Trabajo monográfico

Elementos de la Matemática

Topología

Nicolas Bourbaki

Orientadores:

André Weil
ENS

Lauren Schwartz
École Polytechnique

Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Resumen

Un encaje de S^1 en S^2 es una función $f : S^1 \to S^2$ inyectiva y continua. Una función así es un homeomorfismo sobre su imagen, y por lo tanto $f(S^1)$ es una curva cerrada simple γ. ¿Qué sabemos sobre γ? Desde hace 150 años se sabe que γ separa a S^2 en dos componentes conexas. Hace 100 años se probó que además existe un homeomorfismo $h : S^2 \to S^2$ que manda γ en S^1, lo que tiene como consecuencia que las componentes conexas de γ^c tienen $\pi_1 = 0$.

qué sabemos sobre γ me parece muy general y no sé q cosas más "sabemos" sobre γ q se me escapan

¿Qué pasa en general con encajes de $f : S^{n-1} \to S^n$? Desde hace 100 años sabemos que $f(S^{n-1})^c$ tiene dos componentes conexas. Sin embargo, en estos casos no necesariamente existe un homeomorfismo $h : S^n \to S^n$ que mande $f(S^n)$ al encaje usual de $S^{n-1} \subset S^n$.

Estos dos útlimos resultados se probarán en esta monografía. Para el primero se introducirá al lector a la teoría de homología singular y se probarán algunos resultados sobre la misma. Para probar que el homeomorfismo f no necesariamente se extiende a todo S^n, darán dos ejemplos de 2-esferas S encajadas en R^3 con $\pi_1(S^c) \neq \varnothing$. Además veremos que los $\pi_1(S)$ serán ejemplos de grupos no triviales cuyo abelianizado es trivial.

Después veremos cositas de límites inversos y atractores de sistemas dinámicos.

escribir xd

CAPÍTULO 1

Preliminares

En general, notamos $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, y decimos que una $n-$esfera es un espacio topológico S tal que existe un homeomorfismo $h : S \to S^n$.

CAPÍTULO 2

Homología y teorema de Jordan

En esta sección introduciremos al lector a la teoría de homología singular. El objetivo será probar que una $(n-1)$-esfera separa $\mathbb{R}^n$ en dos componentes conexas, y que estas componentes conexas tienen la misma homología de un punto.

Para empezar, definiremos lo que es un n-símplice:

Definición 2.1. Un n-símplice es el menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ $(m \geq n)$ que contiene $n+1$ puntos $v_0, \ldots, v_n$, tales que $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, $\ldots$, $v_n - v_0$ son linealmente independientes. Llamaremos vértices a estos v_i.

En general, dado un n-símplice, vamos a darle un orden a sus vértices, y notaremos al símplice $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ de acuerdo con este orden.

Definición 2.2. Un orden en los vértices nos induce un orden en la restricción a un subconjunto de esos vértices. Haremos uso de la siguiente notación:

$$[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n] := [v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n]$$

Esta es una forma de notar el $(n-1)$-símplice obtenido al sacar v_i del conjunto de vértices de $[v_0, \ldots, v_n]$ y tomar el menor conjunto convexo que contiene a los vértices restantes.

Diremos que $[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n]$ es una cara de $[v_0, \ldots, v_n]$.

Llamaremos aristas a los 2-símplices con vértices $v_i, v_j \in \{v_0, \ldots, v_n\}$. Estas también heredan el orden de $[v_0, \ldots, v_n]$, y por lo tanto las notamos $[v_i, v_j]$ si $i < j$.

Un ejemplo de 3-símplice es un tetraedro en $\mathbb{R}^3$, un 2-símplice es un triángulo en $\mathbb{R}^2$, un 1-símplice es un intervalo en $\mathbb{R}$, y un 0-símplice es un punto.

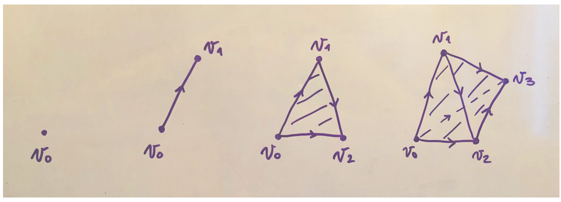

Imagen 1. n-símplices con las orientaciones de sus aristas, $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

las imágenes no son finales, eventualmente las voy a hacer en digital

Definición 2.3. Llamaremos n-símplice estándar al conjunto

$$\Delta^n := \left\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ para todo } i,\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\right\}$$

Los vértices de este n-símplice son los que conforman la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si notamos a estos puntos $e_1, \dots, e_{n+1}$, otra forma de escribir este conjunto es

$$\Delta^n = [e_1, \dots, e_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para $n = 2$, el 2-símplice estándar Δ^2 es el triángulo en $\mathbb{R}^3$ con vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Con $n = 1$, el 1-símplice estándar es el segmento que va de $(1,0)$ a $(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$.

