

TRABAJO MONOGRÁFICO

---

# Elementos de la Matemática

## Topología

---

Nicolas Bourbaki

Orientadores:

André Weil  
ENS

Lauren Schwartz  
École Polytechnique

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
MONTEVIDEO, URUGUAY



## Resumen

Un encaje de  $S^1$  en  $S^2$  es una función  $f : S^1 \rightarrow S^2$  inyectiva y continua. Una función así es un homeomorfismo sobre su imagen, y por lo tanto  $f(S^1)$  es una curva cerrada simple  $\gamma$ . ¿Qué sabemos sobre  $\gamma$ ? Desde hace 150 años se sabe que  $\gamma$  separa a  $S^2$  en dos componentes conexas. Hace 100 años se probó que además existe un homeomorfismo  $h : S^2 \rightarrow S^2$  que manda  $\gamma$  en  $S^1$ , lo que tiene como consecuencia que las componentes conexas de  $\gamma^c$  tienen  $\pi_1 = 0$ .

qué sabemos sobre  $\gamma$  me parece muy general y no sé q cosas más "sabemos" sobre  $\gamma$   
q se me escapan

¿Qué pasa en general con encajes de  $f : S^{n-1} \rightarrow S^n$ ? Desde hace 100 años sabemos que  $f(S^{n-1})^c$  tiene dos componentes conexas. Sin embargo, en estos casos no necesariamente existe un homeomorfismo  $h : S^n \rightarrow S^n$  que mande  $f(S^n)$  al encaje usual de  $S^{n-1} \subset S^n$ .

Estos dos últimos resultados se probarán en esta monografía. Para el primero se introducirá al lector a la teoría de homología singular y se probarán algunos resultados sobre la misma. Para probar que el homeomorfismo  $f$  no necesariamente se extiende a todo  $S^n$ , darán dos ejemplos de 2-esferas  $S$  encajadas en  $R^3$  con  $\pi_1(S^c) \neq \emptyset$ . Además veremos que los  $\pi_1(S)$  serán ejemplos de grupos no triviales cuyo abelianizado es trivial.

Después veremos cositas de límites inversos y atractores de sistemas dinámicos.

escribir xd



## CAPÍTULO 1

### Preliminares

En general, notamos  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ , y decimos que una  $n$ -esfera es un espacio topológico  $S$  tal que existe un homeomorfismo  $h : S \rightarrow S^n$ .



## CAPÍTULO 2

### Homología y teorema de Jordan

En esta sección introduciremos al lector a la teoría de homología singular. El objetivo será probar que una  $(n - 1)$ -esfera separa  $\mathbb{R}^n$  en dos componentes conexas, y que estas componentes conexas tienen la misma homología de un punto.

Para empezar, definiremos lo que es un  $n$ -símplex:

**DEFINICIÓN 2.1.** Un  $n$ -símplex es el menor conjunto convexo de  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq n$ ) que contiene  $n + 1$  puntos  $v_0, \dots, v_n$ , tales que  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$  son linealmente independientes. Llamaremos vértices a estos  $v_i$ .

En general, dado un  $n$ -símplex, vamos a darle un orden a sus vértices, y notaremos al símplex  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  de acuerdo con este orden.

**DEFINICIÓN 2.2.** Un orden en los vértices nos induce un orden en la restricción a un subconjunto de esos vértices. Haremos uso de la siguiente notación:

$$[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$$

Esta es una forma de notar el  $(n - 1)$ -símplex obtenido al sacar  $v_i$  del conjunto de vértices de  $[v_0, \dots, v_n]$  y tomar el menor conjunto convexo que contiene a los vértices restantes.

Diremos que  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  es una cara de  $[v_0, \dots, v_n]$ .

**OBSERVACIÓN 2.3.** El borde de un  $n$ -símplex  $\Delta^n$  es la unión de sus  $n + 1$  caras, lo notaremos  $\partial\Delta^n$ .

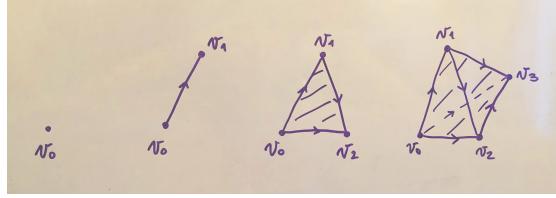
Llamaremos aristas a los 2-símplices con vértices  $v_i, v_j \in \{v_0, \dots, v_n\}$ . Estas también heredan el orden de  $[v_0, \dots, v_n]$ , y por lo tanto las notamos  $[v_i, v_j]$  si  $i < j$ .

