Chapitre 1 - Analyse de Fourier

Rémi MOLINIER (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 30 Novembre 2018

Séries de Fourier

1. Fonction périodiques

Définition. Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-periodique si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

Exemples. - $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont 2π-périodiques - $t \mapsto \tan(t)$ est π-périodique - $t \mapsto \cos(\frac{2\pi}{T}t)$ est T-périodique (preuve en développant $\cos(\frac{2\pi}{T}(t+T))$)

Remarque. Si F est T-périodique alors F est kT-périodique $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Exercice. Tracer le graphe de la fonction f paire puis de la fonction g impaire, toutes deux telles qu'elles soient 1-périodiques tq $f(t) = g(t) = t,\ \forall\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Remarque. - Pour définir une fonction T-périodique il suddit de la donner sur un intervalle de longueur T. - Si de plus on a des symétries (paire, impaire, etc.) il suffit de la définir surun plus petit intervalle (typiquement, si f paire ou impaire, $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ suffit)

Exemple. $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{T}t}$ es une fonction T-périodique à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition. Un polynôme trigonometrique c'est une fonction f tq

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-N}^{N} C_k \underset{T\text{-périodique}}{e^{\frac{2i\pi}{T}kx}} \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{N} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\right) \end{aligned}$$

On passe d'une forme à l'autre en utilisant les formules d'Euler

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) = \frac{e^{\frac{2\pi}{T}ikx} + e^{\frac{2\pi}{T}i(-k)x}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) = \frac{e^{\frac{2\pi}{T}ikx} + e^{\frac{2\pi}{T}i(-k)x}}{2i}$$

$$\text{Avec : } a_0 = C_0,\ C_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \text{ et } C_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

Remarque. Si f est T-périodique, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)dt &= \int_a^{a+T} f(t)dt \text{ mais aussi} \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \text{ en particulier} \end{aligned}$$

2. Coefficients de Fourier

Définition. Soit f, T-périodique : $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2\pi}{T}int}dt}$$

Remarque. Comme f est T-périodique et $t \mapsto e^{\frac{-2\pi}{T}int}$ aussi on peut changer le domaine d'integraiton par $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ou autre chose de plus commode

Définition. La série de Fourier de f est alors

$$\boxed{S_f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)e^{\frac{2\pi}{T}int}}$$

Remarque. Pourquoi cette définition ? Si $f(t) = \sum\limits_{k=-N}^{N} C_n e^{\frac{2\pi}{T}ikt}$

$$\begin{aligned} C_n(f) &= \tfrac{1}{T}\int_0^T \big(\sum_{k=-N}^{N} C_k e^{\frac{2\pi}{T}ikt}\big)e^{\frac{-2\pi}{T}int}dt \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \tfrac{C_k}{T}\Big(\underbrace{\int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}i(k-n)t}dt}_{=\,I_{n,k}}\Big) \end{aligned}$$

- si $k = n$:

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \int_0^T 1dt \\ &= T \end{aligned}$$

- si $k \neq n$

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}i(k-n)t}dt \\ &= \Big[\frac{e^{\frac{2\pi}{T}i(k-n)t}}{\frac{2\pi}{T}i(k-n)}\Big]_0^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $C_n(f) = \frac{C_n}{T}T = C_n$. Donc $S_f(t) = f(t)$