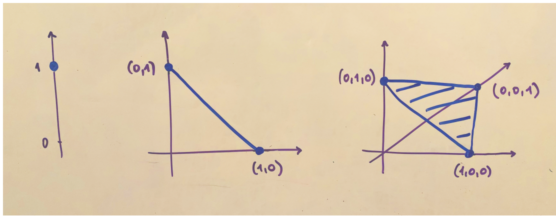

Imagen 2. n-símplices estándar, $n \in \{0, 1, 2\}$

Definición 2.4. Dado un n-símplice $[v_0, \dots, v_n]$, la función $h : \Delta^n \to [v_0, \dots, v_n]$ dada por

$$h(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} x_i v_i$$

es un homeomorfismo lineal que preserva el orden de las aristas. Llamaremos a esta función el homeomorfismo canónico.

La función h es lineal y manda los elementos $e_0, \dots, e_n$ de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$ a $v_0, \dots, v_n$ respectivamente, por lo tanto su imagen es el n-símplice $[v_0, \dots, v_n]$ y el orden de las aristas se mantiene.

Antes de entrar en la definición de homología singular, vamos a definir la homología simplicial, que nos va a dar una imagen de las intuiciones que en la homología singular se ven más ofuscadas a cambio de obtener una teoría menos rígida y más limpia para trabajar.

Para empezar, vamos a definir lo que será una estructura de Δ-complejo para un espacio topológico cualquiera. Esto va a ser el análogo en dimensión n de triangular nuestro espacio con 2-símplices.

DEFINICIÓN 2.5. Una estructura de Δ-complejo para un espacio topológico X es una familia de funciones continuas $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$ que cumplen:

(1) Las σ_α son inyectivas al restringirlas a $Int(\Delta^{n_\alpha})$, y dado cualquier $x \in X$, existe algún α tal que x está en la imagen de $Int(\Delta^{n_\alpha})$ por σ_α.
(2) Si restringimos cualquier σ_α a una cara de Δ^{n_α}, esa restricción va a ser equivalente a otro mapa de la familia $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha - 1} \to X$, identificando la cara de Δ^{n_α} con $\Delta^{n_\alpha - 1}$ mediante el homeomorfismo canónico.
(3) Un conjunto $U \subset X$ es abierto $\iff$ $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ es abierto para todo α.

En el punto (2), la equivalencia es en el siguiente sentido:

Dada $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$, notamos $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$ a una cara de Δ^{n_α}. Consideramos $h : \Delta^{n_\alpha - 1} \to \hat{\Delta}^{n_\alpha}$ el homeomorfismo canónico que manda el $\{n_\alpha - 1\}$-símplice estándar a $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$. Lo que nos dice este punto es que existe una función $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha - 1} \to X$ en la familia que cumple $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ h$.

Si por cada elemento $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$ proveniente de la estructura de Δ-complejo de X consideramos un n_α-símplice $\Delta_\alpha^{n_\alpha}$, entonces X es el espacio obtenido al tomar el cociente de $x \sim h(x)$ para todas las h definidas como en el párrafo anterior.

esto no está escrito explicitamente en el hatcher y me da un poco de miedo estar tirando fruta pero creo que es así, igual quiero mejorar cómo está redactado

Las condiciones (1) y (3) nos dicen que las funciones σ_α restrictas a $Int(\Delta^{n_\alpha})$ son homeomorfismos sobre su imagen.

capaz decir algo más acá y poner una imagen, obs sobre hff

DEFINICIÓN 2.6. Dada una estructura de Δ-complejo para un espacio X, definimos $\Delta_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por los $\{\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X \mid n_\alpha = n\}$. Es decir, los elementos de $\Delta_n(X)$, a los que llamaremos n-cadenas, son sumas formales finitas $\sum_{i=1}^{N} k_i \sigma_i$, con $k_i \in \mathbb{N}$.

Observar que el borde de un n-símplice Δ^n es la unión de sus $n+1$ caras, que notaremos $\partial \Delta^n$.

DEFINICIÓN 2.7. Vamos a definir un homomorfismo de grupos $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ al que llamaremos mapa borde, lo definiremos mediante su valor en los generadores de $\Delta_n(X)$, es decir, las funciones $\sigma_\alpha : \Delta_n(X) \to X$.
Dada $\sigma_\alpha : \Delta_n(X) \to X$, notamos $\Delta^n = [v_0, \ldots, v_n]$ y definimos

$$\partial(\sigma_\alpha) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots v_n]}$$

explicar intuición del $(-1)^i$

LEMA 2.8. *La composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-2}(X)$ es cero.*

En nuestro caso, para definir los grupos de homología singular de un espacio topológico X, vamos a concentrarnos en las funciones continuas que van de Δ^n a X. Llamaremos a estos mapas n-símplices singulares.

DEFINICIÓN 2.9. Un n-símplice singular es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$.

DEFINICIÓN 2.10. Llamaremos complejo de n-cadenas singulares, que notaremos $C_n(X)$, al grupo abeliano libre que tiene como base a los elementos de la familia de funciones $\{\sigma : \Delta^n \to X \mid \sigma \text{ continua}\}$.

Es decir, los elementos de $C_n(X)$, a los que llamaremos n-cadenas singulares, serán sumas formales finitas $\sum_{i=1}^k n_i\sigma_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$, y $\sigma_i : \Delta^n \to X$.

DEFINICIÓN 2.11. Definimos un mapa borde $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ dado por

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$$

CAPÍTULO 3

Contraejemplos a la generalización de Jordan-Schönflies

CAPÍTULO 4

Límites inversos y atractores de sistemas dinámicos