



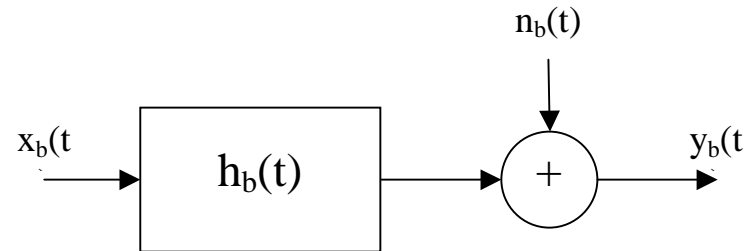
COURS ELE207

Modulations Multiporteuses

C. ALEXANDRE/ D. LE RUYET

CNAM

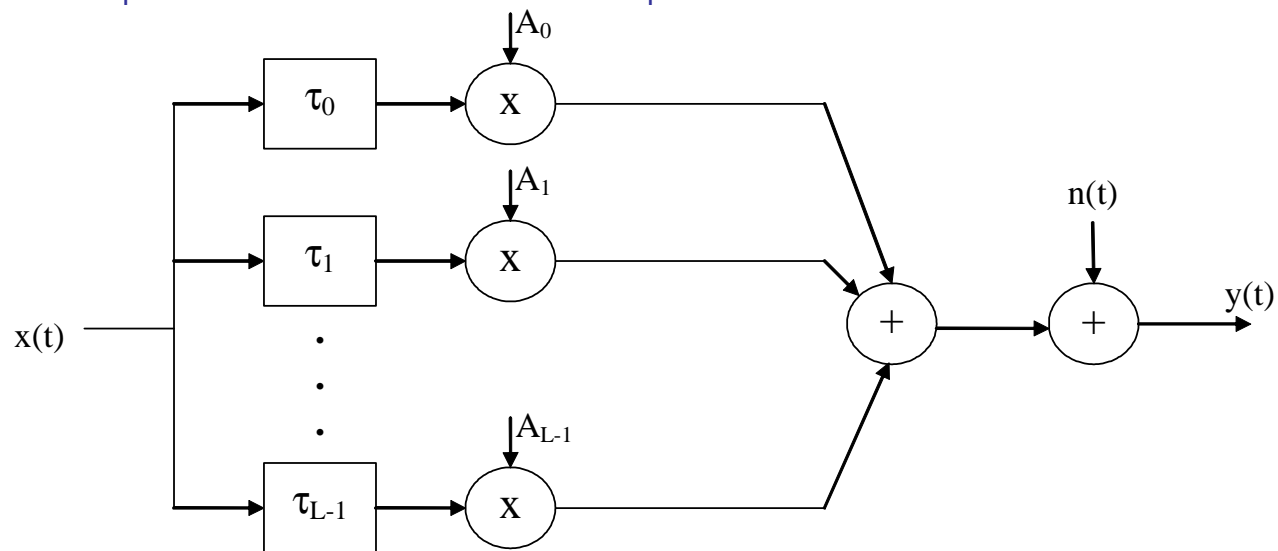
Canal sélectif en fréquence



$h_b(t)$ est la réponse impulsionnelle du canal

Un canal sélectif en fréquence est un canal multi-trajet

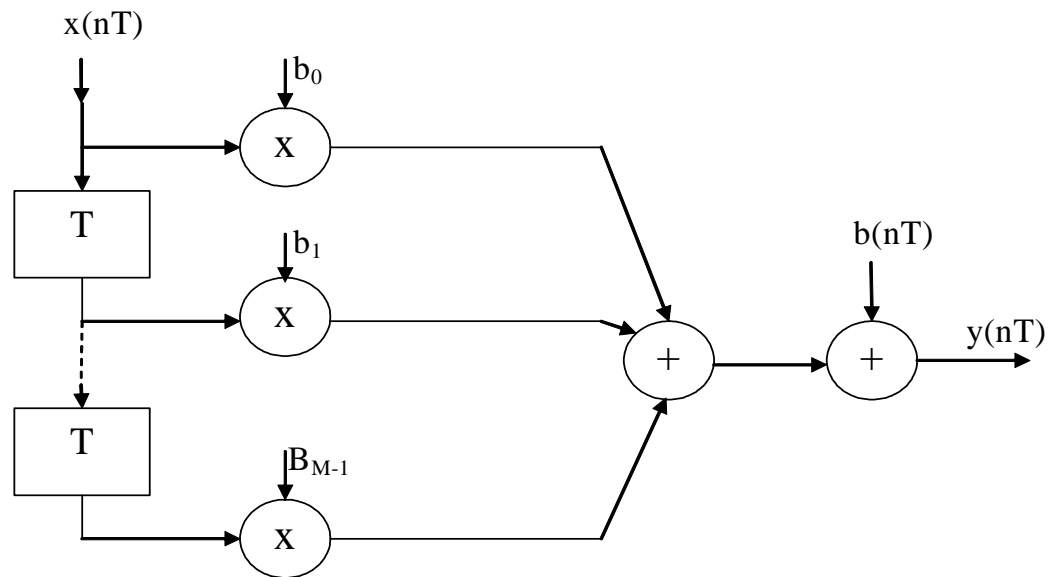
Chaque trajet est un canal non-sélectif en fréquence d'atténuation complexe A_i et associé à un retard τ_i .



Canal sélectif en fréquence

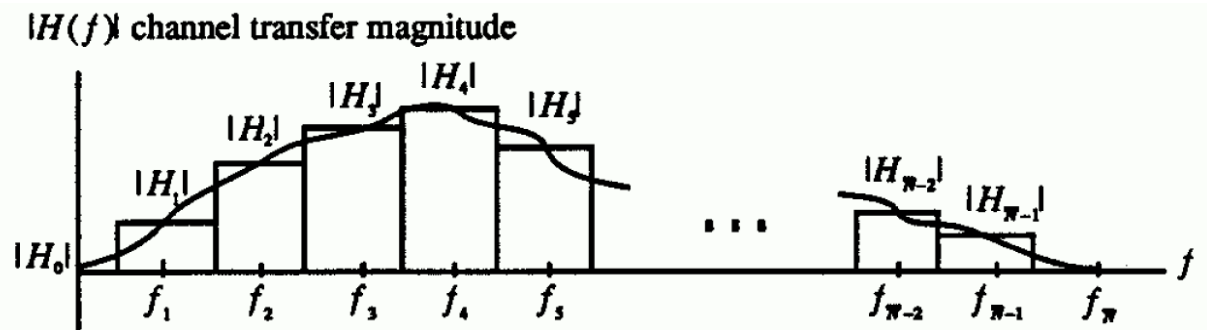
On peut modéliser le canal multi-trajet avec un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR).

Le retard maximum du canal est égal au nombre de coefficients du FIR multiplié par T .



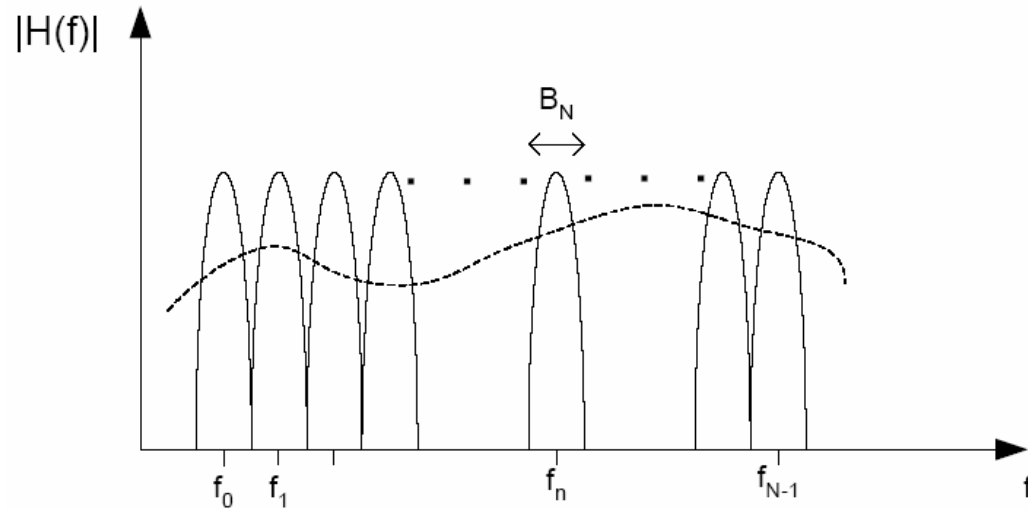
Modulation multi-porteuses : principe

$H(f)$, la réponse en fréquence du canal peut être décomposée en une succession de sous-canaux autour de chaque porteuse

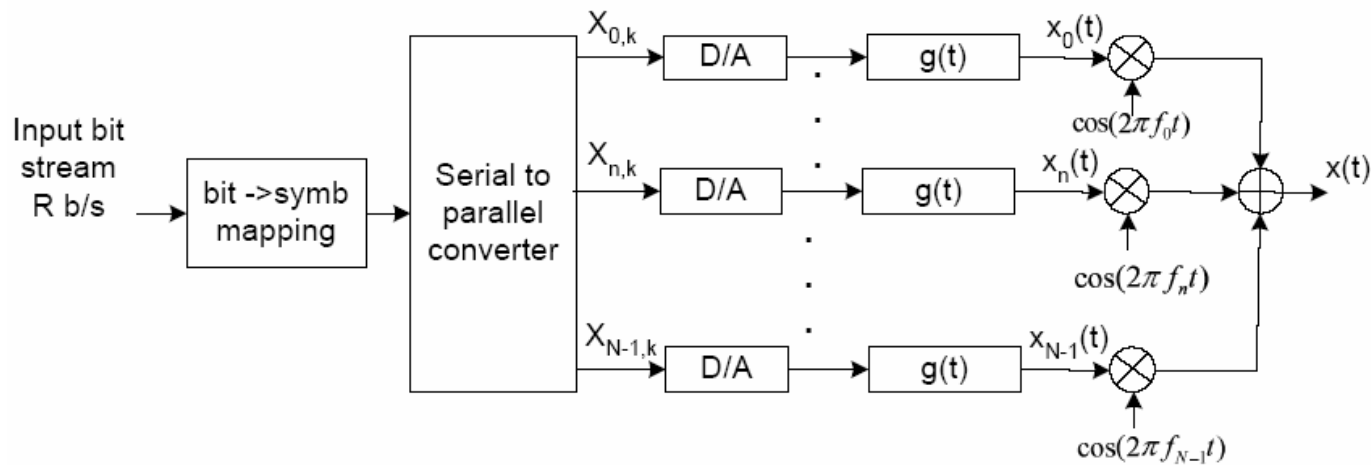


Si les sous-canaux ont une bande de fréquence suffisamment étroite, ils sont non-sélectifs en fréquence. Chaque sous-canal est affecté par un coefficient d'atténuation complexe $H(f_n)$

