Lezione 3 24/09/2024

Probabilità Elementare

- Testo: Capitolo 2 (e slides disponibili sul sito dell'autrice)
- Slides 1_Probabilita_Elementare (Moodle)

evento certo

$\Omega = \{$ tutti i possibili risultati di un esperimento $\}$

$\omega \in \Omega \to$ evento elementare

$E \subset \Omega \to$ evento

$\phi \subset \Omega$

$\hookrightarrow$ Evento nullo, vuoto o impossibile

$\# \Omega = |\Omega| \to$ cardinalità o unumero di elementi di Ω

$\# \Omega < \infty \to$ come lancio del dado

$\# \Omega = \infty$ numerabile $\to$ Discreto

$\# \Omega = \infty$ non numerabile $\to$ Continuo

- $E \subset \Omega \Rightarrow \bar{E} \subset \Omega$

  $E, F \subset \Omega \Rightarrow E \cup F \subset \Omega$ e $E \cap F \in \Omega$

- SE $F \cap E = \phi$ E, F si chiamano <u>Disgiunti</u>

- <u>PARTIZIONE</u> : $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$

  Disgiunti a coppie $E_i \cap E_j = \phi$

  $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \Omega$

<u>PROBABILITÀ</u>: $\mathbb{P} : \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ σ-algebra (collezione di eventi)

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

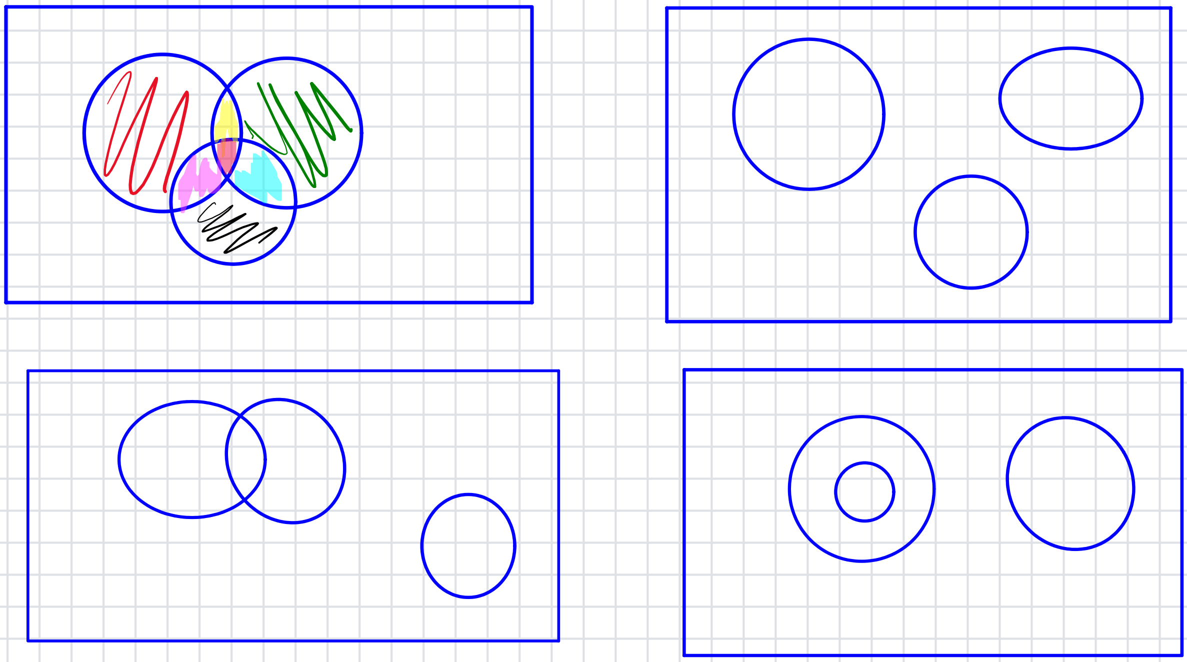
SE $E_1, \dots, E_k \subset \Omega$ $\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(E_i)$

$E_i \cap E_j = \phi$

Lezione 3 24/09/2024

Se abbiamo 3 insiemi, A, B e C, in quanti modi possibili possono essere configurati?

Queste sono alcune possibilità:



Tutte le formule riguardanti il calcolo delle probabilità per questi eventi devono essere riferite al caso più generale possibile (quello in alto a destra). Ad esempio:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\
& - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) \\
& + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Tutti gli altri casi si derivano da questo, notando che se una intersezione tra eventi e vuota, allora la sua probabilità sarà zero.

