- Probabilità condizionata e indipendenza

NOTA $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

ma $\mathbb{P}[B] = 0 \not\Rightarrow B = \emptyset$

Probabilità condizionata

Sia B un evento di probabilità positiva. La **probabilità condizionata** dell'evento A dato l'evento B è

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}, \quad \mathbb{P}[B] > 0.$$

$\mathbb{P}[\ \ |B]$

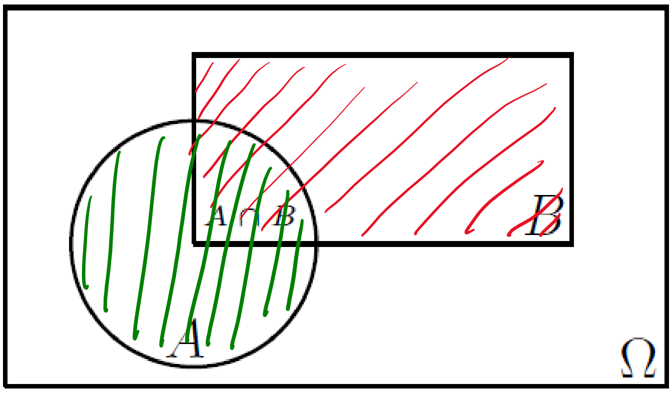
$\mathbb{P}[B] > 0$

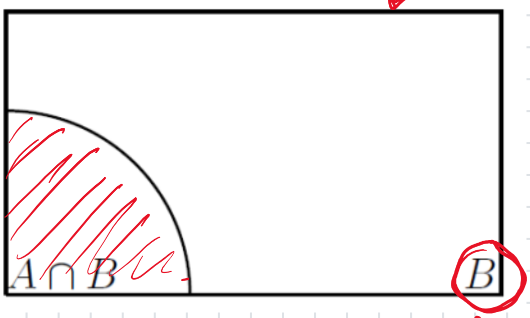
$\mathbb{P}[A]$

$\mathbb{P}[A \cap B]$

↳ Incerteza prima di ricevere info.

⋮





↳ SPAZIO CAMPIONARIO

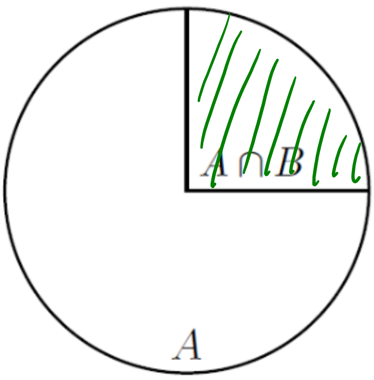
INFO NUOVA: B è vero

$\mathbb{P}[B|B] = 1 = \dfrac{\mathbb{P}[B \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

$\mathbb{P}[A|B] = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

$\mathbb{P}[A \cap B|B]$ ...

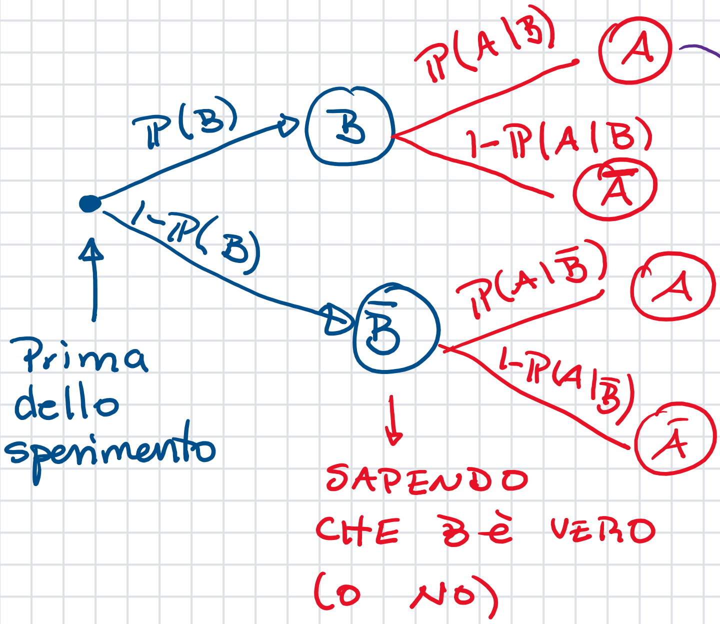
↳ PROBABILITÀ AGGIORNATE



INFO NUOVA: A è vero

$\mathbb{P}[A|A] = 1$

$\mathbb{P}[B|A] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}$



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A, B) + \mathbb{P}(A, \bar{B})$$

B e $\bar{B}$ formano una partizione di Ω

$\Rightarrow$ Applicando la legge delle prob. totali...

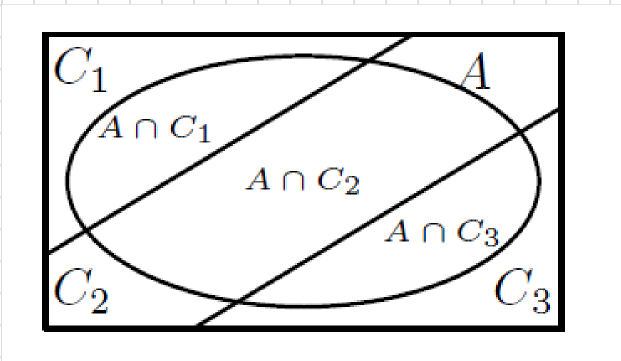
$$\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A, \bar{B}) = \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})$$

