

TRABAJO MONOGRÁFICO

Elementos de la Matemática

Topología

Nicolas Bourbaki

Orientadores:

André Weil
ENS

Lauren Schwartz
École Polytechnique

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Resumen

Un encaje de S^1 en S^2 es una función $f : S^1 \rightarrow S^2$ inyectiva y continua. Una función así es un homeomorfismo sobre su imagen, y por lo tanto $f(S^1)$ es una curva cerrada simple γ . ¿Qué sabemos sobre γ ? Desde hace 150 años se sabe que γ separa a S^2 en dos componentes conexas. Hace 100 años se probó que además existe un homeomorfismo $h : S^2 \rightarrow S^2$ que manda γ en S^1 , lo que tiene como consecuencia que las componentes conexas de γ^c tienen $\pi_1 = 0$.

qué sabemos sobre γ me parece muy general y no sé q cosas más "sabemos" sobre γ
q se me escapan

¿Qué pasa en general con encajes de $f : S^{n-1} \rightarrow S^n$? Desde hace 100 años sabemos que $f(S^{n-1})^c$ tiene dos componentes conexas. Sin embargo, en estos casos no necesariamente existe un homeomorfismo $h : S^n \rightarrow S^n$ que mande $f(S^n)$ al encaje usual de $S^{n-1} \subset S^n$.

Estos dos últimos resultados se probarán en esta monografía. Para el primero se introducirá al lector a la teoría de homología singular y se probarán algunos resultados sobre la misma. Para probar que el homeomorfismo f no necesariamente se extiende a todo S^n , darán dos ejemplos de 2-esferas S encajadas en R^3 con $\pi_1(S^c) \neq \emptyset$. Además veremos que los $\pi_1(S)$ serán ejemplos de grupos no triviales cuyo abelianizado es trivial.

Después veremos cositas de límites inversos y atractores de sistemas dinámicos.

escribir xd

CAPÍTULO 1

Preliminares

En general, notamos $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, y decimos que una n -esfera es un espacio topológico S tal que existe un homeomorfismo $h : S \rightarrow S^n$.

CAPÍTULO 2

Homología y teorema de Jordan

En esta sección introduciremos al lector a la teoría de homología singular. El objetivo será probar que una $(n - 1)$ -esfera separa \mathbb{R}^n en dos componentes conexas, y que estas componentes conexas tienen la misma homología de un punto.

Para empezar, definiremos lo que es un n -símplex:

DEFINICIÓN 2.1. Un n -símplex es el menor conjunto convexo de \mathbb{R}^m ($m \geq n$) que contiene $n + 1$ puntos v_0, \dots, v_n , tales que $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$ son linealmente independientes. Llamaremos vértices a estos v_i .

En general, dado un n -símplex, vamos a darle un orden a sus vértices, y notaremos al símplex $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ de acuerdo con este orden.

DEFINICIÓN 2.2. Un orden en los vértices nos induce un orden en la restricción a un subconjunto de esos vértices. Haremos uso de la siguiente notación:

$$[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$$

Esta es una forma de notar el $(n - 1)$ -símplex obtenido al sacar v_i del conjunto de vértices de $[v_0, \dots, v_n]$ y tomar el menor conjunto convexo que contiene a los vértices restantes.

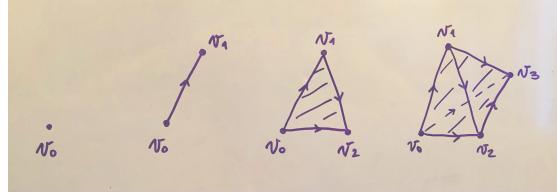
Diremos que $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ es una cara de $[v_0, \dots, v_n]$.

OBSERVACIÓN 2.3. El borde de un n -símplex Δ^n es la unión de sus $n + 1$ caras, lo notaremos $\partial\Delta^n$.

