Chapitre 3 - Relations binaires

Benjamin WACK (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Lundi 3 Décembre 2018

1) Notion de relation binaire sur un ensemble X

Définition. Une **relation binaire** sur X est un ensemble de couples ordonnés (x, y) où x et $y \in X$. Si R est une relation, on dira : $(x, y) \in R$ ou $x \; R \; y$ ou x est en relation avec y (tous synonymes).

Une **relation binaire** est donc une partie du produit cartésien $X^2 = X \times X$. Si X est fini, $card(X^2) = card(X)^2$. Il y a donc $2^{((card\ X)^2)}$ relations distinctes sur X *(si $card\ X = 3$ on en a 2^9, si $card\ X = 5$ on en a 2^{25}).*

Notation à la UML : $X \; \underline{\ 0..* \quad 0..*\ } \; X$

a) Types de relations particulières

Définitions

- Une relation est **réflexive** si : $\forall x \in X,\ x \; R \; x$
- Une relation est **transitive** si : $\forall x, y, z \in X,\ (x \; R \; y \wedge y \; R \; z) \Rightarrow x \; R \; z$
- Une relation est **antisymétrique** si : $\forall x, y \in X,\ (x \; R \; y \wedge y \; R \; x) \Rightarrow x = y$
- Une relation est **symétrique** si : $\forall x, y \in X,\ (x \; R \; y \Leftrightarrow y \; R \; x)$

Vocabulaire et exemples

- On dit qu'une relation est un **préordre** si elle est à la fois **réflexive et transitive** (RT).

  Exemples.

  - Sur la promo INFO3, "être plus jeune que" à l'année près et au sens large est un préordre
  - Sur $X = \{1, 2, 2', 3\}$ avec $1 \to \{2, 2'\} \to 3$, $1 \to 3$, $2 \leftrightarrow 2'$ et chacun $\to$ avec lui-même, on a un préordre. Graphe des relations

- On dit qu'une relation est un **ordre** si elle est **réflexive, transitive et antisymétrique** (RTA).

  Exemples.

  - La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$
  - Sur A^*, on connaît :
    - l'ordre préfixe $\sqsubseteq$
    - l'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ (de plus, l'ordre lexicographique est **total**)

  Remarque. **Ordre total** = on peut comparer chaque élément avec n'importe quel autre :
  on a toujours $a \geq_{lex} b$ ou $a \leq_{lex} b$ mais on peut avoir $a \not\sqsubseteq_{lex} b$ et $a \not\sqsupseteq_{lex} b$.

  Remarque. Tout ordre est un préordre (par définition).

- On dit qu'une relation est une **équivalence** si elle est **réflexive, transitive et symétrique** (RTS).

  Exemples.

  - Toute relation d'équivalence est un préordre
  - Sur $\mathbb{Z}$ la relation "être congru modulo 5" (avoir le même reste)
  - Sur A^*, "avoir la même longueur"
  - Sur INFO3, "être né la même année"
  - Plus généralement, "avoir le même quelque chose" donne **toujours** une relation d'équivalence

b) Représentation sous forme de graphe

Si X est fini, on peut construire un graphe dont les sommets sont les éléments de X. Pour tout couple (x, y) dans R, on trace un arc de x vers y.

Exemple. $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, c)\}$

- Graphe des relations
- Si R est **réflexive**, on a toutes les boucles $x \to x$ *(en général on ne les dessine pas)*
- Si R est **symétrique**, on a des arcs de la forme $x \leftrightarrow y$ *(en général on les remplace par un seul trait sans flèche)*
- Si R est **antisymétrique**, on n'a jamais d'arc de la forme $x \leftrightarrow y$
- Si R est **transitive**, à chaque fois qu'on a $x \to y \to z$ on a aussi $x \to z$
  - *En général on ne représente* ***que*** *les arcs de la forme prédécesseur → successeur, càd $x \to y$ tel qu'il n'existe aucun z tel que $x \to z \to y$*
  - *Mais par exemple $a \to b \to c \to a$ ne permet pas de supprimer des arcs (cycle)*

  Remarque. Dans une relation d'équivalence, on aura des groupes de sommets tous reliés entre eux (composantes connexes complètes) Graphe d'une équivalence entre 4 éléments

c) Représentation par une matrice

On choisit un ordre sur $X = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On a $M_{i,j} = 1$ ssi $x_i \; R \; xj$

$$\begin{pmatrix} x_1 \; R \; x_1 & \cdots & x_1 \; R \; x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n \; R \; x_1 & \cdots & x_n \; R \; x_n \end{pmatrix}$$

M est une matrice carrée de taille $card \; X$ à coefficients dans $\{0, 1\}$.

- Si R est **réflexive**, sa matrice a une diagonale de 1.
- Si R est **symétrique**, sa matrice est symétrique par rapport à la diagonale (la diagonale a des valeurs quelconques).
- Si R est **antisymétrique**, sa matrice n'a jamais deux 1 symétriques.
- Si R est **transitive**, sa matrice respecte : si $M_{i,j} = 1$ et $M_{j,k} = 1$ alors $M_{i,k} = 1/$
- Une relation d'équivalence, si on choisit le bon ordre sur X alors sa matrice est "diagonale par blocs"

  Exemple.

