Chapitre 1 - Analyse de Fourier

Rémi MOLINIER (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 30 Novembre 2018

Transformée de Fourier

1. Definition

Définition. Soit f intégrable on définit alors la Tf de f par

$$\forall \xi,\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}dt$$

Attention. Il existe plusieurs conventions :

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi ty}$$

Remarque. $\hat{f}(\xi)$ est bien définie $\forall\ \xi \in \mathbb{R}$ car $|f(t)e^{-it\xi}| = |f(t)|$ et f intégrable. On a même $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-it\xi}|dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$

Exemple. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} \\ & = & \frac{2}{\xi}\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i} \\ & = & \frac{2sin(\xi)}{\xi} \\ & = & 2sinc(\xi) \end{array}$$

où $\underset{\text{cardinal}}{sinc}(x) = \frac{sin(x)}{x}$

$$|f(t)e^{-it\xi}| = |f(t)||\underset{=1}{e^{-i\overset{\in\mathbb{R}}{t\xi}}}| = |f(t)|$$

2. Propriétés

- **Linéarité.** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\$$ et f, g intégrable $\alpha f \overset{\wedge}{+} \beta g = \alpha\ \hat{f} + \beta\ \hat{g}$
- **Retard temportel.** Soit $\tau \in \mathbb{R}$, si $g(t) = f(t-\tau) \forall t \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i\tau\xi}\,\hat{f}(\xi)$$

IMPORTANT : Preuve.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\underbrace{t-\tau}_{u})e^{-it\xi}dt, \text{ donc } t = u+\tau \text{ et } du = dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i(u+\tau)\xi}du \\
&= e^{-i\tau\xi}\,\hat{f}(\xi) \blacksquare
\end{aligned}$$

Application. $g(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \in [2,4] \\ 0 \; sinon \end{cases}$

Ici $g(t) = f(t-3)$ où $f(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \in [-1,1] \\ 0 \; sinon \end{cases}$

$f(t-3) = 0 \Leftrightarrow -1 \leq t-3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 4$

Donc

$$\hat{g} = e^{-3i\xi}\,\hat{f}(\xi) = 2e^{-3i\xi}sinc(\xi)$$

Exemple. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} t+1 & \text{si} & t \in [-1,0] \\ 1-t & \text{si} & t \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right. \end{array} \right.$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{it\xi} \\
&= \int_{-1}^{0}(t+1)e^{it\xi}dt + \int_0^1(1-t)e^{-it\xi}dt \\
&= [(t+1)\tfrac{e^{it\xi}}{-i\xi}]_{-1}^{0} + \tfrac{1}{i\xi}\int_{-1}^{0} e^{-it\xi}dt + [(1-t)\tfrac{e^{-it\xi}}{-i\xi}]_0^1 - \int_0^1 \tfrac{e^{it\xi}}{i\xi}dt \\
&= -\tfrac{1}{i\xi} + \tfrac{1}{i\xi}\left[\tfrac{e^{-it\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^{0} + \tfrac{1}{i\xi} - \left[\tfrac{e^{-it\xi}}{-i\xi}\right]_0^{-1} \\
&= \tfrac{1}{(i\xi)^2}\left(e^{i\xi} - 1 + e^{-i\xi} - 1\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{(i\xi)^2}\left(e^{i\xi} + e^{-i\xi} - 2\right)}
\end{aligned}$$

- **Dilatation.** Soit $b > 0$. Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(bt)$:

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{b}\,\hat{f}\left(\frac{\xi}{b}\right)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-it\xi}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(bt)e^{-it\xi}dt
\end{aligned}$$

Prenons $u = bt \Leftrightarrow t = \frac{u}{b}$ et $du = bdt \Leftrightarrow dt = \frac{du}{b}$.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-i(\frac{u}{b})\xi}\tfrac{du}{b} \\
&= \tfrac{1}{b}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-iu(\frac{\xi}{b})}du \\
&= \tfrac{1}{b}\,\hat{f}\left(\tfrac{\xi}{b}\right)
\end{aligned}$$

Application.

