MPRO – Projet ECMA 2024 - 2025

Exercise 1 Modélisation papier

1. Proposer une modélisation du problème statique sous la forme d'un programme linéaire en nombre entiers **compact**. Il est généralement difficile d'obtenir une modélisation compacte pour les problèmes de tournées de véhicules mais le fait que le nombre de véhicules n'intervient pas dans la fonction objectif le permet ici. Pour ce faire, une possibilité est d'utiliser les inégalités dites MTZ qui sont illustrées ici sur le problème de voyageur de commerce.
2. Proposer une modélisation du problème robuste sous la forme d'un programme en nombres entiers.
3. **Résolution par plans coupants et LazyCallback**
   a) Modifier le problème afin que la robustesse n'apparaisse plus dans l'expression de l'objectif mais dans les contraintes.
   b) Définir l'ensemble $\mathcal{U}^*$ que vous utiliserez initialement dans le problème maître.
   c) Exhiber le sous-problème nécessaire à la résolution du problème robuste par plans coupants (les contraintes devront être exprimées de manière explicite).
   d) Quelles sont les conditions à satisfaire pour qu'une solution du problème maître soit optimale ?
   e) Quelle est l'expression des coupes ajoutées par ce sous-problème ?
4. **Résolution par dualisation**
   a) Reformuler l'objectif du problème robuste afin d'isoler le terme faisant intervenir les variables δ^1_{ij} et δ^2_{ij}.
   b) Exhiber le problème interne lié à ces variables.
   c) Dualiser ce problème.
   d) Utiliser cette dualisation afin de présenter le problème robuste sous la forme d'un simple programme linéaire en nombres entiers.

Answer of exercise 1

1. Problème statique

   $x_{ij} = 1$ si et seulement si les sommets i et j sont visités consécutivement dans une tournée.

   $u_i =$ nombre de vaccins livrés par le véhicule lorsqu'il arrive au sommet i.

$$
\begin{cases}
\min_x & \sum_{ij \in A} t_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s.c.} & \sum_{j \in V\setminus\{i\}} x_{ji} = 1 & i \in V\setminus\{1\} & \text{(1 véhicule atteint le client } i\text{)} \\
& \sum_{j \in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1 & i \in V\setminus\{1\} & \text{(1 véhicule quitte le client } i\text{)} \\
& \sum_{j \in V\setminus\{1\}} x_{1j} = \sum_{j \in V\setminus\{1\}} x_{j1} & & \text{(autant de véhicules quittent et atteignent l'entrepôt)} \\
& u_i \leq C - d_i & i \in V\setminus\{1\} & \text{(en arrivant en } i \text{ le véhicule doit contenir suffisamment} \\
& & & \text{de vaccins pour satisfaire la demande de } i\text{)} \\
& u_j - u_i \geq d_i - C(1 - x_{ij}) & ij \in A & \text{(si } i \text{ est le précédesseur de } j\text{, au moins } d_i \text{ vaccins de plus} \\
& & & \text{ont été livrés en arrivant en } j \text{ qu'en } i\text{)} \\
& u_j \leq C(1 - x_{1j}) & j \in V\setminus\{1\} & \text{(si } i \text{ est le premier client de la tournée, aucun vaccin n'a} \\
& & & \text{été livré en y arrivant)} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & ij \in A & \\
& u_i \geq 0 & i \in V\setminus\{1\} &
\end{cases}
$$

Remarque : Sans la contrainte $u_j \leq C(1 - x_{1j})$ la variable u_j pourrait avoir une valeur plus grande que le nombre de vaccins livrés en arrivant en j. Ceci pourrait se produire lorsque les clients d'une tournée ont une demande cumulée $< C$. Cependant, cela ne modifie pas l'ensemble des tournées réalisables pour le problème et ces contraintes sont donc optionnelles.

2. Problème robuste

$$\left\{\begin{array}{lll}
\min_x \max_{t' \in U} & \sum_{ij \in A} t'_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.c.} & \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ji} = 1 & i \in V \setminus \{1\} \\
& \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = 1 & i \in V \setminus \{1\} \\
& \sum_{j \in V \setminus \{1\}} x_{1j} = \sum_{j \in V \setminus \{1\}} x_{j1} & \\
& u_i \leq C - d_i & i \in V \setminus \{1\} \\
& u_j - u_i \geq d_i - C(1 - x_{ij}) & ij \in (V \setminus \{1\})^2 \ i \neq j \\
& u_j \leq C(1 - x_{1j}) & j \in V \setminus \{1\} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & ij \in A \\
& u_i \geq 0 & i \in V \setminus \{1\}
\end{array}\right.$$

