Chapitre 2 - Fonctions de plusieurs variables

Rémi MOLINIER (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 21 Décembre 2018

0. Topologie de $\mathbb{R}^n$

$$f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^n \text{ où } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$$

Produit scalaire

$u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$

$$u.v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Et géometriquement :

$$u.v = ||u||||v||cos(\alpha)$$

Norme

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Distance

$$d(u, v) = ||v_u||$$

Boules

Soit $u \in \mathbb{R}^n, r \geq 0$

$$\mathcal{B}(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^n | \ d(u, v) < r\}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}}(u, r) &= \{v \in \mathbb{R}^n | \ d(u, v) \leq r\} \\ &= \overset{\circ}{\mathcal{B}} \cup \underbrace{\{v \in \mathbb{R} | \ d(u, v) = r\}}_{\text{sphère de centre } u \text{ et rayon } v} \end{aligned}$$

Ouverts

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ est un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ si $\forall u \in \mathcal{U}, \exists r > 0$ tq $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(u, r) \subset \mathcal{U}$

Exemple. Une boule ouverte $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ est ouverte (c'est une boule à laquelle on a "enlevé sa sphère").

Exemple. Une boule fermée n'est pas ouverte

Exemple.$\mathbb{R}^n$ est ouvert

I. Fonctions scalaires

Soient $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^1$.

Exemple. $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \underset{\subset \mathbb{R}^2}{\{\text{plan des alpes}\}} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \text{altitude du point } (x, y) \end{array} \right.$

Exemple. Potentiomètre : $\mathcal{U} =]R_-, R_+[\times]I_-, I_+[$ et $U_p : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R} \\ (R, I) & \mapsto & RI \end{array} \right.$

Exemple. $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right.$ (on la représente avec les deux axes de $\mathbb{R}^2$ et un axe supplémentaire pour $\mathbb{R}$, ici elle ressemble à une parabole qui pivote autour de son axe de symétrie)

1. Limites et continuité

Soient $f : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathcal{U}$.

Définition. On dit que f **tend vers** l lorsque u tend vers u_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \text{ tq } \forall u \in \mathcal{U}, ||u - u_0|| < \delta \Rightarrow |f(u) - l| < \varepsilon$$

Notation. $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$ $f(u) \xrightarrow[u \to u_0]{} l$

Attention. La convergence directionnelle ne suffit pas !

Exemple. Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array} \right.$ alors on a :

$$f(0, y) = 0 \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

$$f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2}$$

Ici f n'a pas de limite en 0

Exemple.

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \end{array} \right.$$

On a, dans la direction des x et des y :

$$f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$
$$f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
$$f(t\overrightarrow{u}) = f(ta,tb) = \frac{t^3a^2b}{t^4a^4+t^2b^2} \sim \frac{a^2bt^3}{b^2t^2} = \frac{a^2}{b}t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Ainsi, dans n'importe quelle direction la limite est nulle

$$f(t,t^2) = \frac{t^2t^2}{t^4+(t^2)^2} = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

Exemple.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Pour montrer que $f(u) \xrightarrow[u\to u_0]{} l$ on essaye de majorer $|f(u)-l|$ par des norme de $||u-u_o||$

Ici

$$f(x,0) \to 0$$

donc la seule limite posible c'est 0.

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2||y^2|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{||u||^2||u||^2}{||u||^2} \leq ||u||2 \xrightarrow[||u||\to 0]{} 0$$

Donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Définition. On dit que f **est continue en** $u_0 \in U$ si $f(u) \xrightarrow[u\to u_0]{} f(u_0)$

Définition. On dit que f est **continue sur** $\mathcal{U}$ si $\forall u_0 \in \mathcal{U}$, f est continue en u_0

En pratique, les fonctions sont souvent continues comme produits, composées, sommes de fonction continues

Exemple.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } x=y=0 \end{cases} \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme rapport de deux fonctions continues en 0, f est continue car $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ (par l'exemple précedent).s

2. Dérivées partielles

Définition. $f : U \to \mathbb{R}$

On dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à la i-ème variable en u_0 si $\frac{f(u_0+te_i)-f(u_0)}{t}$ admet une limite quand t tend vers 0

Ici, $e_i = (0,\ldots,0,\underset{\text{n°i}}{1},0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$

Notation. cette derivée partielle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u_0)$ ou $\partial_i f(u_0)$

Attention. $\partial \neq \delta$ (“d ronde” différent de “delta”)

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \;=\; \text{dérivée en } x_0 \text{ de la fonction } x \mapsto f(x, y_0)$$

Exemple. Soit $f(x,y) = xy - x^2y^3$, on dérive en voyant l'autre variable comme une constante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - y^3(2x) = y - 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 3x^2y^2$$

Attention. Ce n'est pas parce que f admet des dérivées partielles en u_0 que f est continue en u_0.

Exemple. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & x = y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$, f admet des dérivées partielles en 0 mais n'est pas continue en 0.

Remarque. La bonne notion qui generalise la derivabilité à plusieurs variable est la **differentiabilité**.

Définition. ***f* est de classe C^1** si f continue et si f admet des dérivée partielle en tout point et que celles-ci sont continues

Théorème. Si f est C^1, $u_0 \in U$ alors pour $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_0) + ||h||\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Rappel. En dimension 1 : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$

Remarque. Ce théorème nous dit qu'au voisinage de $u_0 = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$f(u) \simeq f(u_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_0)$$

($\to$ équation du “plan” tangent au graphe de f en u_0)

$$u = u_0 + h = (y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow x_i - y_i$$

Exemple.

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

au voisinage de $(1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$$

$$f(x,y) \approx \underset{2}{f(1,1)} + 2(1-x) + 2(1-y) \approx 6 - 2x - 2y$$

Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 6 - 2x - 2y$ est tangent à la surface $z = x^2 + y^2$ en $(1,1)$

Définition. Le **Gradient** de f en u est $\nabla f(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix}$ (prononcé “nabla”) ou noté autrement $\mathrm{grad}_u f$.

Ansi le théorème précédent donne :

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + h.\nabla f(u_0) + o(h)$$

.