$$Var[X] = \mathbb{E}[(X-\mu_x)^2] = \mathbb{E}[g(x)]$$

con $g(X) = (X-\mu_x)^2 \rightarrow \mu_x = \mathbb{E}[X]$

- Se X è una costante $\rightarrow X = a \in \mathbb{R}$ con probabilità 1.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = a\,\mathbb{P}[X=a] = a$$

$$g(X) = a - a = 0$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[g(x)] = \mathbb{E}[0] = 0$$

- Se $Y = aX + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[Y] = a\,\mathbb{E}[X] + b$$

$$g(Y) = (Y - \mathbb{E}[Y])^2 = (aX + b - a\mathbb{E}[X] - b)^2 = a^2(X - \mathbb{E}[X])^2$$

$$Var[Y] = \mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[a^2(X-\mathbb{E}[X])^2] =$$

$$= a^2\,\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = a^2\,Var[X] = Var[aX+b]$$

IN PARTICOLARE $\left(a = \frac{1}{sd(X)},\ b = 0\right) \Rightarrow Y = \frac{X}{\sqrt{Var[X]}}$

$$Var\left[\frac{X}{\sqrt{Var[X]}}\right] = \frac{Var[X]}{Var[X]} = 1$$

STANDARDIZZARE UNA V.C:

X CON QUALSIASI DISTRIBUZIONE E CON

$$\mathbb{E}[X] = \mu_x \in \mathbb{R}, \qquad Var[X] = \sigma_x^2 > 0$$

LA TRASFORMAZIONE

$$Y = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

SI CHIAMA LA STANDARDIZZAZIONE DI X

E SODDISFA $\mathbb{E}[Y] = 0$, $Var[Y] = 1$.

- FORMULA ALTERNATIVA PER CALCOLARE LA VARIANZA:

$$Var[X] \underset{DEF}{=} \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}^2[X]]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}^2[X]]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}^2[X]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}^2[X](1-2) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

NOTA: SAPEVAMO GIÀ CHE $\mathbb{E}[X^2] \neq \mathbb{E}^2[X]$ in generale

ADDESSO SAPPIAMO CHE:

$$\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = Var[X] \geq 0$$

[sono uguali solo quando $X = a$]

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}^2[X]$$

- X e Y c.v. INDIP.; g e h due funzioni

$$Var[g(X)+h(Y)] = \mathbb{E}[(g(X)+h(Y))^2] - \mathbb{E}^2[g(X)+h(Y)]$$
$$= \mathbb{E}[g^2(X) + 2g(X)h(Y) + h^2(Y)] - (\mathbb{E}[g(X)] + \mathbb{E}[h(Y)])^2$$
$$= \mathbb{E}[g^2(X)] + 2\underbrace{\mathbb{E}[g(X)h(Y)]}_{\text{SI USA L'INDIPENDENZA}} + \mathbb{E}[h^2(Y)] - \left[\mathbb{E}^2[g(X)] + 2\mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)] + \mathbb{E}^2[h(Y)]\right]$$
$$= \underbrace{\mathbb{E}[g^2(X)] - \mathbb{E}^2[g(X)]}_{Var[g(X)]} + \underbrace{\mathbb{E}[h^2(X)] - \mathbb{E}^2[h(X)]}_{Var[h(Y)]} + \left[\cancel{2\mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)] - 2\mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]}\right] \to 0$$

NOTA 1: IN PARTICOLARE ($g(X) = X$, $h(Y) = Y$)
SE X E Y SONO INDIP.

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$$

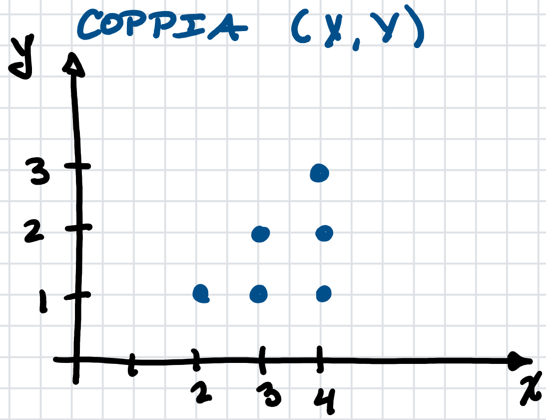
NOTA 2: SE INVECE X E Y NON SONO INDIP.

