Trabajo monográfico

Elementos de la Matemática

Topología

Nicolas Bourbaki

Orientadores:

André Weil
ENS

Lauren Schwartz
École Polytechnique

Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Resumen

Un encaje de S^1 en S^2 es una función $f : S^1 \to S^2$ inyectiva y continua. Una función así es un homeomorfismo sobre su imagen, y por lo tanto $f(S^1)$ es una curva cerrada simple γ. ¿Qué sabemos sobre γ? Desde hace 150 años se sabe que γ separa a S^2 en dos componentes conexas. Hace 100 años se probó que además existe un homeomorfismo $h : S^2 \to S^2$ que manda γ en S^1, lo que tiene como consecuencia que las componentes conexas de γ^c tienen $\pi_1 = 0$.

qué sabemos sobre γ me parece muy general y no sé q cosas más "sabemos" sobre γ q se me escapan

¿Qué pasa en general con encajes de $f : S^{n-1} \to S^n$? Desde hace 100 años sabemos que $f(S^{n-1})^c$ tiene dos componentes conexas. Sin embargo, en estos casos no necesariamente existe un homeomorfismo $h : S^n \to S^n$ que mande $f(S^n)$ al encaje usual de $S^{n-1} \subset S^n$.

Estos dos útlimos resultados se probarán en esta monografía. Para el primero se introducirá al lector a la teoría de homología singular y se probarán algunos resultados sobre la misma. Para probar que el homeomorfismo f no necesariamente se extiende a todo S^n, darán dos ejemplos de 2-esferas S encajadas en R^3 con $\pi_1(S^c) \neq \varnothing$. Además veremos que los $\pi_1(S)$ serán ejemplos de grupos no triviales cuyo abelianizado es trivial.

Después veremos cositas de límites inversos y atractores de sistemas dinámicos.

escribir xd

CAPÍTULO 1

Preliminares

En general, notamos $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, y decimos que una $n-$esfera es un espacio topológico S tal que existe un homeomorfismo $h : S \to S^n$.

agregar: grupo libre, notación

CAPÍTULO 2

Homología simplicial

En esta sección introduciremos al lector a la teoría de homología simplicial. Se presentarán algunas definiciones y ejemplos con el objetivo de desarrollar primeras intuiciones sobre la teoría de homología, para luego dar paso a la definición de homología singular en el siguiente capítulo.

Para empezar, definiremos lo que es un n-símplice:

Definición 2.1. Un n-símplice es el menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ $(m \geq n)$ que contiene $n+1$ puntos $v_0, \ldots, v_n$, tales que $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, $\ldots$, $v_n - v_0$ son linealmente independientes. Llamaremos vértices a estos v_i.

En general, dado un n-símplice, vamos a darle un orden a sus vértices, y notaremos al símplice $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ de acuerdo con este orden.

Definición 2.2. Un orden en los vértices nos induce un orden en la restricción a un subconjunto de esos vértices. Haremos uso de la siguiente notación:

$$[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] := [v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n]$$

Esta es una forma de notar el $(n-1)$-símplice obtenido al sacar v_i del conjunto de vértices de $[v_0, \ldots, v_n]$ y tomar el menor conjunto convexo que contiene a los vértices restantes.

Diremos que $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ es una cara de $[v_0, \ldots, v_n]$.

Observación 2.3. El borde de un n-símplice Δ^n es la unión de sus $n+1$ caras, lo notaremos $\partial \Delta^n$.

Llamaremos aristas a los 2-símplices con vértices $v_i, v_j \in \{v_0, \ldots, v_n\}$. Estas también heredan el orden de $[v_0, \ldots, v_n]$, y por lo tanto las notamos $[v_i, v_j]$ si $i < j$.

