Chapitre 3 - Algèbre linéaire

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Mardi 25 Septembre 2018

remi-molinier@univ-grenoble-alpes.fr

A) Rappels

1) Systèmes linéaires

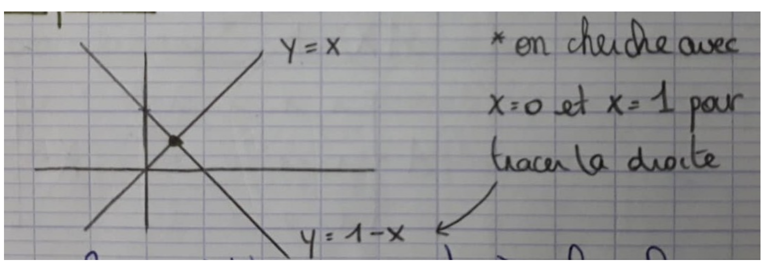
Exemple.

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 = \\ x - y - z = 0 \quad = \end{cases}$$

a) Interprétation géométrique

- Avec 2 variables :

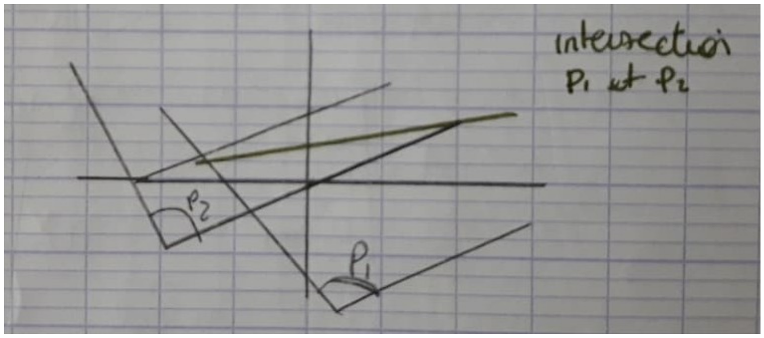
$$\begin{cases} x + y = 1 = \\ x - y = 0 = \end{cases}$$



Résoudre un système avec deux variables revient à chercher l'intersection de droites du plan, donc un ont ou une droite.

- Avec 3 variables :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \ (\mathcal{P}1) = \\ x-y-z=0 \quad = \end{cases}$$



Résoude un système avec trois variables revient à chercher l'intersection de plans de l'espace $\mathbb{R}^3$, donc une droite ou un plan.

b) Différentes façons d'écrire un système

- Avec des équations :

Exemple.

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 = \\ x-y+t=0 \quad = \\ x-z+2t=2 \quad = \end{cases}$$

- Avec la matrice augmentée du système

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Les lignes sont $E1$, $E2$ et $E3$; les colonnes de gauche sont x, y, z et t.

- Forme matricielle

$$AX = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Rappel du produit matriciel

Possible ssi $Nb\ col\ A = Nb\ ligne\ B$

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times l}$$

Exemple.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z+t \\ x-y+t \\ x-z+2t \end{bmatrix}$$

d) Opérations élémentaires

- Permutation
  - Système $Ei \leftrightarrow Ej$ *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y=0= \\ x-y=1= \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1= \\ x+y=0= \end{cases}$$

  - Matrice augmenté $Li \leftrightarrow Lj$ *Exemple.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

  - Forme matricielle : multiplier à gauche par (lignes j et i, colonnes i et j)

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Dilatation
  - Système $Ei \leftarrow \lambda Ei$ *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y=0= \\ x-y=1= \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1\ = \\ 2x-2y=2= \end{cases}$$

- Matrice augmenté $Li \leftarrow \lambda Li$ *Exemple.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

- Forme matricielle **incomplet**
- Combinaison linéaire d'équation
  - Système $Ei \leftarrow Ei + \lambda Ej$ *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y=0= \\ x-y=1= \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0= \\ -2y=0\ = \end{cases}$$

- Matrice augmentée $Li \leftarrow Li + \lambda Lj$ *Exemple.* $(L2 \leftarrow L2 - L1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

- Forme matricielle **incomplet**

e) Algorithme de Gauss

- **Étape 1.** Avec les opérations élémentaires (surtout la 3ième) on met le système sous forme triangulaire en utilisant des **pivots** *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y+z=1 & = \\ -x-y-z-2t=1 & = \\ -x+y+2z+t=1 & = \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L2\leftarrow L2+L1 \\ L3\leftarrow L3-L1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L3\leftrightarrow L2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

(y est "libre")

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 & = \\ z=0 & = \\ -t=2 & = \end{cases}$$

- **Étape 2.** Résoudre le système en remontant *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y+0-2=1 & = \\ z=0 & = \\ t=-2 & = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y & = \\ z=0 & = \\ t=-2 & = \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-y \\ y \\ 0 \\ -z \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} = \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} = \right\}$$

C'est la droite passant par $(3,0,0,-2)$ et de vecteur directeur $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

f) Ensemble des solutions d'un système

- $S = 0$ *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y=0= \\ x+y=1= \end{cases}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{L2\to L2-L1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} 0 = 1 \textit{ impossible}$$