3. (a) Reformulation de l'objectif robuste

$$\left\{\begin{array}{lll}
\min & z & \\
\text{s.c.} & z \geq \sum_{ij \in A} t'_{ij} x_{ij} & t' \in \mathcal{U} \\
& \ldots &
\end{array}\right.$$

(b) $\mathcal{U} = \left\{ \{t'_{ij} = t_{ij}\}_{ij \in A} \right\}$

(c) Sous-problème lié à $\mathcal{U}$

Solution courante du problème maître

$$(SP) \left\{\begin{array}{lll}
z = \max_{\delta^1, \delta^2} & \sum_{ij \in A} [\delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j] x^*_{ij} & \\
\text{s.c.} & \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq T & \\
& \sum_{ij \in A} \delta^2_{ij} \leq T^2 & \\
& \delta^1_{ij} \in [0, 1] & ij \in A \\
& \delta^2_{ij} \in [0, 2] & ij \in A
\end{array}\right.$$

Objectif courant du problème maître

(d) Une solution x^*_{ij} est optimale si $z = z^*$

Solution de (SP)

(e) Contrainte de (SP) : $z \geq \sum_{ij \in A} [\delta^{1*}_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^{2*}_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j] x_{ij}$

Solution de (SP)

4. (a) Reformulation de l'objectif

$$\begin{aligned}
\min_x \max_{t' \in U} \sum_{ij \in A} t'_{ij} x_{ij} & \\
&= \min_x \max_{\delta^1, \delta^2} \sum_{ij \in A} \left[t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j \right] x_{ij} \\
&= \min_x \sum_{ij \in A} t_{ij} x_{ij} + \min_x \max_{\delta^1, \delta^2} \sum_{ij \in A} [\delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j] x_{ij}
\end{aligned}$$

(b) $$(PI) \left\{\begin{array}{llll}
\max_{\delta^1, \delta_2} & \sum_{ij \in A} \left[\delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j \right] x_{ij} & & \\
\text{s.c.} & \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq T & & (\alpha^1) \\
& \sum_{ij \in A} \delta^2_{ij} \leq T^2 & & (\alpha^2) \\
& \delta^1_{ij} \in [0, 1] & ij \in A & (\beta^1_{ij}) \\
& \delta^2_{ij} \in [0, 2] & ij \in A & (\beta^2_{ij})
\end{array}\right.$$

(c)
$$(D)\begin{cases} \min_{\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2} & \alpha^1 T + \alpha^2 T^2 + \sum_{ij\in A}(\beta^1_{ij} + 2\beta^2_{ij}) & \\ \text{s.c.} & \alpha^1 + \beta^1_{ij} \geq (\hat{t}_i + \hat{t}_j)x_{ij} & ij \in A \\ & \alpha^2 + \beta^2_{ij} \geq \hat{t}_i\hat{t}_j x_{ij} & ij \in A \\ & \alpha^1, \alpha^2 \geq 0 & \\ & \beta^1_{ij}, \beta^2 \geq 0 & ij \in A \end{cases}$$

(d) Problème robuste dualisé

$$\begin{cases} \min_{x,\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2} & \sum_{ij\in A}(t_{ij}x_{ij} + \beta^1_{ij} + 2\beta^2_{ij}) + \alpha^1 T + \alpha^2 T^2 & \\ \text{s.c.} & \alpha^1 + \beta^1_{ij} \geq (\hat{t}_i + \hat{t}_j)x_{ij} & ij \in A \\ & \alpha^2 + \beta^2_{ij} \geq \hat{t}_i\hat{t}_j x_{ij} & ij \in A \\ & \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ji} = 1 & i \in V\setminus\{1\} \\ & \sum_{j\in V\setminus\{i\}} x_{ij} = 1 & i \in V\setminus\{1\} \\ & \sum_{j\in V\setminus\{1\}} x_{1j} = \sum_{j\in V\setminus\{1\}} x_{j1} & \\ & u_i \leq C - d_i & i \in V\setminus\{1\} \\ & u_j - u_i \geq d_i - C(1 - x_{ij}) & ij \in (V\setminus\{1\})^2\ i \neq j \\ & u_j \leq C(1 - x_{1j}) & j \in V\setminus\{1\} \\ & x_{ij} \in \{0,1\} & ij \in A \\ & u_i \geq 0 & i \in V\setminus\{1\} \\ & \alpha^1, \alpha^2 \geq 0 & \\ & \beta^1_{ij}, \beta^2 \geq 0 & ij \in A \end{cases}$$