Como se muestra en la imagen 1, un ejemplo de 3-símplice es un tetraedro en $\mathbb{R}^3$, un 2-símplice es un triángulo en $\mathbb{R}^2$, un 1-símplice es un intervalo en $\mathbb{R}$, y un 0-símplice es un punto.

las imágenes no son finales, eventualmente las voy a hacer en digital

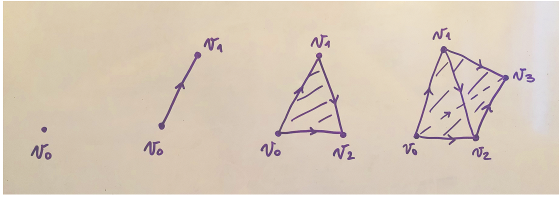


Imagen 1. n-símplices con las orientaciones de sus aristas, $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

Definición 2.4. Llamaremos n-símplice estándar al conjunto

$$\Delta^n := \Big\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ para todo } i,\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\Big\}$$

Los vértices de este n-símplice son los que conforman la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si notamos a estos puntos $e_1, \ldots, e_{n+1}$, otra forma de escribir este conjunto es

$$\Delta^n = [e_1, \ldots, e_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para $n = 2$, el 2-símplice estándar Δ^2 es el triángulo en $\mathbb{R}^3$ con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Con $n = 1$, el 1-símplice estándar es el segmento que va de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Esto se muestra en la imagen 2.

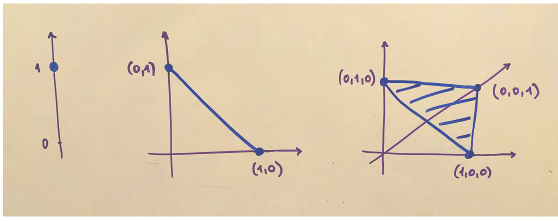


Imagen 2. n-símplices estándar, $n \in \{0, 1, 2\}$

Definición 2.5. Dado un n-símplice $[v_0, \ldots, v_n]$, la función $h : \Delta^n \to [v_0, \ldots, v_n]$ dada por

$$h(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} x_i v_i$$

es un homeomorfismo lineal que preserva el orden de las aristas. Llamaremos a esta función el homeomorfismo canónico.

La función h es lineal y manda los elementos $e_0, \ldots, e_n$ de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ a $v_0, \ldots, v_n$ respectivamente, por lo tanto su imagen es el n-símplice $[v_0, \ldots, v_n]$ y el orden de las aristas se mantiene.

Antes de entrar en la definición de homología singular, vamos a definir la homología simplicial, que nos va a dar una imagen de las intuiciones que en la homología singular se ven más ofuscadas a cambio de obtener una teoría menos rígida y más limpia para trabajar.

cambiar este párrafo

Para empezar, vamos a definir lo que será una estructura de Δ-complejo para un espacio topológico cualquiera. Esto va a ser el análogo en dimensión n de triangular nuestro espacio con 2-símplices.

Definición 2.6. Una estructura de Δ-complejo para un espacio topológico X es una familia de funciones continuas $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$ que cumplen:

(1) Las σ_α son inyectivas al restringirlas a $Int(\Delta^{n_\alpha})$, y dado cualquier $x \in X$, existe algún α tal que x está en la imagen de $Int(\Delta^{n_\alpha})$ por σ_α.
(2) Si restringimos cualquier σ_α a una cara de Δ^{n_α}, esa restricción va a ser equivalente a otro mapa de la familia $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha - 1} \to X$, identificando la cara de Δ^{n_α} con $\Delta^{n_\alpha - 1}$ mediante el homeomorfismo canónico.
(3) Un conjunto $U \subset X$ es abierto $\iff$ $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ es abierto para todo α.

Las condiciones (1) y (3) nos dicen que las funciones σ_α restrictas a $Int(\Delta^{n_\alpha})$ son homeomorfismos sobre su imagen.

En el punto (2), la equivalencia es en el siguiente sentido:

Dada $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$, notamos $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$ a una cara de Δ^{n_α}. Consideramos $h : \Delta^{n_\alpha - 1} \to \hat{\Delta}^{n_\alpha}$ el homeomorfismo canónico que manda el $\{n_\alpha - 1\}$-símplice estándar a $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$. Lo que nos dice este punto es que existe una función $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha - 1} \to X$ en la familia que cumple $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ h$. Decimos entonces que $\sigma_\alpha|_{\hat{\Delta}^{n_\alpha}}$ es equivalente a σ_β y lo notaremos $\sigma_\alpha|_{\hat{\Delta}^{n_\alpha}} \simeq \sigma_\beta$.

