Priprave na Analiza 1 ustni izpit

Mia Žele

Kazalo

Povzetek

Dokument je namenjen pripravam na ustni izpit. Tu bodo zbrani najpomembnejši izreki, trditve in definicije, ki jih bo treba znati dokazati.

Poglavje 1

Števila

Pomembne definicije in izreki

Naloge

Poglavje 2

Zaporedja

Pomembne definicije in izreki

Naloge

Poglavje 3

Vrste

Pomembne definicije in izreki

Naloge

1. definicija konvergence vrste
2. konvergenca geometrijske vrste
3. trditev povezana s konvergenco vrste
4. harmonična vrsta
5. primerjalni kriterij
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
7. kvocietni kriterij
8. korenski ali Cauchyjev kriterij
9. Raabejev kriterij
10. definicija absolutna in pogojna konvergenca
11. če vrsta abs. konvergira, potem je konvergentna
12. Leibnizov kriterij za alternirajoče vrste
13. preureditve vrste
14. če je vrsta absolutno konvergentna, potem je preureditev tudi konvergentna
15. produkt vrst
16. dvakratne vrste

Poglavje 4

Funkcije in zveznost

Funkcije realne spremenljivke

Pomembne definicije in izreki

Naloge

1. Kdaj sta funkciji enaki?
2. Zožitev funkcije.
3. Katere podmnožice $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ so grafi?
4. Komponiranje funkcij
5. Kaj je inverzna funkcija od funkcije f?
6. Graf inverzne funkcije.
7. Kdaj je funkcija (navzgor/navzdol) omejena?
8. Supremum, infimum, maksimum, minimum.
9. Osnovne operacije s funkcijami.

Zveznost

Pomembne definicije in izreki

Naslednje tri definicije so si ekvivalentne.

Definicija 4.0.1. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija in $a \in D$. Funkcija f je zvezna v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse $x \in D$ velja: če je $|x - a| < \delta$, potem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Definicija 4.0.2. f je zvezna v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da se δ-okolica točke a s funkcijo f preslika v ε-okolico točke $f(a)$.

Definicija 4.0.3. f je zvezna v točki $a \in D$, če za vsako okolico $\mathcal{V}$ od $f(a)$ obstaja okolica $\mathcal{U}$ od a v D, da velja: $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$

Izrek 4.0.4. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$. Potem je funkcija f zvezna v točki a natanko tedaj, kadar za vsako zaporedje (x_n) v D, ki konvergira proti a, zaporedje $(f(x_n))$ konvergira proti $f(a)$.*

Naloge

1. Karakterizacija zveznosti, grafični prikaz, primeri nezvenzih funkcij.
2. Primerjava različnih definicij zveznosti: standardna, z okolicami.
3. Dirichletova funkcija.
4. Opis zveznosti z zaporedji.
5. Če sta f in g zvezni v a, potem so tudi $f + g, f - g, fgin\frac{f}{g}(g(x) \neq 0)$ zvezne v a.
6. Zveznost kompozituma.
7. Kdaj pravimo, da je funkcija zvezna?
8. Definicija limite funkcije.
9. Leva in desna limita.
10. Definicija (strogo) naraščajoče/padajoče funkcije; kaj je skok funkcije?
11. Monotona funkcija definirana na zaprtem intervalu ima kvečjemu končno mnogo točk nezvevnosti.

12. Limita funkcije, ko gre x preko vsake meje.
13. Cauchyjev pogoj.
14. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$
16. Definicija enakomerne zveznosti.
17. Zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu je enakomerno zvezna.
18. Lema o pokritjih. (s tem dokažeš zgornji izrek)
19. Bisekcija. Izrek o vloženih intervalih.
20. Zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu je omejena (doseže minimum in maksimum).
21. Inverz od strogo monotone zvezne funkcije definirane na zaprtem intervalu je zvezen.
22. Zveznosti posebnih funkcij: eksponentna, logaritemska, kotne, ciklometrične.

Poglavje 5

Odvod

Pomembne definicije in izreki

Vse izreke in trditve je treba znati dokazati!

Definicija 5.0.1. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Če obstaja limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, jo imenujemo odvod funkcije f v točki a in jo označimo s $f'(a)$ in rečemo, da je f odvedljiva v točki a.