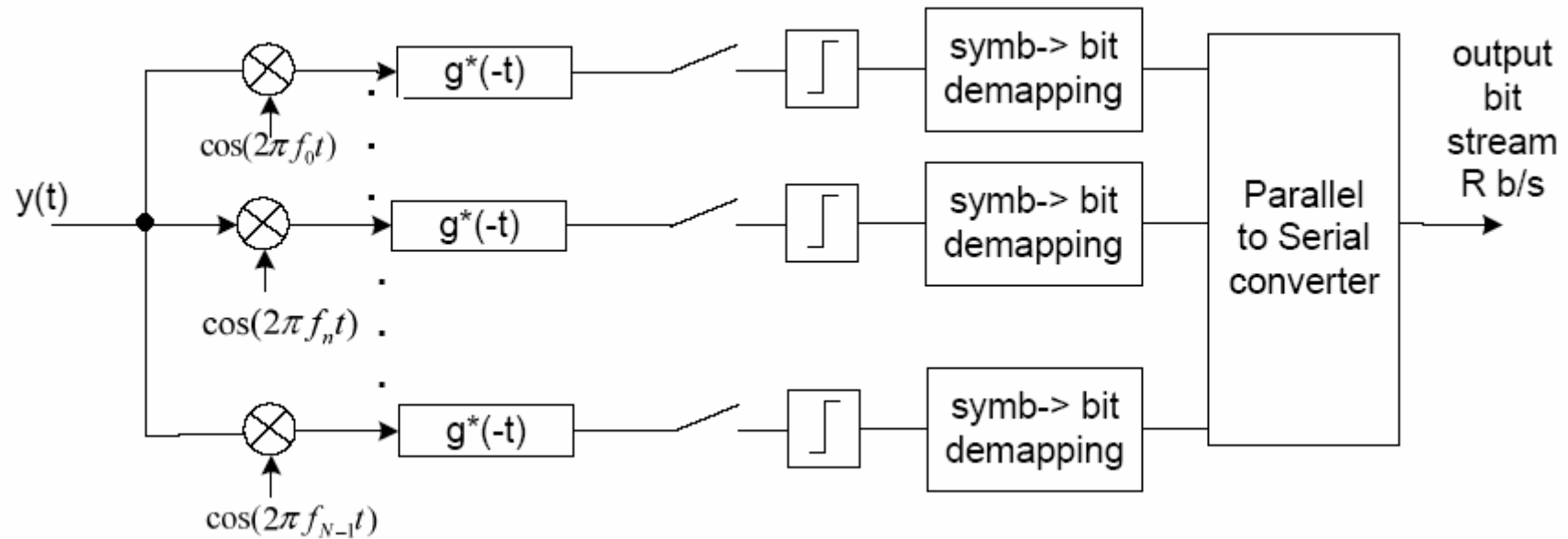
Modulation multi-porteuses : émetteur



$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n(t) \cos(2\pi f_n t)$$



Modulation multi-porteuses : récepteur

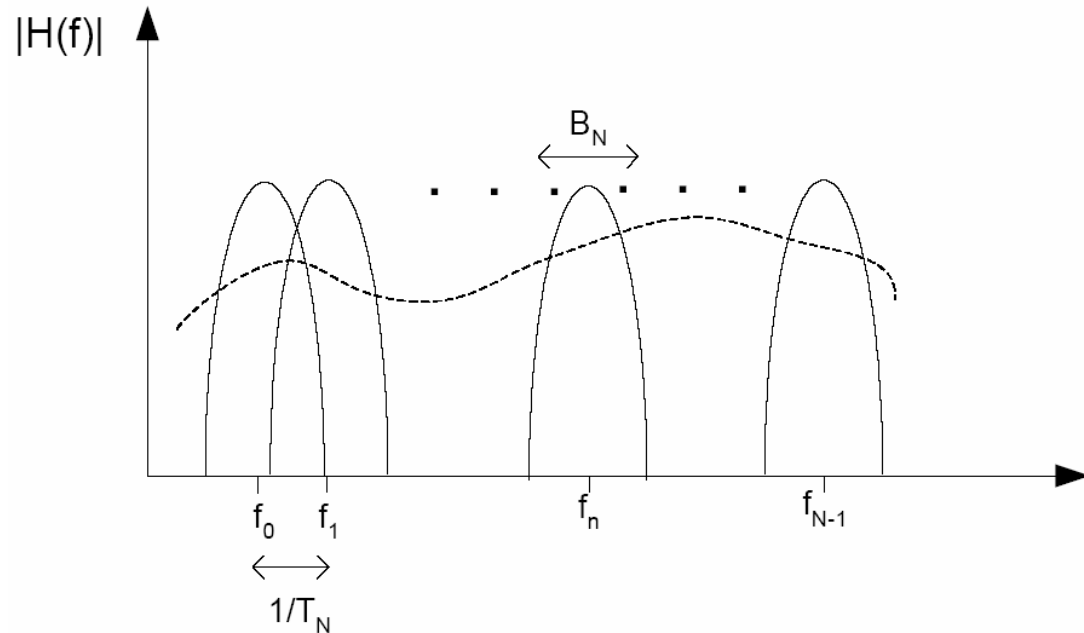


Modulation multi-porteuses : limitations

- Par rapport à une modulation mono-porteuse, la modulation multi-porteuses ne devrait rien changer au débit total $R = N.R_N$, à la bande occupée $B = N.B_N$ et au taux d'erreur en présence de bruit.
- En pratique, il faudra avoir une bande occupée $B = NB_N = \frac{N(1 + \epsilon)}{T_N}$ ce qui est spectralement inefficace.
- La réalisation des N modulateurs et démodulateurs indépendants est très difficile à réaliser
- Cette méthode a été abandonnée au profit des systèmes multi-porteuses avec recouvrement.

Modulation multi-porteuses avec recouvrement

On améliore l'efficacité spectrale en utilisant des canaux qui se recouvrent.



Les sous-porteuses doivent rester orthogonales pour pouvoir être séparées à la démodulation. Les sous-porteuses doivent donc former une base de fonctions orthogonales sur la durée d'un symbole T_N .

Modulation multi-porteuses avec recouvrement

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_N} \cos(2\pi(f_0 + n/T_N)t) \cos(2\pi(f_0 + m/T_N)t) dt \\ &= \int_0^{T_N} 0.5 \cos(2\pi(n - m)t/T_N) dt + \int_0^{T_N} 0.5 \cos(2\pi(2f_0 + n + m)t/T_N) dt \\ &\approx \int_0^{T_N} 0.5 \cos(2\pi(n - m)t/T_N) dt \\ &= 0.5T_N \delta(n - m) \end{aligned}$$

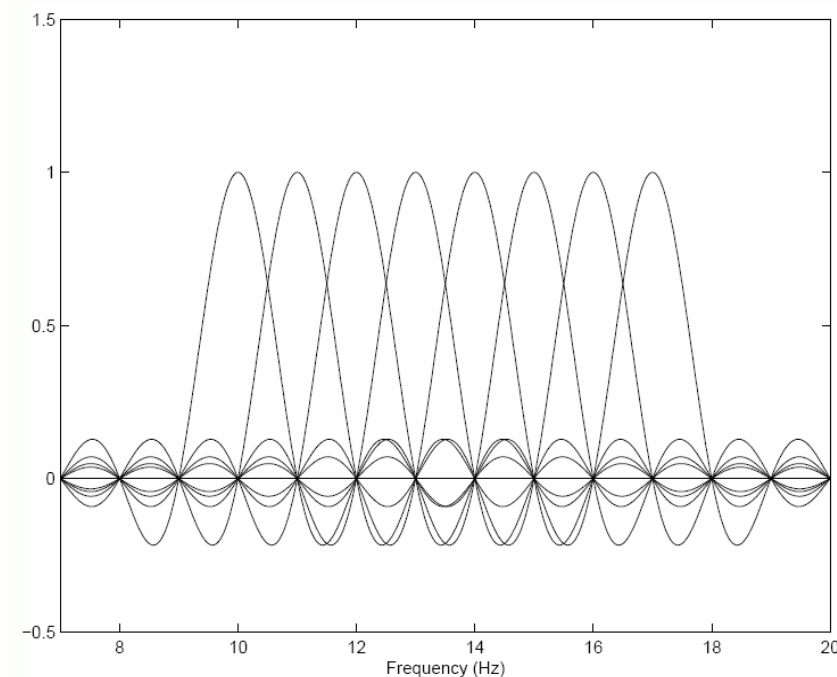
$g(t) \cos(2\pi(f_0 + n/T_N)t), n = 0, 1, \dots, N - 1$ forme un jeu de fonctions de bases orthogonales en choisissant une forme d'onde $g(t)$ appropriée

Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

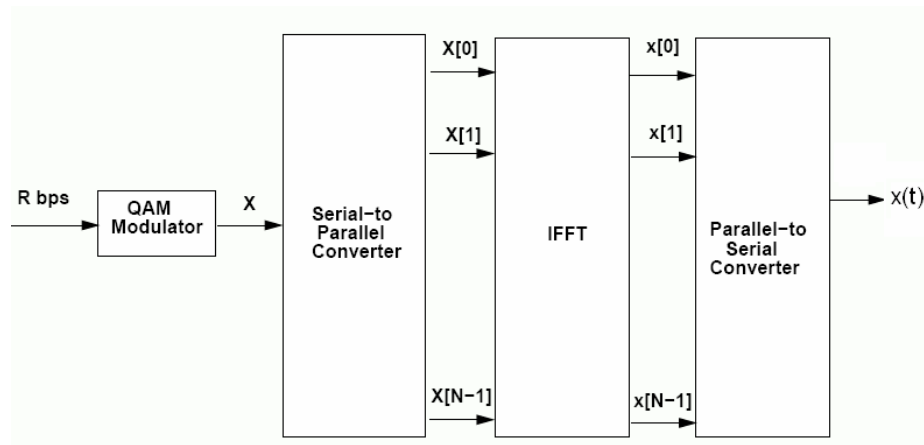
Une méthode simple et peu coûteuse pour réaliser une modulation multi-porteuses consiste à utiliser la TFD et la TFD inverse.

$$\text{DFT}\{x[n]\} = X[i] \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n i}{N}}, \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad \text{IDFT}\{X[i]\} = x[n] \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} X[i] e^{j \frac{2\pi n i}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

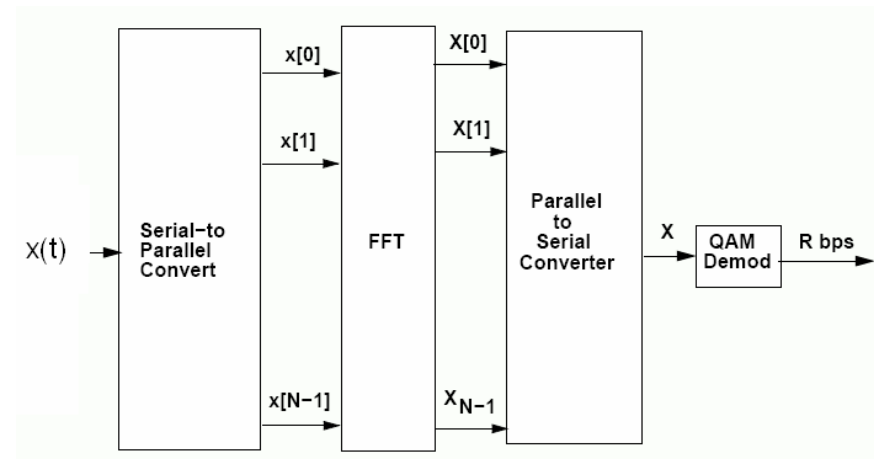
Il existe des algorithmes rapides pour calculer les transformations (FFT et IFFT) et la base d'exponentielles complexes est orthogonale.



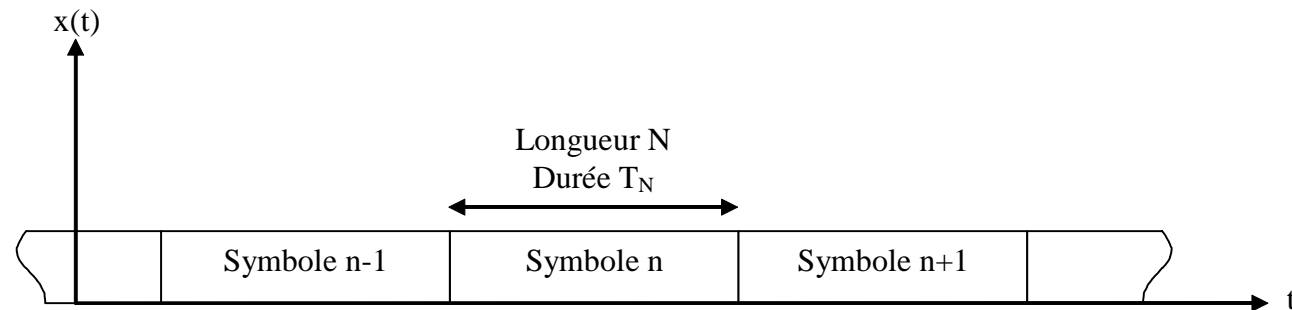
OFDM : émission/réception



émission



réception

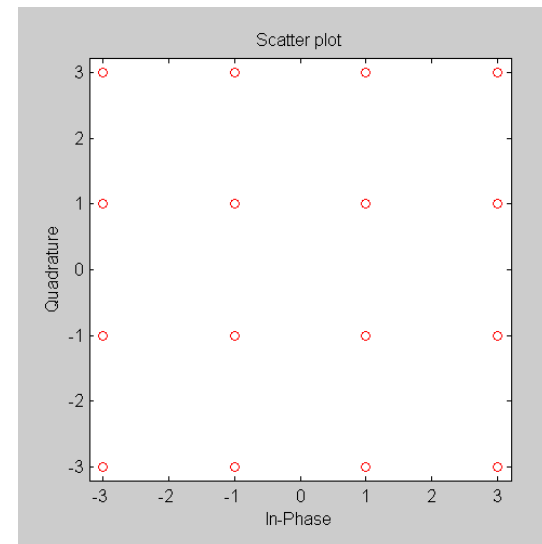
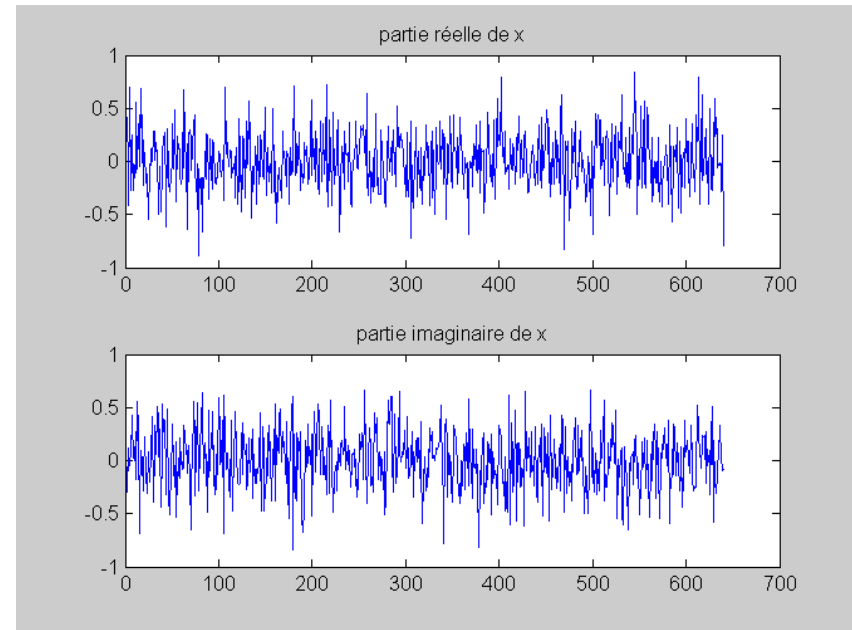


simulation OFDM : émission

```
% Nombre d'états de la QAM.  
M = 16;  
% Nombre de porteuses dans le symbole OFDM  
Nb = 64;  
% Nombre de symboles OFDM dans la simulation  
NbSym = 10;  
% Tirage aléatoire d'entiers allant de 0 à M-1  
R = randint(Nb*NbSym,1,M);  
% Mise en constellation QAM.  
[I Q] = qaskenco(R,M);  
X = I+j*Q; scatterplot(X); figure  
  
% Création signal OFDM  
x = zeros(size(X));
```

```
for ind = 1:NbSym  
    % calcul ième symbole OFDM  
    symbole=ifft(X((ind-1)*Nb+1:ind*Nb));  
    % sauvegarde du symbole ind dans x  
    x((ind-1)*Nb+1:ind*Nb) = symbole;  
end
```

```
subplot(2,1,1); plot(real(x))  
title('partie réelle de x')  
subplot(2,1,2); plot(imag(x))  
title('partie imaginaire de x')
```



simulation OFDM : réception

```
% ajout de bruit complexe  
x = x + 0.06*(randn(size(x)) + j*randn(size(x)));
```

```
for ind = 1:NbSym  
    % décodage du symbole ind  
    y=fft(x((ind-1)*Nb+1:ind*Nb));  
    % sauvegarde du ième symbole décodé  
    Xdec((ind-1)*Nb+1:ind*Nb) = y;  
end
```