Exemple. f est 2π-périodique paire tq $f(t) = t$ si $t \in [0, \pi]$

Soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} C_n(f) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{f(t)e^{-int}}_{\text{n'est pas pair !}}\ dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \text{ (on peut décaler comme} f \text{ est } 2\pi\text{-périodique)} \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\big(\int_{-\pi}^{0} -te^{-int}dt + \int_0^{\pi} te^{-int}dt\big) \text{ (on peut découper comme } f \text{ est paire)} \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\Big[([-t\tfrac{e^{-int}}{-in}]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt) + ([\tfrac{te^{-int}}{int}]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\tfrac{e^{-int}}{in}dt)\Big] \text{ (IPP)} \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\left(\tfrac{\pi}{in}e^{in\pi} - \tfrac{1}{in}\big[\tfrac{e^{-int}}{-in}\big]_{-\pi}^{0} + \tfrac{-\pi}{in}e^{-in\pi} + \tfrac{1}{in}\big[\tfrac{e^{-int}}{-in}\big]_0^{\pi}\right) \text{ (or } e^{-in\pi} = e^{in\pi}\text{)} \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\left(\tfrac{1}{in}\Big(-\big[\tfrac{e^{-int}}{-in}\big]_{-\pi}^{0} + \big[\tfrac{e^{-int}}{-in}\big]_0^{\pi}\Big)\right) \text{ (on peut donc simplifier)} \\ &= \tfrac{1}{2\pi in}\Big(\tfrac{(-1)^n}{-in} - \tfrac{1}{-in} - (\tfrac{1}{-in} - \tfrac{(-1)^n}{-in})\Big) \\ &= \tfrac{1}{2\pi in}\big(\tfrac{2}{in}\big) \\ &= \tfrac{-1}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{C_n(f) = \dfrac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$

Et $C_0(f) = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt}_{=\pi^2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

Donc $\boxed{S_f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{2((-1)^n - 1)e^{int}}{\pi n^2}} = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} e^{(2k+1)it}}_{(n = 2k+1)}$

Remarque. $(-1)^n - 1 = 0$ (si n pair) ou -2 (si n impair)

Remarque. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)e^{i\frac{2\pi}{T}nt} = \lim_{N\to+\infty}(\sum_{n=-N}^{N} C_n(f)e^{i\frac{2\pi}{T}nt})$

3. Premières propriétés

Propriétés. - $C_n(f+g) = C_n(f) + C_n(g)$ - $C_n(\lambda f) = \lambda C_n(f)$ - $C_n(f') = \frac{2\pi in}{T}C_n(f)$

Théorème. $C_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (si f continue par morceaux)

4. Coefficients réels

$$\begin{array}{rcl} S_f(t) & = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \\ & = & a_0(f) + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(\frac{2\pi}{T}nt) + b_n(f)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)) \end{array}$$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} a_0(f) & = & C_0(f) \\ a_n(f) & = & c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) & = & i(C_n(f) - C_n(f)) \\ c_n(f) & = & \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \\ c_{-n}(f) & = & \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \end{array}$$

Formules.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_0(f) & = & \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ a_n(f) & = & \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)\ dt \\ b_n(f) & = & \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)\ dt \end{array}}$$

Remarque. - Si f paire, $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)}_{\text{(impair)}}dt = 0$ - Si f impaire, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)}_{\text{(impair)}}dt = 0$

Remarque. - pair $\times$ pair $\to$ pair - impair $\times$ impair $\to$ pair - pair $\times$ impair $\to$ impair - impair $\times$ pair $\to$ impair

Exemple. $f(t) = t$ sur $[0, \pi]$, paire et 2π-périodique

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ dt = \frac{\pi}{2}$$

Soit $n \geq 1$

$$\begin{array}{rcl}
b_n(f) & = & 0 \text{ (car f paire)} \\
a_n(f) & = & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \\
& = & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\ dt \\
& = & \frac{2}{\pi}([\frac{t\sin(nt)}{n}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\ dt) \\
& = & \frac{-2}{\pi}[\frac{-\cos(nt)}{n^2}]_0^{\pi} \\
& = & \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - \cos(0)) \\
& = & \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \\
& = & \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} \text{ si n impair} \\ 0 \text{ si n pair} \end{cases}
\end{array}$$

$$\boxed{S_f(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}cos((2k+1)t)}$$

Exemple.

- Soit $f \mapsto 1 - \frac{2x}{\pi}\ \forall t \in [0,\pi]$ une fonction paire 2π périodique. Ses coefficienfs de Fourier sont :

$$\begin{array}{rcl}
a_0(f) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
& = & \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{2x}{\pi})dx \text{ (car paire)} \\
& = & \frac{1}{\pi}\left[\cdots\right]_0^{\pi} \\
& = & 0
\end{array}$$

