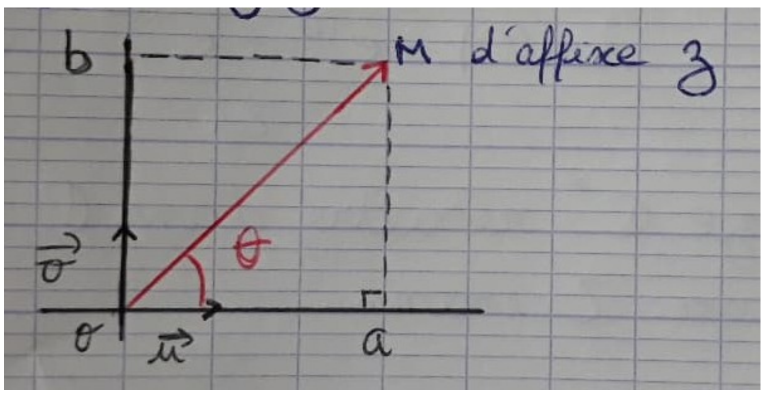
Chapitre 2 - Nombres complexes

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Jeudi 20 Septembre 2018

- Forme algébrique : $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$
- Conjugué : $\overline{z} = a - ib$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$
$$arg(z) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})\ modulo\ 2\pi$$

Propriété. Soit $z \in \mathbb{C}* \exists r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq

$$z = r\cos\theta + i * r * \sin\theta$$

avec $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$. Si $z = a + ib$ alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Définition.

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$$
$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Définition. Tout complexe z non nul de module z et d'argument θ s'écrit $z = re^{i\theta}$

$$e^{i2\pi} = 1$$
$$e^{2ik\pi} = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$e^{ik\pi} = (-1)^k$$
$$|e^{i\theta}| = 1,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Propriété. $\forall\theta \in \mathbb{R}$ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e-i\theta}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ Application : soit $z \in \mathbb{C}*$, résoudre $Z^n = z$

$$z = re^{i\theta}$$

$Z = Re^{i\alpha}$, les inconnues sont R et α.

$$R^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow R^n = r \Leftrightarrow R = r^{\frac{1}{n}} / n\alpha = \theta + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow R = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} / \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \ k \in \{0, 1, .., n-1\}$$

Exemple. Résoudre $Z^3 = -1 = e^{i\pi}$

$$\Leftrightarrow Z^3 = R^3 e^{i3\alpha} = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow R = 1\alpha = \frac{\pi}{3}$$

ou

$$\Leftrightarrow Z^3 = (a+ib)^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

Donc $Z^3 = -1$ avec $Z = e^{i\pi + 2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}}$ ou $Z = e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \ k\in\mathbb{Z}}$

- Application 2, résoudre dans $\mathbb{C}$: $aZ^2 + bZ + c = 0, \ a, b, c \in \mathbb{C}$ et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$
- Il suffit de trouver $\delta \in \mathbb{C}$ $(\delta = a + ib)$ tq $\delta^2 = \Delta$

$$Z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

(deux racines complexes)