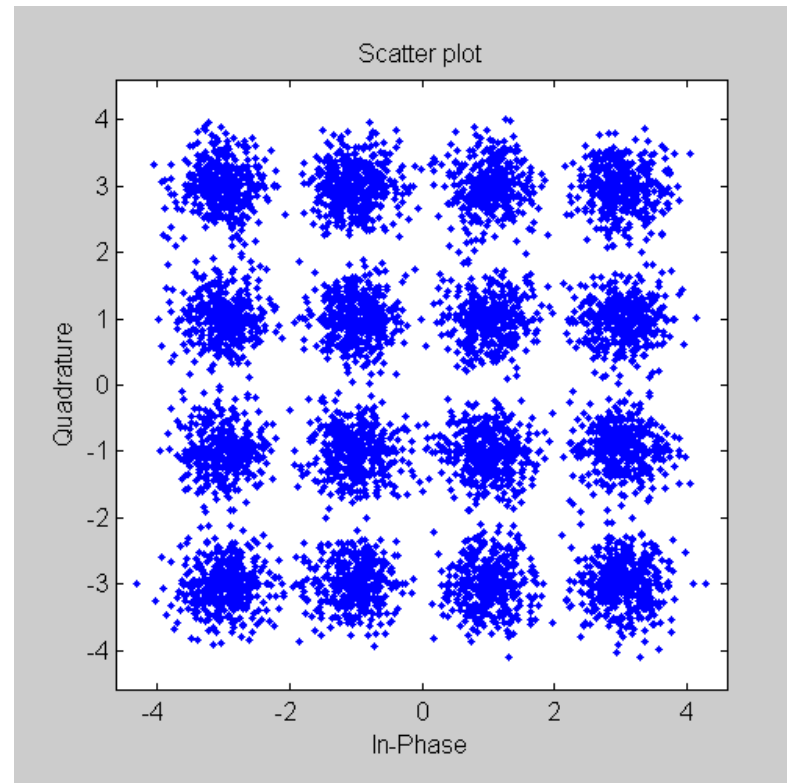
```
scatterplot(Xdec)
```

```
% décodage des symboles décodés  
Rdec=qaskdeco(real(Xdec), imag(Xdec), M);
```

```
% Calcul du taux d'erreurs symbole  
cnt_err = 0;
```

```
for ind=1:Nb*NbSym  
    if Rdec(ind) ~= R(ind)  
        cnt_err = cnt_err+1;  
    end  
end
```

```
TES = cnt_err / (Nb*NbSym)
```

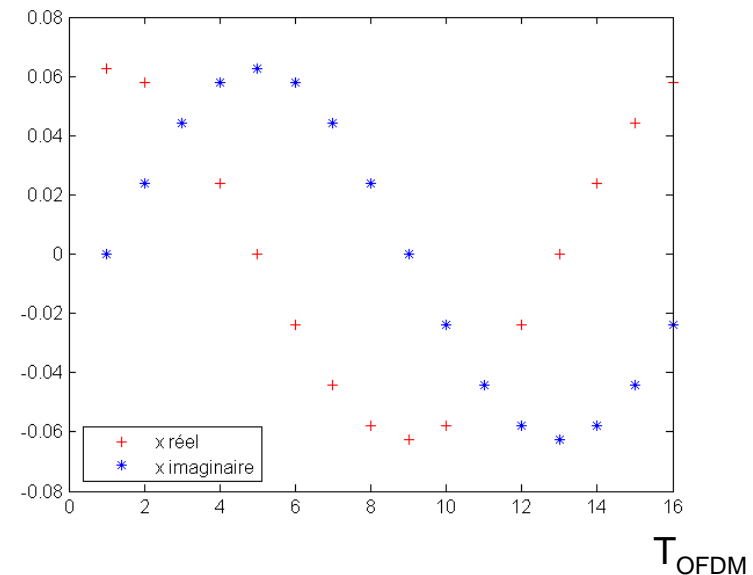


$$TES = 0.0027$$

OFDM : signal en sortie de IFFT

- Le coefficient $X[0]$ correspond à la valeur moyenne du signal x .
- Le coefficient $X[1]$ correspond à la fréquence fondamentale f_0 du signal x , c'est-à-dire une période sur N points (cosinus sur la partie réelle, sinus sur la partie imaginaire).
- Le coefficient $X[2]$ correspond à $2.f_0$, c'est-à-dire deux périodes sur N points.
- Le coefficient $X[n]$ correspond à $n.f_0$ ($n < N/2$), c'est-à-dire n périodes sur N points.

S'il y a plusieurs coefficients $X[n]$ non nuls, le signal x est la somme des signaux élémentaires.

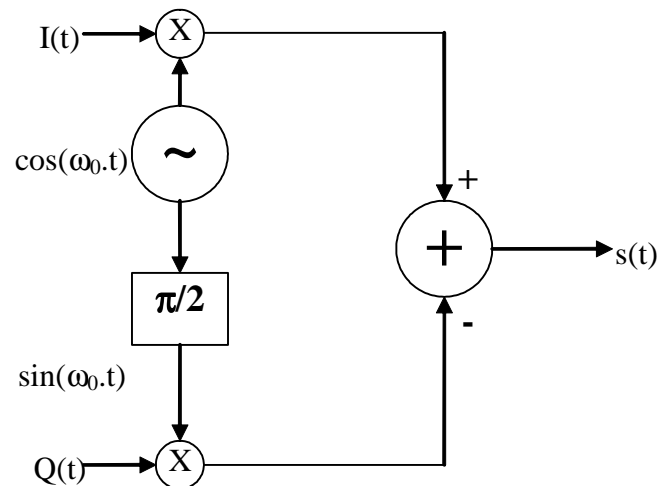


```
x=ifft([0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0])
plot(real(x), 'r+')
hold on
plot(imag(x), 'b*')
legend('x réel','x imaginaire',2,'location','SouthWest')
```

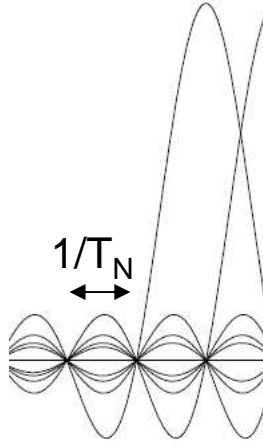
OFDM : changement de fréquence

Pour l'instant, nous sommes restés en bande de base. Comment réalise-t-on le changement de fréquence ?

Si le signal est complexe, on le multiplie par $\exp(j.\omega_0.t)$, puis on prend la partie réelle.

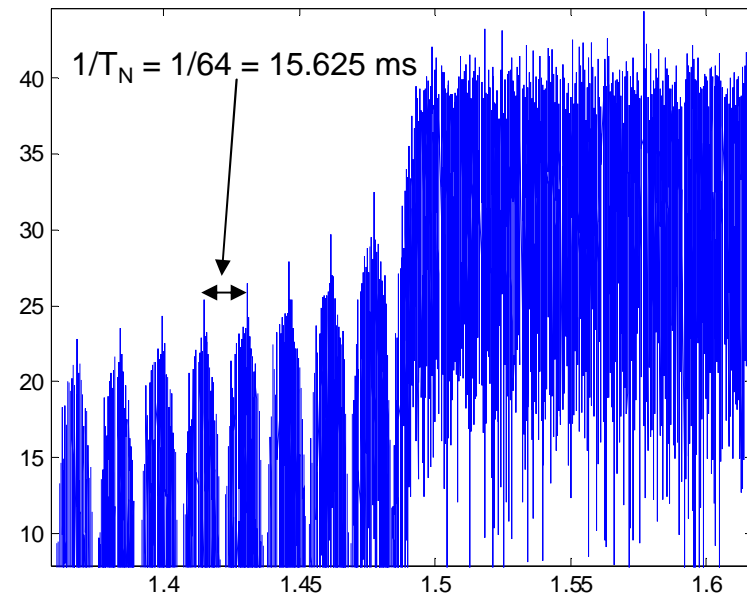


OFDM : problème sur le bord du spectre



Le spectre du signal OFDM n'est pas limité sur les bords à cause de sa forme en sinus cardinal.

Cela pose des problèmes d'un point de vue réglementaire car la non limitation du spectre crée des interférences avec les canaux d'émission adjacents. Le filtrage est difficile, mais rien n'empêche de mettre à 0 les porteuses sur les extrémités du spectre afin qu'il tienne dans le gabarit demandé par la norme.

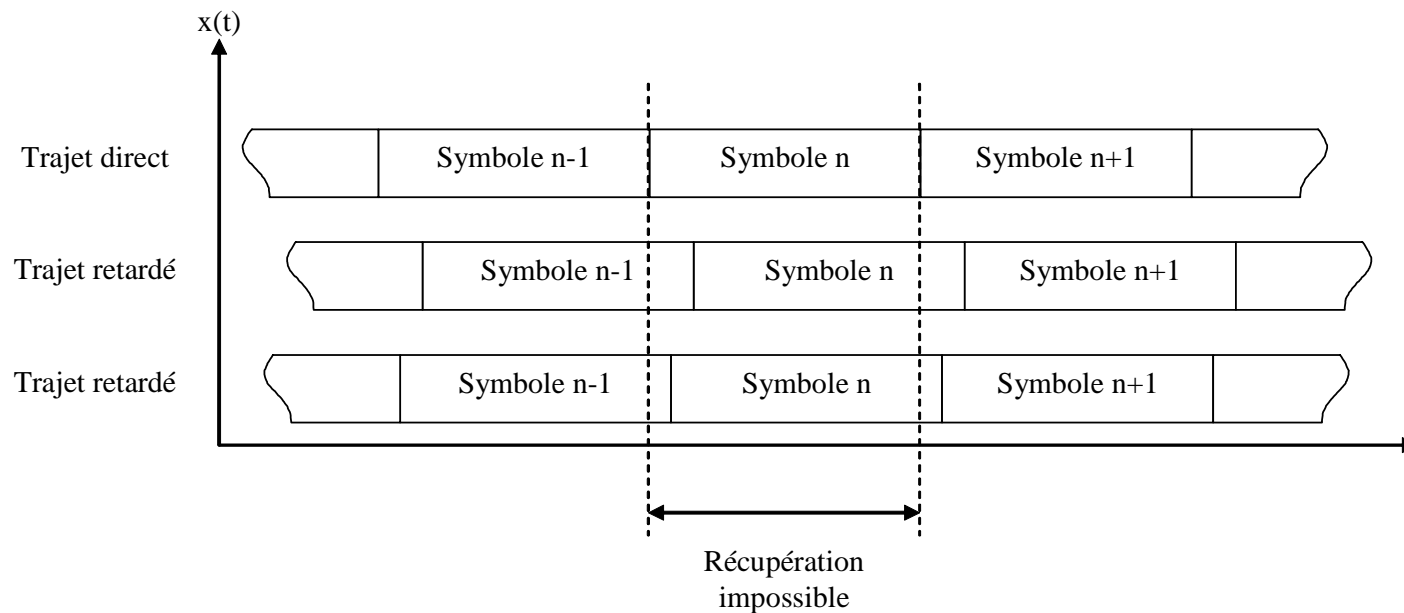


Zoom sur le spectre précédent.

OFDM : canal sélectif en fréquence

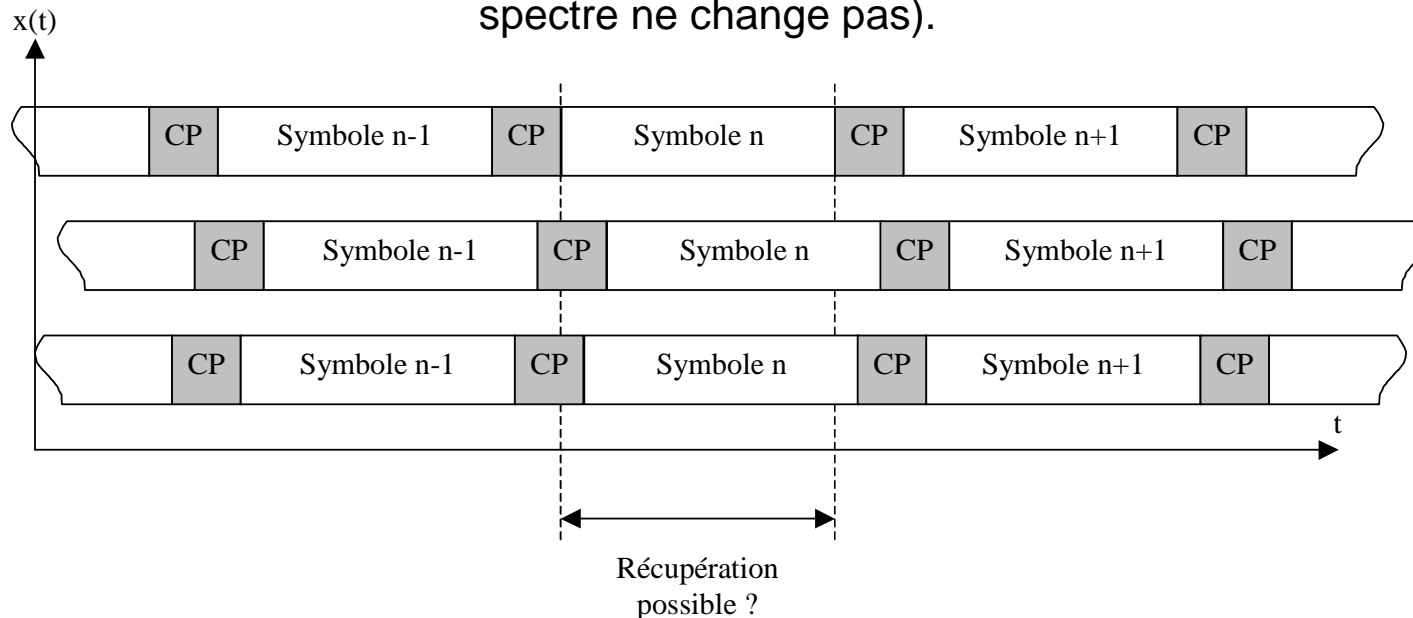
En présence d'un canal multi-trajet, des version décalées du symbole n s'additionnent entre eux, créant de l'ISI entre symboles OFDM. La récupération du symbole est impossible.