Si por cada elemento $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$ proveniente de la estructura de Δ-complejo de X consideramos un n_α-símplice $\Delta_\alpha^{n_\alpha}$, entonces X es el espacio obtenido al tomar el cociente de $x \sim h(x)$ para todas las $h : \Delta^{n_\alpha - 1} \to \hat{\Delta}_\alpha^{n_\alpha}$ definidas como en el párrafo anterior. Algunos ejemplos se muestran en la imagen 3.

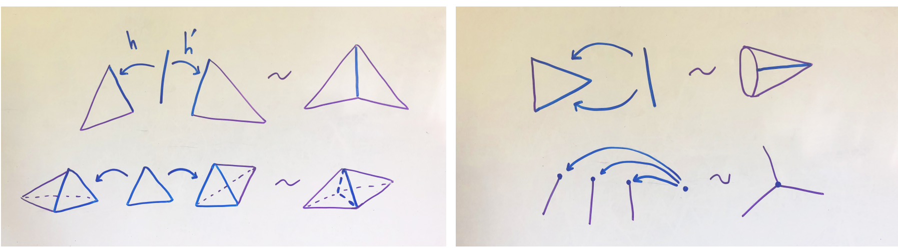


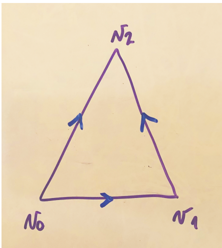
Imagen 3. Cocientes de símplices

me gustaría mejorar cómo está redactado pero no quiero abusar de los subíndices, porque sería una h por cada cara de cada símplice

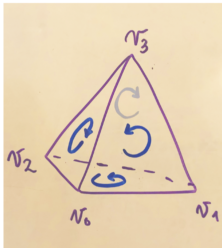
Definición 2.7. Dada una estructura de Δ-complejo para un espacio X, definimos $\Delta_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por los $\{\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X \mid n_\alpha = n\}$. Es decir, los elementos de $\Delta_n(X)$, a los que llamaremos n-cadenas, son sumas formales finitas $\sum_{i=1}^{N} k_i\sigma_i$, con $k_i \in \mathbb{N}$.

Nuestro objetivo ahora será definir un homomorfismo de grupos $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ al que llamaremos mapa borde. Para motivar la definición primero nos enfocaremos en dimensiones 2 y 3, consideramos entonces las caras de Δ^2 y Δ^3.

En la imagen 4 se muestra la orientación usual de las caras de cada uno de estos símplices, derivada del orden en sus vértices.



(A) $[v_1, v_2]$, $[v_0, v_2]$ y $[v_0, v_1]$



(B) $[v_1, v_2, v_3]$, $[v_0, v_2, v_3]$, $[v_0, v_1, v_3]$ y $[v_0, v_1, v_2]$

Imagen 4. Orientación usual

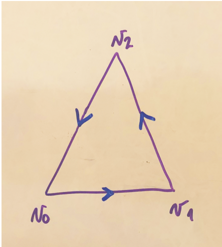
A continuación, en la imagen 5 ilustramos cómo quedan orientadas las caras si revertimos la orientación de los $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ con i impar.

sé que el formato de las imágenes está muy feo acá, en el futuro acomodaré todo eso cuando agregue las imágenes finales

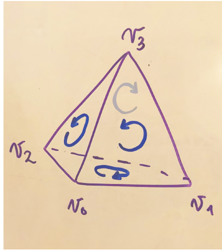
La idea entonces es que para obtener una orientación coherente y homogénea en las caras de nuestro símplice, vamos a intercalar la orientación usual de las caras con la orientación revertida.

Definición 2.8. Procedemos ahora a definir el homomorfismo $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$. Para esto, fijamos su valor en los generadores de $\Delta_n(X)$, es decir, las funciones $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$. Notando $\Delta^n = [v_0, \ldots, v_n]$, definimos

$$\partial_n(\sigma_\alpha) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots v_n]}$$



(A) $[v_1, v_2]$, $-[v_0, v_2]$ y $[v_0, v_1]$



(B) $[v_1, v_2, v_3]$, $-[v_0, v_2, v_3]$, $[v_0, v_1, v_3]$ y $-[v_0, v_1, v_2]$

Imagen 5. Orientación obtenida al intercalar los signos

Definir el homomorfismo de esta manera lo dota de la siguiente propiedad, que será esencial para el desarrollo de la teoría:

Lema 2.9. La composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-2}(X)$ es cero.