QUINDI

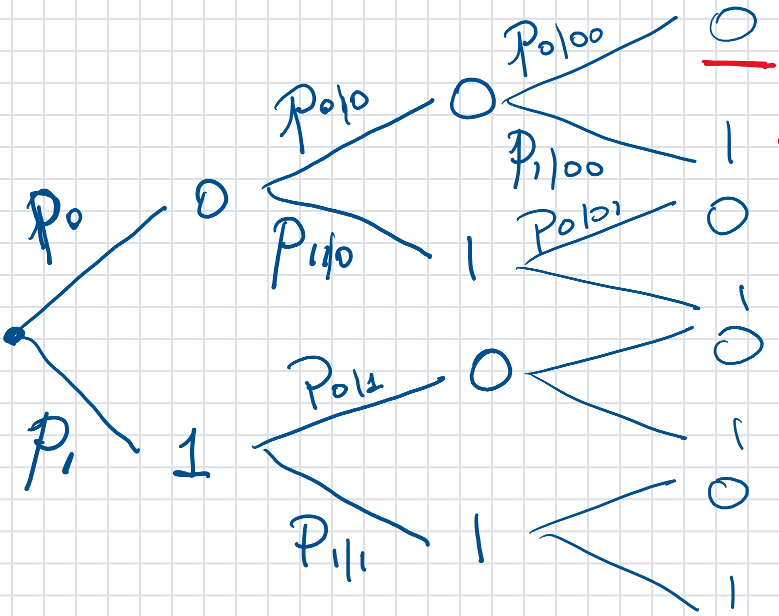
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})$$

LEGGE DELLE PROB. TOT.



SE $C_1, C_2, \dots$ è una partizione allora per qualsiasi evento A

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|C_i)\mathbb{P}(C_i)$$



$A = (0,0,0)$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(0) \cdot \mathbb{P}(0|0)\,\mathbb{P}(0|0,0)$$

$$\mathbb{P}(0) = p_0 \qquad \mathbb{P}(0|0) = p_{0|0} \qquad \mathbb{P}(0|0,0) = p_{0|00}$$

2 eventi indipendenti

Si dice che A e B sono **indipendenti** nel caso particolare in cui

$$\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A].$$

In questo caso si scrive $A \perp B$, e vale anche $\mathbb{P}\left[A|\bar{B}\right] = \mathbb{P}[A]$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

SE $A \perp B$

PER QUALSIASI A, B

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$$

PER $A \perp B$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

SE $A \perp B$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\cancel{\mathbb{P}(A)}\,\mathbb{P}(B)}{\cancel{\mathbb{P}(A)}} = \mathbb{P}(B)$$

QUINDI $B \perp A$

DALLA LEZIONE PRECEDENTE

3. Un'urna contiene due palle nere e una rossa. Una seconda urna ne contiene una bianca e due rosse. Si estrae a caso una palla da ciascuna urna.
   a) Descrivere uno spazio campionario per quest'esperimento.
   b) Descrivere il corrispondente spazio degli eventi.
   c) Qual è la probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore?
   d) E che siano di colore diverso?

c) A = LE PALLINE HANNO LO STESSO COLORE

$$A = \{(R_1, R_2)\} \qquad \mathbb{P}(R_1) = 1/3 \qquad \mathbb{P}(R_2) = 2/3$$

SICCOME LE ESTRAZIONI SONO INDIPENDENTI

$$R_1 \perp R_2$$

$$\mathbb{P}(R_1, R_2) = \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2) = 2/9$$

d) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 7/9$

- **Il famoso problema di Monty Hall**
  (Esercizio 2.22 del libro di testo)

Il conduttore di un programma televisivo di concorsi porta il concorrente in una stanza con tre porte chiuse. Dietro una delle porte c'è un'auto. Dietro le altre due porte c'è una capra. Al concorrente viene chiesto di scegliere una porta e di dire quale ha scelto (supponiamo che scelga la porta a caso, perché non ha informazioni riservate).

Ora il conduttore del quiz, sapendo cosa c'è dietro ogni porta, sceglie una porta che non è stata scelta dal concorrente e rivela che dietro quella porta c'è una capra (il conduttore del quiz sceglierà sempre di aprire una porta con una capra). Al concorrente viene quindi chiesto: "Vorresti cambiare dalla porta che hai scelto?"

Al concorrente conviene cambiare porta oppure non cambia niente?

D_i = LA MACCHINA È DIETRO ALLA PORTA i $(i = 1, 2, 3)$

IMMAGINIAMO CHE LA PERSONA SCEGLIE LA PORTA 1

QUESTA SCELTA LA FA CON PROB 1/3

$$\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = \mathbb{P}(D_3)$$

Y_i = IL CONDUTTORE APRE LA PORTA i

$\mathbb{P}(Y_1) = 0$ IMMAGINIAMO CHE APRE LA 3

$$\frac{1}{3} = \mathbb{P}(D_1 | Y_3) \;>\; < \; \mathbb{P}(D_2 | Y_3)$$

NON CAMBIO CAMBIO

$$\mathbb{P}(D_1 | Y_3) = \frac{\mathbb{P}(D_1, Y_3)}{\mathbb{P}(Y_3)} = \frac{\mathbb{P}(Y_3 | D_1)\,\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(Y_3)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y_3) = \mathbb{P}(Y_3 | D_1)\,\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(Y_3 | D_2)\,\mathbb{P}(D_2) + \mathbb{P}(Y_3 | D_3)\,\mathbb{P}(D_3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

★ Per la prossima lezione ricordatevi di finire questo esericizio e di leggere, dal capitolo 2 del libro di testo (Probability on Events) la sezione 2.6 (Bayes' Law) e/o la parte finale del primo set di slides (1 Probabilita Elementare), dalla slide 43).