

Chapitre 5 - Primitives et intégrales

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 12 Octobre 2018

A) Primitives

Définition. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (continue). Une **primitive** de g est une fonction $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable tq $G' = g$

Exemple. Soit $g(x) = x^2$, les fonctions $G_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $G_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x^3}{3} + 12$ sont des primitives de g .

Il n'y a pas unicité de la primitive

Proposition. Si G_1 et G_2 sont deux primitive de g , alors $G_1 - G_2 = \text{cste}$. De plus, toute les primitives de g sont de la forme $G_1 + c$ où c est une constante

Notation. On note $\int_b^a g(x) dx$ l'ensemble des primitives de g .

Exemple.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + Cste (= \{x \mapsto \frac{x^3}{3} + C | C \in \mathbb{R}\})$$

Primitives usuelles

Soit $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
b	$bx + Cste$
ax	$a\frac{x^2}{2} + Cste$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + Cste$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + Cste$
$\cos(x)$	$\sin(x) + Cste$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + Cste$
e^x	$e^x + Cste$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + Cste$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + Cste$

B) Intégrales

1) Formule de somme

- $\int (g_1(x) + g_2(x)) dx = \int g_1(x) dx + \int g_2(x) dx$

Exemple. $\int (2x^2 + 1) dx = \frac{2x^3}{3} + x + Cste$

- $\int \lambda g(x) dx = \lambda \int g(x) dx$

Remarque. On a pas de formule pour le produit (*IPP*) ni pour le quotient... On a pas on plus de formule pour la composée (*changement de variable*)

2) Calcul intégral

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (continue) $\int_a^b g(t) dt$ = aire algébrique (avec signe) entre le graphe de g et l'axe des abscisses entre a et b

Schéma de la correspondance entre intégrale et aire algébrique $\int_a^b g(t) dt = A_1 - A_2 + A_3$

Remarque. Lorsqu'il y a des bornes, $\int_a^b g(t) dt \in \mathbb{R}$

Exemple. $\int_0^1 x dx$ Schéma de int^1_0 x dx

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Schéma de int^1_{-1} x dx $\int_{-1}^1 x dx = A_2 - A_1$

C) Lien primitives et intégrales

Théorème. (Théorème fondamental de l'analyse) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et soit G une primitive de g . Alors $\int_a^b g(t) dt = [G(t)]_{t=a}^{t=b} = G(b) - G(a)$ ■

Exemple. $\int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$ Schéma correspondant

$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} = \sin(\pi/2) = 1$ Schéma correspondant

Corollaire Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $\forall c \in [a, b]$,

$$G_c : \begin{array}{l} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_c^x g(t) dt \end{array}$$

est une primitive de g .

D) Méthodes de calcul d'une intégrale

1) Chasles

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt$$

2) Utiliser les symétries

- Si f pair $\forall a > 0$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx$$

Schéma d'une fonction paire

Donc

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Si f impaire, $\forall a > 0$

$$\int_0^a f(x) dx = - \int_{-a}^0 f(x) dx$$

Schéma d'une fonction impaire

Donc $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Exemple $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) dx = 0$

- On peut utiliser d'autres "symétries" comme la périodicité (exemple avec cos et sin)

3) Changement de variable

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Rappel des fonctions bijectives. $f : x \rightarrow y$ bijective si $\forall y \in Y, \exists ! x \in X$ tq $f(x) = y$
 $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ dérivable et bijective (En pratique on vérifie que $u([c, d]) = [a, b]$ et que u est strictement monotone)

$$\boxed{\int_c^d f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(c)}^{u(d)} f(x) dx}$$

$$u' = \frac{du}{dt} \Rightarrow u' dt = du$$

Exemple. $\int_0^{\frac{1}{4}} x e^{x^2} dx$

$$u : \begin{matrix} [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, \frac{1}{4}] \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$$

bijectif et C^1

$u'(x) = 2x$ " $du = 2x dx$ " Donc

$$I + \frac{1}{to} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\frac{1}{2})} e^u du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{1}{4}} - 1)$$