Soit $n \geq 1$ comme f f paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$

$$\begin{array}{rcl}
a_n(f) & = & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx \text{ (car paire)} \\
& = & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{2x}{\pi})cos(nx)dx \\
& = & \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[(1-\frac{2x}{\pi})\frac{sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sin(nx)}{n}dx\right) \\
& = & \frac{4}{\pi^2 n}\left[\frac{-cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
& = & \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1 - \underbrace{cos(n\pi)}_{=(-1)^n}\right) \\
& = & \boxed{\frac{4}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)} \\
& = & 0 \text{ si n pair ou } \frac{8}{\pi^2 n^2} \text{ sinon}
\end{array}$$

$$\boxed{S_f(x) \underset{(x=2k+1)}{=} \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}}$$

5. Théorème de Parseval

Théorème. Soif f continue par morceaux et T-périodique. La puissance moyenne du signal est

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|C_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

Applications

1. Calcul du nombre d'harmonique nécessaire pour transmettre $X\%$ de la puissance du signal.

Principe : 1. On calcule $E = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$ (la puissance moyenne du signal) 2. On calcule $E_0 = |a_0(f)|^2$, $E_1 = |a_0(f)|^2 + |a_1(f)|^2 + |b_1(f)|^2$, $E_2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |b_1|^2 + |a_2|^2 + |b_2|^2 + \dots$

On s'arrête lorsque $\frac{E_i}{E} \geq X\%$

Exemple. f pair 2π-périodique tq $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ $\forall t \in [0, \pi]$

$$\begin{array}{rcl} E & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \\ & = & \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1 - \frac{2t}{\pi})^2 dt \\ & = & \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi}{6}(1 - \frac{2t}{\pi})^3\right]_0^{\pi} \\ & = & \frac{1}{6}(1+1) \\ & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & 0 \\ E_1 & = & \frac{|a_1|\check{s}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \approx 0,32 \\ \frac{E_1}{E} & = & \frac{3}{2}(\frac{8}{\pi^2})^2 \approx 0,98 \end{array}$$

Donc avec 1 harmonqiue on transfère 98% de la puissance du signal

2. Calcul de séries

Exemple. f pair 2π-périodique tq $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ $\forall t \in [0, \pi]$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{-f}{\pi^2(2k+1)^2}\right)^2$$

Donc $\frac{1}{3} = \frac{2^5}{\pi^4}\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$

$$\begin{array}{rcl} \text{Soit } S & = & \sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} \\ & = & \underbrace{\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^4}}_{=\frac{1}{2^4}\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} = S} + \underbrace{\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}}_{=\frac{\pi^4}{96}} \\ & = & \frac{1}{16}S + \frac{\pi^4}{96} \\ & = & \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} \\ & = & \frac{\pi^4}{90} \end{array}$$

$$\text{Donc : } \boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{pi^4}{90}}$$

6. Convergence des séries de Fourier

Théorème de convergence normale. - Soit f une fonction T périodique, on suppose que : - f continue - f C^1 par morceaux

- Alors
$$S_{f,N}(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$
converge uniformément (et même normalement) vers f.

Rappels.

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tq } \forall n \geq \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$$

dessin d'une CVU

- f C^1 par morceaux, si $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ strictement croissante tq f C^1 sur $]t_n, t_{n+1}[$ $\forall n$ et $f'(t)$ à une limite finie quand $t \to t_n^+$ et $t \to t_n^-$

Théorème de Dirichlet.

f continue par morceaux et T-périodique. On suppose que en tout point t on a une limite à gauche $f(t^-)$ et une limite à droite $f(t^+)$

Alors $S_{f,N}(t) = \sum\limits_{i=-N}^{N} C_n(f) e^{\frac{-2i\pi}{T}nt} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$

Remarque. - Si f continue en t alors $f(t^-) = f(t^+) = f(t)$ donc $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = f(t)$ *Exemple*

Phenomène de Gibbs. Quand le signal n'est pas continu, on n'a pas CVU de la série de Fourier : en chaque discontinuité on a des pics qui apparaissent.

[Schéma d'une fonction discontinue]

On peut aussi utiliser Dirichlet pour du calcul de série.

