Esempio: Un programma consiste di due moduli. Il numero di errori X nel primo modulo e il numero di errori Y nel secondo modulo hanno distribuzione congiunta: $p_{X,Y}(0,0) = p_{X,Y}(0,1) = p_{X,Y}(1,0) = 0.2$, $p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(1,2) = p_{X,Y}(1,3) = 0.1$, $p_{X,Y}(0,2) =$ [redacted] $= 0.05$.

$X=x$ \ $Y=y$	0	1	2	3	$p_X(x)$ $\mathbb{P}[X=x]$
0	0.2	0.2	0.05	0.05	0.5
1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.5
$p_Y(y) = \mathbb{P}[Y=y]$	0.4	0.3	0.15	0.15	1

→ SE I POSSIBILI VALORI DI X SONO $\{0,1\}$

→ E " " " " Y " $\{0,1,2,3\}$

ALLORA IL SUPPORTO DEL VETTORE CASUALE (X,Y) SARÀ DATO DA $\{(x,y) : x \in \{0,1\},\ y \in \{0,1,2,3\}\}$

SAPPIAMO CHE

$$\boxed{1 = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{3} p_{XY}(x,y)} = 0.2 + 0.2 + 0.05 + p_{XY}(0,3) + 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.1$$

$$= 0.95 + p_{XY}(0,3)$$

$$\Rightarrow p_{XY}(0,3) = 0.05$$

- Probabilità di 1 errore al 1° modulo e nessuno al secondo
  - $\mathbb{P}[X=1, Y=0] = p_{XY}(1,0) = 0.2$
- Probabilità di 1 errore nel 1° modulo
  - $\mathbb{P}[X=1] = p_X(1) = 0.5$
- Probabilità di 0 errori nel 2° modulo
  - $\mathbb{P}[Y=0] = 0.4$

- Distribuzione del numero di errori nel 1° modulo

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{se } x=0 \\ 0.5 & \text{se } x=1 \end{cases}$$

$X \sim UD\{0,1\}$

$X \sim Ber(0.5)$

$X \sim Bin(1, 0.5)$

	$x=0$	$x=1$
$p_X(x)$	0.5	0.5

- Distribuzione del numero di errori nel 2° modulo

	0	1	2	3
$p_Y(y)$	0.4	0.3	0.15	0.15

- Distribuzione del numero TOTALE di errori

$W = X + Y$

Qual è la prob. di avere un totale di 3 errori?

$\mathbb{P}[W=3] = p_W(3) = 0.15$

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4

somma $w = x+y$

SUPPORTO DI W

$[W=1] = [X=0, Y=1] \cup [X=1, Y=0]$

$\mathbb{P}[W=1] = \mathbb{P}[X=0, Y=1] + [X=1, Y=0]$

	0	1	2	3	4
$p_W(w)$	$p_W(0) = p_{X,Y}(0,0) = 0.2$	$p_W(1) = p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,0) = 0.4$	0.15	0.15	0.1

Esempio: Il numero di errori in un sistema si può modellare con una distribuzione di Poisson di parametro 15. Ogni errore è fatale con probabilità 0.2. Qual è la distribuzione congiunta del numero di errori e il numero di errori fatali? Qual è la distribuzione marginale del numero di errori fatali?

X $\quad$ Y

$Y \sim Pois(\lambda = 15)$

DISTRIB. MARGINALE DI Y

$$p_Y(y) = \frac{15^y e^{-15}}{y!}$$

SUPPORTO DI Y

$y \in \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$

SE CI FOSSERO $Y = 10$ ERRORI NEL SISTEMA OGNUNO DI LORO SAREBBE FATALE CON PROB. $p = 0.2$

IN QUESTO CASO

$$\mathbb{P}[X=3 \mid Y=10] = \binom{10}{3} 0.2^3 (1-0.2)^{10-3}$$

IN GENERALE, SE $Y = y$ ALLORA $X \mid Y=y \sim Bin(y, 0.2)$

$$\mathbb{P}[X=x \mid Y=y] = p_{X|Y}(x|y) = \binom{y}{x} 0.2^x (1-0.2)^{y-x}$$

$$p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \mathbb{P}[X=x \mid Y=y]\,\mathbb{P}[Y=y]$$
$$= p_{X|Y}(x|y)\, p_Y(y)$$