Exemple. Soit $\int_0^{1/4} \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$, choisissons $u : \begin{matrix} [0, \frac{1}{4}] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1] \\ x \mapsto 1 - \sqrt{x} \end{matrix}$

Schéma de u

u est strictement décroissante, $u([0, \frac{1}{4}]) = [\frac{1}{2}, 1]$ et $u'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

Donc

$$\begin{aligned} J &= -2 \int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) \left(\frac{-dx}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= -2 \int_{u(0)}^{u(1/4)} \ln(u) du = -2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \ln(u) du = 2 \int_{1/2}^1 \ln u du \\ &= 2[u \ln(u) - u]_{1/2}^1 = 2 \left(-1 - \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) \right) = \boxed{\ln(2) - 1} \end{aligned}$$

4) Intégration par parties (IPP)

Rappel.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \int (uv)' = \int u'v + \int uv'$$

Donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

Donc
$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

Exemple.

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx$$

Prenons $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

Donc $I = e - \int_0^1 e^x \, dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = \boxed{1}$

Exemple.

$$J = \int_0^{\pi/2} (x^2 + 1) \cos(x) \, dx$$

Prenons $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = x^2 + 1$ et $v'(x) = 2x$

Donc $J = \left[(x^2 + 1) \sin(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x \sin(x) \, dx = \frac{\pi^2}{1} + 1 - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin(x) \, dx = \boxed{1}$

Prenons $u(x) = -\cos(x)$, $u'(x) = \sin(x)$, $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \, dx = \left[-x \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = \left[\sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Donc
$$J = \frac{\pi^2}{4} - 1$$

5) Décomposition en éléments simples

- **But.** intégrer des fonctions de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes (on appelle ça des fonctions rationnelles en x)

- **Étape 1.**

- si le degré $P <$ le degré de Q , alors on ne fait rien

- si le degré $P \geq$ le degré de Q , on va se ramener à une fraction rationnelle $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ avec la décomposition $P <$ le degré de Q . Pour cela, on fait la division euclidienne de P par Q . C'est-à-dire $P = LQ + R$ avec L et R deux polynômes tq degré $R <$ degré Q . Ainsi $\frac{P}{Q} = L + \frac{R}{Q}$ ($L(X)$ est facile à intégrer et $d\tilde{R} < d\tilde{Q}$)

En pratique, comment trouve-t-on L et R ?

Exemple. $P = X^5 + X^4 - X^2 + 1$
 $Q = X^2 - 1$

Division euclidienne de P par Q

$$\text{Donc } P(x) = \underbrace{(X^3 + X^2 + X)}_{L(X)} \underbrace{(X^2 - 1)}_{Q(X)} + \underbrace{X + 1}_{R(X)}$$

$$\text{Donc } P(x) = \underbrace{(X^3 - 1)}_{Q(X)} \underbrace{(X^2 - 2X + 1)}_{L(X)} + \underbrace{X^2 + 2X + 1}_{R(X)}$$

- **Étape 2.** Développer $\frac{P}{Q}$ en élément simple

– Factoriser Q (avec α_i racines de Q dans \mathbb{R})

$$Q(x) = a(X - \alpha_1)^{\text{multiplicité de } \alpha_1} \dots (X - \alpha_r)^{n_r} (X^2 + a_1X + b_1)^{n_1} \dots (X^2 + a_lX + b_l)^{n_l}$$

Exemple.

$$\begin{aligned} Q(x) &= X^3 - X \\ &= X(X^2 - 1) \\ &= X(X - 1)(X + 1) \\ &\quad \text{toutes de multiplicité 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2X^5 - 2X^2 \\ &= 2(X^5 - X^2) \\ &= 2X^2(X - 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

– Décomposer $\frac{P}{Q}$ Chaque $(X - \alpha_i)^{n_i}$ va donner m_i éléments simples de 1^{ère} espèce :

$$\frac{\lambda_1}{(X - \alpha_i)} + \frac{\lambda_2}{(X - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n_i}}{(X - \alpha_i)^{n_i}}$$

et chaque $(X^2 - aX + b)^n$ fait apparaître n éléments simples de 2^{de} espèce

$$\frac{u_1X + v_1}{(X^2 + aX + b)} + \frac{u_2X + v_2}{(X^2 + aX + b)^2} + \dots + \frac{u_nX + v_n}{(X^2 + aX + b)^n}$$

Exemple.