Como se muestra en la imagen 1, un ejemplo de 3-símplex es un tetraedro en  $\mathbb{R}^3$ , un 2-símplex es un triángulo en  $\mathbb{R}^2$ , un 1-símplex es un intervalo en  $\mathbb{R}$ , y un 0-símplex es un punto.

las imágenes no son finales, eventualmente las voy a hacer en digital

**DEFINICIÓN 2.4.** Llamaremos  $n$ -símplex estándar al conjunto

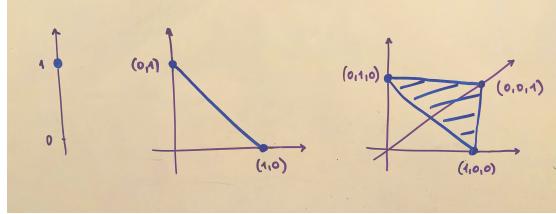
$$\Delta^n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ para todo } i, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}$$

IMAGEN 1.  $n$ -simplices con las orientaciones de sus aristas,  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ 

Los vértices de este  $n$ -simplex son los que conforman la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Si notamos a estos puntos  $e_1, \dots, e_{n+1}$ , otra forma de escribir este conjunto es

$$\Delta^n = [e_1, \dots, e_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para  $n = 2$ , el 2-simplex estándar  $\Delta^2$  es el triángulo en  $\mathbb{R}^3$  con vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ . Con  $n = 1$ , el 1-simplex estándar es el segmento que va de  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Esto se muestra en la imagen 2.

IMAGEN 2.  $n$ -simplices estándar,  $n \in \{0, 1, 2\}$ 

**DEFINICIÓN 2.5.** Dado un  $n$ -simplex  $[v_0, \dots, v_n]$ , la función  $h : \Delta^n \rightarrow [v_0, \dots, v_n]$  dada por

$$h(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i v_i$$

es un homeomorfismo lineal que preserva el orden de las aristas. Llamaremos a esta función el homeomorfismo canónico.

La función  $h$  es lineal y manda los elementos  $e_0, \dots, e_n$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$  a  $v_0, \dots, v_n$  respectivamente, por lo tanto su imagen es el  $n$ -simplex  $[v_0, \dots, v_n]$  y el orden de las aristas se mantiene.

Antes de entrar en la definición de homología singular, vamos a definir la homología simplicial, que nos va a dar una imagen de las intuiciones que en la homología singular se ven más ofuscadas a cambio de obtener una teoría menos rígida y más limpia para trabajar.

Para empezar, vamos a definir lo que será una estructura de  $\Delta$ -complejo para un espacio topológico cualquiera. Esto va a ser el análogo en dimensión  $n$  de triangular nuestro espacio con 2-simplices.

DEFINICIÓN 2.6. Una estructura de  $\Delta$ -complejo para un espacio topológico  $X$  es una familia de funciones continuas  $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X$  que cumplen:

- (1) Las  $\sigma_\alpha$  son inyectivas al restringirlas a  $\text{Int}(\Delta^{n_\alpha})$ , y dado cualquier  $x \in X$ , existe algún  $\alpha$  tal que  $x$  está en la imagen de  $\text{Int}(\Delta^{n_\alpha})$  por  $\sigma_\alpha$ .
- (2) Si restringimos cualquier  $\sigma_\alpha$  a una cara de  $\Delta^{n_\alpha}$ , esa restricción va a ser equivalente a otro mapa de la familia  $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow X$ , identificando la cara de  $\Delta^{n_\alpha}$  con  $\Delta^{n_\alpha-1}$  mediante el homeomorfismo canónico.
- (3) Un conjunto  $U \subset X$  es abierto  $\iff \sigma_\alpha^{-1}(U)$  es abierto para todo  $\alpha$ .

Las condiciones (1) y (3) nos dicen que las funciones  $\sigma_\alpha$  restrictas a  $\text{Int}(\Delta^{n_\alpha})$  son homeomorfismos sobre su imagen.

En el punto (2), la equivalencia es en el siguiente sentido:

Dada  $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X$ , notamos  $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$  a una cara de  $\Delta^{n_\alpha}$ . Consideramos  $h : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow \hat{\Delta}^{n_\alpha}$  el homeomorfismo canónico que manda el  $\{n_\alpha - 1\}$ -símplice estándar a  $\hat{\Delta}^{n_\alpha}$ . Lo que nos dice este punto es que existe una función  $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow X$  en la familia que cumple  $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ h$ . Decimos entonces que  $\sigma_\alpha|_{\hat{\Delta}^{n_\alpha}}$  es equivalente a  $\sigma_\beta$ .

Si por cada elemento  $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X$  proveniente de la estructura de  $\Delta$ -complejo de  $X$  consideramos un  $n_\alpha$ -símplice  $\Delta_\alpha^{n_\alpha}$ , entonces  $X$  es el espacio obtenido al tomar el cociente de  $x \sim h(x)$  para todas las  $h : \Delta^{n_\alpha-1} \rightarrow \hat{\Delta}_\alpha^{n_\alpha}$  definidas como en el párrafo anterior. Algunos ejemplos se muestran en la imagen 3.