Llamaremos aristas a los 2-símplices con vértices $v_i, v_j \in \{v_0, \dots, v_n\}$. Estas también heredan el orden de $[v_0, \dots, v_n]$, y por lo tanto las notamos $[v_i, v_j]$ si $i < j$.

Como se muestra en la imagen 1, un ejemplo de 3-símplex es un tetraedro en \mathbb{R}^3 , un 2-símplex es un triángulo en \mathbb{R}^2 , un 1-símplex es un intervalo en \mathbb{R} , y un 0-símplex es un punto.

las imágenes no son finales, eventualmente las voy a hacer en digital

IMAGEN 1. n -simplices con las orientaciones de sus aristas, $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

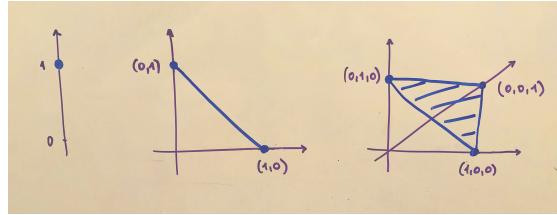
DEFINICIÓN 2.4. Llamaremos n -simplex estándar al conjunto

$$\Delta^n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ para todo } i, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}$$

Los vértices de este n -simplex son los que conforman la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . Si notamos a estos puntos e_1, \dots, e_{n+1} , otra forma de escribir este conjunto es

$$\Delta^n = [e_1, \dots, e_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para $n = 2$, el 2-simplex estándar Δ^2 es el triángulo en \mathbb{R}^3 con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Con $n = 1$, el 1-simplex estándar es el segmento que va de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ en \mathbb{R}^2 . Esto se muestra en la imagen 2.

IMAGEN 2. n -simplices estándar, $n \in \{0, 1, 2\}$

DEFINICIÓN 2.5. Dado un n -simplex $[v_0, \dots, v_n]$, la función $h : \Delta^n \rightarrow [v_0, \dots, v_n]$ dada por

$$h(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i v_i$$

es un homeomorfismo lineal que preserva el orden de las aristas. Llamaremos a esta función el homeomorfismo canónico.

La función h es lineal y manda los elementos e_0, \dots, e_n de la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} a v_0, \dots, v_n respectivamente, por lo tanto su imagen es el n -simplex $[v_0, \dots, v_n]$ y el orden de las aristas se mantiene.

Antes de entrar en la definición de homología singular, vamos a definir la homología simplicial, que nos va a dar una imagen de las intuiciones que en la homología singular

se ven más ofuscadas a cambio de obtener una teoría menos rígida y más limpia para trabajar.

Para empezar, vamos a definir lo que será una estructura de Δ -complejo para un espacio topológico cualquiera. Esto va a ser el análogo en dimensión n de triangular nuestro espacio con 2-símplices.

DEFINICIÓN 2.6. Una estructura de Δ -complejo para un espacio topológico X es una familia de funciones continuas $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X$ que cumplen:

- (1) Las σ_α son inyectivas al restringirlas a $\text{Int}(\Delta^{n_\alpha})$, y dado cualquier $x \in X$, existe algún α tal que x está en la imagen de $\text{Int}(\Delta^{n_\alpha})$ por σ_α .
- (2) Si restringimos cualquier σ_α a una cara de Δ^{n_α} , esa restricción va a ser equivalente a otro mapa de la familia $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow X$, identificando la cara de Δ^{n_α} con $\Delta^{n_\alpha-1}$ mediante el homeomorfismo canónico.
- (3) Un conjunto $U \subset X$ es abierto $\iff \sigma_\alpha^{-1}(U)$ es abierto para todo α .

Las condiciones (1) y (3) nos dicen que las funciones σ_α restrictas a $\text{Int}(\Delta^{n_\alpha})$ son homeomorfismos sobre su imagen.

