Chapitre 7 - Déterminant

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 9 novembre 2018

Rappels

Matrices 2×2

Pour une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son déterminant vaut $ad - bc$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on définit le déterminant par récurrence par du **developpment par ligne** (ou par colonne).

Matrices 3×3

$$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\text{notation classique pour le det}} &= a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \text{ (ligne)} \\ &= c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \times \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \times \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \text{ (colonne)} \end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = \boxed{-2}$$

Remarque. On peut appliquer cette même méthode pour les matrices carées plus grandes.

Généralisation

En pratique, on fait des opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour mettre plein de 0 dans la matrice.

Opérations possibles 1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$(ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$), $i \neq j$ 2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$(ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$) $>$ Cette opération multiplie le déterminant par λ ! 3. $L_i \leftrightarrow L_j$(ou $C_i \leftrightarrow \lambda C_j$), $i \neq j$ $>$ Cette opération change le signe du déterminant

Exemple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underset{C_3 - C_1 \to C_3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

Intérêt principal du déterminant

Théorème. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, A inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

> *Remarque.* Pour le determinant 3×3, on a une formule "du genre $ad - bc$" appelée la règle de Sarrus :
>
> $$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$
>
> $$\text{Alors } det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

.