Le retard maximum entre les symboles est égal à T_{\max}



OFDM : canal sélectif en fréquence

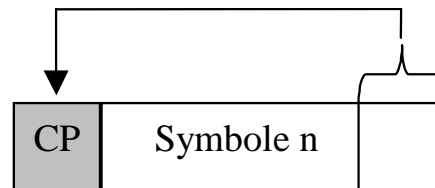
Pour absorber ce retard, on va allonger le symbole OFDM avec un préfixe cyclique (CP) ou intervalle de garde (GI). Sa durée est généralement comprise entre 1/4 et 1/32 de la durée du symbole. **Le débit utile est réduit dans les mêmes proportions.** Le spectre est légèrement modifié sur les bords à cause de l'élargissement de la porte (on ne voit plus les lobes secondaires car les sinus cardinaux ne s'annulent plus en même temps. L'allure générale du spectre ne change pas).



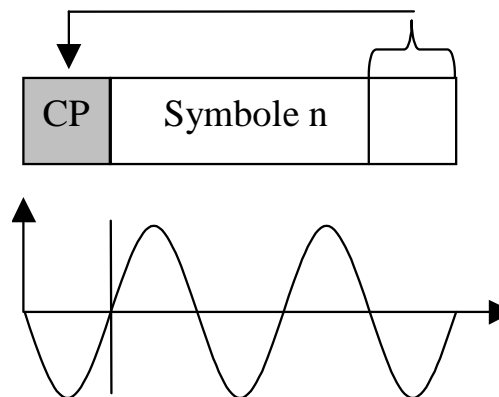
Que doit-on mettre dans l'intervalle de garde pour pouvoir décoder correctement le symbole n ?

OFDM : canal sélectif en fréquence

Il faut restaurer l'orthogonalité des porteuses qui a été perdue. Pour cela, on va copier la fin du symbole OFDM au début.



Raisonnons sur des porteuses réelles. Chaque porteuse OFDM correspond à un nom entier de périodes sur le symbole OFDM (de 0 à $N-1$). En copiant la fin du symbole dans l'intervalle de garde, on prolonge le signal sans créer de discontinuité. On appelle ce bloc de données le **préfixe cyclique**.

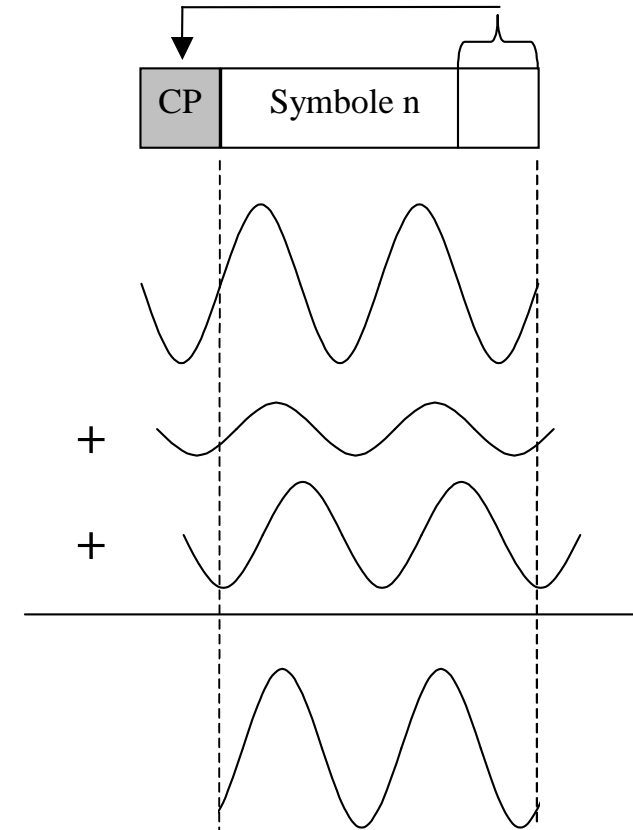
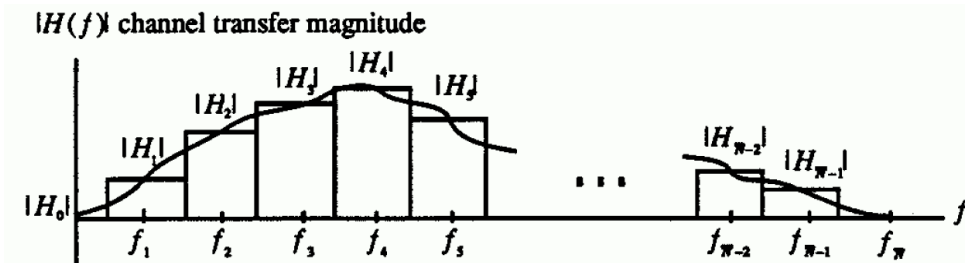


OFDM : canal sélectif en fréquence

Que se passe-t-il en présence d'ISI ?

Continuons la raisonnement avec une porteuse réelle. On additionne des versions décalées du symbole. Si le préfixe cyclique est plus long que le retard max du canal $\Delta\tau$ et si on sait retrouver l'emplacement du symbole, alors on obtient la somme de signaux sinusoïdaux de même fréquence, mais d'amplitude et de phase différents.

Cette somme est un signal sinusoïdal de même fréquence mais dont la phase et l'amplitude ont changé. Ce changement correspond au $H_i(f_i)$ de la porteuse. Ce raisonnement est valable pour toutes les porteuses, réelles ou complexes.



OFDM : canal sélectif en fréquence

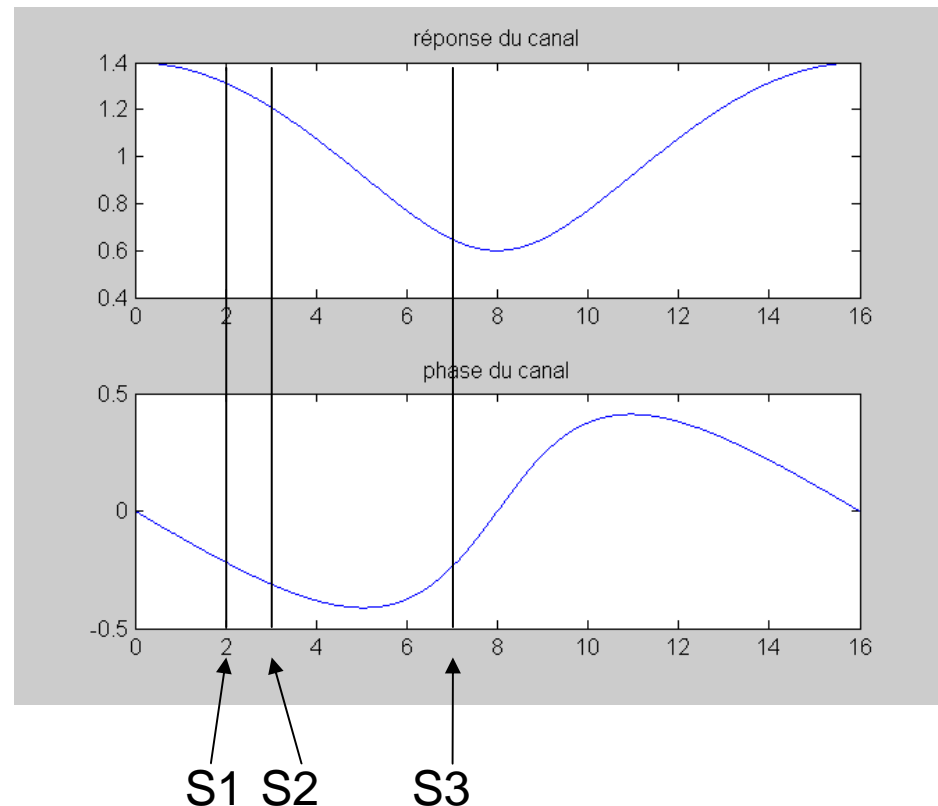
```
% création de trois symboles périodiques  
% avec un préfixe cyclique 1/8 (t=-3/32 à 0)
```

```
f0 = 3;  
t = -3/32:1/32:1; % Fec = 32  
symbole_1 = 0.7*sin(2*pi*f0*t);  
f0 = 2;  
symbole_2 = 0.5*sin(2*pi*f0*t+pi/2);  
f0 = 7;  
symbole_3 = sin(2*pi*f0*t+pi/4);
```

```
% concaténation des 3 symboles  
x = [symbole_1 symbole_2 symbole_3];
```

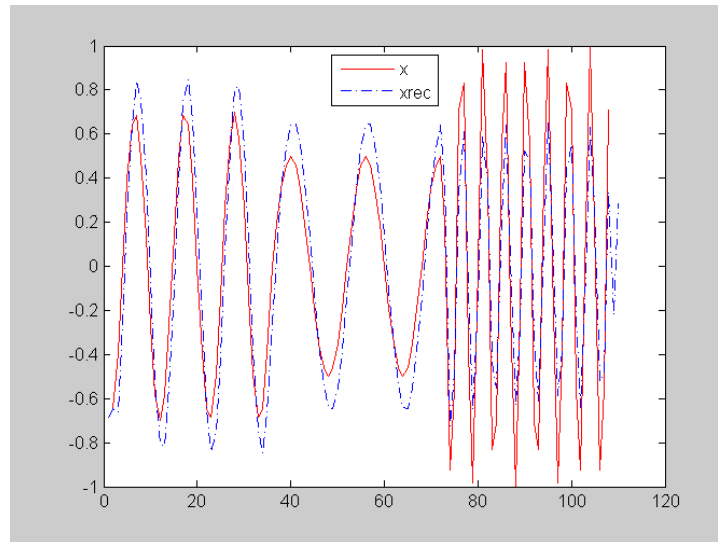
```
% passage dans le canal multi-trajet
```

```
cmt = [1 0 0.4];  
[h,f]=freqz(cmt,1,1024,32);  
subplot(2,1,1)  
plot(f,abs(h)) % réponse du canal  
title('réponse du canal')  
subplot(2,1,2)  
plot(f,angle(h)) % phase du canal  
title('phase du canal')  
xrec = conv(cmt,x);
```

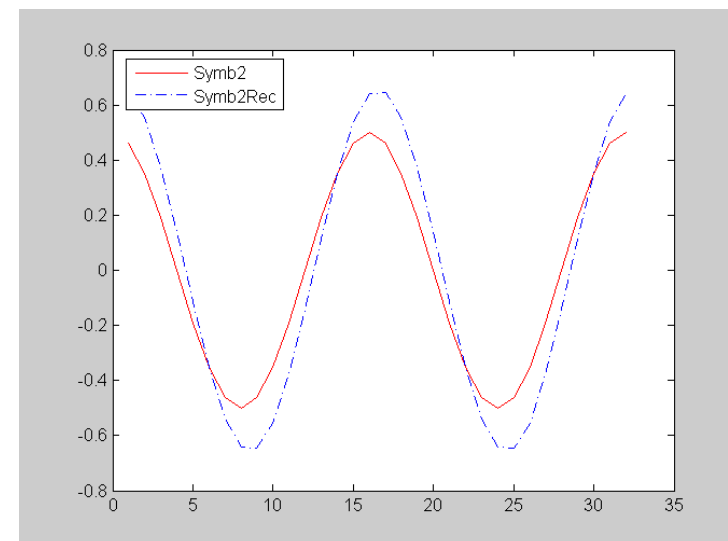


OFDM : canal sélectif en fréquence

```
figure  
plot(x, 'r-'); hold on  
plot(xrec, 'b-.')  
legend('x','xrec',2,'location','North')
```



```
%récupération du symbole 2  
% après extraction de l'intervalle de garde  
symb2rec = xrec(41:41+31);  
figure  
plot(symbole_2(5:36), 'r-')  
hold on  
plot(symb2rec, 'b-.')  
legend('Symb2','Symb2Rec',2)
```

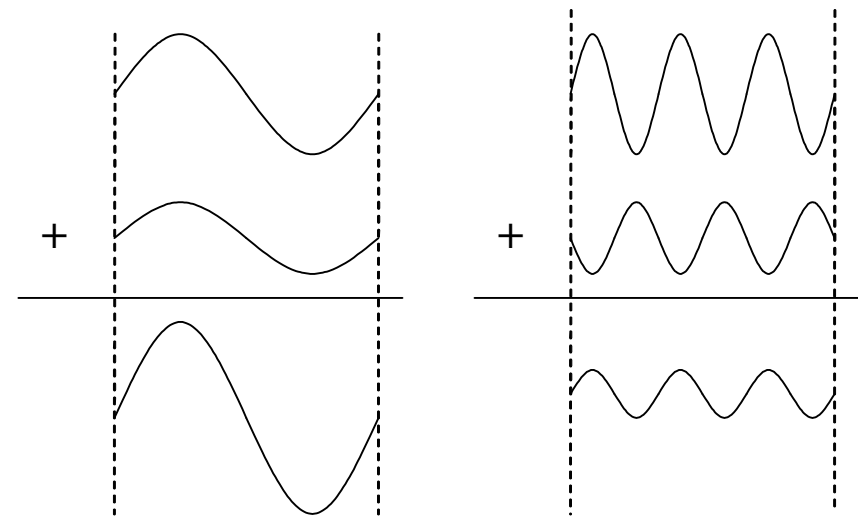


OFDM : canal sélectif en fréquence

Conséquences : Raisonons sur 2 signaux sinusoïdaux.

