

Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica

Foglio 4: Variabili casuali – Soluzioni

Domanda 1

Un'urna contiene tre palline numerate da 1 a 3. Si estraggono con reinserimento due palline e sia X la variabile aleatoria che indica la differenza in modulo dei numeri estratti. Si determini:

- (a) La funzione di probabilità di X , con relativa rappresentazione grafica
- (b) $\mathbb{P}[X \leq 2]$ e $\mathbb{P}[2 \leq X < 5]$

Soluzione: 1

- (c) $\mathbb{P}[X < 2]$

Soluzione: 7/9

- (d) $\mathbb{P}[2 \leq X < 5]$

Soluzione: 2/9

Domanda 2

Il numero giornaliero di interruzioni dei servizi di rete ha la seguente distribuzione di probabilità

x	0	1	2
P(x)	0.7	0.2	0.1

Una piccola azienda di commercio online stima che, ad ogni interruzione, perde 500\$. Trovare la funzione di probabilità (con relativa rappresentazione grafica) delle perdite giornaliere dovute alle interruzioni di rete che subisce questa azienda.

Domanda 3

Il reparto di assistenza clienti di un'azienda di computer dispone di sei linee telefoniche. Sia X il numero di linee in uso in un determinato momento, con funzione di ripartizione:

	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$	$4 \leq x < 5$	$5 \leq x < 6$	$6 \leq x$
F(x)	0	0.1	0.25	0.45	0.7	0.9	0.96	1

Trovare la funzione di probabilità di X e determinare la probabilità dei seguenti eventi:

- (a) {Sono in uso al massimo tre linee}

Soluzione: 0.7

- (b) {Sono in uso meno di tre linee}

Soluzione: 0.45

- (c) {Sono in uso al meno tre linee}

Soluzione: 0.55

- (d) {sono in uso tra due e cinque linee, comprese}

Soluzione: 0.71

- (e) {non sono in uso tra due e quattro linee, comprese}

Soluzione: 0.65

- (f) {almeno quattro linee sono libere}

Soluzione: 0.45

Domanda 4

Una compagnia aerea dispone di due tipi di aerei, uno da 20 e uno da 10 posti. Dato che si sa che i passeggeri che prenotano poi non si presentano con una probabilità del 10%, vengono sempre accettate 22 e 11 prenotazioni rispettivamente. Per quale dei due tipi di aereo è maggiore il rischio di lasciare a terra almeno un passeggero, in un volo in cui si è accettato il numero massimo di prenotazioni?

Soluzione: aereo da 20 posti

Domanda 5

Una macchina produce pezzi con una percentuale di difettosità pari al 4%. Si scelgono a caso 15 pezzi dalla produzione della macchina.

- (a) Calcolare la probabilità che fra i 15 pezzi non ve ne sia nemmeno uno difettoso.

Soluzione: 0.54

- (b) Calcolare la probabilità che fra i 15 pezzi ve ne siano almeno 2 difettosi.

Soluzione: 0.12

- (c) Si supponga di sapere con certezza che in un lotto di 20 pezzi ve ne sono 4 difettosi. Un compratore acquista 8 di questi pezzi. Calcolare la probabilità che fra gli 8 pezzi acquistati ve ne siano esattamente 3 difettosi.

Soluzione: 0.14

Domanda 6

Il preside di una facoltà desidera formare una commissione con 5 dei 40 membri del Consiglio di Facoltà. La selezione avviene a caso e nel Consiglio di Facoltà vi sono 8 docenti di statistica. Si calcoli la probabilità che la commissione:

- (a) non contenga nessun docente di statistica;

Soluzione: 0.31

- (b) contenga almeno un docente di statistica;

Soluzione: 0.69

- (c) contenga non più di un docente di statistica.

Soluzione: 0.74

Domanda 7

Ad un casello autostradale arriva ogni ora un numero di automobili che segue una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 20$.

- (a) Qual è la probabilità che in un'ora arrivino non più di 7 automobili?

Soluzione: 0.000778

- (b) E che il numero di macchine sia compreso fra 6 e 12 (estremi inclusi)?

Soluzione: 0.03894

Domanda 8

Si sa che il 4% degli alberi di un frutteto non dà frutto.

- (a) Qual è la probabilità che su 200 alberi esattamente 7 non diano frutti?

Soluzione: 0.1417

- (b) E che meno di 2 piante non diano frutti?

Soluzione: 0.0027

- (c) Fornire approssimazioni adeguatamente giustificate per le due probabilità calcolate ai punti (a) e (b).

Soluzione: (a) 0.1396, (b) 0.003

Domanda 9

In media 1 computer su 800 va in *crash* durante un violento temporale. Si consideri un'azienda con 4000 computer in attività durante un violento temporale.

- (a) Calcolare la probabilità che vadano in crash meno di 10 computer.

Soluzione: 0.9682

- (b) Calcolare la probabilità che vadano in crash esattamente 10 computer.

Soluzione: 0.0181

- (c) Fornire approssimazioni adeguatamente giustificate per le due probabilità calcolate ai punti (a) e (b).

Soluzione: (a) 0.9682 (b) 0.0181

Domanda 10

Dopo che un virus ha infettato un sistema informatico, un sistemista controlla lo stato di tutti i file importanti. Ogni file viene danneggiato dal virus con probabilità 0.2 indipendentemente dagli altri files.

- (a) Calcolare la probabilità che almeno 5 dei primi 20 file siano stati danneggiati.