Demostración. Veamos que vale para $\sigma : \Delta^n \to X$ perteneciente a los generadores de $\Delta_n(X)$. La composición queda de la siguiente manera:

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\sum_{j<i}^{n} (-1)^j \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v_j},\ldots,\hat{v_i},\ldots,v_n]} + \sum_{j>i}^{n} (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v_i},\ldots,\hat{v_j},\ldots,v_n]} \right)$$

Es importante observar que en la última sumatoria obtenemos un $(-1)^{j-1}$ en vez de un $(-1)^j$. Esto se debe a que si $j > i$, entonces el vértice v_j está en el lugar $j-1$ del $(n-1)$-símplice $[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_j, \ldots, v_n]$.

Usando que ∂_n y ∂_{n-1} son homomorfismos de grupos podemos distribuir el $(-1)^i$ y obtener que cada término de la sumatoria es de la forma $(-1)^i(-1)^j \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v_j},\ldots,\hat{v_i},\ldots,v_n]}$ si $i > j$, o $(-1)^i(-1)^{j-1}\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v_i},\ldots,\hat{v_j},\ldots,v_n]}$ si $i < j$. Dos términos se cancelan al intercambiar i por j y por lo tanto concluimos $\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = 0$. $\square$

Definición 2.10. Obtuvimos una familia de homomorfismos ∂_n entre grupos abelianos libres $\Delta_n(X)$ que cumplen $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Agregando un último elemento $\partial_0 : \Delta_0(X) \to 0$ que definimos trivialmente, tenemos

$$\cdots \to \Delta_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \to \cdots \to \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Llamamos a una familia como esta un complejo de cadenas.

Otra forma de describir la propiedad $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ es decir que $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(\partial_n)$, con esto vamos a definir los grupos de homología del complejo de cadenas.

Definición 2.11. Definimos el n-ésimo grupo de homología simplicial del complejo de cadenas como el cociente

$$H_n^{\Delta}(X) := \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

Llamamos ciclos a los elementos de $\mathrm{Ker}(\partial_n)$ y bordes a los de $\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$. Los elementos de $H_n^{\Delta}(X)$ serán nuestras clases de homología simplicial.

Diremos que dos ciclos que pertenecen a la misma clase de homología simplicial son ciclos homólogos. Dos ciclos $\sum_{i=0}^{N} k_i\sigma_i$ y $\sum_{i=0}^{M} k_i'\sigma_i'$ de esta manera cumplirán que su diferencia $\sum_{i=0}^{N} k_i\sigma_i - \sum_{i=0}^{M} k_i'\sigma_i'$ es un borde.

En algún momento debería hacer una observación sobre por qué uso Δ-complejos en vez de complejos simpliciales, que son los que dan el nombre a la homología simplicial. La verdad es que lo hago así porque hatcher lo hace así, y él dice que lo hace así porque los Δ-complejos son más generales y más fáciles de trabajar que los simpliciales, sin embargo la verdad es que todo esto lo podría haber hecho con complejos simpliciales y no hubiera cambiado demasiado porque solo lo uso para introducir las intuiciones. O sea, *mi* razón para hacerlo así es que hatcher lo hace así pero bueno debería decir algo que no sea eso.

A continuación nos enfocaremos en algunos ejemplos.

Ejemplo 2.12. Comenzemos con el ejemplo más sencillo. Tomamos $X = \{p\}$ un punto. Una estructura de Δ-complejo para X está dada por una única función $\{\sigma_0 : \Delta^0 \to X\}$.

Los grupos $\Delta_n(X)$ son 0 salvo para $n = 0$, en ese caso se tiene $\Delta_0(X) = \langle\sigma_0\rangle \simeq \mathbb{Z}$. Por esta razón, todos los homomorfismos $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ son 0, incluyendo $\partial_0 : \Delta_0(X) \to 0$, que es 0 por definición.

