Chapitre 5 - Primitives et intégrales

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 12 Octbre 2018

A) Primitives

Définition. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (continue). Une **primitive** de g est une fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable tq $G' = g$

Exemple. Soit $g(x) = x^2$, les fonctions $G_1 : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3}{3} \end{array}$ et $G_2 : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3}{3} + 12 \end{array}$ sont des primitives de g.

Il n'y a pas unicité de la primitive

Proposition. Si G_1 et G_2 sont deux primitive de g , alors $G_1 - G_2 =$ cste. De plus, toute les primitives de g sont de la forme $G_1 + c$ où c est une constante

Notation. On note $\int_b^a g(x)\ dx$ l'ensemble des primitves de g.

Exemple.

$$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + Cste(= \{x \mapsto \frac{x^3}{3} + C | C \in \mathbb{R}\})$$

Primitives usuelles

Soit $b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\},\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$f(x)$	$\int f(x)\ dx$
b	$bx + Cste$
ax	$a\frac{x^2}{2} + Cste$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + Cste$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\| + Cste$
$\cos(x)$	$\sin(x) + Cste$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + Cste$
e^x	$e^x + Cste$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + Cste$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + Cste$

B) Intégrales

1) Formule de somme

- $\int (g_1(x) + g_2(x))\ dx = \int g_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx$

Exemple. $\int (2x^2 + 1)\ dx = \frac{2x^3}{3} + x + Cste$

- $\int \lambda g(x)\ dx = \lambda \int g(x)\ dx$

  Remarque. On a pas de formule pour le produit (IPP)ni pour le quotient... On a pas on plus de formule pour la composée (*changement de variable*)

2) Calcul intégral

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (continue) $\int_a^b g(t)dt$ = aire algébrique (avec signe) entre le graphe de g et l'axe des abscisses entre a et b

Schéma de la correspondance entre intégrale et aire algébrique $\int_a^b g(t)dt = A_1 - A_2 + A_3$

Remarque. Lorsqu'il y a des bornes, $\int_a^b g(t)dt \in \mathbb{R}$

Exemple. $\int_0^1 x\ dx$ Schéma de int^1_0 x dx

$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$

Schéma de int^1_-1 x dx $\int_{-1}^1 x\ dx = A_2 - A_1$

C) Lien primitives et intégrales

Théorème. (Théorème fondamental de l'analyse) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et soir G une primitive de g. Alors $\int_a^b g(t)dt = [G(t)]_{t=a}^{t=b} = G(b) - G(a)$ ■

Exemple. $\int_0^1 x^2\ dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$ Schéma correspondant

$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ dx = [\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} = \sin(\pi/2) = 1$ Schéma correspondant

Corollaire Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors $\forall c \in [a, b]$,

$$G_c : \begin{array}{c} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_c^x g(t)\ dt \end{array}$$

est une primitive de g.

D) Méthodes de calcul d'une intégrale

1) Chasles

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b g(t)\ dt = \int_a^c g(t)\ dt + \int_c^b g(t)\ dt$$

2) Utiliser les symétries

- Si f pair $\forall a > 0$

  $$\int_0^a f(x)\ dx = \int_{-a}^0 f(x)\ dx$$

  Schéma d'une fonction paire

  Donc

  $$\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$$

- Si f impaire, $\forall a > 0$

  $$\int_0^a f(x) dx = -\int_{-a}^0 f(x)\ dx$$

  Schéma d'une fonction impaire

  Donc $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0$

  Exemple $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\ dx = 0$

- On peut utiliser d'autres "symétries" comme la périodicité (exemple avec cos et sin)

3) Changement de variable

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Rappel des fonctions bijectives. $f : x \to y$ bijective si $\forall y \in Y,\ \exists! x \in X$ tq $f(x) = y$
$f : [c,d] \to [a,b]$ dérivable et bijective (En pratique on vérifie que $u([c,d]) = [a,b]$ et que u est strictement monotone)

$$\boxed{\int_c^d f(u(t))\ u'(t)\ dt = \int_{u(c)}^{u(d)} f(x)\ dx}$$

$$"u' = \frac{du}{dt} \Rightarrow u'\ dt = du"$$

Exemple. $\int_0^{\frac{1}{4}} xe^{x^2}\ dx$

$$u : \begin{array}{c} [0,\frac{1}{2}] \to [0,\frac{1}{4}] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

bijectif et C^1

$u'(x) = 2x$ "$du = 2xdx$" Donc

$$I + \frac{1}{to} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} 2x\ dx = \frac{1}{2} \int^{u(\frac{1}{2})_{u(0)} e^u\ du} = \frac{1}{2} \int_0^{1_over4} e^u\ du = \frac{1}{2}[e^u]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{4}} - 1)$$