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^3 - X = X(X - 1)(X + 1) \\ \frac{X^2 + 2X - 1}{X^3 - X} &= \frac{X^2 + 2X - 1}{X(X - 1)(X + 1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X - 1} + \frac{\lambda_3}{X + 1} \end{aligned}$$

Exemple.

$$\frac{X^3 + 1}{2X^2(X - 1)(X^2 + X + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{\lambda_3}{X - 1} + \frac{aX + b}{X^2 + X + 1} \right)$$

Comment trouver tous les coefficients (λ_i , $aX + b$, etc.) ?

Il existe plusieurs méthodes :

* factoriser et identifier :

Exemple.

$$\begin{aligned} \frac{X^2 + 2X - 1}{X(X - 1)(X + 1)} &= \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X - 1} + \frac{\lambda_3}{X + 1} \\ &= \frac{\lambda_1(X - 1)(X + 1) + \lambda_2X(X + 1) + \lambda_3X(X - 1)}{X(X - 1)(X + 1)} \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)X - \lambda_1}{X(X - 1)(X + 1)} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

et

$$\frac{X^2 + 2X - 1}{X(X+1)(X-1)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}$$

* multiplier et évaluer :

Exemple.

$$\frac{X^2+2X-1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1}$$

· **Pour** λ_1 : On multiplie par X

$$\frac{X^2 + 2X - 1}{(X-1)(X+1)} = \lambda_1 + X\left(\frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1}\right)$$

Puis on évalue en 0 :

$$\frac{-1}{(-1)(1)} = \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$$

· **Pour** λ_2 : On multiplie par $X-1$

$$\frac{X^2 + 2X - 1}{X(X+1)} = \lambda_2 + (X-1)(\dots)$$

Puis on évalue en 1 :

$$\frac{2}{2} = \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 1}$$

· **Pour** λ_3 : On multiplie par $X+1$

$$\frac{X^2 + 2X - 1}{X(X-1)} = \lambda_3 + (X-1)(\dots)$$

Puis on évalue en -1 :

$$\frac{-1}{(-1)(1)} = \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -1}$$

q & q &

$$\frac{X^2 + X + 1}{X^2(X^2+1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{aX+b}{X^2+1}$$

· **On commence par** λ_2 en multipliant par X^2

$$\frac{X^2 + X + 1}{(X^2+1)} = \lambda_2 + X^2\left(\frac{\lambda_1}{X} + \frac{aX+b}{X^2+1}\right)$$

Et en 0 : $\boxed{1 = \lambda_2}$

· **Pour trouver le** λ_1 , **on passe le** $\frac{\lambda_2}{X^2}$ **de l'autre côté :**

$$\begin{aligned} \frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)} - \frac{1}{X^2} &= \frac{\lambda_1}{X} + \frac{aX+b}{X^2+1} \\ &= \frac{X}{X^2(X^2+1)} \\ &= \frac{1}{X(X^2+1)} \end{aligned}$$

Donc on a $\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{aX+b}{X^2+1}$ et $\boxed{\lambda_1 = 1}$

· **Pour** a **et** b on multiplie par X^2+1 :

$$\frac{1}{X} = aX + b + \frac{X^2+1}{X}$$

i est une racine de $X^2 + 1$, on évalue donc en i

$$\frac{1}{i} = ai + b \Rightarrow -i = ai + b \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} - \frac{X}{X^2+1}$

Remarque. Pour trouver les coefficients dans la décomposition en éléments simples, tous les coups sont permis !

