Ricordiamo dalla lezione scorsa:

Esercizio: Calcolare il volume medio della sfera di raggio R, dove R è una variabile casuale uniforme discreta con valori in {1,2,3}

$$V = V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$p_R(r) = \mathbb{P}[R=r] = \frac{1}{3} \quad \text{per } r \in \{1,2,3\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[V(R)] = \sum_{r=1}^{3} V(r)\, p_R(r)$$

$$= \sum_{r=1}^{3} \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}\pi(1+8+27)$$

$$= \frac{4}{9}\pi(36) = 16\pi$$

NOTA: $\mathbb{E}[R] = \sum_{r=1}^{3} r\, p_R(r) = \sum_{r=1}^{3} r \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1+2+3)$

$$= \frac{6}{3} = 2$$

$$V(\mathbb{E}[R]) = \frac{4}{3}\pi(\mathbb{E}[R])^3 = \frac{4}{3}\pi\, 2^3$$

$$= \frac{32}{3}\pi \neq 16\pi = \mathbb{E}[V(R)]$$

IN GENERALE: $\mathbb{E}[g(X)] \neq g(\mathbb{E}[X])$

ECCEZIONE: SE g È UNA FUNZIONE LINEARE:

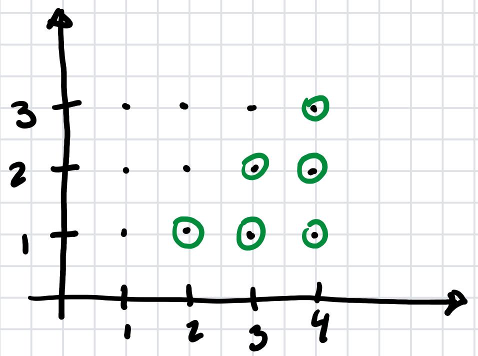
$$g(x) = aX + b \; ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

IN QUESTO CASO

$$\mathbb{E}[g(X)] = a\,\mathbb{E}[X] + b = g(\mathbb{E}[X])$$

Esercizio: Calcolare l'area media del triangolo definito dai vertici (0,0), (X,0), (0,Y), dove X e Y sono variabili casuali uniformi discrete con $X > Y$, per X in {2,3,4} e Y in {1,2,3}

SUPPORTO DI (X,Y)

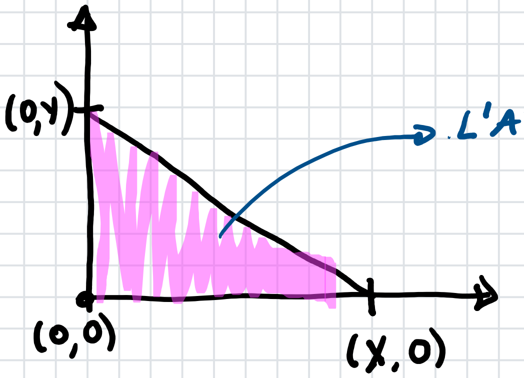


AVENDO 6 POSSIBILI COPPIE DI VALORI (x,y) LA COPPIA (X,Y) SARÀ UNIFORME SE OGNI POSSIBILE (x,y) HA PROBABILITÀ $\frac{1}{6}$

$\Rightarrow p_{XY}(x,y) = \frac{1}{6}$ PER

$$\{(x,y) : y \in \{1,2,3\}, x \in \{y+1, \dots, 4\}\} = \{(x,y) : x \in \{2,3,4\}, y \in \{1,2,3\}, x > y\}$$

IL TRIANGOLO:



L'AREA DEL TRIANGOLO:

$$A = A(X,Y) = \frac{XY}{2}$$

$$E[A] = E[A(X,Y)] = \sum_y \sum_x A(x,y)\, p_{XY}(x,y)$$

$$= \sum_{y=1}^{3} \sum_{x=y+1}^{4} \frac{xy}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{12}(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4)$$

$$= \frac{1}{12}(2+3+4+6+8+12) = \frac{35}{12}$$

$g(X,Y) = X$

$$E[X] = \sum_{y=1}^{3} \sum_{x=y+1}^{4} x \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(2+3+4+3+4+4) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{3} \sum_{x=y+1}^{4} y\, \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+1+1+2+2+3) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$A(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]) = \frac{\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{25}{9}$$