Por lo tanto, en este caso tenemos $\mathrm{Im}(\partial_n) = 0$ para todo n, $\mathrm{Ker}(\partial_n) = 0$ para todo $n \neq 0$, y $Ker(\partial_0) = \Delta_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Entonces

$$H_n^{\Delta}(X) \simeq \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \\ \mathbb{Z} \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.13. Consideremos ahora $X = S^1$. Para darle una estructura de Δ-complejo, vemos todo S^1 como una arista e con un único vértice v como se muestra en la imagen 6. Nuestra estructura de Δ-complejo para X está dada por dos funciones $\sigma_0 : \Delta^0 \to X$ y $\sigma_1 : \Delta^1 \to X$. Si notamos $\Delta^1 = [v_0, v_1]$ entonces $\mathrm{Im}(\sigma_0) = \{v\}$, $\mathrm{Im}(\sigma_1) = e$ y $\sigma_1|_{[v_0]} \simeq \sigma_1|_{[v_1]} \simeq \sigma_0$.

Los grupos $\Delta_n(X)$ son 0 para todo $n \neq 0, 1$. Para $n = 1$ se tiene $\Delta_1(X) = \langle\sigma_1\rangle \simeq \mathbb{Z}$ y para $n = 0$ se tiene $\Delta_0(X) = \langle\sigma_0\rangle \simeq \mathbb{Z}$.

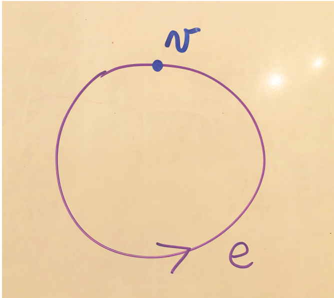


IMAGEN 6. S^1

Como $\sigma_1|_{[v_0]} \simeq \sigma_1|_{[v_1]}$, entonces $\partial_1(\sigma_1) = \sigma_1|_{[v_1]} - \sigma_1|_{[v_0]} = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Ker}(\sigma_1) = \Delta_1(X)$. Además sabemos que $\Delta_2(X) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(\partial_2) = 0$. Con esto obtenemos que $H_1^\Delta(X) \simeq \mathbb{Z}$.

En el caso de $H_0^\Delta(X)$, observamos que $\mathrm{Ker}(\partial_0) = \Delta_0(X)$ y $\mathrm{Im}(\partial_1) = 0$ por la misma razón que antes. Con esto obtenemos que $H_0^\Delta(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Como $\Delta_n(X) = 0$ para todo $n \neq 0, 1$, concluimos que

$$H_n^\Delta(X) \simeq \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0, 1 \\ \mathbb{Z} \text{ si } n \in \{0, 1\} \end{cases}$$

EJEMPLO 2.14. Sea $X = \mathbb{T}^2$, sabemos que podemos expresarlo como cociente de $[0,1]^2$. Para darle una estructura de Δ-complejo, separamos $[0,1]$ en dos triángulos como se ve en la imagen 7, que llamamos U y L. Los bordes de estos triángulos, después de pasar por el cociente, serán nuestras tres aristas a, b y c, que comparten un único vértice v.

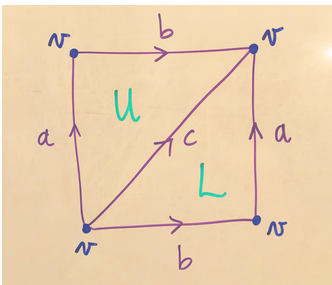


IMAGEN 7. $\mathbb{T}^2$

Una estructura de Δ-complejo para X está dada por $\{\sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3, \sigma_0\}$, con

$$\begin{cases} \sigma_2^1 : \Delta^2 \to U \\ \sigma_2^2 : \Delta^2 \to L \\ \sigma_1^1 : \Delta^1 \to a \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1^2 : \Delta^1 \to b \\ \sigma_1^3 : \Delta^1 \to c \\ \sigma_0 : \Delta^0 \to \{v\} \end{cases}$$

