Rapport PROJ, partie théorique

Michaël LAPORTE et Guillaume BRIVARY

Master Parisien de Recherche Opérationnelle
15 décembre 2024

Table des matières

1 Rappel du problème

Problème statique

On considère un problème de tournées de véhicules dans lequel un entrepôt doit livrer des vaccins à un ensemble de clients. Le problème est caractérisé par :

— un ensemble de sommets $V = \{1, ..., n\}$, tel que le sommet 1 correspond à l'entrepôt des véhicules où se trouve le stock de vaccins, et les autres sommets représentent les clients à livrer. Soit $A = \{ij \in V^2 | i \neq j\}$;

— une durée $t_{ij} \in \mathbb{N}$ associée à chaque couple de sommets $(i, j) \in A$, correspondant au temps minimal pour qu'un véhicule se rende du sommet i au sommet j ;

— une demande $d_i \in \mathbb{N}$ associée à chaque sommet $i \in V \setminus \{1\}$, correspondant au nombre de vaccins à livrer au client i ;

— une capacité maximale $C \in \mathbb{N}$, correspondant au nombre maximal de vaccins qu'il est possible de stocker dans un véhicule. Cette capacité est identique pour tous les véhicules.

On définit une tournée T comme une suite de sommets $T = \{t_1, t_2, ..., t_{|T|}\}$ telle que :

— la tournée débute et termine à l'entrepôt $(t_1 = t_{|T|} = 1)$;

— la somme des demandes des clients visités n'excède pas la capacité d'un véhicule :

$$\sum_{i=2}^{|T|-1} d_{t_i} \leq C;$$

— tous les clients visités sont différents :

$$t_i \neq t_j, \quad \forall i, j \in \{2, ..., |T| - 1\}, i \neq j.$$

L'objectif du problème statique consiste à déterminer un ensemble de tournées permettant de visiter l'ensemble des clients tout en minimisant la durée totale des trajets.

Précisions :

— Le nombre de véhicules n'est pas limité et n'intervient pas dans la fonction objectif.

— Chaque client doit être visité dans exactement une tournée. Par exemple, une solution comportant les deux tournées $\{1, 2, 3, 1\}$ et $\{1, 4, 5, 6, 1\}$ sera admissible seulement si $d_2 + d_3 \leq C$ et $d_4 + d_5 + d_6 \leq C$. La valeur de l'objectif associée à cette solution est

$$t_{1,2} + t_{2,3} + t_{3,1} + t_{1,4} + t_{4,5} + t_{5,6} + t_{6,1}.$$

Problème robuste

Nous souhaitons résoudre une version robuste du problème statique, car il est possible que les valeurs choisies pour les temps de trajets soient sous-évaluées.

Incertitude sur les distances

À chaque sommet $i \in V$ est associé un entier $\widehat{t}_i$. Nous supposons que l'augmentation de la durée de trajet entre deux sommets i et j peut au maximum être $\widehat{t}_i + \widehat{t}_j + 2\widehat{t}_i\widehat{t}_j$. L'augmentation totale des durées est limitée par un paramètre $T \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des valeurs que peuvent prendre les durées est défini comme suit :

$$\mathcal{U} = \left\{ \{t'_{ij} = t_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{t_i} + \widehat{t_j}) + \delta^2_{ij}\widehat{t_i}\widehat{t_j}\}_{ij \in A} \;\middle|\; \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq T,\ \sum_{ij \in A} \delta^2_{ij} \leq T^2,\ \delta^1_{ij} \in [0,1],\ \delta^2_{ij} \in [0,2],\ \forall ij \in A \right\}.$$

Remarque : Seules δ^1_{ij} et δ^2_{ij} sont des variables. En effet, t_{ij}, $\widehat{t_i}$ et T sont des données du problème.

2 Modélisation théorique

Avant de nous lancer dans la résolution de ce problème intéressons nous à sa modélisation :

2.1 Modélisation du problème compacte déterministe

Pour modéliser le problème nous allons introduire 3 types de variables :

$$\forall i,j \in V^2, \forall T \in [\![1, |V|]\!], \quad x_{ijT} = \begin{cases} 1 & \text{si l'}\textbf{arc}\text{ ij fait partie de la tournée T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

$$\forall T \in [\![1, |V|]\!], \quad b_T = \begin{cases} 1 & \text{si la tournée T contient au moins une arête} \\ 0 & \text{si la tournée T est vide} \end{cases} \tag{2}$$

$$\forall i \in V, \forall T \in [\![1, |V|]\!], \quad u_{iT} \text{ est le compteur d'ordre de chaque sommet i dans la tournée T} \tag{3}$$

La polynomialité du problème vient du fait que l'on peut majorer le nombre de tournée par le nombre de sommets grâce à la contrainte expliquée dans l'énoncé [1], ainsi on se retrouve avec n^3 variables issues de (1), n variables issues de (2) et n^2 variables issues de (3).

