# Buscas e Caminhos Mínimos em Grafos

Roberto Sales

# Buscas em grafos

- Permitem responder perguntas sobre conectividade
  1. O vértice $u$ está conectado ao vértice $v$ / existe caminho entre $u$ e $v$.
  2. É possível transitar entre qualquer par de vértices $(u, v)$ num dado grafo direcionado $G$? (problema da conectividade forte)
  3. Existe a garantia de que, se uma aresta for removida, o grafo continuará conexo? (problema das pontes)

# Buscas em grafos

- Permitem responder perguntas sobre propriedades do grafo
  1. O grafo não-direcionado $G$ contém ciclos?
  2. O grafo $G$ é um grafo bipartido?

- Permitem resolver problemas de otimização
  1. Caminhos mais curtos num grafo
  2. Caminhos mais longos em alguns grafos com características específicas
  3. Caminho entre dois vértices $u, v$ tal que a aresta de menor capacidade (gargalo) é a maior possível

# Busca em Profundidade

# Busca em Profundidade (DFS)

### Estratégia

Visitar os vértices do grafo de forma recursiva, seguindo sempre pelo próximo vértice não explorado, até que não seja mais possível continuar. Em geral, visita todo vértice e processa toda aresta no máximo uma vez e, portanto, pára.

**Complexidade:** $O(|V| + |E|)$

# Busca em Profundidade

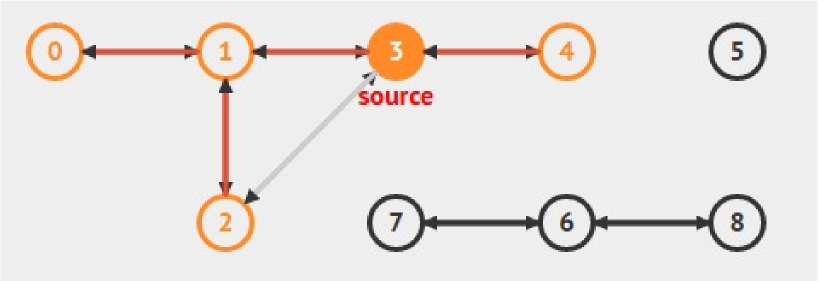
## DFS clássica

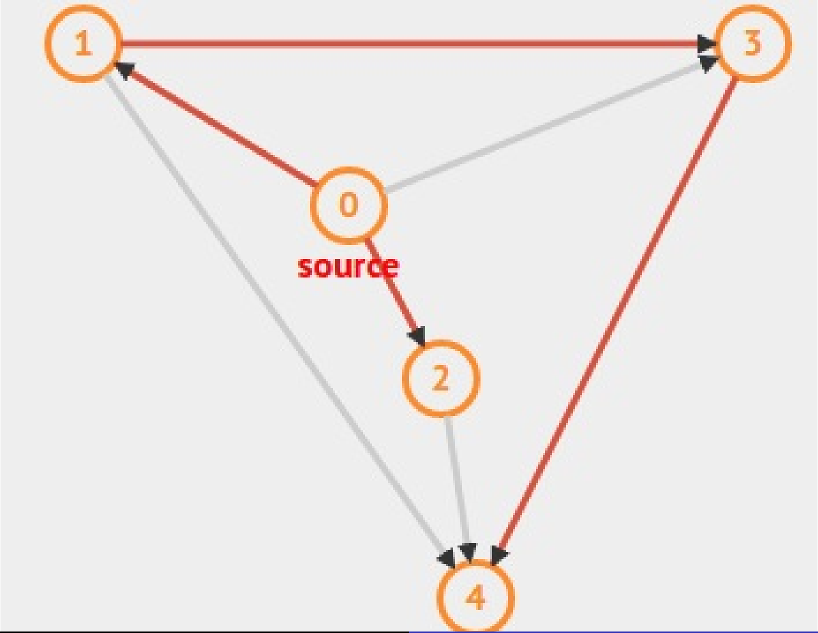
```
bool vis[];
vector<int> adj[];

void dfs(int u){
    vis[u] = true;
    for(int v : adj[u])
        if(!vis[v]) dfs(v);
}

// no caso de várias componentes
for(int i = 0; i < n; i++)
    if(!vis[i]) dfs(i);
```

# Busca em Profundidade (DFS)




1
3
0
source
2
4

# Aplicações da DFS

## Não resolve

- Problemas de caminhos mínimos em grafos gerais
- Problemas de caminhos mais longos em grafos gerais

## Resolve

- Bicolorir um grafo
- Checar conectividade, contar componentes conexas
- Otimizações em árvores

## Variações

- Circuito euleriano
- Caminhos aumentantes (fluxos)
- Componentes biconexas, pontes e pontos de articulação
- Componentes fortemente conexas

# Variações

## Bicoloração

```
int color[]; // inicializado em -1
vector<int> adj[];
bool fail;

void dfs(int u, int c /* 0 ou 1 */){
    color[u] = c;
    for(int v : adj[u])
        if(color[v] == -1) dfs(v, c^1);
        else if(color[v] == c) fail = true;
}
```