- Il ne reste donc plus qu'à intégrer les éléments simples :

$$\int \frac{dx}{X - \alpha_i} = \ln|X - \alpha_i| + Cte \quad \int \frac{dx}{X - \alpha^n} = \ln|X - \alpha_i| + Cte$$

Pour les éléments de seconde espèce, on a besoin de l'arctan :

- fonction réciproque de tan
- fonction impaire
- $\tan(\arctan(x)) = x$
- $\arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Si on a un élément de seconde espèce :

$$\frac{\alpha X + \beta}{X^2 + aX + b} = \frac{\alpha X + \beta}{\left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}} = \frac{\alpha X + \beta}{A\left(\left(\frac{x+a/2}{\sqrt{A}}\right)\right)^2 + 1}$$

Changement de variable : $y = \frac{x+a/2}{\sqrt{A}}$

Exemple.

$$\begin{aligned} \frac{X+1}{X^2+2X+5} &= \frac{X+1}{(X+1)^2-1+5} \\ &= \frac{X+1}{(X+1)^2+4} \\ &= \frac{1}{4} \frac{X+1}{\left(\frac{X+1}{2}\right)^2+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{X+1}{X^2+2X+5} dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{X+1}{\left(\frac{X+1}{2}\right)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{y(0)}^{y(1)} \frac{2y}{y^2+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{2y}{(y^2+1)} dy \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln|y^2+1| \right]_{1/2}^{3/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(13/4) - \ln(5/4) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(13)) - \ln(2) + 2\ln(2) - \ln(5) \\ &= \boxed{\ln(2) - \ln(5) + \ln\left(\frac{13}{2}\right)} \end{aligned}$$

En général

$$\begin{aligned} \int \frac{ay+b}{y^2+1} dy &= \frac{a}{2} \int \frac{2y}{y^2+1} dy + b \int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \frac{a}{2} \ln|y^2+1| + b \arctan(y) + Cte \end{aligned}$$

Remarque : $\int \frac{dx}{X^2 + a} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{X}{a}\right) + Cte$, ($a > 0$)

Exemple. $\int_0^{1/2} \frac{2X^5+X+1}{X^3-1} dx$

1. Division euclidienne : $\frac{(X^3-1)(2X^2)}{Q(X)L(X)} + \frac{(2X^2+X+1)}{R(X)} = 2X^5 + \frac{X+1}{P(X)}$

Donc $f(x) = 2X^2 + \frac{2X^2+X+1}{X^3-1} = 2X^2 + \tilde{f}(X)$

2. $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$

Donc $\tilde{f}(X) = \frac{\lambda_1}{(X-1)} + \frac{aX+b}{X^2+X+1}$ Et $\boxed{\frac{2X^2+X+1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{aX+b}{X^2+X+1}} (\star)$

– **Pour λ_1 :**

On multiplie par $X - 1$ l'égalité (\star) : $\frac{2X^2+X+1}{X^2+X+1} = \lambda_1 + (X-1)(\dots)$

En évaluant en 1 : $\boxed{\frac{a}{3} = \lambda_1}$

– **Pour a et b :**

En évaluant en $X = 0$: $\frac{1}{(-1)(1)} = -\lambda_1 + \frac{b}{1} \Rightarrow -1 + \lambda_1 = b \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$

– On multiplie par X et on fait l'équivalent en $+\infty$:

$$\frac{2X^3 + X^2 + X}{X^3 - 1} = \frac{\lambda_1 X}{X - 1} + \frac{aX^2 + b}{X^2 + X + 1}$$

En $+\infty$ on a : $2 = \lambda_1 + a \Rightarrow a = 2 - \lambda_1 = \frac{2}{3}$ et $\boxed{a = \frac{2}{3}}$

Donc $f(X) = 2X^2 + \frac{4}{3} \frac{1}{X-1} + \frac{1}{3} \frac{2X+1}{X^2+X+1}$

Et

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} 2X^2 dx &= \left[\frac{2X^3}{3} \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{12} \\ \int_0^{1/2} \frac{4}{3} \frac{dx}{X-1} &= \frac{4}{3} \left[\ln|X-1| \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{4}{3} \ln(1-1/2) \\ &= -\frac{4}{3} \ln(2) \\ \int_0^{1/2} \frac{(2X+1)dx}{X^2+X+1} &= \int_0^{1/2} \frac{(2X+1)dx}{(X+1/2)^2+3/4} \\ &= \int_{y(0)}^{y(1/2)} \frac{2y dy}{y^2+3/4} \\ &= \int_{1/2}^1 \frac{2y dy}{y^2+3/4} \\ &= \left[\ln(y^2+3/4) \right]_{1/2}^1 \end{aligned}$$