En el punto (2), la equivalencia es en el siguiente sentido:

Dada $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X$, notamos $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$ a una cara de Δ^{n_α} . Consideramos $h : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow \hat{\Delta}^{n_\alpha}$ el homeomorfismo canónico que manda el $\{n_\alpha - 1\}$ -símplice estándar a $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$. Lo que nos dice este punto es que existe una función $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow X$ en la familia que cumple $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ h$. Decimos entonces que $\sigma_\alpha|_{\hat{\Delta}^{n_\alpha}}$ es equivalente a σ_β .

Si por cada elemento $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X$ proveniente de la estructura de Δ -complejo de X consideramos un n_α -símplice $\Delta_\alpha^{n_\alpha}$, entonces X es el espacio obtenido al tomar el cociente de $x \sim h(x)$ para todas las $h : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow \hat{\Delta}_\alpha^{n_\alpha}$ definidas como en el párrafo anterior. Algunos ejemplos se muestran en la imagen 3.

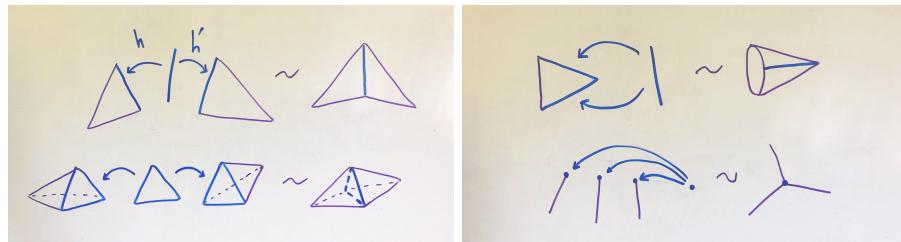


IMAGEN 3. Cocientes de símplices

esto no está escrito explicitamente en el hatcher pero creo que es así, igual quiero mejorar cómo está redactado pero no quiero abusar de los subíndices, porque sería una h por cada cara de cada símplice

DEFINICIÓN 2.7. Dada una estructura de Δ -complejo para un espacio X , definimos $\Delta_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por los $\{\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X \mid n_\alpha = n\}$. Es decir, los elementos de $\Delta_n(X)$, a los que llamaremos n -cadenas, son sumas formales finitas $\sum_{i=1}^N k_i \sigma_i$, con $k_i \in \mathbb{N}$.

Nuestro objetivo ahora será definir un homomorfismo de grupos $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$ al que llamaremos mapa borde. Para motivar la definición primero nos enfocaremos en dimensiones 2 y 3, consideramos entonces las caras de Δ^2 y Δ^3 .

En la imagen 4 se muestra la orientación usual de las caras de cada uno de estos simplices, derivada del orden en sus vértices.

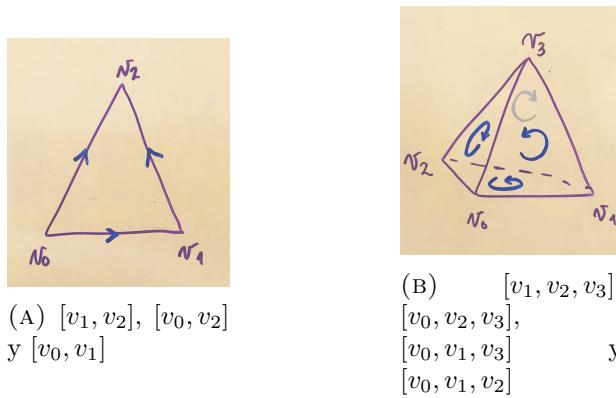


IMAGEN 4. Orientación usual

A continuación, en la imagen 5 ilustramos cómo quedan orientadas las caras si revertimos la orientación de los $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ con i impar.

