Chapitre 7 - Déterminant

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 9 novembre 2018

Rappels

Matrices 2×2

Pour une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son déterminant vaut $ad - bc$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on définit le déterminant par récurrence par du **developpment par ligne** (ou par colonne).

Matrices 3×3

$$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\text{notation classique pour le det}} &= a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \text{ (ligne)} \\ &= c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f \times \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \times \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \text{ (colonne)} \end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = \boxed{-2}$$

Remarque. On peut appliquer cette même méthode pour les matrices carées plus grandes.

Généralisation

En pratique, on fait des opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour mettre plein de 0 dans la matrice.

Opérations possibles 1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$(ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$), $i \neq j$ 2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$(ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$) $>$ Cette opération multiplie le déterminant par λ ! 3. $L_i \leftrightarrow L_j$(ou $C_i \leftrightarrow \lambda C_j$), $i \neq j$ $>$ Cette opération change le signe du déterminant

Exemple.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\\2 & 1 & 1\end{vmatrix} = \underset{C_3-C_1\to C_3}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\1 & 0 & 0\\2 & 1 & -3\end{vmatrix}} = -1\begin{vmatrix}1 & -2\\1 & -3\end{vmatrix} = \boxed{1}$$

Intérêt principal du déterminant

Théorème. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, A inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

> *Remarque.* Pour le determinant 3×3, on a une formule "du genre $ad - bc$" appelée la règle de Sarrus :
>
> $$\text{Soit } A = \begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{bmatrix}$$
>
> $$\text{Alors } det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\4 & 2 & 1\\4 & 1 & 2\end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1/4}{=} 4\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\4 & 2 & 1\\4 & 1 & 2\end{vmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=} 4\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 4$$

Propriétés importantes du det

- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
- $\boxed{det(A+B) \neq det(A) + det(B)}$

Diagonalisation de matrices

$A \in M_n(\mathbb{R})$

But: "simplifier" A en la diagonalisant pour que les calculs soient plus simples.

> *Remarque.*
>
> $$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$
>
> - Calculer avec A c'est très facile
> - Résoudre des systèmes $AX = b$ c'est très facile
> - $$A^n = \begin{pmatrix}1^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$$

Exemple. Étude d'une population de lapins :

$$\begin{array}{rcl} n_b(t) & = & \text{nombre de bébés au temps t} \\ n_a(t) & = & \text{nombre d'adultes au temps t} \\ N(t) & = & \begin{pmatrix} n_b(t) \\ n_a(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} n_b(t+1) & = & \lambda n_a(t) \text{ avec } \lambda \text{ le taux de natalité} \\ n_a(t+1) & = & \epsilon_b n_b(t) \text{ avec } \epsilon_b \text{ le taux de survie des bébés} \end{array}$$

$$N(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \epsilon_b & 0 \end{pmatrix} N(t)$$

Donc étudier l'évolution de la popultaion des lapins revient à comprendre A^N.

Bases et changement de bases

Définition. $E = \mathbb{R}^n$ Une **base** de E, c'est une famille $e_1, \dots, e_n$ de n vecteurs tq $\forall u \in \mathbb{R}^n, \exists! \, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}$ tq

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ s'appellent les **coordonnées** de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$

Exemple. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $B = ((1,0),(0,1))$ alors $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

Schéma

Exemple. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $B = ((1,1),(-1,1))$ alors quelles sont les coordonnées de (x,y) dans la base $((1,1),(-1,1))$?

$$(x,y) = a(1,1) + b(-1,1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ x + y = 2a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a - x = \frac{y-x}{2} \\ a = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $B = ((1,1),(-1,1))$ sont $\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$

Schéma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{((1,0),(0,1))} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}_{((1,1),(-1,1))}$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{((1,0),(0,1))} = \begin{pmatrix} \frac{1+2}{2} \\ \frac{2-1}{2} \end{pmatrix}_{((1,1),(-1,1))} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{((1,1),(-1,1))}$$

Changement de base en général

Soient $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E = \mathbb{R}$, $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une autre base de $E = \mathbb{R}^n$

Comment on passe de B à B' et inversement ?

$$P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} C1 & C2 & C3 \end{pmatrix}$$

Avec C_1 les coordonnées de e'_1 dans B, C_2 les coordonnées de e'_2 dans B et C_3 les coordonnées de e'_3 dans B.

