Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 11: 30 de abril

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez y Laura Luis*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

11.1. Funciones generatrices

Considere el multiconjunto:

$$\{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3\}$$

donde α, β, γ pueden variar de la siguiente forma: $0 \leq \alpha \leq 2$, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 2$.

Ejemplos de posibles multiconjuntos bajo esta restricción:

k	
0	$\emptyset$
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$
2	$\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{3,3\}$
3	$\{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,2,3\}, \{2,3,3\}$
4	$\{1,1,2,3\}, \{1,2,3,3\}, \{1,1,3,3\}, \{1,2,3,3\}$
5	$\{1,1,2,3,3\}$

Recordemos que $H_r^n = \binom{r+n-1}{r}$ es equivalente a las soluciones de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ con $x_i \geq 0$. Pero ahora en este caso cada uno de los coeficientes varia por α, β, γ.

Se representará $\{\alpha \cdot 1, \beta \cdot 2, \gamma \cdot 3\}$ como el polinomio $(1 + x_1 + x_1^2)(1 + x_2)(1 + x_3 + x_3^2)$ donde cada uno de los coeficientes de los términos es el número de veces que se selecciona dicho elemento.

Expandiendo, se obtiene:

$$\begin{aligned}(1 + x_1 + x_1^2)(1 + x_2)(1 + x_3 + x_3^2) = \quad & x_2x_3^2x_1^2 + x_3^2x_1^2 + x_2x_1^2 + x_2x_3x_1^2 + x_3x_1^2 + x_1^2 + x_2x_3^2x_1 + x_3^2x_1 + x_2x_1 \\ & + x_2x_3x_1 + x_3x_1 + x_1 + x_2x_3^2 + x_3^2 + x_2 + x_2x_3 + x_3 + 1\end{aligned}$$

¿Cuántos términos de grado k con $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ hay en este polinomio?

k	
0	1
1	$x_1, \quad x_2, \quad x_3$
2	$x_1^2, \quad x_3^2, \quad x_1x_2, \quad x_1x_3, \quad x_2x_3$
3	$x_1^2x_2, \quad x_1^2x_3, \quad x_1x_3^2, \quad x_2, x_3^2, \quad x_1x_2x_3$
4	$x_1^2x_3^2, \quad x_1x_2x_3^2, \quad x_1^2x_2x_3$
5	$x_1^2x_2x_3^2$

Con los cuales se puede crear una biyección con los correspondientes elementos del multiconjunto.

- Problema combinatorio: El número de multiconjuntos de tamaño k en un conjunto de tres elementos con las restricciones dadas para α, β, γ.
- Problema algebraico: El número de términos de grado k que aparece en el polinomio de variables x_i con las restricciones dadas para α, β, γ.

11.1.1. Función Generatriz

Sea $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$ una sucesión de números. Su función generatriz se define como:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Ejemplo: Sea $(a_n) = \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots\right)$. Entonces su función generatriz es:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

Adicionalmente, haciendo uso del teorema del binomio se tiene que:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^r$$

Ejemplo: Sea $(a_n) = \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots\right)$. Entonces su función generatriz es:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

Adicionalmente, haciendo uso del teorema del binomio se tiene que:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n$$

Más aún, si $\alpha \in \mathbb{R}$, usando la definición de coeficiente binomial se tiene que:

$$(1 \pm x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r$$

$$= 1 \pm \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \pm \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Sea $\alpha = -1$:

$$(1-x)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-1}{r} x^r$$

$$= 1 - (-1)x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 - \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

En general se puede demostrar que:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \binom{3+n-1}{3}x^3 + \dots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{r} x^r$$

Ejercicio:
Encuentre el número de formas de seleccionar cuatro elementos del multiconjunto $\{2 \cdot B, 1 \cdot C, 2 \cdot D, 1 \cdot E\}$.

Solución:
Sea su polinomio correspondiente $(1 + x_1 + x_1^2)(1 + x_2)(1 + x_3 + x_3^2)(1 + x_4)$. Ademas $x_1 = x_2 = x_3 = x$. Por lo tanto, tenemos que el polinomio es $(1+x+x^2)(1+x)(1+x+x^2)(1+x)$. Expandiendo se obtiene:

$$x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 10x^3 + 8x^2 + 4x + 1$$

Dado que el coeficiente que acompaña al término de grado cuatro es 8, eso quiere decir que hay 8 formas de seleccionar cuatro elementos del multiconjunto dado. Explícitamente son:

- $BBCD$
- $BBDD$
- $BCDD$
- $BDDE$
- $BBCE$
- $BBDE$
- $BCDE$
- $CDDE$

Ejercicio:
Cada uno de los tres niños de un salón lanza un dado una vez. Encuentre el número de formas en que pueden obtener un total de 14.

Solución:
En primer lugar, nótese que tenemos la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14$$

donde $\forall x_i$ se tiene la restricción $1 \leq x_i \leq 6$. Si lo expresamos como un polinomio se obtiene:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = \\ (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$$

Reescribiendo,

$$\begin{aligned}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 &= \left[x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\right]^3 \\ &= x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3\end{aligned}$$

Por proposición del libro que dice que $(1 + x + \ldots + x^r)^k = \left(\dfrac{1 - x^{r+1}}{1 - x}\right)^k$, se tiene que:

$$\begin{aligned}x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3 &= x^3\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^3 \\ &= x^3(1 - x^6)^3\left(\frac{1}{1 - x}\right)^3 \\ &= x^3(-x^{18} + 3x^12 - 3x^6 + 1)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r + 3 - 1}{r}x^r\right)\end{aligned}$$

Queremos el coeficiente del término de grado 14, que se obtiene de:

$$x^3(-3x^6+1)\left(\binom{5+3-1}{5}x^5+\binom{11+3-1}{11}x^{11}\right)=\left(-3\binom{5+3-1}{5}+\binom{11+3-1}{11}1\right)x^{14}$$

$$=(-63+78)x^{14}$$

$$=15x^{14}.$$

Es decir, hay 15 formas que los chicos pueden sacar 14.

Los valores explícitos son:

In [3]:
```
for i in range(1,7):
    for j in range(1,7):
        for k in range(1,7):
            if i+j+k==14:
                print (i,j,k)
```

```
2 6 6
3 5 6
3 6 5
4 4 6
4 5 5
4 6 4
5 3 6
5 4 5
5 5 4
5 6 3
6 2 6
6 3 5
6 4 4
6 5 3
6 6 2
```

Tarea

Para la próxima clase: Presentación del artículo de la base de datos.