- **Riprendiamo dalla lezione 4 - Il famoso problema di Monty Hall**
  (Esercizio 2.22 del libro di testo)

DALLA LEZIONE 3:

- 3 PORTE → DEFINIAMO GLI EVENTI D_i, $i=1,2,3$

  D_i = LA MACCHINA SI TROVA DIETRO LA PORTA i

  ASSUMENDO EQUIPROBABILITÀ, ABBIAMO

  $$\mathbb{P}[D_1] = \mathbb{P}[D_2] = \mathbb{P}[D_3] = 1/3$$

- IL PARTECIPANTE SCEGLIE LA PORTA 1
  (POTREBBE ESSERE LA 2 O LA 3 E IL RAGIONAMENTO SAREBBE ANALOGO)
- DALLE 2 PORTE RIMASTE, IL CONDUTTORE SCEGLIE UNA. LA APRE E MOSTRA CHE DIETRO C'È UNA CAPRA.

  → DEFINIAMO GLI EVENTI Y_i, $i=2,3$

  Y_i = IL CONDUTTORE SCEGLIE LA PORTA i

  SAPENDO CHE IL CONDUTTORE NON APRIRÀ MAI UNA PORTA CON LA MACCHINA DIETRO, E ASSUMENDO EQUIPROBABILITÀ TRA LA SCELTA DELLE PORTE CON LE CAPRE DIETRO, ABBIAMO:

  $$\mathbb{P}[Y_2 \mid D_1] = \mathbb{P}[Y_3 \mid D_1] = 1/2$$
  $$\mathbb{P}[Y_2 \mid D_2] = \mathbb{P}[Y_3 \mid D_3] = 0$$
  $$\mathbb{P}[Y_2 \mid D_3] = \mathbb{P}[Y_3 \mid D_2] = 1$$

- SE IL CONDUTTORE APRE LA PORTA 3 (POTREBBE ESSERE LA 2 E IL RAGIONAMENTO SAREBBE ANALOGO), LE PROBABILITÀ D'INTERESSE, AGGIORNATE, SONO:

$$\mathbb{P}[D_1 \mid Y_3] = \underbrace{\frac{\mathbb{P}[D_1, Y_3]}{\mathbb{P}[Y_3]}}_{\text{DALLA DEFINIZIONE DELLA PROBABILITÀ CONDIZIONATA}}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[Y_3 \mid D_1]\,\mathbb{P}[D_1]}{\underbrace{\mathbb{P}[Y_3 \mid D_1]\,\mathbb{P}[D_1] + \mathbb{P}[Y_3 \mid D_2]\,\mathbb{P}[D_2] + \mathbb{P}[Y_3 \mid D_3]\,\mathbb{P}[D_3]}_{\text{DALLA LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI}}}$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$$

QUINDI $D_1 \perp Y_3$

A CASA, AVRETE DOVUTO TROVARE

$$\mathbb{P}[D_2|Y_3] = \frac{\mathbb{P}[D_2,Y_3]}{\mathbb{P}[Y_3]} = \frac{\mathbb{P}[Y_3|D_2]\mathbb{P}[D_2]}{\mathbb{P}[Y_3|D_1]\mathbb{P}[D_1]+\mathbb{P}[Y_3|D_2]\mathbb{P}[D_2]+\mathbb{P}[Y_3|D_3]\mathbb{P}[D_3]}$$

$$= \frac{1 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3} = \frac{1}{3/2} = 2/3$$

QUINDI $D_2 \not\perp Y_3$

L'EVENTO Y_3 (SAPERE DIETRO A QUALE DELLE PORTE NON SCELTE INIZIALMENTE DAL PARTECIPANTE) NON CI DICE NULLA SULLA PROBABILITÀ DI D_1 (CHE LA MACCHINA SIA O NON DIETRO ALLA PORTA 1), MA SI SU D_2 (LA PROBABILITÀ CHE LA MACCHINA SIA DIETRO ALLA PORTA 2, DATO HE IL CONDUTTORE NON L'HA SCELTA È ORA IL DOPPIO DI PRIMA!)

- SAPENDO CHE:

$$1/3 = \mathbb{P}[D_1|Y_3] < \mathbb{P}[D_2|Y_3] = 2/3,$$

IL PARTECIPANTE DOVREBBE CAMBIARE LA PORTA SCELTA DALLA 1 ALLA 2 PER MASSIMIZZARE LA SUA PROBABILITÀ DI VINCERE LA MACCHINA!

Nota:

- D_1 e Y_3 sono indipendenti
- D_2 e Y_3 non sono indipendenti
- Cosa possiamo dire di D_1, D_2 e Y_3 s? Sono indipendenti oppure no?

NEMMENO TUTTE LE COPPIE SONO INDIP.