ANCHE IN QUESTO CASO

$$A(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]) \neq \mathbb{E}[A(X,Y)]$$

IN GENERALE $g(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]) \neq \mathbb{E}[g(X,Y)]$

<u>ECCEZIONI</u>:

1) Trasformazioni lineari:

$$g(X,Y) = aX + bY + c$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(X,Y)] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y] + c = g(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$$

2) SE $X \perp Y$ E $g(X,Y) = aX + bY + cXY + d$

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y] + c\,\underbrace{\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]} + d$$

PERCHÈ ??

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_x \sum_y xy\,\underbrace{p_{XY}(x,y)} = \sum_x \sum_y xy\,\overbrace{p_X(x)}^{\text{NON DIP. DA } Y}\,p_Y(y)$$

SE $X \perp Y$

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$$

$$= \sum_x \Big[x\,p_X(x) \underbrace{\sum_y y\,p_Y(y)}_{\text{NON DIP DA } X}\Big]$$

$$= \Big[\sum_y y\,p_Y(y)\Big]\Big[\sum_x x\,p_X(x)\Big]$$

$$= \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}[X]$$

<u>NOTA</u>: $g(X,Y) = aX + bY = X$ SE $a=1,\ b=0$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[g(X,Y)] = g(\underline{\mathbb{E}[X]}, \underline{\mathbb{E}[Y]})$$

- $g(x,y) = x$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[g(x,y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)\, p_{XY}(x,y)$$

$$= \sum_x \sum_y x\, p_{XY}(x,y) = \sum_x x \underbrace{\sum_y p_{XY}(x,y)}_{p_X(x)}$$

$$= \sum_x x\, p_X(x)$$

- QUELLO CHE VALE PER 2 VARIABILI VALE PER n (O PER ∞)

SE ABBIAMO $X_1, X_2, \dots, X_n$ V.C.

E $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbb{E}[X_i]$$

IN PARTICOLARE, PRENDENDO $a_i = 1,\ i = 1, \dots, n$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$$

ESERCIZIO: CALCOLARE LA MEDIA DI UNA V.C. $X \sim \text{Bin}(n,p)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

SE $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \overset{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$

INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE

ALLORA $X = \sum_{i=1}^n Y_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n Y_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i]$

$$= \sum_{i=1}^n p = np$$

- SAPPIAMO CHE $\mu_X = \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$

SAPPIANO CHE $\mathbb{E}[aX + b] = a\,\mathbb{E}[X] + b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

PRENDIAMO $a = 1, \quad b = -\mathbb{E}[X]$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[aX+b] = \mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}[X]\right] = \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{a\,\mathbb{E}[X]} \underbrace{- \mathbb{E}[X]}_{b} = 0$$

- L'OPERAZIONE $Y = X - \mathbb{E}[X]$ SI CHIAMA CENTRARE LA VARIABILE X (SU ZERO). E Y SI CHIAMA UNA VARIABILE CENTRATA.

SI PUÒ SEMPRE "DECENTRARE" UNA VARIABILE PARTENDO DA Y CON $\mathbb{E}[Y]=0$ SI PUÒ DEFINIRE $X = Y + \mu_X$ E SI AVRÀ $\mathbb{E}[X] = \mu_X$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, p_X(x) = \sum_x \bar{F}_X(x) = \sum_x (1 - F(x))$

ESEMPIO:

$$X \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow \bar{F}_X(x) = (1-p)^x$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x = \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q}}_{\text{SERIE GEOMETRICA CONVERGE SE } |q|<1} = \frac{1}{p}$$

- TORNANDO AL ESERCIZIO DEL AREA DEL TRIANGOLO.

  SE SAPPIAMO CHE L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO È 2.

  $B = [Y = 2]$ → QUESTO EVENTO È CERTO

$$\mathbb{E}[Y \mid B] = \mathbb{E}[Y \mid Y = 2] = \mathbb{E}[2] = 2$$

DA PENSARE PER LA PROSSIMA LEZIONE

$$\mathbb{E}[A \mid B] = \mathbb{E}\left[\frac{XY}{2} \mid Y = 2\right]$$