$$p_{X,Y}(x,y) = \binom{y}{x} 0.2^x\, 0.8^{y-x} \frac{15^y e^{-15}}{y!}$$

SICCOME QUESTA FUNZIONE È IL PRODOTTO DELLA MARGINALE E LA CONDIZIONATA SAPPIAMO CHE DEVE ESSERE UNA FUNZIONE DI PROBABILITÀ VALIDA. INFATTI LO SAREBBE PER QUALSIASI VALORE DI $\lambda > 0$, E QUALSIASI $p \in (0,1)$

$$\Rightarrow \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = 1$$

QUAL È LA MARGINALE DI X? per $x \in \{0,1,2,\dots\}$

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$$

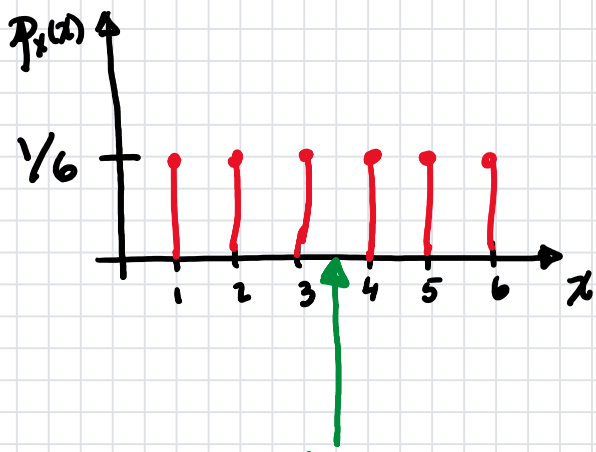
USANDO BAYES POSSIAMO TROVARE

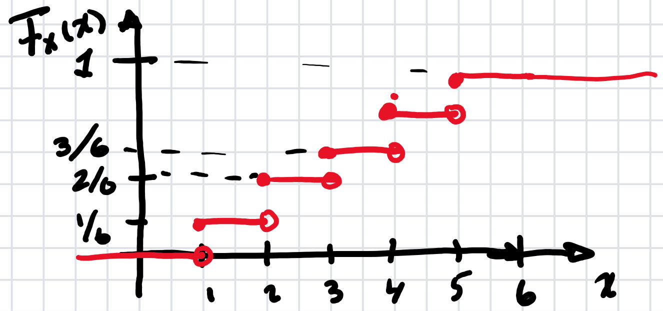
$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X|Y}(x|y)\, p_Y(y)}{\sum_{y=0}^{\infty} p_{X|Y}(x|y)\, p_Y(y)} = \frac{\binom{y}{x} p^x (1-p) \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}}{\sum_{y=0}^{\infty} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}}$$

per $y \geq x$ $(x \in \{0,1,2,\dots\})$

QUIZ 2 ↑ (Fino all'ultima slide di 3_VariabiliDiscrete.pdf)

SIA $X \sim UD\{1,2,3,4,5,6\}$





$\frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \rightarrow$ CENTRO DI MASSA

$$\underbrace{E[X]}_{\text{MEDIA O VALORE ATTESO DI } X.} = \sum_x x\, p_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^{6} x$$

$$= \frac{1}{6} \frac{6(6+1)}{2} = 3.5$$

SE USO $\mu_X = E[X]$ PER INDOVINARE IL RISULTATO DEL PROSSIMO ESPERIMENTO, COME MISURO L'ERRORE?

$E[(X-\mu_X)^2] \rightarrow$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

$$E\left[(X-\mu_x)^2\right] \rightarrow \text{ERRORE QUADRATICO MEDIO}$$