  – Sur $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit la relation "avoir même parité" en prenant $1 < 2 < 3 < 4 < 5$:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  – Si on prend l'ordre $1 < 3 < 5 < 2 < 4$ la matrice est diagonale par blocs :

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un exemple

$X = 0, 1^*$

Soit une relation L telle que $u \; L \; v$ ssi $lg(u) \leq lg(v)$.

Elle est clairement réflexive, non symétrique, transitive et non antisymétrique.

Elle n'est pas antisymétrique : $0L1$ et $1L0$.

2) Construction des relations de préordre

Principe : partir d'une "petite" relation puis ajouter autant de couples que nécessaire pour en faire un préordre.

Définition. Soit R une relation binaire sur X. On appelle relation de préordre engendré par R la plus petite relation réflexive transitive qui contient R. On la note R^*.

Principe de construction : on définit la **relation itérée k fois de** R notée R^k comme :

$$xR^ky \text{ ssi } \exists x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \text{ tq : } xRx_1 \text{ et } x_1Rx_2 \text{ et } \ldots \text{ et } x_{k-1}Ry$$

(on passe de x à y en k étapes de R)

Par convention $R^1 = R$, $R^0 = I = \{(x,x) \mid x \in X\}$

Propriété. Pour toute relation R :

$$\boxed{R^* = R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k}$$

En pratique il suffit d'un nombre fini d'itérations si X est fini.

Exemples.

- $X = \mathbb{N}$, $xR(x+1) \forall x \in \mathbb{N}$ alors :

  $R^2 = \{(x, x+2) \mid x \in \mathbb{N}\}$

  $R^k = \{(x, x+k) \mid x \in \mathbb{N}\}$

  $R^* = " \leq "$ (xR^*y ssi $x \leq y$)
- $X = \mathbb{R}$, xRy ssi $y - 1 \leq x \leq y + 1$

  xR^ky ssi $y - k \leq x \leq y + k$

  xR^*y pour tous réels x et y

b) Construction de R^k à l'aide de matrices booléenes

Sur les matrices de relations, on définit les opérations suivantes :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Attention. 1 n'a pas d'opposé : on ne peut pas faire de soustraction. Les fègles de calcul sont différentes de celles du code de Hamming

Le calcul matriciel avec ces règles donne :

- $\boxed{M(R \cup R') = M(R) + M(R')}$
- $\boxed{M(R^k) = M(R)^k}$

Remarque. $a_{ij} = 1$ ssi il existe au moins un k tel que $m_{ik} \times m_{kj} = 1 \Leftrightarrow m_{ik} = m_{kj} = 1$

Autrement dit : $x_i R x_k$ et $x_k R x_j \Leftrightarrow \exists$ un chemin de longueur 2 entre x_i et $x_j \Leftrightarrow x_i R^2 x_j$ (même princips pour R^k)

D'où $\boxed{M(R^*) = \sum_{k=0}^{n-1} M(R)^k}$

Dans la pratique on s'arrête dès que $M(R)^k$ ne contient pas de "nouveau" simple.

Exemple. $X = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,d)\}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R^5$$

$$\text{D'où } R^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I + M(R) + M(R)^2 + M(R)^3 + M(R)^4$$

On peut également la calculer d'une autre manière : $R^* = (R + I)^k$

c) Relation d'équivalence engendrée

On peut d'une relation R et on construit la plus petite relation réflexive, transitive, symétrique qui contient R.

Construction : 1. Construire la relations R_s symétrique qui contient R 2. Puis calculer $(R_s)^*$ le préordre engendré par R_s

> **Attention.** Calculer R^* puis la symétriser est en général **faux**.
>
> *Exemple.* Soit R tel que $1R2$ et $1R3$
>
> - $R_s : R \cup 2R1, 3R1$ et $(R_s)^* = R_s \cup 2R3, 3R2, 1R1, 2R2, 3R3.$
> - mais $R^* : R \cup 1R1, 2R2, 3R3$ et $(R^*)_s = R^* \cup 2R1, 3R1$
> - On a bien $1R1, 2R2, 3R3, 1R2, 2R1, 1R3, 3R1{,}2R3, 3R2 \neq 1R1, 2R2, 3R3, 1R2, 2R1, 1R3, 3R1$
>
> *Remarque.* il n'existe en général pas "d'ordre engendré" par une relation R. Car, si R n'est pas antisymétrique, on ne peut pas la rendre antisymétrique en la complétant

3) Transitivité

Pour savoir si une relation R est transitive, il suffit de vérifier si $\boxed{R^2 \subseteq R}$.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } R^2 \subseteq R \quad & \Leftrightarrow \quad \forall (x,z) \in R^2, (x,z) \in R \\ & \Leftrightarrow \quad (\text{ si } xR^2z \text{ alors } xRz) \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x, z, (\exists y \text{ tq } xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz \\ & \Leftrightarrow \quad R \text{ transitive} \end{aligned}$$

Concrètement, on calcule $M(R)^2$ et on vérifie si, à chaque fois qu'il y a un 1 dans cette matrice il y en a un aussi dans celle de R.

Exemple. R n'est pas transitive car il y a des 1 dans $M(R^2)$ qui ne sont pas dans $M(R)$ (l'inverse peut être vrai ou non, peu importe).

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.