Si notamos $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$, $\Delta^1 = [w_0, w_1]$, entonces se cumplen las relaciones

$$\begin{cases} \sigma_2^1|_{[\hat{v_0},v_1,v_2]} \simeq \sigma_1^2 \\ \sigma_2^1|_{[v_0,\hat{v_1},v_2]} \simeq \sigma_1^3 \\ \sigma_2^1|_{[v_0,v_1,\hat{v_2}]} \simeq \sigma_1^1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_2^2|_{[\hat{v_0},v_1,v_2]} \simeq \sigma_1^1 \\ \sigma_2^2|_{[v_0,\hat{v_1},v_2]} \simeq \sigma_1^3 \\ \sigma_2^2|_{[v_0,v_1,\hat{v_2}]} \simeq \sigma_1^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1^i|_{[\hat{w_0},w_1]} \simeq \sigma_0 \\ \sigma_1^i|_{[w_0,\hat{w_1}]} \simeq \sigma_0 \end{cases} \quad \forall\, i \in \{1,2,3\}$$

Observar que estas relaciones están en parte determinadas por la orientación de los símplices, esto es parte de la rigidez que impone la teoría de los Δ-complejos.

Tenemos entonces que $\Delta_n(X) = 0$ para todo $n \neq 0,1,2$, $\Delta_2(X) = \langle \sigma_2^1, \sigma_2^2 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\Delta_1(X) = \langle \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\Delta_0(X) = \langle \sigma_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Estudiemos primero el caso de ∂_2. Se tiene $\partial_2(\sigma_2^1) = \sigma_1^2 - \sigma_1^3 + \sigma_1^1$. Haciendo un abuso de notación, podemos escribirlo como $\partial U = b - c + a$. De la misma manera, tenemos $\partial_2(\sigma_2^2) = \sigma_1^1 - \sigma_1^3 + \sigma_1^2$, que podemos escribir como $\partial L = a - c + b$. Por lo tanto, continuando con esta notación, la imagen de ∂_2 es el grupo abeliano libre generado por $a + b - c$. Por esto mismo también obtenemos que $\mathrm{Ker}(\partial_2)$ es el grupo abeliano libre generado por $U - L$, que es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Consideramos ahora ∂_1. Como $\sigma_1^i|_{[\hat{w_0},w_1]} \simeq \sigma_0 \simeq \sigma_1^i|_{[w_0,\hat{w_1}]}$ para $i \in \{1,2,3\}$, tenemos que $\mathrm{Im}(\partial_1) = 0$ y $\mathrm{Ker}(\partial_1) = \Delta_1(X)$.

Como $\Delta_3(X) = 0$ se cumple que $im(\partial_3) = \mathrm{Ker}(\partial_3) = 0$. Para ∂_0 se cumple $\mathrm{Im}(\partial_0) = 0$ y $\mathrm{Ker}(\partial_0) = \Delta_1(X)$ trivialmente.

Con esto, continuando con el abuso de notación tenemos que

$$\begin{aligned} H_2^\Delta(X) &= \mathrm{Ker}(\partial_2)/\mathrm{Im}(\partial_3) \simeq \mathbb{Z} \\ H_1^\Delta(X) &= \mathrm{Ker}(\partial_1)/\mathrm{Im}(\partial_2) = \langle a, b, c \mid a + b - c = 0 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ H_0^\Delta(X) &= \mathrm{Ker}(\partial_0)/\mathrm{Im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y todos los demás $H_n^\Delta(X)$ se anulan.

es posible que este ejemplo sea mucha notación

me gustaría poner algunos ejemplos más, me gustaría pegar un par de 2-símplices para mostrar cómo el borde queda solo la parte de afuera y todo lo de adentro se cancela

Observación 2.15. Recordar que llamamos bordes a los elementos de $\mathrm{Im}(\partial_n)$ y ciclos a los de $\mathrm{Ker}(\partial_n)$. La idea detrás de estos nombres puede comenzar a aclararse observando el caso de $H_1^\Delta(X)$ para un espacio X cualquiera.

Si notamos $\Delta^1 = [v_0, v_1]$ y tomamos $\sigma_i : \Delta^1 \to X$ provenientes de la estructura de Δ-complejo de X entonces un elemento de $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ es una suma formal $\sum k_i \sigma_i$ con $\sum k_i \sigma_i|_{[\hat{v_0},v_1]} - \sum k_i \sigma_i|_{[v_0,\hat{v_1}]} = 0$. Un elemento de esta manera debe cumplir que cada vértice tiene el mismo número de aristas entrantes y salientes. Al ver X como cociente de símplices, esto se traduce en la noción de que las imágenes de las σ_i forman curvas cerradas.