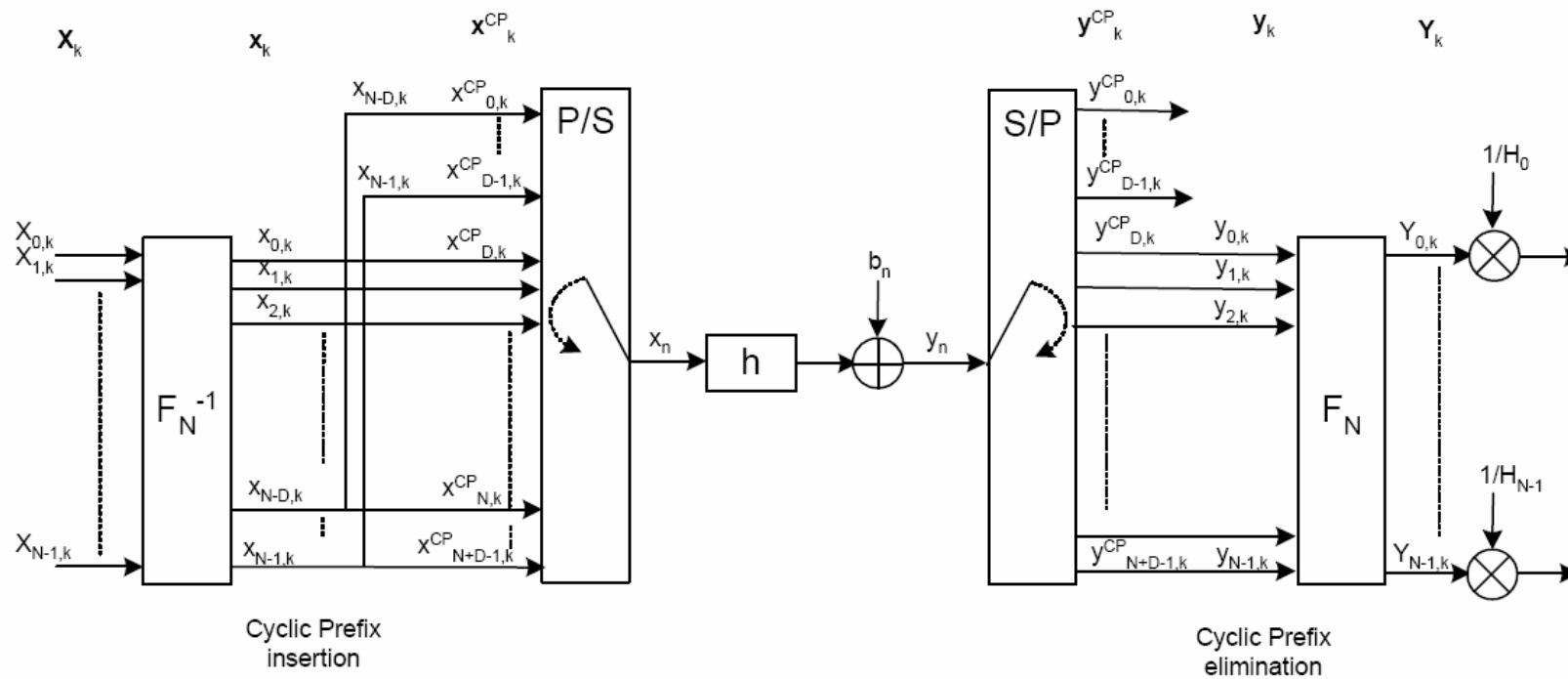
1) Si le symbole est légèrement retardé par rapport au symbole direct. Le signal résultant va avoir tendance à être renforcé.

2) Si le symbole retardé est proche de l'opposition de phase avec le symbole direct. Le signal résultant va avoir tendance à être diminué.



Du point de vue de la réponse du canal, le premier cas correspond à une bosse sur $H(f)$, le second correspond à une atténuation, voir un zéro.

Chaine de transmission OFDM



$$\mathbf{h}_k = [h_{0,k}, \dots, h_{L-1,k}, 0, \dots, 0]$$

Description mathématique

$$\mathbf{y}_k^{CP} = \begin{bmatrix} y_{0,k}^{CP} \\ y_{1,k}^{CP} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N+D-1,k}^{CP} \end{bmatrix}_{(N+D) \times 1} = \mathbf{h}_k^{ISI} \begin{bmatrix} x_{N-D,k} \\ \vdots \\ x_{N-1,k} \\ x_{0,k} \\ \vdots \\ x_{N-1,k} \end{bmatrix}_{(N+D) \times 1} + \mathbf{h}_k^{IBI} \begin{bmatrix} x_{N-D,k-1} \\ \vdots \\ x_{N-1,k-1} \\ x_{0,k-1} \\ \vdots \\ x_{N-1,k-1} \end{bmatrix}_{(N+D) \times 1}$$

$$\mathbf{h}_k^{ISI} = \begin{bmatrix} h_{0,k} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ h_{L,k} & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{L,k} & \dots & h_{0,k} \end{bmatrix}_{(N+D) \times (N+D)}$$

$$\mathbf{h}_k^{IBI} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{L,k} & \dots & h_{1,k} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & h_{L,k} \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+D) \times (N+D)}$$

\mathbf{h}_k^{ISI} est l'interférence intersymbole due à la sélectivité du canal sur le k-ième symbole OFDM.

\mathbf{h}_k^{IBI} est l'interférence entre le k-ième et le (k-1)-ième symbole OFDM .

Description mathématique

Après avoir retiré le préfixe cyclique correspondant aux D premiers échantillons, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_{D,k}^{CP} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N+D-1,k}^{CP} \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} y_{0,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N-1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(N) \times (D-L)} & h_{L,k} & \dots & h_{0,k} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & h_{L,k} & \dots & h_{0,k} \end{bmatrix}_{(N) \times (N+D)} \begin{bmatrix} x_{N-D,k} \\ \vdots \\ x_{N-1,k} \\ x_{0,k} \\ \vdots \\ x_{N-1,k} \end{bmatrix}_{(N+D) \times 1}$$

Après simplification, nous avons

$$\begin{bmatrix} y_{0,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N-1,k} \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} h_{0,k} & 0 & \dots & h_{L,k} & \dots & h_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ h_{L,k} & & \ddots & \ddots & & h_{L,k} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{L,k} & \dots & h_{0,k} \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{bmatrix} x_{0,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-1,k} \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

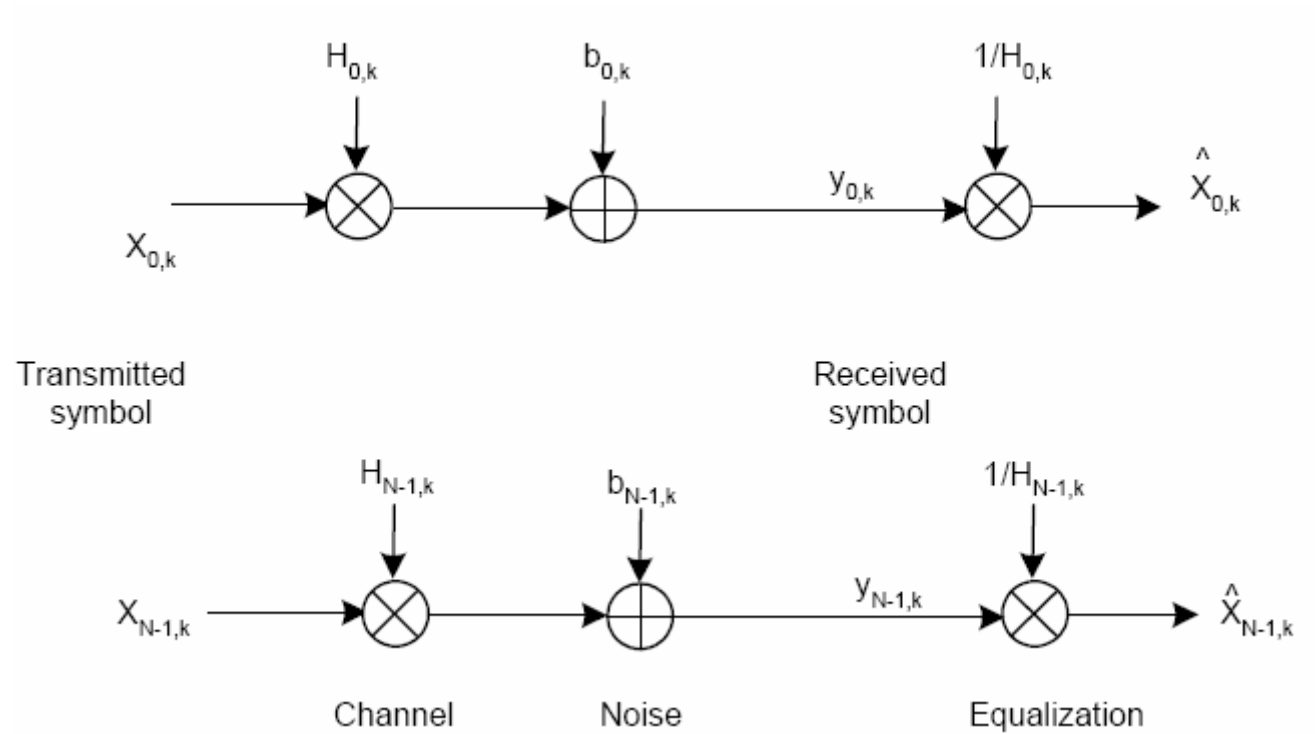
Description mathématique

$$\begin{bmatrix} Y_{0,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{N-1,k} \end{bmatrix}_{N \times 1} = F_N \begin{bmatrix} h_{0,k} & 0 & \dots & h_{L,k} & \dots & h_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ h_{L,k} & & \ddots & \ddots & & h_{L,k} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{L,k} & \dots & h_{0,k} \end{bmatrix}_{N \times N} F_N^H \begin{bmatrix} X_{0,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{N-1,k} \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (1.14)$$

Comme la convolution circulaire est équivalente à une multiplication dans le domaine fréquentiel, le vecteur \mathbf{X}_k a été transmis au travers de N canaux parallèles de réponse en fréquence plate définis par une atténuation complexe $H_{i,k}$.

$$\begin{bmatrix} Y_{0,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{N-1,k} \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} H_{0,k} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & H_{1,k} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & H_{N-1,k} \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{bmatrix} X_{0,k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{N-1,k} \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (1.15)$$

Description mathématique

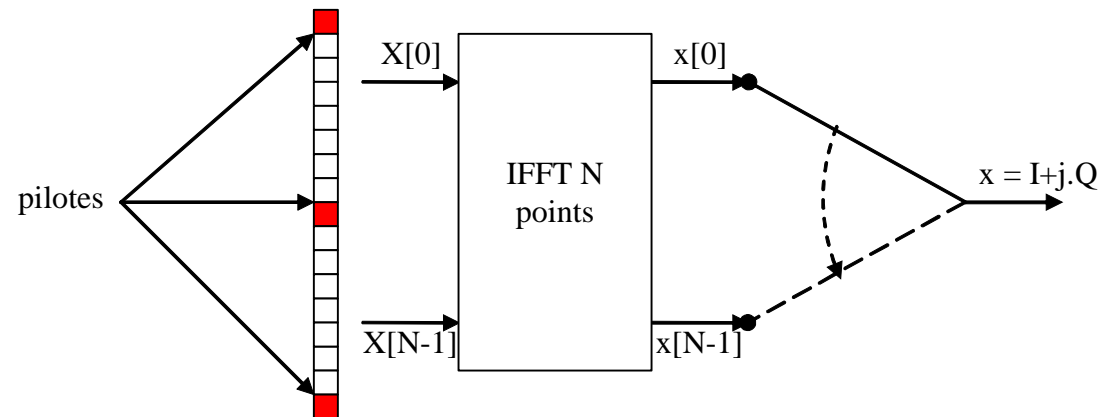


Correction du canal : émission

Si le nombre N de porteuses est suffisant, c'est-à-dire $B_N \ll B_c$ ($T_s \gg T_m$), chaque porteuse i va donc être multipliée par le coefficient complexe $H_i(f_i)$ correspondant. Comment retrouver la constellation de départ pour pouvoir décoder correctement les symboles ?

Il faut corriger l'influence du canal.

Il faut pouvoir l'estimer afin de le corriger. Pour cela, nous allons insérer des valeurs constantes sur certains point à l'entrée de la IFFT. On appelle ces valeurs des pilotes.



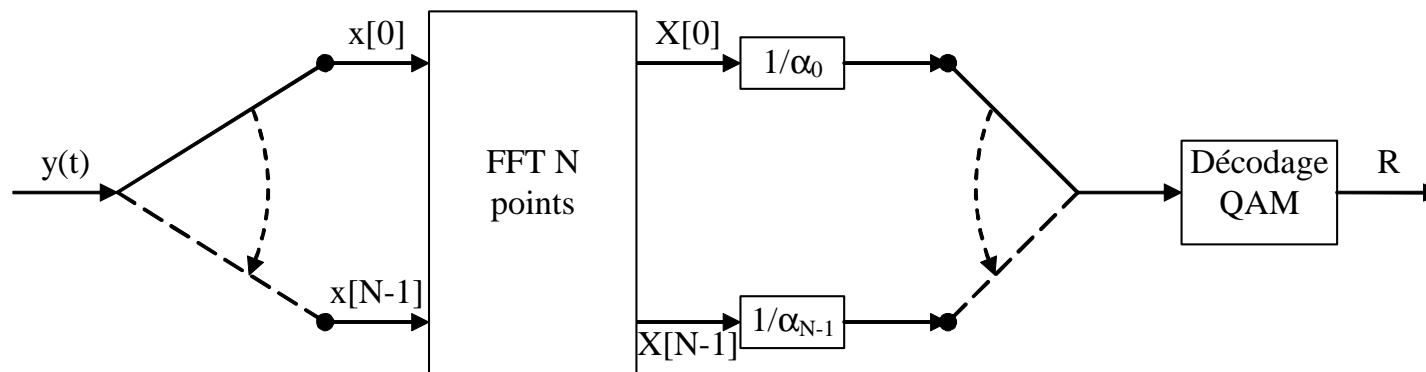
Correction du canal : réception

A la réception, pour le pilote sur le canal n , on va lire : $y_n = \alpha_n \cdot x_n + N$, x_n étant le symbole connu émis, y_n le symbole reçu, α_n le coefficient d'atténuation du canal et N le bruit.