Soluzione: 0.3704

- (b) Calcolare la probabilità che il sistemista debba controllare almeno 6 file per trovarne uno danneggiato.

Soluzione: 0.3277

Domanda 11

In una località balneare la probabilità che piova in un qualunque giorno del mese di agosto è 0.05. Assumendo che vi sia indipendenza tra i vari giorni del mese:

- (a) Qual è la probabilità che la prima pioggia del mese si osservi il 15 agosto?

Soluzione: 0.0244

- (b) E prima del 15 agosto?

Soluzione: 0.5123

- (c) Dato che fino al 10 agosto non ha piovuto, qual è la probabilità che non piova fino al 25?

Soluzione: 0.4633

Domanda 12

Il 40% degli ordini effettuati a una società di e-commerce viene effettuato telefonicamente, mentre il restante 60% viene effettuato online. Gli ordini effettuati per telefono ricevono uno sconto speciale il 29% delle volte, mentre gli ordini effettuati online ricevono uno sconto simile il 26% delle volte. Si considerino 10 ordini scelti a caso.

- (a) Qual è la probabilità che esattamente cinque di questi ordini siano stati effettuati per telefono e abbiano ottenuto uno sconto speciale?

Soluzione: 0.002857

- (b) Qual è la probabilità che esattamente cinque di questi ordini abbiano ottenuto uno sconto speciale?

Soluzione: 0.0767

- (c) Qual è la probabilità che al massimo cinque di questi ordini abbiano ottenuto uno sconto speciale?

Soluzione: 0.97024

Domanda 13

Un provider di servizi Internet addebita ai propri clienti per l'utilizzo di Internet una cifra proporzionale al tempo in ore di utilizzo, arrotondandolo all'ora più vicina, e dipendente dalla fascia oraria. La distribuzione congiunta del tempo utilizzato X in ore e il prezzo Y di ogni ora in centesimi viene data nella tabella sottostante.

$p(x, y)$		X			
		1	2	3	4
Y	1	0	0.06	0.06	0.10
	2	0.10	0.10	0.04	0.04
	3	0.40	0.10	0	0

A ciascun cliente vengono addebitati $Z = X \cdot Y$ centesimi, cioè il numero di ore moltiplicato per il prezzo di ogni ora.

- (a) Trovare la distribuzione di Z .
- (b) Trovare la distribuzione marginale di X .
- (c) Trovare la distribuzione marginale di Y .
- (d) Trovare la distribuzione del tempo di utilizzo nella fascia in cui il prezzo è uguale a 2.

Domanda 14

Siano X e Y il numero di guasti hardware in due laboratori informatici in un dato mese. La distribuzione congiunta di X and Y viene data nella tabella sottostante.

$p(x, y)$		X		
		0	1	2
Y	0	0.52	0.20	0.04
	1	0.14	0.02	0.01
	2	0.06	0.01	0

- (a) Trovare la distribuzione marginale di X .
- (b) Trovare la distribuzione marginale di Y .
- (c) Calcolare la probabilità che si verifichi almeno un guasto hardware.

Soluzione: 0.48

- (d) Le variabili X e Y sono indipendenti?

Domanda 15

In un piccolo laboratorio informatico il numero di guasti hardware X e il numero di errori software Y in un dato giorno hanno la seguente distribuzione congiunta $p(x, y)$: $p(0, 0) = 0.6$, $p(0, 1) = 0.1$, $p(1, 0) = 0.1$, $p(1, 1) = 0.2$. Sulla base di queste informazioni:

- (a) Trovare la distribuzione marginale di X .
- (b) Trovare la distribuzione marginale di Y .
- (c) Le variabili X e Y sono indipendenti?
- (d) Trovare la distribuzione di $X + Y$, cioè del numero totale di errori durante un giorno.

Domanda 16

Si consideri un'urna contenente 3 palline numerate da 1 a 3. L'esperimento consiste nell'estrarre 2 palline senza reinserimento. Sia X la variabile casuale associata al più grande dei numeri estratti e sia Y la variabile casuale somma dei due numeri estratti. Trovare:

1. la funzione di probabilità congiunta di X e Y ;
2. la funzione di probabilità condizionata di Y dato $X = 3$ e la funzione di ripartizione condizionata di Y dato $X = 3$;
3. X e Y sono indipendenti?

Domanda 17

Sia data la funzione $p_{X,Y}(x, y) = k(2y + x)$, con $x = 2, 4$ e $y = 0, 1, 2$.

- (a) Determinare il valore k affinché $p_{X,Y}(x, y)$ sia una funzione di probabilità congiunta.

Soluzione: $1/30$

- (b) Determinare $P(Y \geq X)$.

Soluzione: $6/30$

- (c) Calcolare i valori della funzione di ripartizione $F_{X,Y}(2, 1)$, $F_{X,Y}(4, 1)$.

Soluzione: $F_{X,Y}(2, 1) = 6/30$, $F_{X,Y}(4, 1) = 16/30$

- (d) Calcolare $p_{X|Y}(x|1)$.

- (e) Valutare se X e Y sono indipendenti.

Domanda 18

Siano X e Y due variabili casuali tali che $(X|Y = y) \sim \text{Bin}(y, 1/3)$ e Y è una variabile casuale discreta che assume i valori 1 e 2 con probabilità $1/4$ e $3/4$, rispettivamente.

- (a) Si determini la funzione di probabilità congiunta di (X, Y) .

- (b) Si calcoli la distribuzione di $Y|X = 1$.

- (c) Si calcoli $\Pr(Y > X)$.

Soluzione: $5/6$