Un elemento de Im(∂_2) es también un elemento de $Ker(\partial_1)$, y por lo tanto su imagen pasada por el cociente también es unión de curvas cerradas. Sin embargo, a diferencia de los elementos de Ker(∂_1), estas curvas cerradas necesariamente son el borde de algún Δ-complejo de dimensión 2, por ejemplo de un disco.

Lo que logra $H_1^{\Delta}(X)$ es distinguir las curvas cerradas contractibles de las no contractibles en X. Es decir, distingue las curvas cerradas que son borde de algún complejo de dimensión 2 de las que bordean un "agujero" en X. Dicho usando la nomeclatura de ciclos y bordes, los elementos relevantes para H_1^{Δ} son los ciclos que no son borde de ningun 2-complejo.

Finalmente, tiene sentido plantearnos la pregunta: Dadas dos estructuras de Δ-complejo para un mismo espacio X, son los grupos $H_n^{\Delta}(X)$ isomorfos?

La respuesta es que si, y veremos la prueba en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

Homología singular

El objetivo de este capítulo será definir los grupos de homología singular de un espacio topológico X. Esta definición es muy similar a la vista en el capítulo anterior, con la notoria diferencia de que en vez de considerar una estructura de Δ-complejo para X, directamente tomamos el cociente en la familia de todas las funciones $\sigma : \Delta^n \to X$.

DEFINICIÓN 3.1. Un n-símplice singular es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$.

El nombre "singular" hace referencia a que σ no tiene por qué ser inyectiva, por lo tanto no necesariamente es un encaje. Esto significa que la imagen de σ puede tener singularidades, es decir, puntos de autointersección.

acá solo dice que puede tener "sigularidades" pero no explica, yo lo interpreto así, como puntos de autointersección, pero capaz hay algo más que se me está pasando?

DEFINICIÓN 3.2. Llamaremos complejo de n-cadenas singulares, que notaremos $C_n(X)$, al grupo abeliano libre que tiene como base a los elementos de la familia de funciones $\{\sigma : \Delta^n \to X \mid \sigma \text{ continua}\}$.

Es decir, los elementos de $C_n(X)$, a los que llamaremos n-cadenas singulares, serán sumas formales finitas $\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$, y $\sigma_i : \Delta^n \to X$.

Comparados con su equivalente $\Delta^n(X)$ del capítulo anterior, los complejos de n-cadenas singulares $C_n(X)$ tienen un cardinal mucho más grande, y en la mayoría de los casos serán grupos no numerables.

DEFINICIÓN 3.3. Definimos un mapa borde $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ dado por

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$$

Donde estamos notando Δ^n como $[v_0, \ldots, v_n]$ e identificando $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ con Δ_{n-1} mediante el homeomorfismo canónico.

En algunos casos simplemente usaremos ∂ para notar este mapa.

Exactamente de la misma forma que en el capítulo anterior, obtenemos que la composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n : C_n(X) \to C_{n-2}(X)$ es cero. Por lo tanto tenemos $\mathrm{Im}(\partial_{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(\partial_n)$ y podemos definir los grupos de homología singular.

Definición 3.4. Definimos el n-ésimo grupo de homología singular del complejo de cadenas como el cociente

$$H_n(X) := \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

De la misma forma que antes llamaremos ciclos a los elementos de $\mathrm{Ker}(\partial_n)$, bordes a los de $\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ y los elementos de $H_n(X)$ serán nuestras clases de homología singular.

Con esta definición, obtenemos trivialmente un resultado importante para la teoría.

Proposición 3.5. *Si X, Y son homeomorfos, entonces $H(X) = H(Y)$*

Proof. Sean $h : X \to Y$ homeomorfismo. Dada $sigma : \Delta^n \to X$ continua, consideramos su composición $h \circ \sigma$ $\square$

CAPÍTULO 4

Contraejemplos a la generalización de Jordan-Schönflies

CAPÍTULO 5

Límites inversos y atractores de sistemas dinámicos