- Il y a une unique solution *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y=0= \\ x-y=1= \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{L2-L1\to L2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0= \\ -2y=1= \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y=1/2= \\ y=-1/2 \quad = \end{cases}$$

$$S = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & | & 1 \end{Bmatrix}$$

- Il y a une infinité de solutions *Exemple.*

$$\begin{cases} x+y=1 \ = \\ 2x+2y=2= \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \underset{L2\leftarrow L2-2L1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0= \\ 0=0 \quad = \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Droite passant par (1, 0) et de vecteur directeur $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

g) Une variante : Gauss Jordan

- **Étape 1** : Pareil que pour Gauss
- **Étape 2** “annuler les entrée au dessus du pivot en commençant par la fin”

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow L2-L3 \\ L1 \leftarrow L1-L3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0| & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1| & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L1 \leftarrow L1-L2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 & = \\ y + z = 0 = \\ t = 1 & = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = \\ y = -z = \\ t = 0 = \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [aij]$$

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \text{ensemble des matrices } m \times n$$

a) Opérations

$A, \ B \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
- $\lambda 1 = [\lambda a_{ij}$

Muni de ces opérations, $\mathcal{M}_{m,n}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (les règles de calcul avec les vecteurs du $\mathbb{R}^n$ fonctionnent pareil ici).

Exemples. Soient A B deux matrices, $A + B$ et $3A$.

Si $m = n$ on parle de matrice carrée et on note $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a maintenant un produit en plus.

Attention $AB \neq BA$ (en général) Le produit n’est pas commutatif !

Exemples.

- Essayer avec les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

b) Unité

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

c) Inverse

$$x \in \mathbb{R}^* x x^{-1} = 1$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible $\exists ! A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$

On peut trouver l'inverse en appliquant la méthode des pivots de Gauss :

$$[A|I_n] \underset{\text{Gauss Jordan sur A}}{\sim} [I_n|A^{-1}]$$

Quand A n'est pas inversible, vous ne pourrez pas finir avec $[I_n|A^{-1}]$.

Pour les matrices 2×2, A est inversible ssi $det() = ad - bc \neq 0$ et alors $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Pourquoi ça marche ?

$$AX = I_n \underset{Gauss-Jordan}{\sim} E_3E_2E_1AX = E_3E_2E_2I_n \Leftrightarrow X = E_3E_2E_1I_n = A^{-1}$$

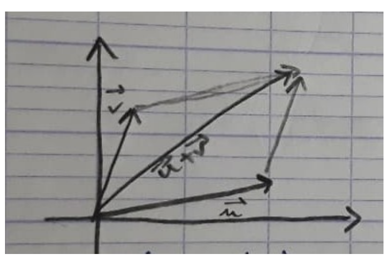
3) Espaces vectoriels

Avoir en tête $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$ on peut voir chaque point comme un vecteur. On peut alors faire la somme de 2 vecteurs

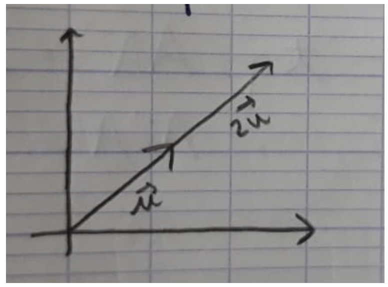
[Schéma d'un vecteur dans Rˆ3]

On peut alors faire la somme de deux vecteurs



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \; et \; v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \; u + v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

et multiplier un vecteur par un scalaire



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \ , \ \lambda u = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

Règles de calcul. :

- $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
- $u+v = v+u$
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u = \mu(\lambda u)$
- $(u+v)+w = u+(v+w)$
- $u+0 = u$
- $1u = u$
- $u + (-1)u = u - u = 0$

(voir la définition d'un espace vectoriel sur Wikipédia)

Plus généralement, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel c'est un ensemble. E dont les éléments sont appelés vecteurs muni d'opérations :

- $+ : \begin{matrix} E \times E \to E & = \\ (u,v) \mapsto u+v = \end{matrix}$
- $\cdot : \begin{matrix} \mathbb{R} \times E \to E = \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda u = \end{matrix}$

qui vérifient les règles de calcul précédentes

Exemples.

- $$\mathcal{M}_{m,n} = \mathbb{R}^{m \times n}$$
  $$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$
  $$\lambda A = [\lambda a_{ij}]$$
- Espaces des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $$E = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
- Suites réelles : $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{R}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}\}$
  $$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$
  $$\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$$

4) Sous espaces vectoriels

E est un ev ($E = \mathbb{R}^n$), un sev de E c'est un sous-ensemble non vide F de E stable par combinaison linéaire

$$x, y \in F \Leftrightarrow \lambda x + \mu y \in F \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Remarque : Si F est un sev, $O \in F$

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}^2$
- $\{0\}$ sev de dim 0
- droite passant par 0. sev de dim 1
- $\mathbb{R}^2$. sev de dim 2

[Schéma d'un sev dans R2]

- Dans $\mathbb{R}^3$
- $\{0\}$ sev de dim 0
- droite passant par 0. sev de dim 1
- plan passant par 0. sev de dim 2
- $\mathbb{R}^3$. sev de dim 3