Chapitre 1 - Logique mathématique

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Jeudi 20 Septembre 2018

A) Fondements

- On part d'un petit nombre d'affirmations, appelées axiomes, supposées vraies *à priori* -> les cinq postulats d'Euclide
- On définit ensuite la notion de démonstration
- On appelle **théorème** toute affirmation obtenue en fin de démonstration. Une telle affirmation est vraie.
- On constitue ainsi la "vérité" mathématique

B) Vocabulaire

- **Axiome**. Un axiome est un énoncé supposé vrai a *priori* et que l'on ne cherche pas à démontrer
- **Proposition ou assertion ou affirmation**. Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. Par exemple, "tout nombre premier est impair" et "tout carré de réel est un réel positif" sont deux propositions => cela reste à démontrer.
- **Théorème**. Un théorème est une proposition vraie. Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance.
- **Corollaire**. Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème.
- **Lemme**. Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.
- **Conjecture**. Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.

C) Logique mathématique

1) Calcul propositionnel

a) Équivalence logique

Définition. Soient P et Q 2 propositions. Elles sont équivalentes si elles sont simultanément vraies et simultanément fausses.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple :

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \ ou \ x = -1$$

b) Négation

Définition. Soit P un proposition. On définit sa négation $\bar{P}$ par :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ si \ x \leq y \ alors \ f(x) \leq f(y)$$
$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ x \leq y \ et \ f(x) > f(y)$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \mid n \ est \ pair$$

Proposition : $\overline{\overline{P}} = P$

c) Les connecteurs “et” et “ou”

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$P \vee Q$ Faux si et seulement si P et Q sont faux simultanément ou inclusif

Proposition. Soient P et Q deux propositions,

$$\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

d) Implication logique

Définition. Soient P et Q deux propositions, $P \Rightarrow Q$ est définie par son tableau de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On peut penser à plusieurs analogies pour s’aider : un interrupteur et une ampoule (villemin.gerard.free.fr), “Si tu parles, je te tue”...

Théorème. Soient P et Q deux propositions, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$ (à prouver).

Théorème. Si

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

c’est la transitivité.

Théorème. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\big)$

e) Condition nécessaire et suffisante (CN et CS)

Définition. Soient P et Q deux propositions. Dire que P est **nécessaire** à Q signifie que pour Q soit réalisé il faut que P le soit. Cela revient à dire $Q \Rightarrow P$.

Exemple. “Il y a des nuages” Condition Nécessaire de “Il pleut” : “Il pleut” $\Rightarrow$ “Il y a des nuages”

Remarque. P peut ne pas être suffisant pour Q c'est-à-dire on peut avoir P réalisé sans que Q ne le soit.

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
CN	CS
il faut	il suffit
seulement si	si

f) Négation, contraposée et réciproque d'une implication

Théorème. Négation d'une implication.

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$$

Théorème. Contraposée d'une implication.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

on dit que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est la contraposé de $P \Rightarrow Q$

Définition. La réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$

2) Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Définition. “Pour tous les éléments de $\mathbb{E}$, la proposition $P(x)$ est vraie” s'écrit “$\forall x \in \mathbb{E},\ P(x)$”

Définition. “Il existe au moins un élément de $\mathbb{E}$ tel que la proposition $P(x)$ est vraie” s'écrit “$\exists x \in \mathbb{E},\ P(x)$”

- $\exists!$: il existe un unique
- $\forall$: quantificateur universel
- $\exists$: quantificateur existentiel
- La fonction f est l'identité de $\mathbb{R}$: $f = Id_{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$
- Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R ssi la distance de M à Ω vaut R : $\forall M \in \mathcal{P},\ (M \in \mathcal{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow D(M, \Omega) = R,\ \Omega M = R)$

Théorème. Soit E un ensemble et $P(x)$ est une proposition dont les valeurs de vérité sont en fonction des éléments x de E :

- $\big(\forall x \in E,\ P(x)\big) \Leftrightarrow \big(\exists x \in E,\ \overline{P(x)}\big)$
- $(\exists x \in E,\ P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \overline{P(x)})$