Pour estimer le coefficient du canal n , il suffit de calculer (en complexe) : $\hat{\alpha}_n = \frac{y_n}{x_n}$

PB : à cause du bruit, l'estimation du coefficient du canal est mauvaise lorsque α est faible.

Pour chaque pilote, on va obtenir une estimation du canal. Par interpolation, on va déduire les coefficients d'atténuation α_i pour les valeurs entre les pilotes. Une fois que l'on a obtenu tous les α_i , il suffit de corriger les valeurs y_i à la sortie de FFT. Le SNR n'est pas amélioré, car le bruit est amplifié en même temps que le signal. En cas de zéro sur une porteuse, la correction n'a plus grand sens.



Correction du canal : simulation

% Nombre d'états de la QAM.

M = 16;

% Nombre de porteuses dans le symbole OFDM

Nb = 256;

% Nombre de symboles OFDM dans la simulation

NbSym = 1;

% durée du préfixe cyclique CP = 1/8

NbCP = Nb/8;

% Tirage aléatoire d'entiers allant de 0 à M-1

R = randint(Nb*NbSym,1,M);

% Mise en constellation QAM.

[I Q] = qaskenco(R,M);

% insertion pilote 1+j tous les 16 symboles

debut = 1;

fin = 15;

X = [1+j; I(debut:fin)+j*Q(debut:fin)];

for i = 1:15

debut = debut + 15;

fin = fin+15;

X = [X; 1+j; I(debut:fin)+j*Q(debut:fin)];

end

% Création signal OFDM

x = zeros(NbSym*(Nb + NbCP),1);

symbole_GI = zeros(Nb + NbCP,1);

for i = 1:NbSym

% calcul ième symbole OFDM et copie à la fin du symbole

symbole_CP(NbCP+1:Nb + NbCP)=ifft(X((i-1)*Nb+1:i*Nb));

% copie du préfixe cyclique

symbole_CP(1:NbCP)=symbole_CP(Nb+1:Nb + NbCP);

% sauvegarde du symbole i dans x

x((i-1)*(Nb + NbCP)+1:i*(Nb + NbCP)) = symbole_CP;

end

% passage dans le canal multi-trajet (retard max < GI = 4)

cmt = [1 0 0 0.1];

xrec = conv(cmt,x);

for i = 1:NbSym

% extraction du symbole reçu sans le préfixe cyclique

sym_rec = xrec((i-1)*(Nb + NbCP)+NbCP+1:i*(Nb + NbCP));

% décodage du symbole i

y=fft(sym_rec);

% sauvegarde du ième symbole décodé

Xdec((i-1)*Nb+1:i*Nb) = y;

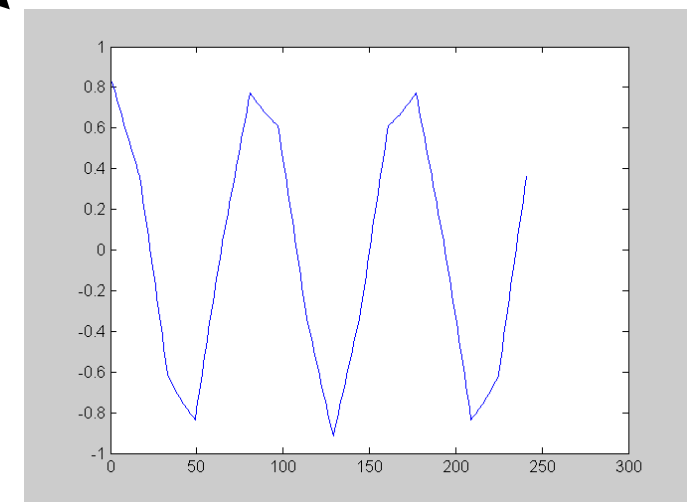
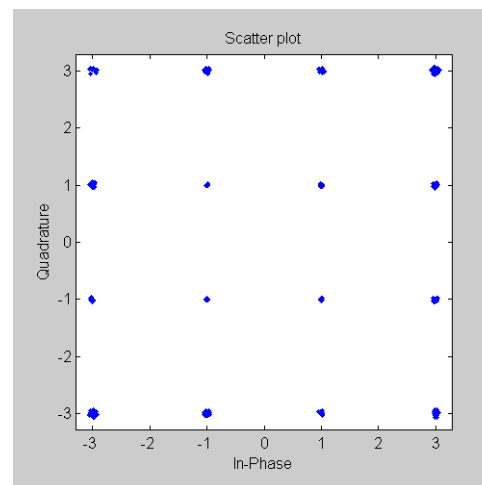
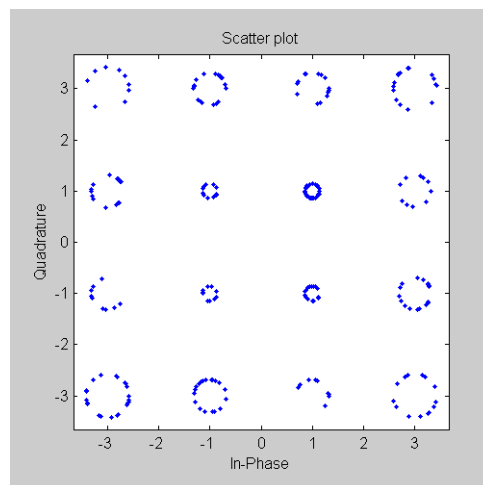
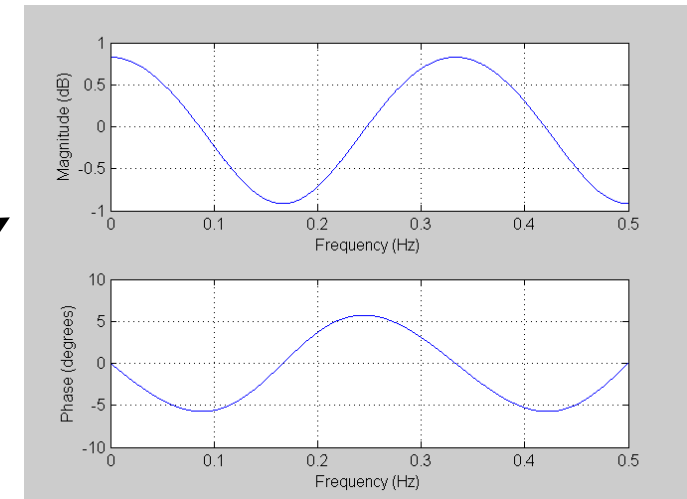
end

Correction du canal : simulation

```
% extraction des pilotes, puis calcul des estimations
alpha_pilotes = Xdec(1:16:256)/(1+j);
% calcul par interpolation des coefficients de correction
% pour les symboles autres que les pilotes
xi=0:1/16:255/16;
% on interpole séparément les parties réelles et imaginaires
alpha = interp1(0:15, real(alpha_pilotes), xi) + j*interp1(0:15,
imag(alpha_pilotes), xi);
% correction des symboles (y compris les pilotes)
Xdec_cor = Xdec./alpha;
```

```
freqz(cmt,1,1024,1); % réponse canal [0 à Fec/2]
figure
plot(20*log10(abs(alpha))) % réponse canal via les estimateurs [0 à Fec]
```

```
scatterplot(Xdec) % constellation avant correction
scatterplot(Xdec_cor) % constellation après correction
```



Exemple de système OFDM

Considérons un canal de largeur $B = 1 \text{ MHz}$ et d'étalement maximum $T_m = 5 \mu\text{s}$.

Un système mono-porteuse aurait un temps symbole $T_S = 1/B = 1 \mu\text{s} \ll T_m$ et subirait donc une forte interférence inter symbole (ISI).

Supposons un système OFDM modulé en 16QAM. On va utiliser $N = 128$ porteuses pour supprimer l'ISI, ce qui donne $T_N = N \cdot T_S = 128 \mu\text{s}$. On va fixer la durée du préfixe cyclique (T_{CP}) à $8 \mu\text{s}$ ($> T_m$), c'est-à-dire $T_N / 16$.

Quel est l'espacement entre porteuses, le surcout dû au préfixe cyclique ainsi que le débit total ?

$B_N = 1/T_N = B/N = 7,812 \text{ kHz} \ll \text{bande de cohérence } B_c = 200 \text{ kHz}$.

Débit total sans CP = $4 \text{ bits} \times 128 \text{ porteuses} / T_N = 4 / T_S = 4 \text{ Mbit/s}$ identique au système mono-porteuse. La courbe de taux d'erreurs est aussi identique.

Durée totale du symbole OFDM = $128 + 8 = 136 \mu\text{s} \Rightarrow \text{surcout} = 8/136 = 5,9 \%$.

Débit total avec CP = $4 \text{ bits} \times 128 \text{ porteuses} / (T_N + T_{CP}) = 3,76 \text{ Mbit/s}$.

Canal sélectif en temps et en fréquence : Coded OFDM

Le codage avec entrelacement temporel et fréquentiel permet de lutter contre les évanouissements temporels et fréquentiels

- Entrelacement fréquentiel : on va encoder les bits à transmettre dans des mots-codes (avec redondance), puis entrelacer ces mots-codes sur différentes porteuses. L'information utile doit être entrelacée sur des porteuses espacées d'au moins la bande de cohérence.
- Entrelacement temporel : après codage, le mots-code est entrelacé dans plusieurs symboles OFDM qui doivent être espacés d'au moins le temps de cohérence du canal.

Facteur de crête : Peak to Average power Ratio (PAR ou PAPR)

Considérons la sortie de la IFFT :

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} X[i] e^{j \frac{2\pi i n}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Chaque $x[n]$ est la somme de N variables aléatoires suivant une loi uniforme (cas modulation mPSK). Si N est grand (> 64), le théorème de la limite centrale s'applique et $x[n]$ est une variable aléatoire qui suit une loi gaussienne centrée tant sur sa partie réelle que sur sa partie imaginaire. Le module de $x[n]$ suit donc une loi de Rayleigh et sa phase suit une loi uniforme.

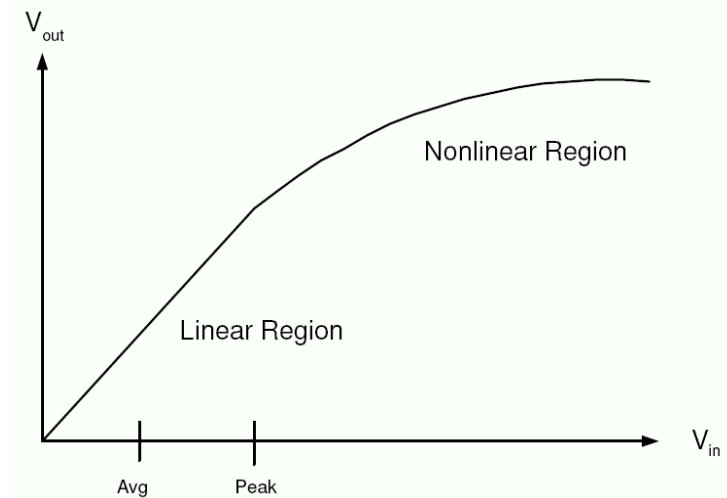
Le problème est que la loi de Rayleigh a un support infini et donc que x n'est pas borné. La valeur crête de x dépassera toujours un seuil donné avec une probabilité non-nulle.

OFDM : PAR

Pour un signal échantillonné quelconque, on définit le PAR comme le rapport entre la puissance crête et la puissance moyenne. Par exemple, pour un signal sinusoïdal, c'est $(V_{\max}/V_{\text{eff}})^2 = 2$.

$$\text{PAR} \triangleq \frac{\max_n |x[n]|^2}{E_n[|x[n]|^2]}.$$

Le signal OFDM se comportant comme une gaussienne, il est important de comprendre que pour émettre un signal OFDM d'une certaine puissance, il va falloir utiliser un amplificateur beaucoup plus puissant car le signal comporte de nombreux pics de puissances.



OFDM : PAR

En première approximation, on peut considérer que pour un signal OFDM, le PAR croît linéairement avec N , N étant le nombre de porteuses.

Cela signifie que plus on augmente le nombre de porteuses, plus la puissance maximale de l'amplificateur devra être importante (à puissance moyenne identique), ce qui est assez ennuyeux puisque le débit est proportionnel à N . C'est une des limitations de l'OFDM.

Il existe de nombreuses méthodes permettant de réduire ou bien de tolérer le PAR des signaux OFDM. Dans le pire des cas, le signal sera saturé (au préalable en numérique ou bien par l'amplificateur).