(Avec $x = y - 1/2 \Rightarrow y = x + 1/2$ et $dy = dx$)

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} f(x)dx &= \frac{1}{12} - \frac{4}{3} \ln(2) + \frac{1}{3} (\ln(7) - 2\ln(2)) \\ &= \boxed{\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \ln(7) - 2\ln(2)} \end{aligned}$$

6) Integrales generalisées

Définition $f : \{ [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continue (par morceaux) où } b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \}$ On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si $\int_a^x f(t)dt$ converge quand $x \rightarrow b^-$. On a la même des à gauche pour $F :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Exemple. Soit $f : \begin{cases} [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto 1/X^2 \end{cases}$, est-ce que $\int_1^{+\infty} \frac{dX}{X^2}$ converge ?

Soit $X > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{dt}{t^2} &= \left[-\frac{1}{t} \right]_1^X \\ &= -\frac{1}{X} + 1 \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dX}{X^2}$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{dX}{X^2} = 1$

Exemple. $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t}$ converge ?

Soit $X > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{dt}{t} &= [\ln(t)]_1^X \\ &= \ln(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

Donc $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t}$ ne converge pas.

Exemple. $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ cv ? Soit $x \in]0, 1[$

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} =$$

Exemple. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ cv ? Soit $x \in]0, 1[$

Exemple. Est ce que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt$ cv ? Soit $\epsilon \in]0, 1[$,

$$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{1}{2} (\ln(t))^2 \right]_\epsilon^1 = -\frac{1}{2} \ln(\epsilon)^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\infty$$

Donc $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge.

Soit $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-\lambda t} dt &= \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^A \\ &= -\frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt}$

Définition. $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue (par morceaux) avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\exists c \in]a, b[$ tq $\int_a^c f(t)dt$ CV et $\int_c^b f(t)dt$ CV.

Exemple.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

Problème en 0 et $+\infty$!

Est ce que $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ CV ? Soit $x \in]0, 1[$,

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t} \right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ DV et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ DV.

Exemple.

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$$

Soit $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A \cos(t) dt &= \left[\sin(t) \right]_0^A \\ &= \sin(A) \end{aligned}$$

or $A \mapsto \sin(A)$ n'a pas de limite quand $A \rightarrow +\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$ ne CV pas.

Attention. Ne pas converger ne veut pas dire $\rightarrow +\infty$ ou $-\infty$!

Remarque. Par contre si $f \geq 0$, $\int_a^b f(t) dt$ CV ou est $+\infty$

Schéma de l'aire sous une courbe entre 1 et A

Définition. $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue (par morceaux). On dit que f est **intégrable** (sur $]a, b[$) si $\int_a^b |f(t)| dt$ CV.

Proposition Si f est intégrable sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt$ CV et $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Attention. Si $\int_a^b f(t) dt$ CV, on n'a pas forcément f intégrable !

intégrable \Rightarrow CV mais CV \nRightarrow intégrable

Exemple. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable mais $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ CV.

En général, pour montrer qu'une intégrale CV, on essaie de montrer que la fonction est intégrable en utilisant par exemple le résultat de comparaison suivant :

Théorème. (comparaison) Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont à valeurs positive et que $\forall x \in]a, b[, f(x) \leq g(x)$:

- Si $\int_a^b g(t) dt$ CV, alors $\int_a^b f(t) dt$ CV et $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$
- Si $\int_a^b f(t) dt$ DV, alors $\int_a^b g(t) dt$ DV.

Schéma des courbes des fonctions f et g

Exemple. Soit $f(t) = \frac{1+\cos(t)^2+\sin(t)}{t^2}$, est-ce que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ CV ?

Essayons de voir si f est intégrable :

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \frac{|1+\cos^2(t)+\sin(t)|}{t^2} \\ &\leq \frac{|1|+|\cos^2(t)|+|\sin(t)|}{t^2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{t^2} \end{aligned}$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{3dt}{t^2}$ CV Donc f est intégrable et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ CV

Propriété. Intégrales de Riemann.

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha < 1$

Exemple important. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ CV ssi $\lambda > 0$