Calculer la TF de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-2,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Rappel. Pour $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t > & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} & t \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ on a :

$$\hat{g}(\xi) = 2sinc(\xi)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = g\Big(\frac{t}{2}\Big)$$

(car $-2 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{t}{2} \leq 1$*)*

$$\text{Donc } \hat{f}(\xi) = 2\hat{g}(2\xi) = 4sinc(2\xi)$$

Exemple.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [5,6] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } [-1,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = g(2t - 11)$$

(car $5 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{t-11}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 2t - 11 \leq 1$*)*

$$\text{Donc } \boxed{\hat{f}(t) = \frac{e^{-11i\frac{\xi}{2}}}{2}\hat{g}\Big(\frac{\xi}{2}\Big)}$$

En effet, $f(t) = h(t - \frac{11}{2})$

où $h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-1,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$h(t) = g(2t)$

Donc

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i\frac{11}{2}\xi}\hat{h}(\xi)$$

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{2}\hat{g}(\frac{\xi}{2})$$

$$\text{Donc } \boxed{\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{11}{2}i\xi}sinc(\xi/2)}$$

- **Formules de dérivation.**

1. f intégrable et $\mathcal{C}^1$ telle que f' intégrable :

$$\hat{f}(\xi) = (i\xi)\hat{f}(\xi)$$

Rappel. $\frac{1}{t^\alpha}$ intégrable en 0 $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \overset{\wedge}{f'}(\xi) & = & \int f'(t)e^{-it\xi}dt \\ & = & [f(t)e^{-it\xi}] - \int_{\mathbb{R}} f(t)(-i\xi)e^{it\xi}dt \\ & = & (i\xi)\int f(t)e^{it\xi}dt \\ & = & (i\xi)\hat{f}(\xi) \blacksquare \end{array}$$

2. f intégrable telle que $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^1$:

$$\boxed{\hat{f}{}'(\xi) = (-\overset{\wedge}{itf})(\xi)}$$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \overset{\wedge}{f'}(\xi) & = & \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} \\ & = & \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}(f(t)e^{-it\xi})dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}}(-it)f(t)e^{-it\xi}dt \\ & = & (-it\hat{f}(t))(\xi) \end{array}$$

Applications.

1. Application en équations différentielles
2. Calcul de la TF (transformée de Fourier)

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t^2} \end{array} \right.$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-it\xi} dt$$

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}'(\xi) & = & (\widehat{-itf})(\xi) \\ & = & \int -ite^{-t^2} e^{-it\xi} dt \\ & = & \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} 2te^{-t^2} e^{-it\xi} dt \\ & \underset{\text{IPP}}{=} & \frac{i}{2}(\overset{0}{[\nearrow]} + \int e^{-t^2} - i\xi e^{-it\xi}) dt \\ & = & \frac{i^2}{2} \xi \hat{f}(\xi) \end{array}$$

Donc $\hat{f}$ est solution de $y' + \frac{\xi}{2} y = 0 (E)$

Les solutions de (E)sont $t \mapsto Ce^{\frac{-\xi^2}{4}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Cherchons C dans notre cadre

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}(0) & = & \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \\ & = & \sqrt{\pi} \text{ (intégrale de Gauss)} \end{array}$$

$$\text{Donc } \boxed{\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}}$$

Application. Soit f intégrable et $\mathcal{C}^1$ telle que f' intégrable,

$$\text{Donc } \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(i\xi)} \hat{f'}(\xi)$$

$$\begin{array}{rcl} \text{De plus, } |\hat{f'}(\xi)| & \leq & \int_{\mathbb{R}} |f'(t) e^{-it\xi}| dt \\ & = & \int_{\mathbb{R}} |f'(t)| dt \end{array}$$

Ainsi, f est bornée.

$$\text{Ainsi } |\hat{f}(\xi)| = \frac{1}{\xi} \underbrace{|\hat{f'}(\xi)|}_{\text{(bornée)}} \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{} 0}$$