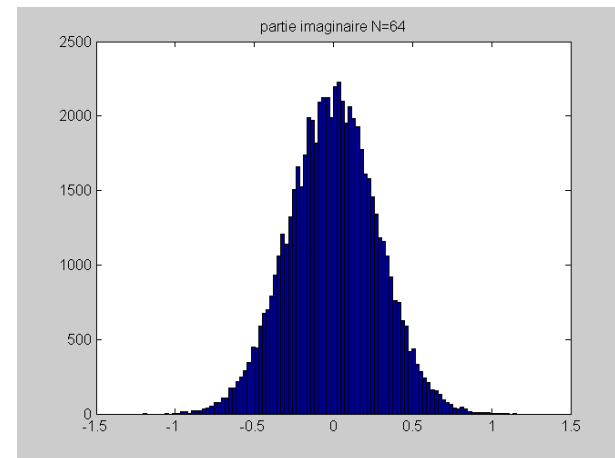
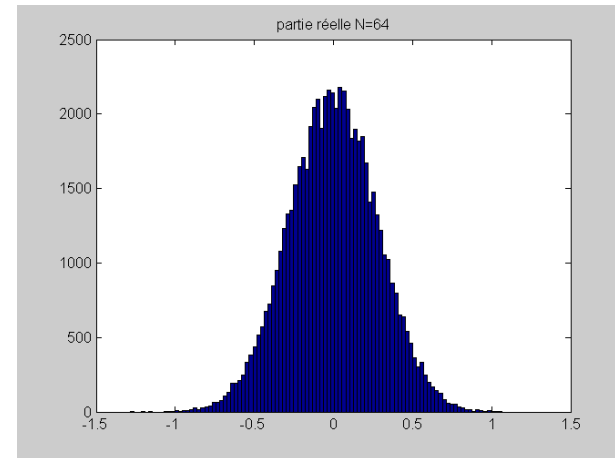
OFDM : simulation N = 64

```
% Nombre d'états de la QAM.
M = 16;
% Nombre de porteuses dans le symbole OFDM
Nb = 64;
% Nombre de symboles OFDM dans la simulation
NbSym = 1000;
% Tirage aléatoire d'entiers allant de 0 à M-1
seq_em = randint(Nb*NbSym,1,M);
% Mise en constellation QAM.
[I Q] = qaskenco(seq_em,M);
constel_emis = I+j*Q;

% Création signal OFDM sans GI
xx = zeros(size(constel_emis));

for i = 1:NbSym
    x=ifft(constel_emis((i-1)*Nb+1:i*Nb));
    xx((i-1)*Nb+1:i*Nb) = x;
end

% histogramme pour vérifier la partie réelle et la partie imaginaire.
% Elles tendent vers une gaussienne à partir d'environ 64 porteuses.
% Le module tend vers une loi de Rayleigh, la phase est uniforme
hist(real(xx),100)
title('partie réelle N=64')
figure
hist(imag(xx),100)
title('partie imaginaire N=64')
PAR = (max(abs(xx))^2)/var(abs(xx))
```



PAR =

57.0609

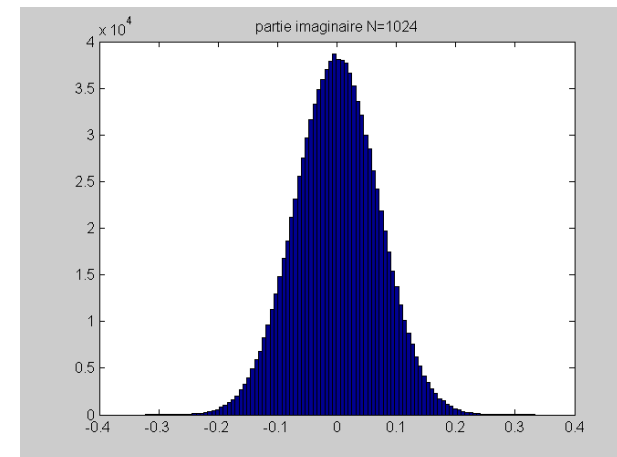
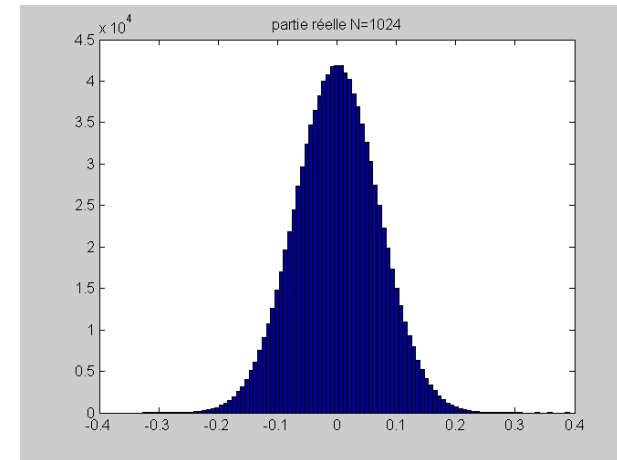
OFDM : simulation N = 1024

```
% Nombre d'états de la QAM.
M = 16;
% Nombre de porteuses dans le symbole OFDM
Nb = 1024;
% Nombre de symboles OFDM dans la simulation
NbSym = 1000;
% Tirage aléatoire d'entiers allant de 0 à M-1
seq_em = randint(Nb*NbSym,1,M);
% Mise en constellation QAM.
[I Q] = qaskenco(seq_em,M);
constel_emis = I+j*Q;

% Création signal OFDM sans GI
xx = zeros(size(constel_emis));

for i = 1:NbSym
    x=ifft(constel_emis((i-1)*Nb+1:i*Nb));
    xx((i-1)*Nb+1:i*Nb) = x;
end

% histogramme pour vérifier la partie réelle et la partie imaginaire.
% Elles tendent vers une gaussienne à partir d'environ 64 porteuses.
% Le module tend vers une loi de Rayleigh, la phase est uniforme
hist(real(xx),100)
title('partie réelle N=1024')
figure
hist(imag(xx),100)
title('partie imaginaire N=1024')
PAR = (max(abs(xx))^2)/var(abs(xx))
```



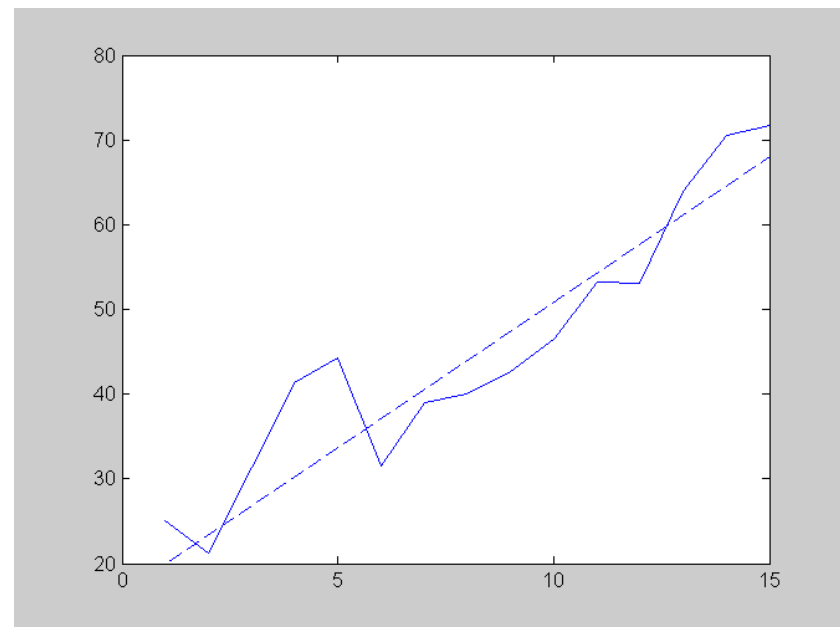
PAR =

73.0513

OFDM : évolution du PAR avec N

On utilise une approximation gaussienne pour les parties réelles et imaginaires du signal

```
Nb = 15;  
PAR = zeros(1,Nb);  
for i=1:Nb  
    N = 2^(i+5);  
    x=randn(1,N)+j*randn(1,N);  
    PAR(1,i) = (max(abs(x))^2)/var(abs(x));  
end  
  
plot(PAR)  
line([1 15],[20 68],'LineStyle', '--')
```



Le PAR croît linéairement avec N

OFDM : saturation du module (clipping)

On reprend la simulation précédente et on sature le module de x de façon à ce que $x(i)^2/\text{variance}(x)$ ne dépasse jamais 10 (quelque soit i).

```
% conversion rectangulaire/polaire
mod = abs(x);
theta = angle(x);
vari = var(mod);
PAR = (max(mod)^2)/vari
```

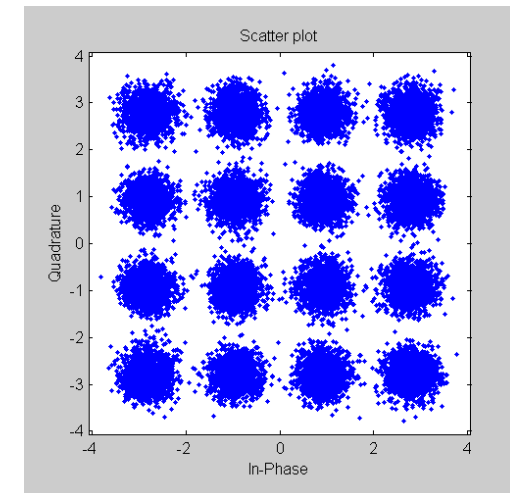
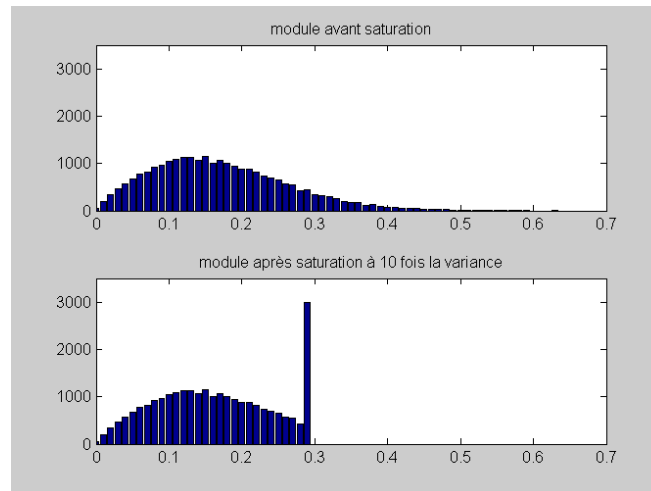
```
% saturation canal
```

```
SI = size(mod);
cnt_sat = 0;
retrait = 10;
```

```
for i=1:SI(1)
    if ((mod(i)^2)/vari) > retrait
        mod(i) = sqrt(retrait*vari);
        cnt_sat = cnt_sat+1;
    end
end
```

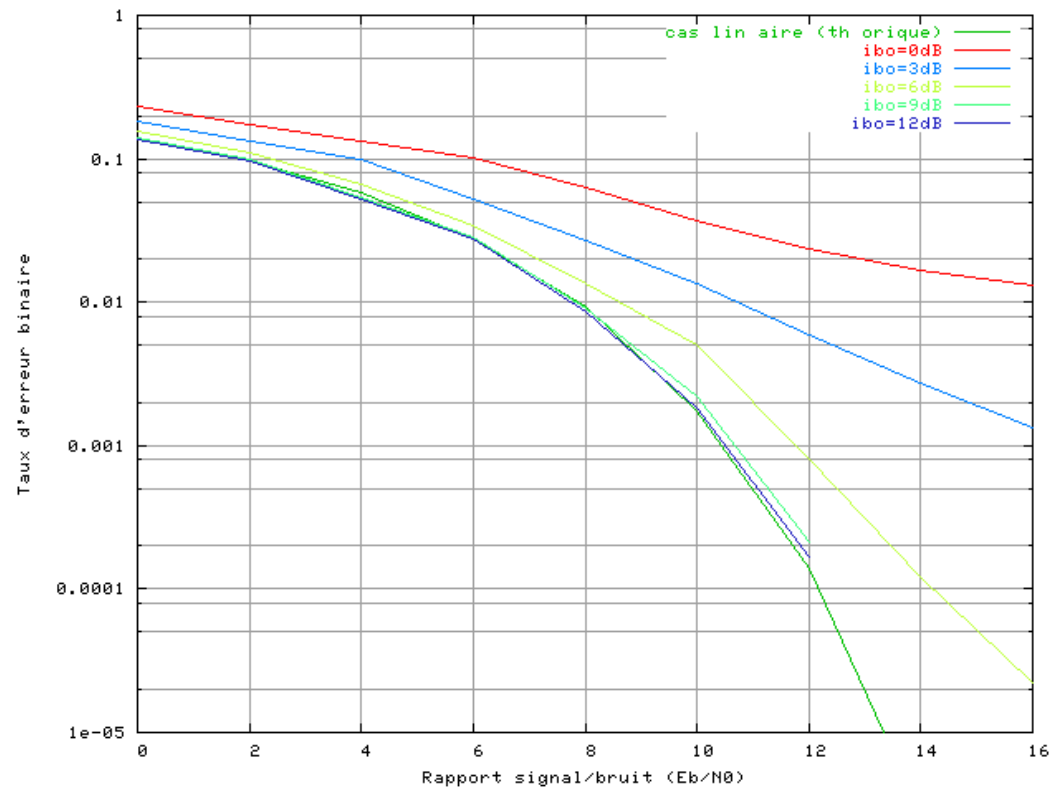
```
% conversion polaire/rectangulaire
```

```
x_sat = mod.*exp(j*theta);
PAR = (max(abs(x_sat))^2)/var(abs(x_sat))
x=x_sat;
taux_sat = cnt_sat/(Nb*NbSym)
```



PAR avant clipping = 56.3559
PAR après clipping = 13.7832
Taux échantillons saturés = 0.1167
TES = 0.0018

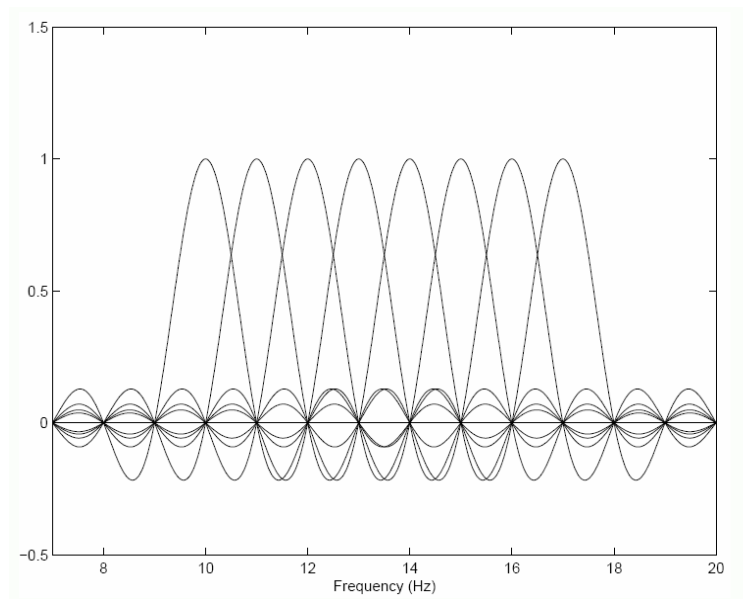
OFDM : TEB en fonction du retrait et du SNR



Un retrait de 10 dB suffit (simulation BBAG, QAM16, N=16)
avec un amplificateur radio SSPA (Solid-State Power Amplifier)

Décalage fréquentiel et temporel

L'OFDM est très sensible au décalage fréquentiel à cause de l'orthogonalité des porteuses. En cas de décalage en fréquence, même faible, on récupère sur la ième sortie de la FFT des données issues de toutes les fréquences porteuses. C'est l'interférence entre porteuses ICI.



