac{2^{N-2}}{2^N} = m/4$$

Тому

$$\mathbf{E}_{A\subset V} e(A,A) = m/2.$$

Існує підмножина $A \subset V$ така, що $e(A,A) \geq m/2$; це завершує доведення. $\square$

Інше доведення базується на тому, що починаючи з довільного розбиття ми переносимо вершинки з однієї половинки до іншої, потрошки збільшуючи кількість ребер між цими частинками.

4.2. Системи множин з маленикими перетинами

Теорема 4.2 (Множини щільності 1/2 з маленькими перетинами)**.** *Нехай $A_1, \ldots, A_M$ — підмножини $\{1, \ldots, N\}$ розміру $N/2$. Припустимо, що $|A_i \cap A_j| \leq (1/4 - C)N$ для всіх $i \neq j$. Тоді існує верхня оцінка на M, що залежить лише на C, більш точно $M \leq 1 + 1/(4C)$.*

Доведення. Уведемо збалансовані індикатори $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_M$ цих множин. Тоді

$$\|\mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_M\|_2^2 \geq 0$$

З іншої сторони,

$$\|\mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_M\|_2^2 = \langle \mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_M, \mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_M \rangle = \sum_{1\leq i\leq M} \|\mathcal{I}_i\|_2^2 + \sum_{i\neq j} \langle \mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j \rangle$$

За властивостями індикаторів маємо, що

$$\|\mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_M\|_2^2 = MN/4 + \sum_{i\neq j} (|A_i \cap A_j| - N/4)$$

За припущеннями ми можемо оцінити

$$0 \leq \|\mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_M\|_2^2 \leq MN/4 + M(M-1)((1/4 - C)N - N/4) = NM/4 - M(M-1)CN$$

Відповідно, $1/4 \geq (M-1)C$ та $M \leq 1 + 1/(4C)$. $\square$

Можна узагальнити цю теорему. Попередню теорему ми отримуємо з наступної взявши оптимальну константу $\delta = 1/2$.