- **Théorème de Borel Lebesgues.** f intégrable alors $\boxed{\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to +\infty \text{ ou } -\infty]{} 0}$
- **Théorème de Parseval** *(voir exo 5 du TD pour une application)*

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)|^2 d\xi}$$

3. Théorème d'inversion

Théorème. si f est intégrable et $\hat{f}$ intégrable.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\,(\xi)e^{it\xi}d\xi}$$

Remarque. Soif f intégrable. Si on note

$$\check{f}\,(t) = f(-t) \text{ (} \vee \text{ prononcé "tchetch")}$$

Alors la formule d'inverion peut s'écrire

$$\hat{\hat{f}} = 2\pi\,\check{f}$$

Application. Si f et g sont intégrable tq $\hat{f} = \hat{g}$ (et est intégrable)

Preuve.

$$f = \check{\check{f}} = \frac{1}{2\pi}\,\check{\hat{\hat{f}}} = \frac{1}{2\pi}\,\check{\hat{\hat{g}}} = \check{\check{g}} = g$$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\,(t)e^{it\xi}dt \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}\,(t)e^{it\xi}dt \text{ (car } \hat{f} = \hat{g}\text{)} \\ & = & g(t) \end{array}$$

Exemple. Simplifier $\check{\hat{\hat{\check{\hat{f}}}}} = 2\pi\,\check{\check{\check{\hat{f}}}} = 2\pi\,\check{\hat{f}} = 2\pi\,\hat{\hat{\hat{f}}} = 2\pi\,\hat{\check{f}}$

Proposition.

- $\check{f} = f \Leftrightarrow f$ paire
- $\check{f} = -f \Leftrightarrow f$ impaire

Question. Si f paire, que dire de $\hat{f}$? Idem pour f impaire.

Application calcul de TF : questions. Soit $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, soit $\varphi_\alpha(t) = e^{-\alpha(t)}$

1. Calculer la TF de φ_α
2. En déduire celle de f

Application calcul de TF : réponses.

1.

$$\begin{array}{rcl} \hat{\varphi}_\alpha\,(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}} \varphi_\alpha(t)e^{-it\xi}dt \\ & = & \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-it\xi}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-it\xi}dt \\ & = & \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\xi)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\xi)t}dt \\ & = & [\frac{e^{(\alpha-i\xi)t}}{\alpha-i\xi}]_{-\infty}^{0} + [\frac{e^{-(\alpha+i\xi)t}}{-(\alpha+i\xi)}]_{0}^{+\infty} \\ & = & \frac{1}{\alpha-i\xi} + \frac{1}{\alpha+i\xi} \\ & = & \frac{2\alpha}{(\alpha-i\xi)(\alpha+i\xi)} \\ & = & \boxed{\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}} \end{array}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\hat{\varphi}_1 = 2f}$$

1. Donc $\hat{f} = \frac{1}{2}\,\hat{\hat{\varphi}}_1 = \pi\,\check{\varphi}_1 = \pi\varphi_1$ car φ_1 paire.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\hat{f}\,(\xi) = \pi e^{-|\xi|}}$$

4. Application au calcul d'EDL

Exemple. $y'' + ay' + b = f$ en appliquant la TF, on obtient

$$\widehat{(y'' + ay' + b)} = \hat{f}$$

$$\begin{aligned} \widehat{y''} + a\,\widehat{y'} + b\,\hat{y} = \hat{f} \quad &\Leftrightarrow \quad (i\xi)^2\,\hat{y} + a(i\xi)\,\hat{y} + b\,\hat{y} = \hat{f} \\ &\Leftrightarrow \quad ()(i\xi)^2 + a(i\xi) + b)\,\hat{y} = \hat{f} \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{y} = \underbrace{\frac{1}{(i\xi)^2 + a(i\xi) + b}}_{\text{fonction de transfert}}\,\hat{f}$$

Après, on calcule $\hat{f}$ puis on simplifie $\hat{y}$ pour l'écrire out une forme de TF de fonctions classiques. .