En utilisant les variables ainsi définies on peut écrire le problème sous la forme suivante :

$$\min_{x,b,u} \sum_{T \in [\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j}} t_{ij} x_{ijT}$$

Sous contraintes :

1. Un sommet ne peut être visité que dans une seule tournée

$$\textbf{s.c.} \quad \sum_{T \in [\![1,|V|]\!]} \sum_{j \in N^+(i)} x_{ijT} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{1\} \tag{4}$$

$$\sum_{T \in [\![1,|V|]\!]} \sum_{i \in N^-(i)} x_{ijT} = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{1\} \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j, j \neq 1}} x_{ijT} d_j \leq C \quad \forall T \in [\![1,|V|]\!] \tag{6}$$

$$u_{iT} - u_{jT} + 1 \leq (n-1)(1 - x_{ijT}) \quad \forall T \in [\![1,|V|]\!], \forall i,j \in V^2, i \neq j, i \neq 1, j \neq 1 \tag{7}$$

$$b_T \geq x_{1jT} \quad \forall T \in [\![1,|V|]\!], \forall j \in V \tag{8}$$

$$\sum_{j \in N^+(1)} x_{1jT} = b_T \quad \forall T \in [\![1,|V|]\!] \tag{9}$$

$$\sum_{i \in N^-(1)} x_{i1T} = b_T \quad \forall T \in [\![1,|V|]\!] \tag{10}$$

$$x_{ijT} \in \{0,1\} \quad \forall ij \in V^2, \forall T \in [\![1,|V|]\!] \tag{11}$$

$$b_T \in \{0,1\} \quad \forall T \in [\![1,|V|]\!] \tag{12}$$

$$u_{iT} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in V, \forall T \in [\![1,|V|]\!] \text{ et } u_{1T} = 0 \quad \forall T \in [\![1,|V|]\!] \tag{13}$$

Explications des contraintes :

— Les contraintes (5) et (4) forcent les arêtes d'une tournée à entrer/sortir au plus une seule fois d'un sommet, elles permettent aussi d'assurer que tous les sommets sont visités une seule fois par une seule tournée.

— La contrainte (6) permet de s'assurer que la contrainte de capacité sur les tournées est respectée.

— Les contraintes (7) et (13) permettent d'empêcher des solutions avec des tournées non connexes d'apparaître, pour ça on donne à chaque sommet d'une tournée un compteur augmentant strictement à chaque sommet, la contrainte (7) assure la stricte monotonie de ce compteur.

— Les contraintes (8), (9) et (10) permettent d'assurer qu'une tournée commence et termine en 1 (le dépôt), **SI** la tournée n'est pas vide, c'est à dire qu'au moins une arête la constitue [2].

— Les contraintes (11) et (12) sont les contraintes d'intégrité des variables x et b.

2.2 Modélisation du problème robuste

Maintenant modifions notre modélisation compacte afin de résoudre le problème robuste lié à l'incertitude sur les temps de livraison :

2. La contrainte (8) devrait alors s'écrire $b_T \geq x_{ijT} \quad \forall T \in [1,|V|], \forall i,j \in V^2$, cependant les autres contraintes obligent une tournée à sortir de 1, donc si la tournée n'est pas vide elle sort forcément de 1, la contrainte (8) est alors simplifiée sur les arêtes sortant de 1.

$$\min_{x,b,u} \quad \max_{t'_{ij}\in\mathcal{U}} \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j\,\in\,V^2\\ i\neq j}} t'_{ij}x_{ijT}$$

$$\textbf{s.c.} \quad x,b,u \in \{(x,b,u) \text{ vérifiant les contraintes (4) à (13)}\}$$

Avec $\mathcal{U}$ défini dans l'énoncé du problème.

2.3 Résolution par des plans coupants

Pour pouvoir utiliser un algorithme de plans coupants pour résoudre le problème, on commence par reformuler l'objectif afin que la robustesse n'apparaisse plus que dans les contraintes :

$$\min_{x,b,u,z} z \tag{14}$$

$$\textbf{s.c. } z \geq \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j\,\in\,V^2\\ i\neq j}} t'_{ij}x_{ijT} \ \forall t'_{ij} \in \mathcal{U} \tag{15}$$

$$x,b,u \in \{(x,b,u) \text{ vérifiant les contraintes (4) à (13)}\} \tag{16}$$

On initialise l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les durées de la façon suivante :

$$\mathcal{U}^* = \left\{ \{t'_{ij} = t_{ij}\} \middle| ij \in A \right\}.$$

On obtient alors le problème maître (MP) suivant :

$$\min_{x,b,u,z} z \tag{17}$$

$$\textbf{s.c. } z \geq \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j\,\in\,V^2\\ i\neq j}} t'_{ij}x_{ijT} \ \forall t'_{ij} \in \mathcal{U}^* \tag{18}$$