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\left(\boxed{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}\right)$$

$$Var[g(X)+h(Y)] = Var[g(X)] + Var[h(Y)] + 2\left(\mathbb{E}[g(X)g(Y)] - \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]\right)$$

- Ricordiamo dalla lezione precedente:
  Esercizio: Calcolare l'area media del triangolo definito dai vertici (0,0), (X,0), (0,Y), dove (X,Y) è un vettore di variabili casuali uniforme discreto con X > Y, per X in {2,3,4} e Y in {1,2,3}

SUPPORTO DELLA COPPIA (X,Y)



DISTRIBUZIONE CONGIUNTA UNIFORME

$P_{XY}(x,y)$	$Y=1$	2	3	$P_X(x)$
$X=2$	$1/6$	0	0	$1/6$
3	$1/6$	$1/6$	0	$1/3$
4	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
$P_Y(y)$	$1/2$	$1/3$	$1/6$	

- X E Y SONO INDIPENDENTI?

$$\mathbb{P}[X=2] = 1/6 \neq \mathbb{P}[X=2 \mid Y=2] = \frac{\mathbb{P}[X=2, Y=2]}{\mathbb{P}[Y=2]} = 0$$

NO

- $\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$
- $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$
- $\mathbb{E}[Y^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3+8+9}{6} = \frac{10}{3}$

$$\Rightarrow Var[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}^2[Y] = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{30-25}{9} = \frac{5}{9}$$

- $\mathbb{E}[X^2] = 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{3} + 16 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4+18+42}{6}$ 48 $= \frac{32}{3}$ $\frac{35}{3}$

$$\Rightarrow Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \frac{32}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{96-100}{9}$$