Exemple. Soit $\int_0^{1/4} \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$, choisissons $u : \begin{array}{c} [0,\frac{1}{4}] \to [\frac{1}{2},1] \\ x \mapsto 1-\sqrt{x} \end{array}$

Schéma de u

u est strictement décroissante, $u([0,\frac{1}{4}]) = [\frac{1}{2},1]$ et $u'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

Donc

$$J = -2 \int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1-\sqrt{x})(\frac{-dx}{2\sqrt{x}})$$

$$= -2 \int_{u(0)}^{u(1)} ln(u)\ du = -2 \int_1^{\frac{1}{2}} ln(u)\ du = 2 \int_{1/2}^1 \ln u\ du$$

$$= 2[u\ln(u) - u]_{1/2}^1 = 2\Big(-1 - (\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2})\Big) = \boxed{ln(2) - 1}$$

4) Intégration par parties (IPP)

Rappel.

$$(uv)' = u'v + uv' \int (uv)' = \int u'v + \int uv'$$

Donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\ dx + \int_a^b u(x)v'(x)\ dx$$

Donc $\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx}$

Exemple.

$$\int_0^1 xe^x\ dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ dx$$

Prenons $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

Donc $I = e - \int_a^1 e^x\ dx = e - \Big[e^x\Big]_0^1 = e - (e-1) = \boxed{1}$

Exemple.

$$J = \int_0^{\pi/2} (x^2+1)\cos(x)\ dx$$

Prenons $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = x^2 + 1$ et $v'(x) = 2x$

Donc $J = \Big[(x^2+1)\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\ dx = \frac{\pi^2}{1} + 1 - 2\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\ dx = \boxed{1}$

Prenons $u(x) = -\cos(x)$, $u'(x) = \sin(x)$, $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(x)\ dx = \Big[-xcos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Donc $\boxed{J = \frac{\pi^2}{4} - 1}$

5) Décomposition en éléments simples

- **But.** intégrer des fonctions de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes (on appelle ça des fonctions rationnelle en x)
- **Étape 1.**
  - si le degré $P <$ le degré de Q, alors on ne fait rien
  - si le degré $P \geq$ le degré de Q, on va se ramener à une fraction rationnelle $\widetilde{\frac{P}{Q}}$ avec la décomposition $P <$ le degré de Q Pour cela, on fait la division euclidienne de P par Q. C'est-à-dire $P = LQ + R$ avec L et R deux polynômes tq degré $R <$ degré Q Ansi $\frac{P}{Q} = L + \frac{R}{Q}$ ($L(X)$ est facile à intégrer et d$\check{r}R <$ d$\check{r}Q$)

    En pratique, comment trouve-t-on L et R ?

Exemple. $P = X^5 + X^4 - X^2 + 1$
$Q = X^2 - 1$

Division euclidienne de P par Q

Donc $P(x) = \underbrace{(X^3 + X^2 + X)}_{L(X)}\underbrace{(X^2 - 1)}_{Q(X)} + \underbrace{X + 1}_{R(X)}$

Donc $P(x) = \underbrace{(X^3 - 1)}_{Q(X)}\underbrace{(X^2 - 2X + 1)}_{L(X)} + \underbrace{X^2 + 2X + 1}_{R(X)}$

- **Étape 2.** Développer $\frac{R}{Q}$ en élément simple
  - Factoriser Q (avec α_i racines de Q dans $\mathbb{R}$)

$$Q(x) = a(X - \alpha_1)^{\overset{\text{multiplicité de } \alpha_1}{n_1}} \dots (X - \alpha_r)^{n_r}(X^2 + a_1 X + b_1)^{n_1} \dots (X^2 + a_l X + b_l)^{n_l}$$

Exemple.

$$\begin{aligned} Q(x) &= X^3 - X \\ &= X(X^2 - 1) \\ &= \underbrace{X(X - 1)(X + 1)}_{\text{toutes de multiplicité 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2X^5 - 2X^2 \\ &= 2(X^5 - X^2) \\ &= 2X^2(X - 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

