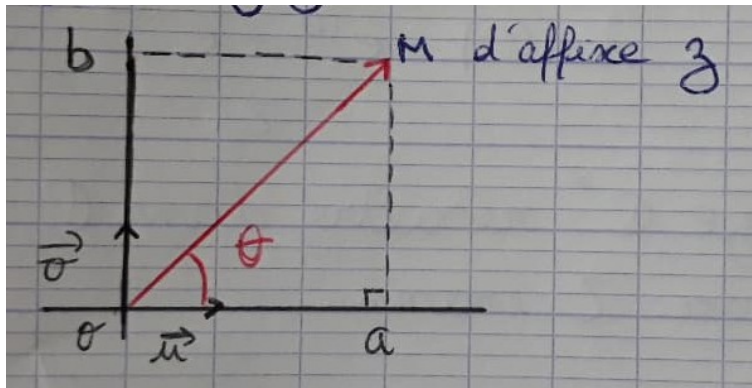


Chapitre 2 - Nombres complexes

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Lundi 1er Septembre 2018

- Forme algébrique : $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$
- Conjugué : $\bar{z} = a - ib$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \text{ modulo } 2\pi$$

Propriété. Soit $z \in \mathbb{C} * \exists r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq

$$z = r \cos \theta + i * r * \sin \theta$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Si $z = a + ib$ alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Définition.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Définition. Tout complexe z non nul de module z et d'argument θ s'écrit $z = re^{i\theta}$

$$e^{i2\pi} = 1$$

$$e^{2ik\pi} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{ik\pi} = (-1)^k$$

$$|e^{i\theta}| = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Propriété. $\forall \theta \in \mathbb{R} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ Application : soit $z \in \mathbb{C}^*$, résoudre $Z^n = z$

$$z = re^{i\theta}$$

$Z = Re^{i\alpha}$, les inconnues sont R et α .

$$R^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow R^n = r \Leftrightarrow R = r^{\frac{1}{n}} / n\alpha = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow R = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} / \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Exemple. Résoudre $Z^3 = -1 = e^{i\pi}$

$$\Leftrightarrow Z^3 = R^3 e^{i3\alpha} = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow R = 1 \alpha = \frac{\pi}{3}$$

ou

$$\Leftrightarrow Z^3 = (a + ib)^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

Donc $Z^3 = -1$ avec $Z = e^{i\pi + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}}, k \in \mathbb{Z}$

- Application 2, résoudre dans \mathbb{C} : $aZ^2 + bZ + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$
- Il suffit de trouver $\delta \in \mathbb{C}$ ($\delta = a + ib$) tq $\delta^2 = \Delta$

$$Z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

(deux racines complexes)