$$x,b,u \in \{(x,b,u) \text{ vérifiant les contraintes (4) à (13)}\} \tag{19}$$

Avant de pouvoir résoudre le problème maître défini précédemment, il faut traiter le sous-problème associé :

$$\max_{\delta^1,\delta^2} \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j}} [t_{ij} + \delta^1_{ij}(\widehat{t_i} + \widehat{t_j}) + \delta^2_{ij}(\widehat{t_i}\widehat{t_j})]x^*_{ijT} \tag{20}$$

$$\textbf{s.c.} \quad \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j}} \delta^1_{ij} \leq T \tag{21}$$

$$\sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j}} \delta^2_{ij} \leq T^2 \tag{22}$$

$$0 \leq \delta^1_{ij} \leq 1 \tag{23}$$

$$0 \leq \delta^2_{ij} \leq 2 \tag{24}$$

Une solution du problème maître est une solution optimale si :

$$z^* \geq \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j}} [\delta^1_{ij}{}^*(\widehat{t_i} + \widehat{t_j}) + \delta^2_{ij}{}^*(\widehat{t_i}\widehat{t_j})]\ x^*_{ijT} \tag{25}$$

$$\text{Avec } z^* \text{ la valeur optimale de (17)} \tag{26}$$

$$\text{Avec } \delta^{1*}, \delta^{2*} \text{ les solutions du problème (20)} \tag{27}$$

Les coupes ajoutées au problème maître par la résolution du sous-problème sont de la forme :

$$z \geq \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j}} [\delta^1_{ij}{}^*(\widehat{t_i} + \widehat{t_j}) + \delta^2_{ij}{}^*(\widehat{t_i}\widehat{t_j})]\ x_{ijT} \tag{28}$$

2.4 Résolution par dualisation

En réutilisant la structure de $\mathcal{U}$ on peut réécrire le problème d'une autre façon afin d'isoler le problème interne :

$$\min_{x,b,u} \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i\neq j}} t_{ij}x_{ijT} + \max_{\delta^1,\delta^2} \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i\neq j}} [\delta^1_{ij}(\widehat{t}_i + \widehat{t}_j) + \delta^2_{ij}(\widehat{t}_i\widehat{t}_j)]x_{ijT} \tag{29}$$

$$\sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i\neq j}} \delta^1_{ij} \leq T \tag{30}$$

$$\sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i\neq j}} \delta^2_{ij} \leq T^2 \tag{31}$$

$$0 \leq \delta^1_{ij} \leq 1 \tag{32}$$

$$0 \leq \delta^2_{ij} \leq 2 \tag{33}$$

$$\textbf{s.c.} \quad x,b,u \in \{(x,b,u) \text{ vérifiant les contraintes (4) à (13)}\} \tag{34}$$

Ainsi le problème interne est :

$$\max_{\delta^1,\delta^2} \sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i\neq j}} [\delta^1_{ij}(\widehat{t}_i + \widehat{t}_j) + \delta^2_{ij}(\widehat{t}_i\widehat{t}_j)]x_{ijT} \tag{35}$$

$$\textbf{s.c.} \quad \delta^1,\delta^2 \in \left\{(\delta^1,\delta^2) \text{ vérifiant les contraintes (30) à (33)}\right\} \tag{36}$$

En dualisant ce problème on obtient :

$$\min_{\lambda^1,\lambda,\mu^2,\mu} \lambda^1 T + \mu^2 T^2 + \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i\neq j}} (\lambda_{ij} + 2\mu_{ij}) \tag{37}$$

$$\sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} x_{ijt}(\widehat{t}_i + \widehat{t}_j) \leq \lambda^1 + \lambda_{ij} \quad \forall i,j \in V^2, i\neq j \tag{38}$$

$$\sum_{T\in[\![1,|V|]\!]} x_{ijt}\widehat{t}_i\widehat{t}_j \leq \mu^2 + \mu_{ij} \quad \forall i,j \in V^2, i\neq j \tag{39}$$

$$\lambda^1, \mu^2 \in \mathbb{R}_+ \tag{40}$$

$$\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i,j \in V^2, i\neq j \tag{41}$$

Ainsi résoudre le problème robuste revient à résoudre le problème suivant :

$$\min_{x,b,u,\lambda^1,\lambda,\mu^2,\mu} \quad \lambda^1 T + \mu^2 T^2 + \sum_{\substack{i,j \in V^2 \\ i \neq j}} [(\lambda_{ij} + 2\mu_{ij}) + \sum_{T \in [\![1,|V|]\!]} t_{ij} x_{ijT}] \tag{42}$$

$$\textbf{s.c.} \quad \lambda^1, \lambda, \mu^2, \mu \in \left\{(\lambda^1, \lambda, \mu^2, \mu) \text{ vérifiant les contraintes (38) à (41)}\right\} \tag{43}$$

$$x, b, u \in \{(x, b, u) \text{ vérifiant les contraintes (4) à (13)}\} \tag{44}$$