Exemple. f pair 2π-périodique tq $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ $\forall t \in [0, \pi]$. En appliquant Dirichlet et en prenant $t = 0$ on obtient la valeur de $\boxed{\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$ et ensuite avec le même jeu que tout à l'heure, on obtient $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Transformée de Fourier

1. Definition

Définition. Soit f intégrable on définit alors la Tf de f par

$$\forall \xi,\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt$$

Attention. Il existe plusieurs conventions :

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi}}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi ty}$$

Remarque. $\hat{f}(\xi)$ est bien définie $\forall\ \xi \in \mathbb{R}$ car $|f(t)e^{-it\xi}| = |f(t)|$ et f intégrable. On a même $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-it\xi}|dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$

Exemple. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} \\ & = & \frac{2}{\xi}\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i} \\ & = & \frac{2sin(\xi)}{\xi} \\ & = & 2sinc(\xi) \end{array}$$

où $\underset{\text{cardinal}}{sinc}(x) = \frac{sin(x)}{x}$

$$|f(t)e^{-it\xi}| = |f(t)||\underbrace{e^{-i\overset{\in\mathbb{R}}{t\xi}}}_{=1}| = |f(t)|$$

2. Propriétés

- **Linéarité.** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$\$ et f, g intégrable $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$
- **Retard temportel.** Soit $\tau \in \mathbb{R}$, si $g(t) = f(t-\tau) \forall t \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i\tau\xi}\hat{f}(\xi)$$

IMPORTANT : Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \hat{g}(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}} f(\underbrace{t-\tau}_{u})e^{-it\xi}dt, \text{ donc } t = u+\tau \text{ et } du = dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i(u+\tau)\xi}du \\ & = & e^{-i\tau\xi}\hat{f}(\xi) \blacksquare \end{array}$$

Application. $g(t) = \begin{cases} 1\ si\ t \in [2,4] \\ 0\ sinon \end{cases}$

Ici $g(t) = f(t-3)$ où $f(t) = \begin{cases} 1\ si\ t \in [-1,1] \\ 0\ sinon \end{cases}$

$f(t-3) = 0 \Leftrightarrow -1 \leq t-3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 4$

Donc

$$\hat{g} = e^{-3i\xi}\hat{f}(\xi) = 2e^{-3i\xi}sinc(\xi)$$

Exemple. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t+1 & \text{si} & t \in [-1,0] \\ 1-t & \text{si} & t \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} & \end{cases} \end{cases}$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl}\hat{f} & = & \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{it\xi} \\ & = & \int_{-1}^{0}(t+1)e^{it\xi}dt + \int_{0}^{1}(1-t)e^{-it\xi}dt \\ & = & [(t+1)\frac{e^{it\xi}}{-i\xi}]_{-1}^{0} + \frac{1}{i\xi}\int_{-1}^{0} e^{-it\xi}dt + [(1-t)\frac{e^{-it\xi}}{-i\xi}]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{e^{it\xi}}{i\xi}dt \\ & = & -\frac{1}{i\xi} + \frac{1}{i\xi}\left[\frac{e^{-it\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{i\xi} - \left[\frac{e^{-it\xi}}{-i\xi}\right]_{0}^{-1} \\ & = & \frac{1}{(i\xi)^2}\left(e^{i\xi} - 1 + e^{-i\xi} - 1\right) \\ & = & \boxed{\frac{1}{(i\xi)^2}\left(e^{i\xi} + e^{-i\xi} - 2\right)}\end{array}$$

- **Dilatation.** Soit $b > 0$. Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(bt)$:

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{\xi}{b}\right)$$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl}\hat{g}(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-it\xi}dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}} f(bt)e^{-it\xi}dt\end{array}$$

Prenons $u = bt \Leftrightarrow t = \frac{u}{b}$ et $du = bdt \Leftrightarrow dt = \frac{du}{b}$.

$$\begin{array}{rcl}\hat{g}(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i(\frac{u}{b})\xi}\frac{du}{b} \\ & = & \frac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-iu(\frac{\xi}{b})}du \\ & = & \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{\xi}{b}\right)\end{array}$$

Application.

Calculer la TF de $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ t & \mapsto \quad \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-2, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

Rappel. Pour $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ t > & \mapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{si} & t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ on a :

$$\hat{g}(\xi) = 2sinc(\xi)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = g\left(\frac{t}{2}\right)$$

(car $-2 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{t}{2} \leq 1$*)*

$$\begin{array}{rcl}\text{Donc } \hat{f}(\xi) & = & 2\hat{g}(2\xi) \\ & = & 4sinc(2\xi)\end{array}$$

Exemple.