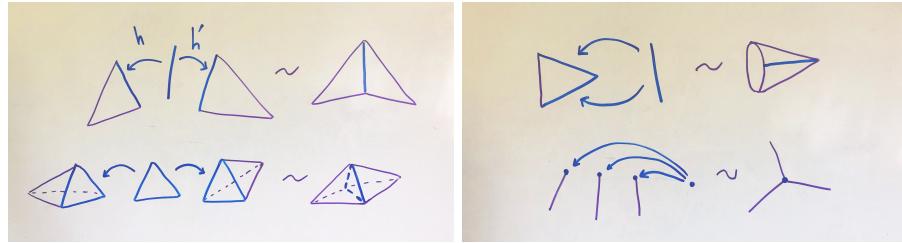


IMAGEN 3. Cocientes de simplices

esto no está escrito explicitamente en el hatcher pero creo que es así, igual quiero mejorar cómo está redactado pero no quiero abusar de los subíndices, porque sería una  $h$  por cada cara de cada símplice

DEFINICIÓN 2.7. Dada una estructura de  $\Delta$ -complejo para un espacio  $X$ , definimos  $\Delta_n(X)$  como el grupo abeliano libre generado por los  $\{\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X \mid n_\alpha = n\}$ . Es decir, los elementos de  $\Delta_n(X)$ , a los que llamaremos  $n$ -cadenas, son sumas formales finitas  $\sum_{i=1}^N k_i \sigma_i$ , con  $k_i \in \mathbb{N}$ .

Nuestro objetivo ahora será definir un homomorfismo de grupos  $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$  al que llamaremos mapa borde. Para motivar la definición primero nos enfocaremos en dimensiones 2 y 3, consideramos entonces las caras de  $\Delta^2$  y  $\Delta^3$ .

En la imagen 4 se muestra la orientación usual de las caras de cada uno de estos simplices, derivada del orden en sus vértices.

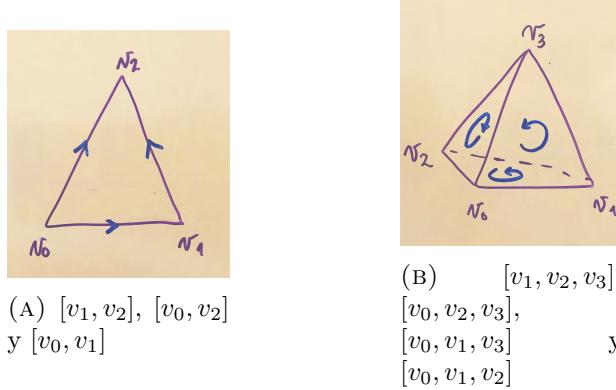


IMAGEN 4. Orientación usual

A continuación, en la imagen 5 ilustramos cómo quedan orientadas las caras si revertimos la orientación de los  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  con  $i$  impar.

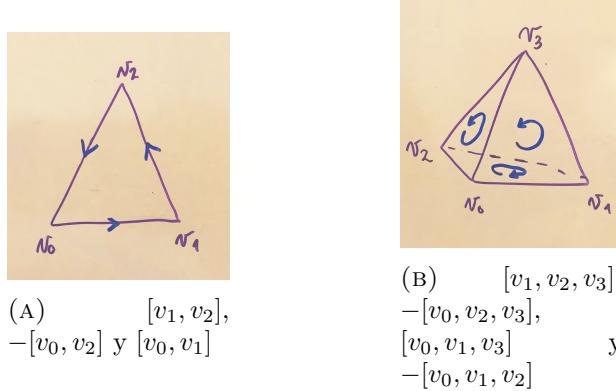


IMAGEN 5. Orientación obtenida al intercalar los signos

La idea entonces es que para obtener una orientación coherente y homogénea en las caras de nuestro simplex, vamos a intercalar la orientación usual de las caras con la orientación revertida.

**DEFINICIÓN 2.8.** Procedemos ahora a definir el homomorfismo  $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$ . Para esto, fijamos su valor en los generadores de  $\Delta_n(X)$ , es decir, las funciones  $\sigma_\alpha :$

$\Delta^n \rightarrow X$ . Notando  $\Delta^n = [v_0, \dots, v_n]$ , definimos

$$\partial(\sigma_\alpha) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

LEMA 2.9. *La composición  $\partial_{n-1} \circ \partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-2}(X)$  es cero.*

En nuestro caso, para definir los grupos de homología singular de un espacio topológico  $X$ , vamos a concentrarnos en las funciones continuas que van de  $\Delta^n$  a  $X$ . Llamaremos a estos mapas  $n$ -símplices singulares.

**DEFINICIÓN 2.10.** Un  $n$ -símplice singular es una función continua  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ .

**DEFINICIÓN 2.11.** Llamaremos complejo de  $n$ -cadenas singulares, que notaremos  $C_n(X)$ , al grupo abeliano libre que tiene como base a los elementos de la familia de funciones  $\{\sigma : \Delta^n \rightarrow X \mid \sigma \text{ continua}\}$ .

Es decir, los elementos de  $C_n(X)$ , a los que llamaremos  $n$ -cadenas singulares, serán sumas formales finitas  $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}$ , y  $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ .

**DEFINICIÓN 2.12.** Definimos un mapa borde  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  dado por

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

## CAPÍTULO 3

### Contraejemplos a la generalización de Jordan-Schönflies



## CAPÍTULO 4

### Límites inversos y atractores de sistemas dinámicos