- **Alcune distribuzioni note per variabili casuali discrete**
- Dalla lezione precedente:

Domanda 11
Una cartella contiene 50 file eseguibili. Quando un certo virus attacca il sistema, danneggia un file con probabilità 0.2. Calcolare la probabilità che durante un attacco vengano danneggiati 15 file.

→ Foglio di esercizi sulla probabilità elementare

Versione modificata: Dopo l'attacco del virus al sistema, si decide di fare un controllo casuale per verificare l'integrità della cartella che contiene 50 file. Per questo, si scelgono 15 file a caso dalla cartella. Assumendo che nella cartella ci siano esattamente 10 file infettati, qual è la probabilità che, tra quelli scelti ce ne siano

a) 5 infettati?
b) Almeno 5 infettati?
c) 12 infettati?

$\underset{10}{\overset{\shortparallel}{m}} + \underset{40}{\overset{\shortparallel}{n}} = 50 \rightarrow$ SI SCELGONO $k = 15$

X = N° di infettati tra quelli scelti

$$X \sim Ig(m=10, n=40, k=15)$$

a) $\mathbb{P}[X=5] = p_X(5) = \dfrac{\binom{10}{5}\binom{40}{10}}{\binom{50}{15}} = 0.0949 \rightarrow$ usando R

b) $\mathbb{P}[X \geq 5] = \underbrace{\bar{F}(5)}_{\mathbb{P}[X>5]} + \underbrace{p_X(5)}_{\mathbb{P}[X=5]} = \underbrace{\bar{F}(4)}_{\mathbb{P}[X>4] = \mathbb{P}[X\geq 5]} \rightarrow$ usando R

$$= \sum_{x=5}^{15} p_X(x) = 1 - \mathbb{P}[X<5] =$$

$$= 1 - \mathbb{P}[X \leq 4] = 1 - \underbrace{F(4)}_{\sum_{x=0}^{4} p_X(x)}$$

c) $\mathbb{P}[X=12] = 0$ PERCHÈ $x=12$ NON È NEL SUPPORTO DI X.

ESERCIZIO ORIGINALE.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{SE IL FILE } i\text{-esimo È INFETTATO} \\ 0 & \text{SE NON LO È} \end{cases}$$

↳ PER $i = 1, \dots, n = 50$ $\qquad X_i \overset{iid}{\sim} \text{Ber}(p = 0.2)$

SI ASUME INDIPENDENZA TRA LE X_i
(A UN FILE NON INTERESSA SE ALTRI SONO INFETTATI)

QUINDI $\{X_1, \dots, X_{50}\}$ SONO INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE (i.i.d.)

SE DEFINIAMO $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ ALLORA

Y = N° DI FILE INFETTATI NELLA CARTELLA
↳ SUPPORTO $\{0, 1, \dots, 50\}$

$$\mathbb{P}[Y=0] = \mathbb{P}[X_1=0, X_2=0, \dots, X_{50}=0] = \prod_{i=1}^{50} \mathbb{P}[X_i=0]$$
$$= \prod_{i=1}^{50}(0.8) = 0.8^{50}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}[Y=1] = \; & \mathbb{P}[X_1=1, X_2=0, \dots, X_{50}=0] \\ & + \mathbb{P}[X_1=0, X_2=1, \dots X_{50}=0] \\ & + \\ & \vdots \\ & \mathbb{P}[X_1=0, X_2=0, \dots, X_{50}=1] \end{aligned}\right\} (0.2)(0.8)^{49}$$
$$= 50\,(0.2)(0.8)^{49}$$

IN GENERALE BASTA VEDERE CHE $Y \sim \text{Bin}(50, 0.2)$

DOMANDA EXTRA:

SU TUTTO IL CLUSTER CON TANTISSIMI FILE SI VUOLE CONTROLLARE L'INTEGRITÀ DEL SISTEMA DOPO UN SOSPETTO ATTACCO INFORMATICO. SI CONTROLLA UN FILE ALLA VOLTA E CI SI FERMA APPENA CI TROVA UNO INFETTATO. SUPPONIAMO CHE L'ATTACCO È SEMPRE DALLO STESSO VIRUS DI PRIMA. QUAL È LA PROBABILITÀ DI DOVER CONTROLLARE 10 FILE PRIMA DI FERMARCI.

W = N° DI FILE CONTROLLATI PRIMA DI FERMARCI.

SUPPORTO DI $W = \{1, 2, 3, \dots\}$

ADESSO ABBIAMO $X_i \overset{iid}{\sim} Ber(0.2)$
$i = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathbb{P}[W=1] = \mathbb{P}[X_1 = 1] = 0.2$$
$$\mathbb{P}[W=2] = \mathbb{P}[X_1=0, X_2=1] = (0.8)(0.2)$$
$$\mathbb{P}[W=3] = \mathbb{P}[X_1=0, X_2=0, X_3=1] = (0.8)^2(0.2)$$

$$W \sim Geom(p=0.2)$$