- **Indipendenza tra più di 2 eventi**

Si lancia una moneta due volte e si considerano i seguenti eventi:

A = esce testa al primo lancio
B = esce croce al secondo lancio
C = i risultati dei due lanci sono uguali

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cc} (T,T) & (T,C) \\ (C,T) & (C,C) \end{array} \right\}$$

Si può dire che questi tre eventi sono indipendenti?

$\mathbb{P}(A) = 1/2 \qquad \mathbb{P}(B) = 1/2$
$\mathbb{P}(C) = 1/2$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Rightarrow A \perp B$
$\mathbb{P}(A \cap C) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \Rightarrow A \perp C$
$\mathbb{P}(B \cap C) = 1/4 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \Rightarrow B \perp C$

TUTTE LE COPPIE SONO INDIPENDENTI → INDIP. 2 A 2

$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \Rightarrow \{A, B, C\}$ NON SONO INDIPENDENTI

MA NON RECIPROCAMENTE

SE CONTINUO A FARE LANCI E DEFINISCO

A_i = TESTA AL LANCIO i-esimo, $i = 1, \dots, 40$

ALLORA

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{40} A_i\right) = \prod_{i=1}^{40} \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2^{40}}$$

$\{A_1, A_2, \dots, A_{40}\}$ SONO RECIPROCAMENTE INDIPENDENTI. $\Rightarrow$ ANCHE 2 A 2

ANCHE $\mathbb{P}(\underbrace{A_1, A_{27}, A_{32}, A_{39}}_{\text{VALE PER QUALSIASI SOTTOINSIEME}}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_{27})\dots$

n eventi indipendenti due a due

Gli eventi $A_1, \dots, A_n$, si dicono **indipendenti due a due** se per ogni coppia è indipendente, ovvero

$$\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] \dots \mathbb{P}[A_j] \quad \forall i \neq j.$$

n eventi reciprocamente indipendenti

Gli eventi $A_1, \dots, A_n$, si dicono reciprocamente **indipendenti** se comunque si prendono $k > 1$ di essi, si ha

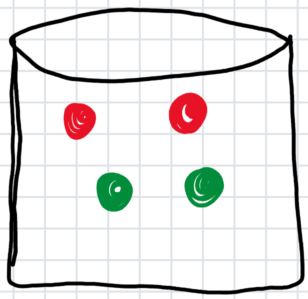
$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] \dots \mathbb{P}[A_{i_k}].$$

2 eventi condizionatamente indipendenti

Si dice che A e B sono **condizionalmente indipendenti** dato l'evento C se

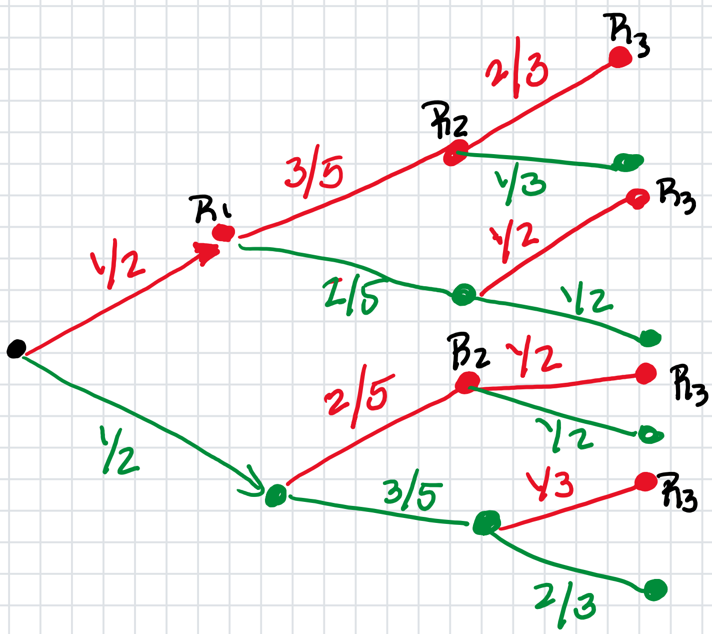
$$\mathbb{P}[A \cap B | C] = \mathbb{P}[A|C]\,\mathbb{P}[B|C].$$

In questo caso si scrive $(A \perp B)|C$



- SI SCEGLIE AD OGNI PASSAGGIO UNA PALLINA. SI SEGNA IL COLORE E SI RIMETTE NELL'URNA INSIEME AD UN'ALTRA PALLINA DELLO STESSO COLORE