$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ t & \mapsto \quad \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [5, 6] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ t & \mapsto \quad \begin{cases} 1 \text{ si } [-1, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = g(2t - 11)$$

(car $5 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{t-11}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 2t - 11 \leq 1$*)*

$$\text{Donc } \boxed{\hat{f}(t) = \frac{e^{-11i\frac{\xi}{2}}}{2} \hat{g}\left(\frac{\xi}{2}\right)}$$

En effet, $f(t) = h(t - \frac{11}{2})$

où $h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$h(t) = g(2t)$

Donc

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i\frac{11}{2}\xi} \hat{h}(\xi)$$

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{2} \hat{g}(\frac{\xi}{2})$$

$$\text{Donc } \boxed{\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{11}{2}i\xi} sinc\big(\xi/2\big)}$$

- **Formules de dérivation.**

1. f intégrable et $\mathcal{C}^1$ telle que f' intégrable :

$$\hat{f}(\xi) = (i\xi) \hat{f}(\xi)$$

Rappel. $\frac{1}{t^\alpha}$ intégrable en 0 $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \overset{\wedge}{f'}(\xi) & = & \int f'(t)e^{-it\xi}dt \\ & = & [f(t)e^{-it\xi}] - \int_{\mathbb{R}} f(t)(-i\xi)e^{it\xi}dt \\ & = & (i\xi)\int f(t)e^{it\xi}dt \\ & = & (i\xi) \hat{f}(\xi) \blacksquare \end{array}$$

2. f intégrable telle que $\overset{wedge}{f}$ est $\mathcal{C}^1$:

$$\boxed{\hat{f}{}'(\xi) = (-\overset{\wedge}{itf})(\xi)}$$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \overset{\wedge}{f'}(\xi) & = & \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} \\ & = & \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}(f(t)e^{-it\xi})dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}}(-it)f(t)e^{-it\xi}dt \\ & = & (-it\overset{\wedge}{f(t)})(\xi) \end{array}$$

Applications. 1. Application en équations différentielles 2. Calcul de la TF (transformée de Fourier)

```
$$
f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\t & \mapsto & e^{-t^2}\end{array
$$

$$
\stackrel{\wedge}{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}e^{-it\xi} dt
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\stackrel{\wedge}{f}'(\xi) & = & \stackrel{\wedge}{(-i t f)}(\xi)\\
 & = & \int -it e^{-t^2}e^{-it \xi} dt\\
 & = & {i \over 2} \int_{\mathbb{R}} 2te^{-t^2}e^{-it \xi} dt\\
 & \underset{\text{IPP}}{=} & {i \over 2}(\stackrel{0}{[\nearrow]} + \int e^{-t^2} - i\xi e^{-it\xi})
 & = & {i^2 \over 2}\xi \stackrel{\wedge}{f}(\xi)\\
\end{array}
$$

Donc $\stackrel{\wedge}{f}$ est solution de $y' + {\xi \over 2}y = 0 (E)$

Les solutions de $(E)$sont $t \mapsto C e^{{- \xi^2 \over 4}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Cherchons $C$ dans notre cadre

$$
\begin{array}{lcl}
 \stackrel{\wedge}{f}(0) & = & \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt\\
 & = & \sqrt{\pi} \text{ (intégrale de Gauss)}\\
\end{array}
$$

$$
\text{Donc } \boxed{\stackrel{\wedge}{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}}
$$
```

Application. Soit f intégrable et $\mathcal{C}^1$ telle que f' intégrable,

$$\text{Donc } \stackrel{\wedge}{f}(\xi) = \frac{1}{(i\xi)} \stackrel{\wedge}{f'}(\xi)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{De plus, } |\stackrel{\wedge}{f'}(\xi)| & \leq & \int_{\mathbb{R}} |f'(t)e^{-it\xi}|dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|dt \end{array}$$

Ainsi, f est bornée.

$$\text{Ainsi } |\stackrel{\wedge}{f}(\xi)| = \frac{1}{\xi} \underset{\text{(bornée)}}{|\stackrel{\wedge}{f'}(\xi)|} \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\stackrel{\wedge}{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{} 0}$$

- **Théorème de Borel Lebesgues.** f intégrable alors $\boxed{\stackrel{\wedge}{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to +\infty \text{ ou } -\infty]{} 0}$

