Chapitre 3 - Calcul différentiel

Julien GREPAT (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 8 février 2019

1 - Cas des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ ; h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Rappel. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a le DL à l'ordre 1 :

$$g(x+h) = g(x) + \underset{g'(x)}{a}h + o(h)$$

2

$$f(X+h) = f(X) + \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + o(h)$$

$$\text{avec } X + h = \begin{pmatrix} x_1 + h_1 \\ \vdots \\ x_n + h_n \end{pmatrix}$$

Soit $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i h_i$ une application linéaire de h. C'est la **différentielle** de f en X : $D_X f(h)$

Définition. La **dérivée partielle** de f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable en X est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Théorème. $D_X f(h) = \text{"} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i h_i \text{"} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \times h_i$

3

Note. Plan tangeant : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On pose $z = f(x, y)$. On obtient le graphe de f.

Analogie avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Tangente à la courbe de g en $(x_0, y_0) = y(x)$: $y = \underset{y_0}{g(x_0)} + g'(x_0)(x - x_0)$

4

Plan tangent à f au point $(x_0, y_0, \underbrace{z_0}_{f(x_0,y_0)})$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$D_X f(h)$ est une application linéaire (en h). Elle peut être représentée par une matrice, nommée "Jacobienne" de f en X, notée $\mathcal{J}_X(f)$:

$$D_X f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \times h_i = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\right)}_{=\mathcal{J}_X(f)} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$D_X f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \times h_i = < \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix} = grad_X(f), \begin{pmatrix} h_i \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} >$$

Exemple. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 y \end{array} \right.$ sa dérivée partielle est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{D}_{x,y} f(h_1, h_2) & = & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 & + & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2 \\ & = & 2xyh_1 & + & x^2 h_2 \\ & = & \underbrace{(2xy\ x^2)}_{\mathcal{J}_{(x,y)}(f)} & \times & \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$grad_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Plan tangent à f en $(2, 3)$:

$$\begin{array}{rcccccc} z & = & f(2, 3) & + & \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) \times (x - 2) & + & \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) \times (y - 3) \\ & = & 2^2 \times 3 & + & 2 \times 2 \times 3(x - 2) & + & 2^2(y - 3) \\ & = & 12 & + & 12(x - 2) & + & 4(y - 3) \end{array}$$

Définition. f est C^1 si ses dérivées partielles sont continues

2 - Cas de fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_p(X) \end{pmatrix}$$

La différentielle se généralise coordonnée par coordonnée :

$$D_X f(h) = \begin{pmatrix} D_X f_1(h) \\ \vdots \\ D_X f_p(h) \end{pmatrix}$$

La Jacobienne de f en X est :

$$\mathcal{J}_X(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_X(f_1) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_X(f_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_r}(X) \end{pmatrix}$$

Théorème. Jacobienne de composée de fonctions :

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable autour de X
- $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ différentiable autour de $f(X)$

$g \circ f$ est différentiable autour de X et de Jaboienne :

$$\mathcal{J}_x(g \circ f) = \mathcal{J}_{f(X)}(g)\mathcal{J}_x(f)$$

Remarque. Analogie réelle : $(g \circ f)' = g'(f(x))f'(x)$

Exemple. Soients $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{cases}$

On étudie $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{J}_t(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \; ; \mathcal{J}_{(x,y)}(g) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = (y \; x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_t(g \circ f) &= \mathcal{J}_{f(t)}(g)\mathcal{J}_t(f) \\ &= (\cos t \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \\ &= (\cos^2 t - \sin^2 t) \end{aligned}$$

3) Cas des fonctions : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Définition. La **divergence** de f est la trace (= somme des termes diagonaux) de la matrice Jacobienne :

$$div_X f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X)$$

Notation. $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ Formellement $div_x f =< \nabla, f(x) >$

4) Cas des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Rappel. (Produit vectoriel)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -xz' + zx' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Définition. Rotationnel de f en X :

$$Rot_x(f) = \nabla \wedge f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{y}(X) - \frac{\partial f_2}{z}(X) \\ -\frac{\partial f_3}{y}(X) + \frac{\partial f_1}{z}(X) \\ \frac{\partial f_2}{x}(X) - \frac{\partial f_1}{y}(X) \end{pmatrix}$$

Définition. On dit que f dérive d'un potentiel s'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq.

$$f(x, y, z) = grad_{(x,y,z)} V$$

Théorème.

- Si f dérive d'un potentiel $Rot f = 0$
- Si f est définie sur la boule $\mathcal{B}$ avec $rot_x f = 0 \forall x \in \mathcal{B}$, alors sur $\mathcal{B}$, f dérive d'un potentiel.

Propriétés. Soit $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- $grad_X(fg) = f \times grad_X(g) + g \times grad_x(f)$
- $div_X(fG) = f \times div_X(G) + < grad(f), G >$
- $rot_X(fG) = f \times rot(G) + grad(f) \wedge G$
- $div(F \wedge G) =< G, rot(F) > - < F, rot(G) >$

5) Dérivées partielles d'ordre 2 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Rappel. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alors sa dérivée partielle est :

$$X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

Si la dérivée partielle est différentiable, on peut "re" dériver :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$$

Si $i = j$ (*notation*):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X)$$

Exemple. Soient $f(x, y) = x^2 y$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(X) = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(X) = x^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$$

Théorème de Schwarz. Si f est deux fois différentiable :

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le **Laplacien** de f en X est défini par :

$$\begin{aligned} \Delta f(X) &= div(grad_X f) \\ &= div_X \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X) \end{aligned}$$

.