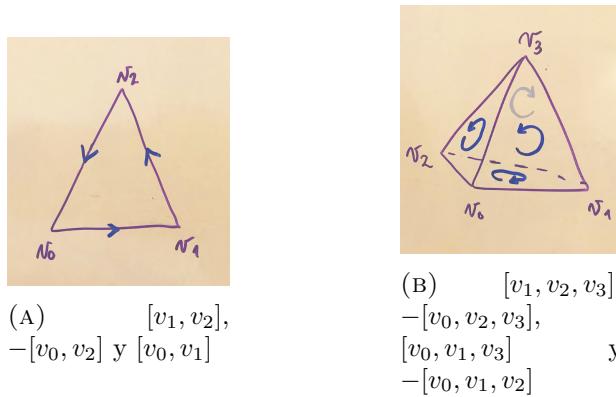


IMAGEN 5. Orientación obtenida al intercalar los signos

La idea entonces es que para obtener una orientación coherente y homogénea en las caras de nuestro simplex, vamos a intercalar la orientación usual de las caras con la orientación revertida.

DEFINICIÓN 2.8. Procedemos ahora a definir el homomorfismo $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$. Para esto, fijamos su valor en los generadores de $\Delta_n(X)$, es decir, las funciones $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$. Notando $\Delta^n = [v_0, \dots, v_n]$, definimos

$$\partial_n(\sigma_\alpha) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Definir el homomorfismo de esta manera lo dota de la siguiente propiedad, que será esencial para el desarrollo de la teoría:

LEMA 2.9. La composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-2}(X)$ es cero.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que vale para $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ perteneciente a los generadores de $\Delta_n(X)$. La composición queda de la siguiente manera:

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j < i}^n (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]} + \sum_{j > i}^n (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]} \right)$$

Es importante observar que en la última sumatoria obtenemos un $(-1)^{j-1}$ en vez de un $(-1)^j$. Esto se debe a que si $j > i$, entonces el vértice v_j está en el lugar $j - 1$ del $(n - 1)$ -símplice $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_j, \dots, v_n]$.

Usando que ∂_n y ∂_{n-1} son homomorfismos de grupos podemos distribuir el $(-1)^i$ y obtener que cada término de la sumatoria es de la forma $(-1)^i(-1)^j\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ si $i > j$, o $(-1)^i(-1)^{j-1}\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]}$ si $i < j$. Dos términos se cancelan al intercambiar i por j y por lo tanto concluimos $\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = 0$. \square

DEFINICIÓN 2.10. Obtuvimos una familia de homomorfismos ∂_n entre grupos abelianos libres $\Delta_n(X)$ que cumplen $\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0$. Agregando un último elemento $\partial_0 : \Delta_0(X) \rightarrow 0$ que definimos trivialmente, tenemos

$$\cdots \rightarrow \Delta_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Llamamos a una familia como esta un complejo de cadenas.

Otra forma de describir la propiedad $\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0$ es decir que $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$, con esto vamos a definir los grupos de homología del complejo de cadenas.

DEFINICIÓN 2.11. Definimos el n -ésimo grupo de homología simplicial del complejo de cadenas como el cociente

$$H_n^\Delta(X) := \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$$

Llamamos ciclos a los elementos de $\text{Ker}(\partial_n)$ y bordes a los de $\text{Im}(\partial_{n+1})$.

En nuestro caso, para definir los grupos de homología singular de un espacio topológico X , vamos a concentrarnos en las funciones continuas que van de Δ^n a X . Llamaremos a estos mapas n -símplices singulares.

DEFINICIÓN 2.12. Un n -símplice singular es una función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

DEFINICIÓN 2.13. Llamaremos complejo de n -cadenas singulares, que notaremos $C_n(X)$, al grupo abeliano libre que tiene como base a los elementos de la familia de funciones $\{\sigma : \Delta^n \rightarrow X \mid \sigma \text{ continua}\}$.

Es decir, los elementos de $C_n(X)$, a los que llamaremos n -cadenas singulares, serán sumas formales finitas $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$, y $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$.

DEFINICIÓN 2.14. Definimos un mapa borde $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ dado por

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

CAPÍTULO 3

Contraejemplos a la generalización de Jordan-Schönflies

CAPÍTULO 4

Límites inversos y atractores de sistemas dinámicos