  - Décomper $\frac{P}{Q}$ Chaque $(X - \alpha_i)^{n_i}$ va donner m_i elements simples de $1^{\text{ère}}$ espèce :

$$\frac{\lambda_1}{(X - \alpha_i)} + \frac{\lambda_2}{(X - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n_i}}{(X - \alpha_i)^{n_i}}$$

et chaque $(X^2 - aB + b)^n$ fait apparaître n éléments simples de 2^{de} espèce

$$\frac{u_1 X + v_1}{(X^2 + ax + b)} + \frac{u_2 X + v_2}{(X^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{u_n X + v_n}{(X^2 + ax + b)^n}$$

Exemple.

$$Q(X) = X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$$
$$\frac{X^2 + 2X - 1}{X^3 - X} = \frac{X^2 + 2X - 1}{X(X - 1)(X + 1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X - 1} + \frac{\lambda_3}{X + 1}$$

Exemple.

$$\frac{X^3 + 1}{2X^2(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{\lambda_3}{X-1} + \frac{aX+b}{X^2+X+1}\right)$$

Comment trouver tous les coefficients (λ_i , $aX + b$, etc.) ?

Il existe plusieurs méthodes :

* factoriser et identifier :

Exemple.

$$\begin{aligned} \frac{X^2+2X-1}{X(X-1)(X+1)} &= \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1} \\ &= \frac{\lambda_1(X-1)(X+1) + \lambda_2 X(X+1) + \lambda_3 X(X-1)}{X(X-1)(X+1)} \\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (\lambda_2-\lambda_3)X - \lambda_1}{X(X-1)(X+1)} \end{aligned}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &=& 2 \\ \lambda_1 &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 &=& -\lambda_3 \\ \lambda_2 &=& 1 \\ \lambda_1 &=& 1 \end{array}\right.$$

et

$$\frac{X^2+2X-1}{X(X+1)(X-1)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}$$

$*$ multiplier et évaluer :

Exemple.

$$\frac{X^2+2X-1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1}$$

- **Pour** λ_1 : On multiplie par X

$$\frac{X^2+2X-1}{(X-1)(X+1)} = \lambda_1 + X(\frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1})$$

Puis on évalue en 0 :

$$\frac{-1}{(-1)(1)} = \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$$

- **Pour** λ_2 : On multiplie par $X-1$

$$\frac{X^2+2X-1}{X(X+1)} = \lambda_2 + (X-1)(\cdots)$$

Puis on évalue en 1 :

$$\frac{2}{2} = \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 1}$$

- **Pour** λ_3 : On multiplie par $X+1$

$$\frac{X^2+2X-1}{X(X-1)} = \lambda_3 + (X-1)(\cdots)$$

Puis on évalue en -1 :

$$\frac{-1}{(-1)(1)} = \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -1}$$

q & q &

$$\frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{aX+b}{X^2+1}$$

- **On commence par** λ_2 en multipliant pat X^2

$$\frac{X^2+X+1}{(X^2+1)} = \lambda_2 + X^2\Big(\frac{\lambda_1}{X} + \frac{aX+b}{X^2+1}\Big)$$

Et en 0 : $\boxed{1 = \lambda_2}$

- **Pour trouver le λ_1, on passe le $\frac{\lambda_2}{X^2}$ de l'autre côté** :

$$\begin{aligned}\frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)} - \frac{1}{X^2} &= \frac{\lambda_1}{X} + \frac{aX+b}{X^2+1} \\ &= \frac{X}{X^2(X^2+1)} \\ &= \frac{1}{X(X^2+1)}\end{aligned}$$

Donc on a $\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{aX+b}{X^2-1}$ et $\boxed{\lambda_1 = 1}$

- **Pour** a **et** b on multiplie par X^2+1 :

$$\frac{1}{X} = aX + b + \frac{X^2+1}{X}$$

i est une racine de X^2+1, on évalue donc en i

$$\frac{1}{i} = ai + b \Rightarrow -i = ai + b \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\frac{X^2+X+1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} - \frac{X}{X^2+1}$

Remarque. Pour trouver les coefficients dans la décomposition en éléments simples, tous les coups sont permis !