On a alors

$$P_{B' \to B} \times \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}_B$$

$$P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} C1 & C2 & C3 \end{pmatrix} = P^{-1}_{B' \to B}$$

Avec C_1 les coordonnées de e_1 dans B', C_2 les coordonnées de e_2 dans B' et C_3 les coordonnées de e_3 dans B'.

$$\begin{array}{lll} Matrice & \leftrightarrow & \text{application} \\ A \in M_n(\mathbb{R}) & \leftrightarrow & X \in \mathbb{R} \to AX \in \mathbb{R} \end{array}$$

Diagonalisation

Définition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** si $\exists P$ inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

Remarque. $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

$$\begin{array}{rcl} AX_B & = & PDP^{-1}X_B \\ & = & P(D(P^{-1}(X_B))) \\ & = & PDX_{B'} \\ & = & (DX_{B'})_B \end{array}$$

Attention. Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comment trouve-t-on D et P ? ### Commencons par D

Définition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le polynôme caractéristique de A est le polynôme, en λ, $det(\lambda I_n - A)$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(\lambda) & = & \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda - 1)^2 \end{array}$$

Exemple. $A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}_{=D} P^{-1}$

$$
\begin{array}{rcl}
\chi_A(\lambda) & = & det(\lambda I_n - PDP^{-1}) \\
& = & det(\lambda PP^{-1} - PDP^{-1}) \\
& = & det(P(\lambda I_n - D)P^{-1}) \\
& = & det(P)det(\lambda I_n - D)det(P^{-1}) \\
& = & \lambda I_n - D \\
& = & \chi_D(\lambda) \\
& = & \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_3 \end{vmatrix} \\
& = & (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)
\end{array}
$$

Preposition. Si A est diagonalisable, alors les racines de $\chi_A(\lambda)$ sont exactement les termes diagonaux de D

Définition. Les racines de χ_A sont appelées les **valeurs propres** de A.

Remarque. Si λ est une valeur propre de A alors $\exists x \neq 0$ tq $AX = \lambda X$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

La seule valeur propre de A est 1. Donc si A était diagonalisable on aurait

$$
\begin{array}{rcl}
A & = & P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
& = & PI_2P^{-1} \\
& = & PP^{-1} \\
& = & I_2
\end{array}
$$

Donc $A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ absurde

Donc A n'est pas diagonalisable !

Remarque. l'ensemble de valeurs propre s'apelle le **sprecte de** A et est noté $S_p(A)$

Comment trouve-t-on P ?

Définition. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. Un **vecteur propre** de A associé à λ est un vecteur $X \neq 0$ tel que :

$$AX = \lambda X$$

Définition. L'espace propre de A associé à λ est noté :

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n |\, AX = \lambda X\}$$

Pour trouver P, on cherche une base faite de vecteurs propres. Il faut donc déterminer E_λ $\forall \lambda \in S_p(A)$

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

$$
\begin{array}{rcl}
\chi_A(\lambda) & = & \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\
& = & (\lambda - 1)(\lambda - 2)
\end{array}
$$

Donc $S_P(A) = \{1, 2\}$

Calcul des espaces propres

$$E_2 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{AX = 2X}_{(A-2I_2)X=0}\}$$

$$\begin{cases} -x + y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

$$E_2 = \{y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Et

$$E_1 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{AX = X}_{(A-I_2)X=0}\}$$

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

$$E_1 = \{X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Prenons alors } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } P^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

Il n'y a pas de racine réelle, donc A n'est pas diagonalisable.

Exemple. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \\ -1 & -1 & \lambda & \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

Donc $S_P(A) = \{-1, 2\}$

$$E_2 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 2I_3)X = 0\}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} & \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & | & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & | & 0 \end{bmatrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\
& \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & z \\ y & = & z \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
E_2 = \{z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 | \; (A + I_n)x = 0\} \\
&= \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x + y + z = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{-1} &= \{\begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}
\end{aligned}
$$

On a alors, pour $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Retour aux lapins

$$
N(t+1) = AN(t) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \epsilon_b & 0 \end{pmatrix}
$$

Regardons si A est diagonalisable.

$$
\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -\lambda \\ -\epsilon_b & X \end{vmatrix} = X^2 - \lambda\epsilon_b = (X - \sqrt{\lambda\epsilon_b})(X + \sqrt{\lambda\epsilon_b})
$$

$$
\text{Donc } S_p(A) = \{-\sqrt{\lambda\epsilon_a}, \sqrt{\lambda\epsilon_b}\}
$$

et donc $\exists P$ inversible telle que

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda\epsilon_a} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda\epsilon_b} \end{pmatrix}
$$

Étudions A^n

$$A = PDP^{-1}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

$$A^3 = PD^3P^{-1}$$

Et

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Il suffit donc de comprendre $D^n = \begin{pmatrix} (-\sqrt{\lambda\epsilon_b})^n & 0 \\ 0 & (\sqrt{\lambda\epsilon_b})^n \end{pmatrix}$

On a alors 3 cas de figure :

- **Cas 1** $\epsilon_b\lambda = 1$: cas stationnaire, la popultaion reste a peu près la même
- **Cas 2** $\epsilon_b\lambda > 1$: alors $\sqrt{\lambda\epsilon_b} > 1$ et $(\sqrt{\lambda\epsilon_b})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
- **Cas 3** $\epsilon_b\lambda < 1$: alors $\sqrt{\epsilon_b\lambda} < 1$ et $\sqrt{\epsilon_b\lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$