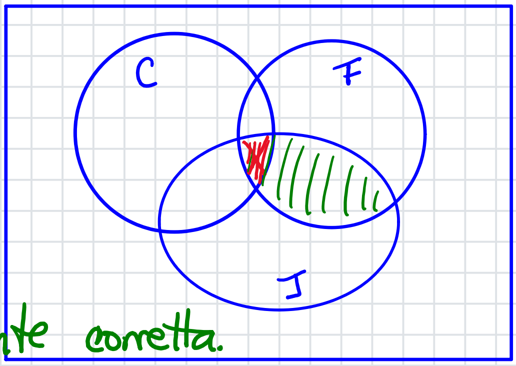
1. Da un'indagine svolta presso una certa azienda di ICT è emerso che il 10% dei dipendenti sa programmare in Fortran, il 20% in C++, il 5% in Java. Inoltre il 5% sa usare Fortran e C++, il 3% Fortran e Java, il 2% Java e C++ e l'1% sa programmare in tutti tre i linguaggi. Scegliendo a caso un dipendente, qual è la probabilità che usi solo C++? E che programmi in Fortran e Java ma non in C++?

1) $\Omega = \{$Tutte le combinazioni dei 3 linguaggi noti al dipendente scelto$\}$

$= \{$solo C++, solo Fortran, solo Java, solo C++ e Fortran, solo C++ e Java, ...$\}$

e capire che gli eventi elementari non sono equiprobabili

2) Identificare gli eventi d'interesse e per i quali abbiamo informazione.



C = Sa C++
F = Sa Fortran
J = Sa Java

$\mathbb{P}(C) = 0.2$
$\mathbb{P}(F) = 0.1$
$\mathbb{P}(J) = 0.05$

Questa è più formalmente corretta.

$\mathbb{P}(C \cap F) = 0.05$, $\mathbb{P}(F \cap J) = 0.03$ $\mathbb{P}(C \cap J) = 0.02$

$\mathbb{P}(C \cap F \cap J) = 0.01$

3) Identificare quale probabilità è richiesta

$\mathbb{P}[C \cap \bar{F} \cap \bar{J}] = 0.2 - 0.05 - 0.02 + 0.01 = 0.14$

$\mathbb{P}(F \cap J \cap \bar{C}) = \mathbb{P}(F \cap J) - \mathbb{P}(F \cap J \cap C) = 0.03 - 0.01 = 0.02$

Altro modo d'interpretare l'informazione

$\mathbb{P}[C \cap \bar{F} \cap \bar{J}] = 0.2$, $\mathbb{P}[F, \bar{C}, \bar{J}] = 0.1$, $\mathbb{P}[J, \bar{C}, \bar{F}] = 0.05$

$\mathbb{P}[C, F, \bar{J}] = 0.05$, $\mathbb{P}[F, J, \bar{C}] = 0.03$, $\mathbb{P}[C, J, \bar{F}] = 0.02$

$\mathbb{P}[C, F, J] = 0.01$

3. Un'urna contiene due palle nere e una rossa. Una seconda urna ne contiene una bianca e due rosse. Si estrae a caso una palla da ciascuna urna.
a) Descrivere uno spazio campionario per quest'esperimento.
b) Descrivere il corrispondente spazio degli eventi.
c) Qual è la probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore?
d) E che siano di colore diverso?

a) $\Omega = \{(X_1, X_2) : X_1 \in \{N, R\}, X_2 \in \{B, R\}\}$

$= \{(R,R), (N,R), (R,B), (N,B)\}$

= Tutte le coppie dove la prima palla è nera o rossa e la seconda è bianca o rossa.

b) $\mathcal{M}(\Omega)$ = Tutti i sottoinsiemi di Ω

$\# \mathcal{M}(\Omega) = 2^{\# \Omega} = 2^4 = 16$

↳ N° possibili eventi

Esempi E_1 = entrambe stesso colore

E_2 = entrambe rosse

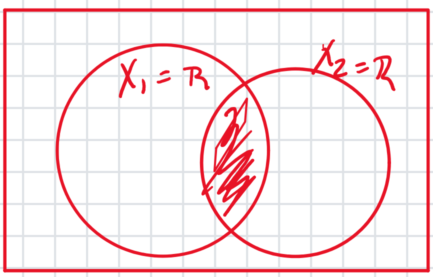
$E_1 = E_2$

E_3 = nessuna rossa

c) $\mathbb{P}[E_1] = \mathbb{P}[X_1 = R, X_2 = R] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}[X_1 = R] = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}[X_2 = R] = \frac{2}{3}$



★ Per la prossima lezione, ricordatevi di leggere, dal capitolo 2 del libro di testo (Probability on Events)le sezioni 2.3 (Conditional Probabilities on Events), 2.4 (Independent Events) e 2.5 (Law of Total Probability) e/o dal primo set di slides (1 Probabilita Elementare), la seconda sezione (slides 23 a 42).