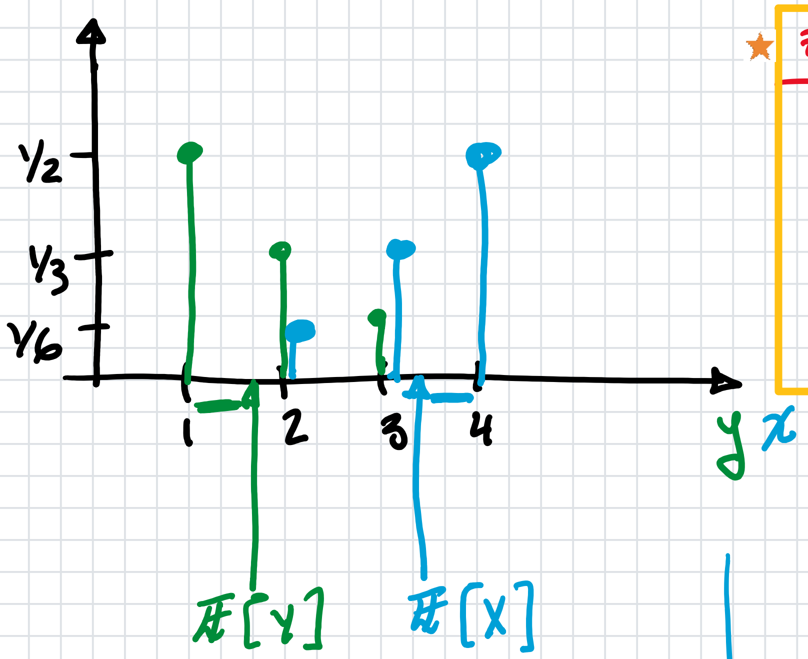
< 0

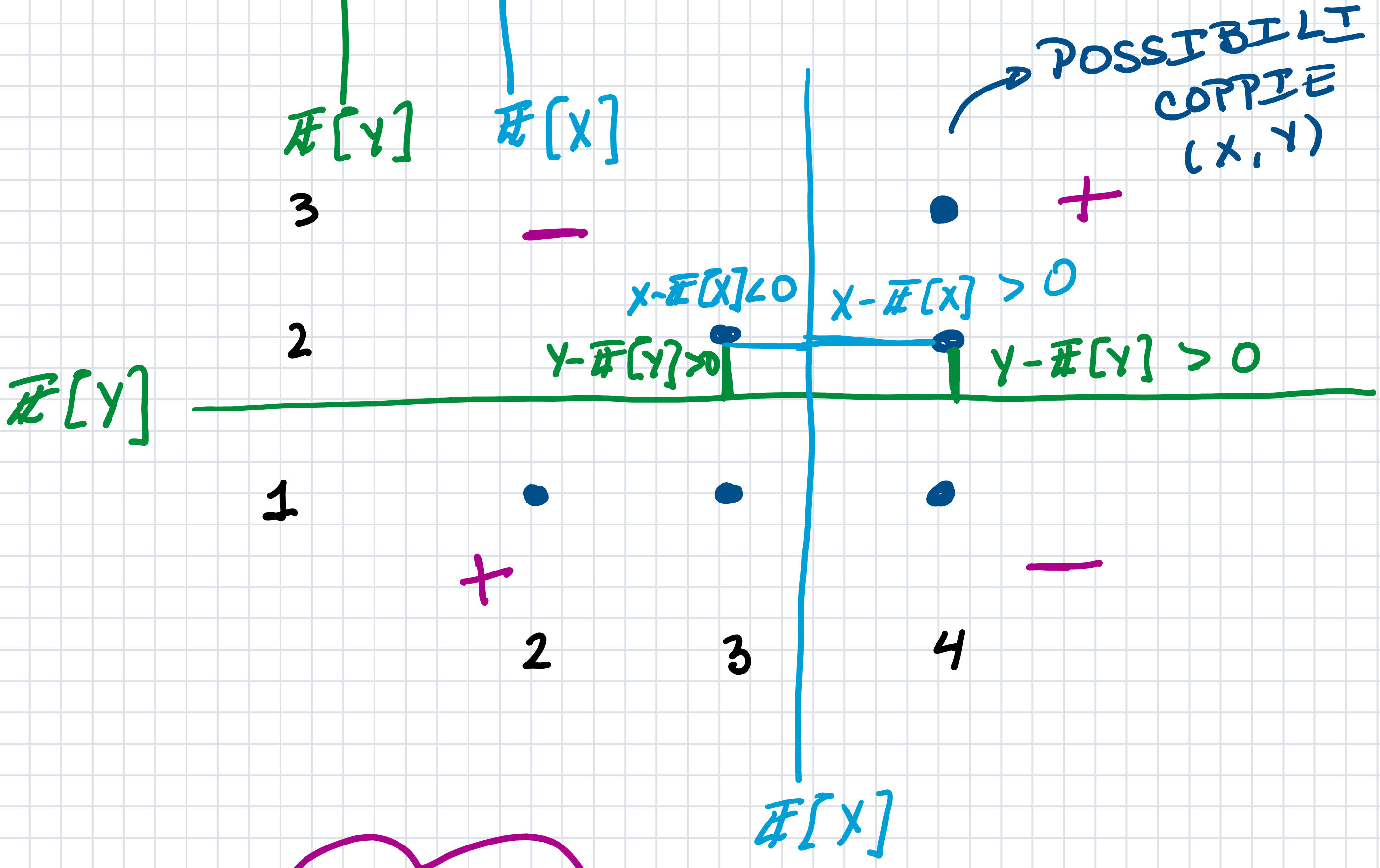
$$Var[X] = \frac{105-100}{9} = \frac{5}{9}$$

ERRORE!!

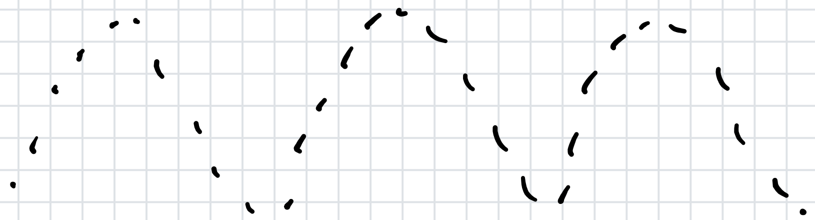
ESERCIZIO

CALCOLARE $Cov(X,Y)$ E $Var[X+Y]$





POSSIBILI VALORI



$Cov(X,Y) = 0$ MA NON VUOL DIRE CHE SIANO INDIPENDENTI