R_i = LA i-esima PALLINA È ROSSA, $i = 1, 2, 3$



$\mathbb{P}(R_1) = 1/2$

$$\mathbb{P}[R_2] = \mathbb{P}[R_2|R_1]\,\mathbb{P}[R_1] + \mathbb{P}[R_2|\bar{R}_1]\,\mathbb{P}[\bar{R}_1]$$
$$= 1/2 \cdot 3/5 + 1/2 \cdot 2/5$$
$$= 1/2\,(1) = 1/2$$

$$\mathbb{P}[R_2] = 1/2 \neq \mathbb{P}[R_2|R_1] = \frac{3}{5}$$

$$R_1 \not\perp R_2$$

$$\mathbb{P}[R_3] = \mathbb{P}[R_3 | R_2]\, \mathbb{P}[R_2] + \mathbb{P}[R_3 | \overline{R}_2]\, \mathbb{P}[\overline{R}_2]$$

$$\mathbb{P}[R_3 | R_2] = \mathbb{P}[R_3 | R_2, R_1]\, \mathbb{P}[R_1] + \mathbb{P}[R_3 | R_2, \overline{R}_1]\, \mathbb{P}[\overline{R}_1]$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{P}[R_3 | \overline{R}_2] = \mathbb{P}[R_3 | \overline{R}_2, R_1]\, \mathbb{P}[R_1] + \mathbb{P}[R_3 | \overline{R}_2, \overline{R}_1]\, \mathbb{P}[\overline{R}_1]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}[R_3] = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}[R_3 | R_1] = \mathbb{P}[R_3 | R_1, R_2]\, \mathbb{P}[R_2] + \mathbb{P}[R_3 | R_1, \overline{R}_2]\, \mathbb{P}[\overline{R}_2]$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{P}[R_3] \neq \mathbb{P}[R_3 | R_1] \Rightarrow R_3 \not\perp R_1$$

- $(R_1 \perp R_3) | R_2$??

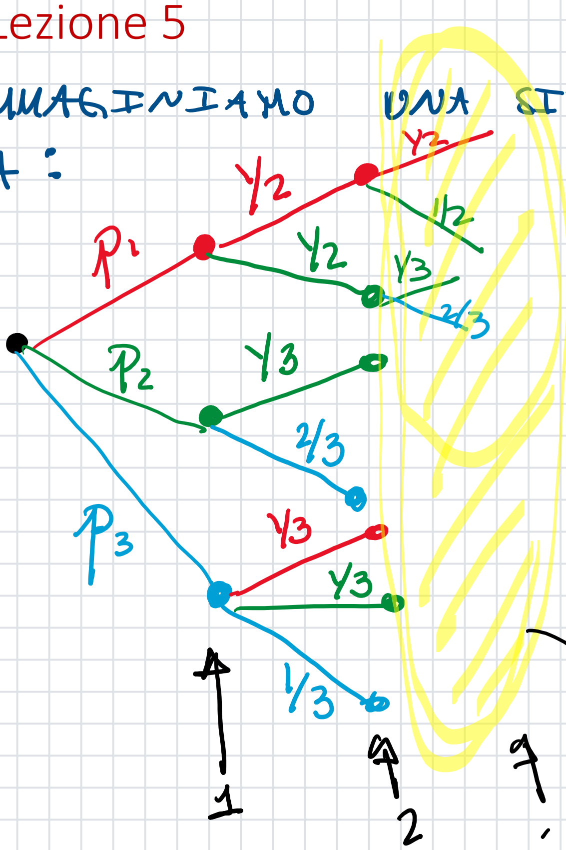
$$\mathbb{P}[R_1 | R_2] \overset{?}{=} \mathbb{P}(R_1 | R_2, R_3)$$
$$\mathbb{P}[R_3 | R_2] \overset{?}{=} \mathbb{P}(R_3 | R_2, R_1)$$

$$\mathbb{P}[R_1, R_3 | R_2] \overset{?}{=} \mathbb{P}[R_1 | R_2]\, \mathbb{P}[R_3 | R_2]$$

$$\mathbb{P}[R_3 | R_2] = \frac{7}{12} \neq \mathbb{P}[R_3 | R_2, R_1] = \frac{2}{3}$$

Non c'è indipendenza condizionata.
Per calcolare le probabilità finali si deve tenere conto di tutto il percorso.

IMMAGINIAMO UNA SITUAZIONE RAPPRESENTATA DA:



$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Abbiamo eventi

$R_1, R_2, R_3 \ldots \to$ ROSSO

$V_1, V_2, V_3 \ldots \to$ VERDE

$A_1, A_2, A_3 \ldots \to$ AZZURRO

$A_i \mid A_{i-1}$

$V_i \mid V_{i-1}$

$R_i \mid R_{i-1}$

È INDIPENDENTE DA QUELLO SUCCESSO PRIMA.

IL RESTO DELL'ALBERO NON È NECESSARIO PERCHÈ È UGUALE A QUELLO CHE ABBIAMO GIÀ