Izrek 5.0.2. *Nja bo funkcija f definirana v okolici točke a. Če je f odvedljiva v a, potem je f zvezna v točki a.*

Trditev 1. *Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Funkcija f je odvedljiva v točki a natanko tedaj, kadar obstajata levi in desni odvod funkcije f v točki a in sta enaka.*

Izrek 5.0.3. *Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Potem je f diferenciabilna v točki a natanko tedaj, kadar je f odvedljiva v točki a. Tedaj velja:*

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h$$

Izrek 5.0.4. *Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $c \in (a, b)$. Če je c lokalni ekstrem funkcije f, potem $f'(c) = 0$.*

Izrek 5.0.5. Rollov izrek*: Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Če je $f(a) = f(b)$, potem obstaja $c \in (a, b) : f'(c) = 0$.*

Izrek 5.0.6. Lagrangeev izrek*: Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Potem obstaja $c \in (a, b)$, da je $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Trditev 2. *Denimo,da je funkcija f dvakrat odvedljiva v okolici točke a in denimo, da je a stacionarna točkka od f.*

1. *Če je $f''(x) \leq 0$ za vse x v neki okolici točke a, potem ima f v a lokalni maksimum.*

2. *Če je $f''(x) \geq 0$ za vse x v neki okolici točke a, potem ima f v a lokalni minimum.*

Definicija 5.0.7. Naj bo funkcija f definirana na intervalu I. Pravimo, da je f **konveksna** na I, če velja: za vsak $a, b \in I, a < b$ velja:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \text{ za vse } x \in [a, b].$$

Definicija 5.0.8. Naj bo funkcija f definirana na intervalu I. Pravimo, da je f **konkavna** na I, če velja: za vsak $a, b \in I, a < b$ velja:

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \text{ za vse } x \in [a, b].$$

Izrek 5.0.9. *Naj bo f odvedljia funkcija na odprtem intervalu I. Potem je f konveksna na I natanko tedaj, kadar za vsaka $a, x \in I$ velja:*

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Izrek 5.0.10. *Naj bo f odvedljiva na odprtem intervalu I. Potem je f konveksna natanko tedaj, kadar je odvod f' naraščajoča na I. Če je f dvakrat odvedljiva na I, potem je f konveksna natanko tedaj, kadar je $f'' \geq 0$ na I.*

Definicija 5.0.11. Naj bo funkcija f definirana na intervalu I. Če za $a \in I$ obstaja okolica točke a, da je na eni strani f konveksna, na drugi točke a znotraj te okolice pa f konkavna, potem rečemo, da ima f v a **prevoj**.

Lema 1. *Cauchyjev izrek: Naj bosta f in g zvezni funkciji na $[a, b]$, odvedljivi na (a, b) in naj velja, da $g'(x) \neq 0$ za vse $x \in (a, b)$. Tedaj obstaja $c \in (a, b)$:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Izrek 5.0.12. ***L'Hôpitalovo pravilo**: Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na (a, b) in denimo, da velja:*

1. *$g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ za vse $x \in (a, b)$,*

2. *$\lim_{x \searrow a} f(x) = 0$ in $\lim_{x \searrow a} g(x) = 0$.*

Če obstaja $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, potem obstaja* $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *in limiti sta enaki.*

Izrek 5.0.13. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na (a, b), naj bo $g'(x) \neq 0$ za vse $x \in (a, b)$ in $\lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$ (ali $-\infty$). Če obstaja $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki.*

Definicija 5.0.14. Pot v ravnini je preslikava $F : I \to \mathbb{R}^2$, kjer je I interval, $x \in I : F(x) = (\alpha(x), \beta(x))$, in kjer sta funkciji α in β zvezni. Tir poti je množica $K = F(I) = (\alpha(x), \beta(x)); x \in I$. Preslikavo F imenujemo parametrizacija tira poti K.

Izrek 5.0.15. *Naj bo $F : I \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot, t_0 iz notranjosti intervala I in denimo, da je $\dot{F}(t_0) \neq 0$. Če je $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$, potem obstaja tak $\delta > 0$, da lahko tir poti $K = F(t); |t - t_0| < \delta$ zapišemo kot graf neke odvedljive funkcije f nad intervalom U okrog točke $\alpha(t_0)$: $K = (x, f(x)); x \in U$. Velja: $f'(\alpha(t)) = \frac{\dot{\beta(t)}}{\dot{\alpha(t)}}, |t - t_0| < \delta$.*

Naloge

1. Karakterizacija odvoda.
2. Splošna definicija.
3. Potreben pogoj za odvedljivost.
4. Levi in desni odvod.
5. Kdaj je funkcija zvezno odvedljiva?
6. Kdaj je funkcija odsekoma zvezno odvedljiva?
7. Kdaj je funkcija f diferenciabilna v točki a?
8. Pravila za odvajanje.
9. Odvod inverza.
10. Odvodi elementarnih funkcij.
11. Odvodi višjega reda.
12. Rollov in Lagrangeev izrek, povezava med njima in njegove posledice.
13. Lokalni ekstremi.
14. Stacionarna točka.
15. Iskanje globalnih ekstremov odvedljivih funkcij, kandidati.
16. Definicija konveksnosti in konkavnosti.
17. Kako rišemo grafe funkij s pomočjo odvoda?
18. L'Hôpitalovo pravilo in njegova uporaba.
19. Kako lahko podajamo krivulje?
20. Kaj je pot v ravnini, tir poti, parametrizacija?
21. Kdaj pravimo, da je pot zvezno odvedljiva?

Poglavje 6

Integral