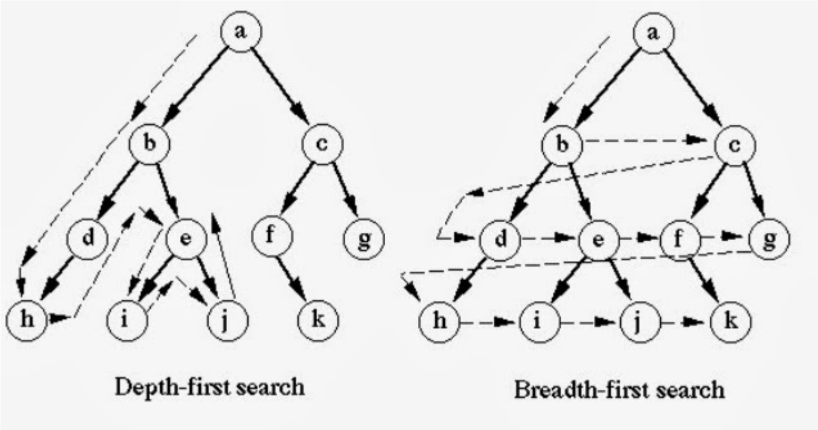
# Busca em Largura

# Busca em Largura (BFS)

## Estratégia

Ao invés de visitar os vértices de forma recursiva, iremos visitá-los em camadas. Em termos de implementação, a única mudança é que deixaremos de usar uma pilha implícita (recursão) em favor de uma fila.

# BFS vs. DFS


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
Depth-first search
a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
Breadth-first search

# Busca em Largura (BFS)

## BFS

```
bool vis[];
queue<int> q;

q.push(source);
vis[source] = true;

while(!q.empty()){
    int u = q.front(); q.pop();
    for(int v : adj[u]) if(!vis[v]){
        vis[v] = true;
        q.push(v);
    }
}
```

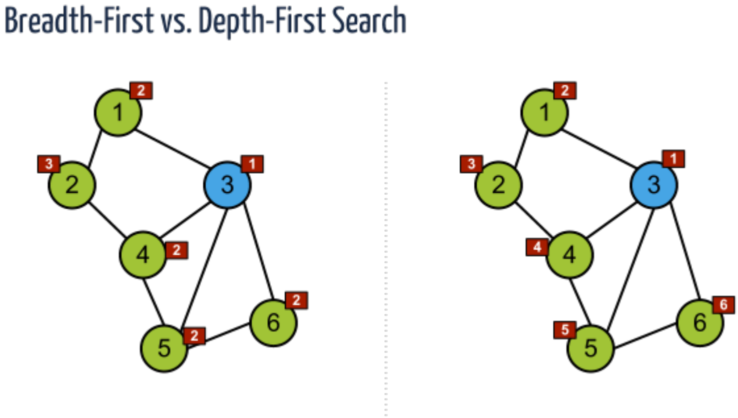
## BFS (caminhos mínimos)

```
int dist[]; // inicializado para inf
queue<int> q;

q.push(source);
dist[source] = 0;

while(!q.empty()){
    int u = q.front(); q.pop();
    for(int v : adj[u]) if(dist[u]+1 < dist[v]){
        dist[v] = dist[u]+1;
        q.push(v);
    }
}
```

# BFS vs. DFS


Breadth-First vs. Depth-First Search
1
2
3
4
5
6
2
3
1
2
2
2
1
2
3
4
5
6
2
3
1
4
5
6

## Curiosidades

Um grafo não precisa estar explicitamente representado na memória para que um algoritmo de busca ou de caminhos mínimos seja executado nele.

## Exemplos

- Problema de caminho mais curto num labirinto (BFS)
- Ladrilhos (Regional - Maratona de Programação 2016) (DFS/BFS)
- Mania de Par (Regional - Maratona de Programação 2015) (dijkstra)
- Contêineres (Regional - Maratona de Programação 2016) (dijkstra)

Qualquer coisa que expresse relações pode ser um grafo, fique atento!

# Dijkstra

# Dijsktra

## Motivação

Computar caminhos mínimos a partir de um vértice $u$ em um grafo com arestas de custo **não-negativo**.

## Subestrutura ótima dos caminhos mínimos

Para todo caminho $u$-$v$-$w$, onde $(v, w)$ é uma aresta do grafo em questão, se $u$-$v$-$w$ é um caminho mínimo, então $u$-$v$ é um caminho mínimo.

```
procedure DIJKSTRA(V, E, s)
    for all u ∈ V \ {s} do
        d_u = oo
    end for
    d_s = 0
    S = ∅
    while S ≠ V do
        extract u ∉ S such that d_u is minimum
        S = S ∪ {u}
        for v adjacent to u do                         ▷ relaxing step
            if d_u + w(u, v) < d_v then
                d_v = d_u + w(u, v)
            end if
        end for
    end while
end procedure
```

# Desafios

## XOR Equations

Dadas $n$ variáveis booleanas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e $m$ equações na forma $x_i \oplus x_j = z$, onde $z \in \{0, 1\}$, determine se o sistema tem uma solução. Em caso positivo, descubra uma.

## Sequência Lexicograficamente Máxima

Dada uma sequência de inteiros $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e um conjunto de operações válidas $X$, determine a maior sequência lexicograficamente que é possível obter usando um número finito de operações.

O conjunto $X$ tem $m$ pares na forma $(i, j)$. Tal par descreve uma operação de troca entre as posições $i$ e $j$ da sequência.