

# Chapitre 3 - Algèbre linéaire

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Mardi 25 Septembre 2018

remi-molinier@univ-grenoble-alpes.fr

## A) Rappels

### 1) Systèmes linéaires

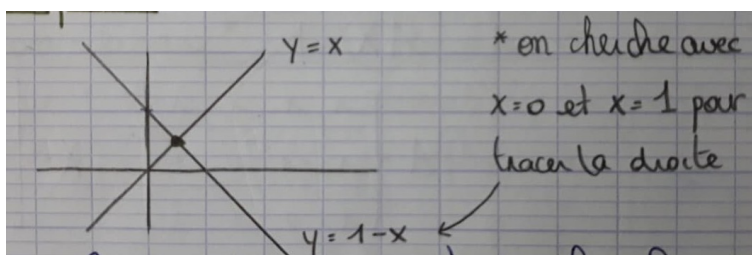
*Exemple.*

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

#### a) Interprétation géométrique

- Avec 2 variables :

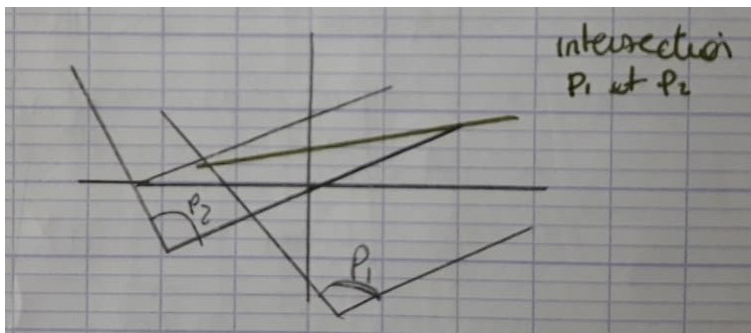
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$



Résoudre un système avec deux variables revient à chercher l'intersection de droites du plan, donc un point ou une droite.

- Avec 3 variables :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (P_1) \\ x - y - z = 0 & \end{cases}$$



Résoudre un système avec trois variables revient à chercher l'intersection de plans de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , donc une droite ou un plan.

## b) Différentes façons d'écrire un système

- Avec des équations :

*Exemple.*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + t = 0 \\ x - z + 2t = 2 \end{cases}$$

- Avec la matrice augmentée du système

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

Les lignes sont  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  ; les colonnes de gauche sont  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

- Forme matricielle

$$AX = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### c) Rappel du produit matriciel

Possible ssi  $Nb\ col\ A = Nb\ ligne\ B$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times l}$$

*Exemple.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z + t \\ x - y + t \\ x - z + 2t \end{bmatrix}$$

### d) Opérations élémentaires

- Permutation
- Système  $Ei \leftrightarrow Ej$  *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

- Matrice augmenté  $Li \leftrightarrow Lj$  *Exemple.*

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

- Forme matricielle : multiplier à gauche par (lignes  $j$  et  $i$ , colonnes  $i$  et  $j$ )

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

- Dilatation
- Système  $Ei \leftarrow \lambda Ei$  *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

- Matrice augmenté  $Li \leftarrow \lambda Li$  *Exemple.*

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

- Forme matricielle **incomplet**
- Combinaison linéaire d'équation
- Système  $Ei \leftarrow Ei + \lambda Ej$  *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

- Matrice augmentée  $Li \leftarrow Li + \lambda Lj$  *Exemple.* ( $L2 \leftarrow L2 - L1$ )

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

- Forme matricielle **incomplet**

e) **Algorithme de Gauss**

- **Étape 1.** Avec les opérations élémentaires (surtout la 3ième) on met le système sous forme triangulaire en utilisant des **pivots** *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 = \\ -x - y - z - 2t = 1 = \\ -x + y + 2z + t = 1 = \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L3 \leftarrow L3 - L1]{L2 \leftarrow L2 + L1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[L3 \leftrightarrow L2]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

(y est "libre")

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 = \\ z = 0 = \\ -t = 2 = \end{cases}$$

- **Étape 2.** Résoudre le système en remontant *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y + 0 - 2 = 1 = \\ z = 0 = \\ t = -2 = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y = \\ z = 0 = \\ t = -2 = \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - y \\ y \\ 0 \\ -z \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est la droite passant par  $(3, 0, 0, -2)$  et de vecteur directeur  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

f) Ensemble des solutions d'un système

- $S = \emptyset$  *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \rightarrow L2 - L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad 0 = 1 \text{ impossible}$$

- Il y a une unique solution *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 - L1 \rightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = 1/2 \\ y = -1/2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Il y a une infinité de solutions *Exemple.*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \leftarrow L2 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Droite passant par  $(1, 0)$  et de vecteur directeur  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

g) Une variante : Gauss Jordan

- **Étape 1** : Pareil que pour Gauss
- **Étape 2** “annuler les entrées au dessus du pivot en commençant par la fin”

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L1 \leftarrow L1 - L3]{L2 \leftarrow L2 - L3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[L1 \leftarrow L1 - L2]{L1 \leftarrow L1 - L2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y + z = 0 \\ t = 1 \end{array} \right. = \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -z \\ t = 0 \end{array} \right.$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

## 2) Matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \text{ensemble des matrices } m \times n$$

### a) Opérations

$$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
- $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

Muni de ces opérations,  $\mathcal{M}_{m,n}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (les règles de calcul avec les vecteurs du  $\mathbb{R}^n$  fonctionnent pareil ici).