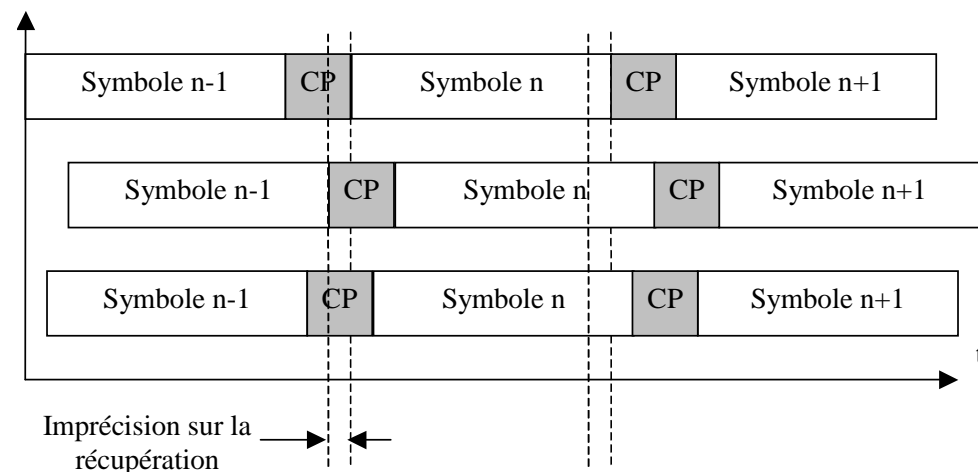
Si le décalage est important ($> B_N/10$), la récupération du signal OFDM est impossible.

Si le décalage est faible, cela va se traduire par un ajout de bruit sur les symboles et donc par une dégradation du taux d'erreurs.

Décalage fréquentiel et temporel

Exemple : avec un oscillateur à quartz grand public 50 ppm, on a une incertitude de 25 kHz à 500 MHz (bande UHF pour la TNT). Comme en TNT, on a un écart entre porteuses de 1116 Hz, la récupération du signal OFDM est impossible. Il faut un algorithme qui utilise l'information contenue dans les pilotes pour ramener le signal en bande de base. C'est impossible à réaliser en analogique.

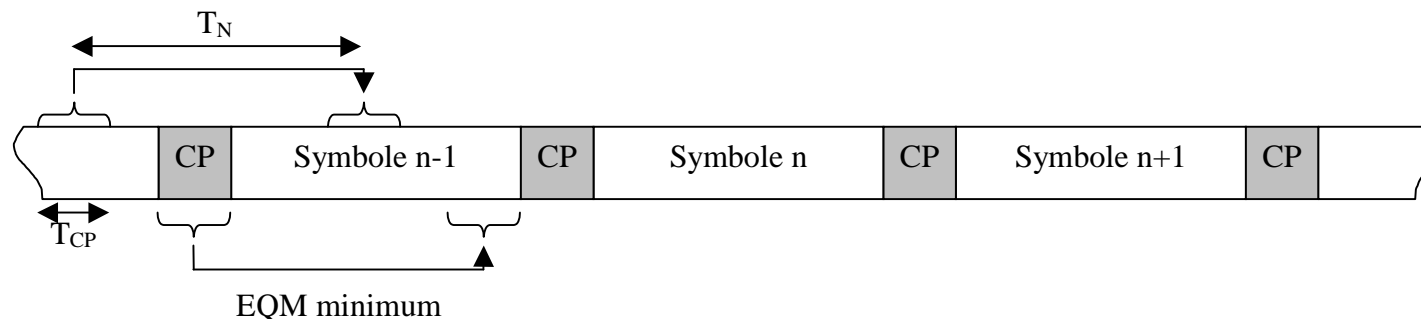
L'effet d'un décalage temporel est moins important. En effet, du moment que l'on récupère un symbole OFDM complet sans ISI, la FFT sera correcte. Le préfixe cyclique simplifie considérablement la tâche car il est statistiquement peu utilisé jusqu'à son maximum (le pire des cas ne se produit pas très souvent). La précision nécessaire pour l'extraction du symbole n'en est que plus faible.



Décalage fréquentiel et temporel

On connaît la durée du préfixe cyclique T_{CP} et la durée du symbole OFDM T_N en nombre d'échantillons. Supposons que $T_{CP} = 8$ et $T_N = 64$.

On lit le signal OFDM a un endroit quelconque. On va comparer les 8 premiers échantillons avec les 8 échantillons se trouvant 64 échantillons plus loin à l'aide de l'erreur quadratique moyenne EQM (on fait la somme des différences au carré). On décale d'un échantillon et on recommence. On fait cela 64 fois. L'emplacement donnant l'EQM la plus faible correspond à l'intervalle de garde, donc au début du symbole OFDM.



Pour réduire l'influence du bruit, il faut réaliser cette opération simultanément sur plusieurs symboles consécutifs. Cela permet de moyenner l'EQM.

Etude de cas : 802.11a

La norme WiFi 802.11a occupe un canal $B = 20$ MHz dans la bande des 5 GHz. La norme 802.11g est identique, mais dans la bande ISM 2.4 GHz (bande de 802.11b, l'ancienne norme de WiFi).

Nombre de porteuses	64 dont seules 52 sont utilisées (les 12 porteuses externes sont mises à 0 pour réduire l'interférence entre canaux adjacents)
Durée symbole OFDM	3,2 μ s (312.5 kHz entre porteuses)
Modulation	BPSK, QPSK, QAM16, QAM64
Rendement du code interne	1/2, 2/3, 3/4
Préfixe cyclique (étalement max 800 ns)	1/4 (durée totale symbole = 4 μ s)
Nombre de pilotes	4
durée du préambule	16 μ s

Etude de cas : 802.11a

La trame physique 802.11a est composée d'un préambule (16 μ s), d'un champ signal (4 μ s), suivi d'un nombre variable de symboles OFDM (4 μ s) portant les données utiles.

Le préambule permet d'assurer une synchronisation rapide en fréquence et en temps.

Le champ signal contient les paramètres de la transmission (modulés en BPSK).

Les débits sont compris entre 6 et 54 Mbit/s.

Exemples de calcul :

$$\text{Débit utile (64QAM, } R=3/4) = (3/4) \times (6 \times 48) / (4 \cdot 10^{-6}) = 54 \text{ Mbit/s}$$

$$\text{Débit utile (BPSK, } R=1/2) = (1/2) \times (1 \times 48) / (4 \cdot 10^{-6}) = 6 \text{ Mbit/s}$$

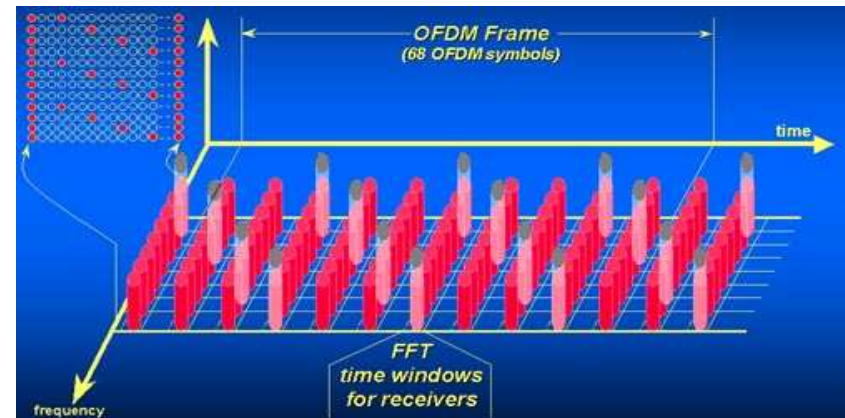
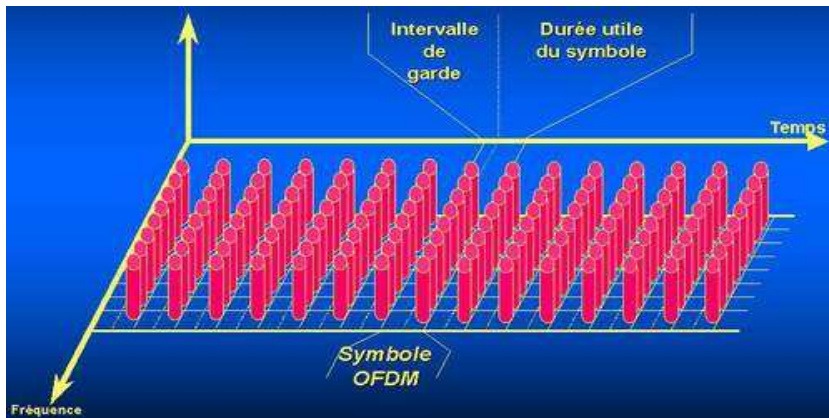
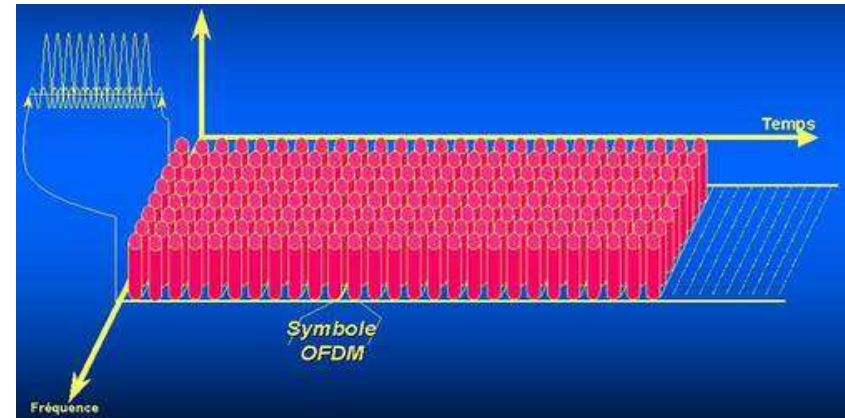
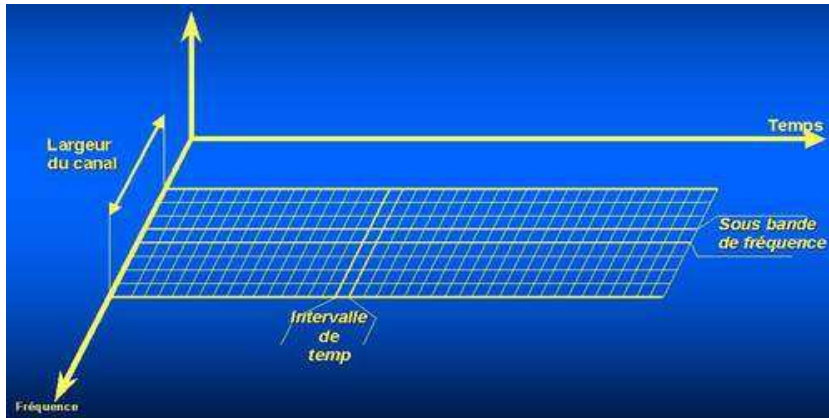
Etude de cas : DVB-T

Il y a deux modes 2k/8k qui indique le nombre de porteuses. Pour un débit utile identique, le mode 8k permet de choisir un intervalle de garde plus grand que le mode 2k, et donc une meilleure robustesse aux échos. En France, les paramètres sont les suivants :

Nombre total de porteuses	6817
Nombre de porteuses transportant des données utiles	6048
Durée symbole OFDM	896 μ s (1116 Hz entre porteuses)
Modulation	QPSK, QAM16, QAM64
Préfixe cyclique (étalement max entre 4 et 224 μ s)	1/32, 1/16, 1/8, 1/4
Rendement du code interne	1/2, 2/3, 3/4, 5/6, 7/8
Rendement du code externe	188/204
Contenu trame OFDM	68 symboles OFDM
Contenu Méga trame	4 trames

DVB-T : format de la trame

769 porteuses (sur 6817) sont utilisées pour transporter 3 types de porteuses pilotes : pilotes fixes, disséminés et TPS(transmission parameter signal). Ces pilotes permettent au décodeur d'assurer la synchronisation en fréquence, en temps ainsi que l'estimation du canal.



DVB-T : Débits utiles dans un canal 8 MHz

Exemple de calcul : 64QAM, R=2/3, GI = 1/4

$$\text{Débit utile} = (188/204) \times (2/3) \times (6 \times 6048) / ((1 + 1/4) \times 896 \cdot 10^{-6}) = 19.9 \text{ Mbit/s}$$

Modulation	Code rate	Guard interval			
		1/4	1/8	1/16	1/32
QPSK	1/2	4,98	5,53	5,85	6,03
	2/3	6,64	7,37	7,81	8,04
	3/4	7,46	8,29	8,78	9,05
	5/6	8,29	9,22	9,76	10,05
	7/8	8,71	9,68	10,25	10,56
16-QAM	1/2	9,95	11,06	11,71	12,06
	2/3	13,27	14,75	15,61	16,09
	3/4	14,93	16,59	17,56	18,10
	5/6	16,59	18,43	19,52	20,11
	7/8	17,42	19,35	20,49	21,11
64-QAM	1/2	14,93	16,59	17,56	18,10
	2/3	19,91	22,12	23,42	24,13
	3/4	22,39	24,88	26,35	27,14
	5/6	24,88	27,65	29,27	30,16
	7/8	26,13	29,03	30,74	31,67

DVB-T : synoptique encodeur

