

Notas útiles para los ejercicios de demostraciones en grafos

Nieves Atienza

September 12, 2024

Implicación, enunciado, afirmación,...



- ▶ A implica B
- ▶ A es condición suficiente para B
- ▶ B es condición necesaria para A
- ▶ Si A, entonces B

Partiendo de que se verifica A debemos poder concluir B **usando alguna técnica de demostración.**

Ejemplo: "**Todo árbol es bipartito.**", Si un grafo es un árbol (A) entonces es bipartito (B)

Negación de $(A \implies B)$: $A \not\implies B$



- ▶ A no implica B (No confundir con A implica NB)
- ▶ Puede ocurrir A y no ocurrir B
- ▶ Existe al menos un ejemplo donde ocurre A y no B

Debemos buscar un **contraejemplo**

Recíproco de $(A \implies B)$: $B \implies A$



- ▶ B implica A
- ▶ B es condición suficiente para A
- ▶ A es condición necesaria para B
- ▶ Si B, entonces A

Partiendo de que se verifica B debemos poder concluir A **usando alguna técnica de demostración.**

Doble implicación



- ▶ A implica B
- ▶ B implica A
- ▶ A es condición necesaria y suficiente para B y viceversa
- ▶ B es una caracterización de A y viceversa

Contrarecíproco de $(A \implies B)$: $NO(B) \implies NO(A)$



- ▶ No B implica No A
- ▶ No B es condición suficiente para No A
- ▶ No A es condición necesaria para No B
- ▶ Si No B, entonces No A

El contrarecíproco de $(A \implies B)$ es equivalente a $(A \implies B)$:

Partiendo de que se verifica NB debemos poder concluir NA **usando alguna técnica de demostración**. Otro modo de demostrar $(A \implies B)$

Algunas negaciones importantes

- ▶ **La negación de un para todo** (es decir de una verdad universal, o una implicación) **es un existe al menos un caso** que no es cierto. Equivalencia: Existe un contraejemplo.
- ▶ **La negación de un existe** (es decir una verdad existencial) es un **todo elemento del conjunto** verifica lo contrario. Equivalencia: Debes demostrar que todos los elementos verifican lo contrario mediante una técnica de demostración.

Tipos de demostración

- ▶ Directo
- ▶ Reducción al absurdo
- ▶ Inducción simple y compuesta
- ▶ Contrarecíproco
- ▶ Contraejemplo
- ▶ Otros tipos: Probabilística, conjunto minimal...

Método directo

Se trata de partir de A e ir paso a paso aplicando argumentos lógicos basados en verdades conocidas hasta llegar a B.

Método de Reducción al absurdo

- ▶ Se trata de suponer que lo que quiero demostrar no es cierto y por tanto es cierto su negación, y siguiendo una secuencia de pasos lógicos llegaré a algo contradictorio que me indica que mi suposición inicial es falsa y por tanto cierto lo contrario que es lo que quería demostrar.
- ▶ Se basa en el hecho de que sólo hay una verdad entre una afirmación y su negación.
- ▶ Para demostrar que $A \implies B$ demuestro que es falsa su negación $A \not\Rightarrow B$.

Método de inducción simple

Sea P una propiedad relacionada con el número natural n (n puede ser el número de aristas o el número de vértices o cualquier otro elemento contable).

- ▶ se demuestra que P es cierta para un primer caso, (normalmente un valor bajo de n),
- ▶ se prueba que suponiendo que P es cierta para k (hipótesis de inducción) entonces lo es para $k + 1$,

En ese caso, la propiedad P es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Método de inducción compuesta

Sea P una propiedad relacionada con el número natural n .

- ▶ se demuestra que P es cierta para un primer caso, (normalmente un valor bajo de n),
- ▶ se prueba que suponiendo que P es cierta para todo $m \leq k$ (hipótesis de inducción compuesta) entonces lo es para $k + 1$,

en ese caso, la propiedad P es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Método del contrarecíproco

- ▶ Hemos visto que $A \implies B$ y su contrarecíproco $NB \implies NA$ son equivalentes.
- ▶ Este mecanismo es aconsejable cuando no sabemos cómo trabajar a partir de la hipótesis A y, en cambio, la negación de B proporciona un buen punto de partida.

Método del contraejemplo

- ▶ A veces, la validez de una propiedad se refuta dando un ejemplo en el que no se cumple dicha propiedad: habremos probado entonces que, en general, la propiedad en cuestión es falsa.
- ▶ A dichos ejemplos que echan abajo la validez de la propiedad se les conoce con el nombre de contraejemplos.
- ▶ En muchas ocasiones, cuando nos enfrentamos a resolver un problema y vemos que la propiedad que queremos demostrar no tiene un ataque sencillo, nos podemos plantear la posibilidad de encontrar un contraejemplo.