- **Théorème de Parseval** *(voir exo 5 du TD pour une application)*

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)|^2 d\xi}$$

3. Théorème d'inversion

Théorème. si f est intégrable et $\hat{f}$ intégrable.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi}$$

Remarque. Soif f intégrable. Si on note

$$\check{f}(t) = f(-t) \text{ (} \vee \text{ prononcé "tchetch")}$$

Alors la formule d'inverion peut s'écrire

$$\hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f}$$

Application. Si f et g sont intégrable tq $\hat{f} = \hat{g}$ (et est intégrable)

Preuve.

$$f = \check{\check{f}} = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{\hat{f}}} = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{\hat{g}}} = \check{\check{g}} = g$$

Preuve.

$$\begin{aligned} f(t) &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{it\xi} dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) e^{it\xi} dt \text{ (car } \hat{f} = \hat{g} \text{)} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Exemple. Simplifier $\hat{\check{\hat{\hat{\check{f}}}}} = 2\pi \hat{\check{\check{\check{f}}}} = 2\pi \hat{\check{f}} = 2\pi \hat{\hat{\hat{f}}} = 2\pi \check{\hat{f}}$

Proposition. - $\check{f} = f \Leftrightarrow f$ paire - $\check{f} = -f \Leftrightarrow f$ impaire

Question. Si f paire, que dire de $\hat{f}$? Idem pour f impaire.

Application calcul de TF : questions. Soit $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, soit $\varphi_\alpha(t) = e^{-\alpha(t)}$

1. Calculer la TF de φ_α
2. En déduire celle de f

Application calcul de TF : réponses.

1.

$$\begin{aligned}
\stackrel{\wedge}{\varphi_\alpha}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\alpha(t) e^{-it\xi} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-it\xi} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-it\xi} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\xi)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + i\xi)t} dt \\
&= [\tfrac{e^{(\alpha-i\xi)t}}{\alpha - i\xi}]_{-\infty}^{0} + [\tfrac{e^{-(\alpha+i\xi)t}}{-(\alpha+i\xi)}]_{0}^{+\infty} \\
&= \tfrac{1}{\alpha - i\xi} + \tfrac{1}{\alpha + i\xi} \\
&= \tfrac{2\alpha}{(\alpha - i\xi)(\alpha + i\xi)} \\
&= \boxed{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}}
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\stackrel{\wedge}{\varphi_1} = 2f}$$

1. Donc $\stackrel{\wedge}{f} = \frac{1}{2} \stackrel{\wedge}{\stackrel{\wedge}{\varphi_1}} = \pi \stackrel{\vee}{\varphi_1} = \pi \varphi_1$ car φ_1 paire.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\stackrel{\wedge}{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}}$$

4. Application au calcul d'EDL

Exemple. $y'' + ay' + b = f$ en appliquant la TF, on obtient

$$(y'' + \stackrel{\wedge}{a}y' + b) = \stackrel{\wedge}{f}$$

$$\begin{aligned}
\stackrel{\wedge}{y''} + a \stackrel{\wedge}{y'} + b \stackrel{\wedge}{y} = \stackrel{\wedge}{f} &\Leftrightarrow (i\xi)^2 \stackrel{\wedge}{y} + a(i\xi) \stackrel{\wedge}{y} + b \stackrel{\wedge}{y} = \stackrel{\wedge}{f} \\
&\Leftrightarrow ()(i\xi)^2 + a(i\xi) + b) \stackrel{\wedge}{y} = \stackrel{\wedge}{f}
\end{aligned}$$

Donc

$$\stackrel{\wedge}{y} = \underbrace{\frac{1}{(i\xi)^2 + a(i\xi) + b}}_{\text{fonction de transfert}} \stackrel{\wedge}{f}$$

Après, on calcule $\stackrel{\wedge}{f}$ puis on simplifie $\stackrel{\wedge}{y}$ pour l'écrire out une forme de TF de fonctions classiques.

```
'Exp':
  'prefix': 'exp'
  'body': 'e^{$1}$0'

'wedge function':
  'prefix': 'wedge'
  'body' : '\\\\stackrel{\\\\wedge}{${1:f}}(${2:\\\\xi})$0'
```

.