*Exemples.* Soient  $A, B$  deux matrices,  $A + B$  et  $3A$ .

Si  $m = n$  on parle de matrice carrée et on note  $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a maintenant un produit en plus.

Attention  $AB \neq BA$  (en général) Le produit n'est pas commutatif !

*Exemples.*

- Essayer avec les matrices  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

## b) Unité

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

## c) Inverse

$$x \in \mathbb{R}^* \quad xx^{-1} = 1$$

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible  $\exists! A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $AA^{-1} = I_n$  et  $A^{-1}A = I_n$

On peut trouver l'inverse en appliquant la méthode des pivots de Gauss :

$$[A|I_n] \underset{\text{Gauss-Jordan sur } A}{\sim} [I_n|A^{-1}]$$

Quand  $A$  n'est pas inversible, vous ne pourrez pas finir avec  $[I_n|A^{-1}]$ .

Pour les matrices  $2 \times 2$ ,  $A$  est inversible ssi  $\det() = ad - bc \neq 0$  et alors  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

**Pourquoi ça marche ?**

$$AX = I_n \underset{\text{Gauss-Jordan}}{\sim} E_3 E_2 E_1 AX = E_3 E_2 E_1 I_n \Leftrightarrow X = E_3 E_2 E_1 I_n = A^{-1}$$

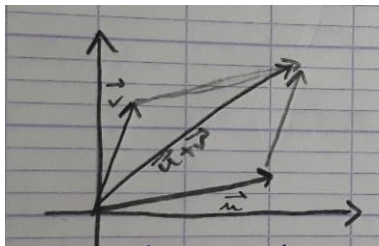
## 3) Espaces vectoriels

Avoir en tête  $\mathbb{R}^n$

Dans  $\mathbb{R}^n$  on peut voir chaque point comme un vecteur. On peut alors faire la somme de 2 vecteurs

[Schéma d'un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ ]

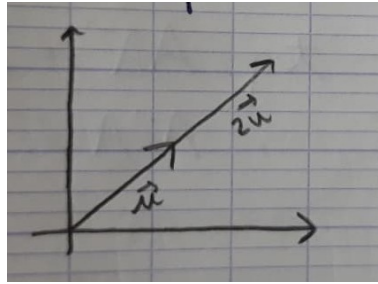
On peut alors faire la somme de deux vecteurs



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ et } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad u + v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$



et multiplier un vecteur par un scalaire



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda u = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

**Règles de calcul. :**

- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $u + v = v + u$
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u = \mu(\lambda u)$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $u + 0 = u$
- $1u = u$
- $u + (-1)u = u - u = 0$

(voir la définition d'un espace vectoriel sur Wikipédia)

Plus généralement, un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel c'est un ensemble.  $E$  dont les éléments sont appelés vecteurs muni d'opérations :

- $+$  :  $E \times E \rightarrow E =$   
 $(u, v) \mapsto u + v =$
- $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times E \rightarrow E =$   
 $(\lambda, v) \mapsto \lambda v =$

qui vérifient les règles de calcul précédentes

*Exemples.*

•

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m,n} &= \mathbb{R}^{m \times n} \\ A + B &= [a_{ij} + b_{ij}] \\ \lambda A &= [\lambda a_{ij}] \end{aligned}$$

- Espaces des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E = \{F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

- Suites réelles :  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}\}$

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$

$$\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$$

#### 4) Sous espaces vectoriels

$E$  est un ev ( $E = \mathbb{R}^n$ ), un sev de  $E$  c'est un sous-ensemble non vide  $F$  de  $E$  stable par combinaison linéaire

$$x, y \in F \Leftrightarrow \lambda x + \mu y \in F \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Remarque : Si  $F$  est un sev,  $O \in F$

*Exemples.*

- Dans  $\mathbb{R}^2$
- $\{0\}$  sev de dim 0
- droite passant par 0. sev de dim 1
- $\mathbb{R}^2$ . sev de dim 2

[Schéma d'un sev dans  $\mathbb{R}^2$ ]

- Dans  $\mathbb{R}^3$
- $\{0\}$  sev de dim 0
- droite passant par 0. sev de dim 1
- plan passant par 0. sev de dim 2
- $\mathbb{R}^3$ . sev de dim 3