Chapitre 2 - Analyse d'algorithmes

Georges-Pierre BONNEAU (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Lundi 15 Octobre 2018

Introduction

- **Prévoir les ressources nécessaires à l'exécution d'un algorithme** : **temps**, mémoire, énergie, bande passante / réseau
- **Hypohèse** : modèle de calcul générique, "machine à accès aléatoire" **RAM** ou **Random Access Memory**
  - Instructions arithmétiques en temps constant
  - Instructions de transfert de données en temps constant
  - Instructions de branchement conditionel et inconditionnel (`goto`, `bal`) en temps constant
  - Les valeurs ont une taille limite maximum
  - On ne va pas tenir compte de la hierarchisation de la mémoire

Analyse de complexité - Tri par insertion

Le temps d'exécution va changer en fonction de :

- la taille du tableau
- le contenu du tableau

Ligne	Temps constant par instruction	Nb d'exécutions
$L1$	C_1	1
$L2$	C_2	N $(j : 2 \ldots N+1)$
$L3$	C_3	$N-1$ $(j : 2 \ldots N)$
$L4$	C_4	$N-1$
$L5$	C_5	$A = \sum\limits_{j=2}^{N} t_j$
$L6$	C_6	$A-1$
$L7$	C_7	$A-1$
$L8$	C_8	$N-1$
$L9$	C_9	$N-1$

Avec t_j le nombre de fois où on rentre dans la sous boucle.

Soit $\mathit{Temps}(T)$ le temps de calcul total pour le tableau T $\mathit{Temps}(T) = C_1 + C_2 \times N + (C_3 + C_4 + C_8 + C_9) \times (N-1) + C_5 \times A + (C_6 + C_7) \times (A-1)$

Temps de calcul minimum (tableau déjà trié):

- $t_j = 1$
- $A = N - 1$
- $\mathit{Temps}(N) = \mathit{Constante} \times N + \mathit{Constante}'$

Temps de calcul maximum (tableau déjà trié mais dans le sens inverse) :

- $t_j = j$: comparaison de $Clef$ avec $T[j-1\dots 1]$ et à la fin on vérifie $i = 0 < 1$
- $A = \sum_{j=2}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2} - 1$
- $Temps(N) = \ Constante \times N^2 + \ Constante' \times N + \ Constante''$

Analyse asymptotique. Comportement de $T(N)$ quand $N \to +\infty$

- **Pire temps :** $T(N) = O(N^2)$
- **Meilleur temps :** $T(N) = O(N)$

Notation O. Soient $f(N)$ et $g(N)$:

$$f(N) = O(g(N)) \Leftrightarrow \exists K > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \text{tq } \forall N \geq N_0, f(N) \leq Kg(N)$$

Notation o. Soient $f(N)$ et $g(N)$:

$$f(N) = o(g(N)) \Leftrightarrow \forall K > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \text{tq } \forall N \geq N_o,\ f(N) \leq Kg(N)$$

Exemples. $3N = O(\frac{N}{10})$ et $N = o(N^2)$

On ne s'intéressera toujours que au pire temps

Temps "moyen" du tri par insertion

$t_j = \frac{j}{2}$

Seuls les constantes changent :

$$\begin{aligned} \overline{T}(N) &= \overline{A} + \overline{B}N + \overline{C}N^2 \\ &= O(T(N)) \\ &= O(\overline{T}(N)) \end{aligned}$$

- **Tri par insertion** (pire cas) : $T(N) = O(N^2)$
- **Tri par fusion** (pire cas) : $T(N) = O(N \ln(N))$

Illustration numérique. Tri d'un tableau de taille $N = 10^7$:

- Option A
  - 10^9 opérations par seconde (ordinateur "très rapide")
  - tri par insertion
  - $T(N) = 2N\hat{}2\$$
  - Temps de calcul : $\frac{2\times(10^7)^2}{10^9} \geq 55$ heures
- Option B
  - 10^7 opérations par seconde (100 fois plus lent que A)
  - tri par fusion
  - $T(N) = 50 \times N \times ln(N)$
  - Temps de calcul : $\frac{50\times10^7\times\ln(10^7)}{10^7} \approx 13$ minutes

Remarque. La complexité est donc primordiale !

Méthodes Diviser (récursivité) pour Régner

Remarque. Tri par insertion : algorithme incrémental

Soit $P(E)$ avec E un ensemble à N éléments et P un problème.

Méthode : 1) On découpe E en au moins 2 sous-ensembles $A_1, \ldots, A_k$ ($k \geq 2$) 2) On résoud $P(A_1), \ldots, P(A_k)$ 3) On construit une sélection de $P(E)$ à partir des solutions de $P(A_1), \ldots, P(A_k)$

Soit T le temps de calcul, $T = T$ (division) $+ \sum_{i=1}^{k} T(P(A_i)) + T(\boxed{(3)})$

La complexité de (1) et (3) doit être petite.

Tri-Fusion

Soit T un tableau de taille N

[Schéma d'un tableau coupé en deux]

1) **Division :** $N = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$
2) On trie les sous tableaux par appels récursifs
3) Fusion des 2 parties triées pour obtenir le tableau entier trié

```
Tri-Fusion : action (la donnée résultat A : un tableau 1 à N d'entiers
                     les données p, q, r : 2 entiers)

{ État initial :  A contient A1, ..., AN, 1 <= p <= r <= N }

{
État final :
  - A contient les même valeurs (à une permutation près)
  - les valeurs Ap, ...,Ar sont triées
}

{ Lexique : q un entier }

{
Algo :
  Si p = r : arrêt de la récursion
  Si p < r {
    q = floor((p + r) \ 2)
    Tri-Fusion(A, p, q)
    Tri-Fusion(A, q + 1, r)
    Fusion(A, p, q, r)
  }
}

{ Appel de la fonction : Tri-Fusion(A, 1, N) }
```

[Schéma du découpage du tableau {5,2,4,7,1,3,2,6} et appels en fonction des paquets]

Fusion

```
Fusion : action (la donnée résultat A : un tableau de 1 à N d'entiers
                 les données p, q, r :  3 entiers)
{
État initial :
   - 1 <= p <= q  < r <= N
   - les valeurs Ap, ..., Aq sont triées
   - les valeurs Aq+1, ..., Ar son triées
}
{
État final :
  - les valeurs Ap, ..., Ar sont triées
  - les autres valeurs sont inchangés
}

{
Lexique :
  - G tableau d'entiers contenant Ap, ..., Aq, +inf (q-p+2 éléments)
  - D tableau d'entiers contenant Aq+1, ..., Ar, +inf (r+q+1 éléments)
  - i, j, k : 3 entiers
}

{
Algo :
Pour i allant de 1 à q - p + 1 :
  G[i] <- A[p + (i - 1)]
G[q - p + 2] <- +inf

Pour j allant de 1 à r - q :
  D[j] <- A[q + j]
}
D[r - q + 1] <- +inf

i <- 1
j <- 1
Pour k allant de p à r:
  Si G[i] < D[j] :
    A[k] <- G[i]
    i <- i + 1

  Sinon :
    A[k] <- D[j]
    j <- j + 1
}
```

Exemple. Tableau A={1,3,4,8,2,5,6,9,11}

- G $= \{1, 3, 4, 8, +\infty\}$ et D $= \{2, 5, 6, 9, 11, +\infty\}$
- k de 1 à 9 : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11\}$

$n \leftarrow 0$;
$u \leftarrow 3081,45$;
tant que $u < k$ **faire**
    $u \leftarrow 1,04 \times u$;
    $n \leftarrow n + 1$;