- Il ne reste donc plus qu'à intégrer les éléments simples :

$$\int \frac{dx}{X-\alpha_i} = ln|X-\alpha_i| + Cte \int \frac{dx}{X-\alpha^n} = ln|X-\alpha_i| + Cte$$

Pour les éléments de seconde espèce, on a besoin de l' arctan :

- fonction réciproque de tan
- fonction impaire
- $\tan(\underset{x\in\mathbb{R}}{\arctan}(x)) = x$
-
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+X^2}$

Si on a un élément de seconde espèce :

$$\frac{\alpha X + \beta}{X^2 + aX + b} = \frac{\alpha X + \beta}{\left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}} = \frac{\alpha X + \beta}{A\left(\left(\frac{x+a/2}{\sqrt{A}}\right)\right) + 1}$$

Changement de variable : $y = \frac{x+a/2}{sqrt(A)}$

Exemple.

$$\begin{array}{rcl} \frac{X+1}{X^2+2X+5} & = & \frac{X+1}{(X+1)^2-1+5} \\ & = & \frac{X+1}{(X+1)^2+4} \\ & = & \frac{1}{4}\frac{X+1}{(\frac{X+1}{2})^2+1} \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 \frac{X+1}{X^2+2X-5}\ dx & = & \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{X+1}{(\frac{X+1}{2})^2+1}\ dx \\ & = & \frac{1}{4}\int_{y(0)}^{y(1)} \frac{2y}{y^2+1}\ dy \\ & = & \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{2y}{(y^2+1)}\ dy \\ & = & \left[\frac{1}{2}\ln|y^2+1|\right]_{1/2}^{3/2} \\ & = & \frac{1}{2}\ln(13/4) - \ln(5/4) \\ & = & \frac{1}{2}\big(\ln(13)\big) - \ln(2) + 2\ln(2) - ln(5) \\ & = & \boxed{\ln(2) - \ln(5) + -\ln(\frac{13}{2})} \end{array}$$

En général

$$\begin{array}{rcl} \int \frac{ay+b}{y^2+1}dy & = & \frac{a}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}dy + b\int \frac{dy}{y^2+1} \\ & = & \frac{a}{2}\ln|y^2+1| + b\arctan(y) + Cte \end{array}$$

Remarque : $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{X^2+a} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{X}{a}\right) + Cte}$, $(a>0)$

Exemple. $\int_0^{1/2} \frac{2X^5+X+1}{X^3-1}\ dx$

1. Division euclidienne : $\underbrace{(X^3-1)}_{Q(X)}\underbrace{(2X^2)}_{L(X)} + \underbrace{(2X^2+X+1)}_{R(X)} = \underbrace{2X^5+X+1}_{P(X)}$

   Donc $f(x) = 2X^2 + \frac{2X^2+X+1}{X^3-1} = 2X^2 + \widetilde{f}\ (X)$

2. $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$

   Donc $\widetilde{f}\ (X) = \frac{\lambda_1}{(X-1)} + \frac{aX+b}{X^2+X+1}$ Et $\boxed{\displaystyle\frac{2X^2+X+1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{aX+b}{X^2+X+1}}$ $(\star)$

   - **Pour** λ_1 **:**

     On multiplie par $X-1$ l'égalité $(\star)$: $\frac{2X^2+X+1}{X^2+X+1} = \lambda_1 + (X-1)(\cdots)$

     En évaluant en 1 : $\boxed{\displaystyle\frac{a}{3} = \lambda_1}$

   - **Pour** a **et** b **:**

     En évaluant en $X=0$: $\frac{1}{(-1)(1)} = -\lambda_1 + \frac{b}{1} \Rightarrow -1 + \lambda_1 = b \Rightarrow \boxed{b = \displaystyle\frac{1}{3}}$

   - On multiplie par X et on fait l'équivalent en $+\infty$:

$$\frac{2X^3+X^2+X}{X^3-1} = \frac{\lambda_1 X}{X-1} + \frac{aX^2+b}{X^2+X+1}$$

   En $+\infty$ on a : $2 = \lambda_1 + a \Rightarrow a = 2 - \lambda_1 = \frac{2}{3}$ et $\boxed{a = \displaystyle\frac{2}{3}}$

   Donc $f(X) = 2X^2 + \frac{4}{3}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}$

   Et

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} 2X^2\ dx &= \left[\tfrac{2X^3}{3}\right]_0^{1/2} \\
&= \tfrac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \tfrac{4}{3}\tfrac{dx}{X-1} &= \tfrac{4}{3}\left[\ln|X-1|\right]_0^{1/2} \\
&= \tfrac{4}{3}\ln(1-1/2) \\
&= -\tfrac{4}{3}\ln(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \tfrac{(2X+1)dx}{X^2+X+1} &= \int_0^{1/2} \tfrac{(2X+1)dx}{(X+1/2)^2+3/4} \\
&= \int_{y(0)}^{y(1/2)} \tfrac{2y\ dy}{y^2+3/4} \\
&= \int_{1/2}^{1} \tfrac{2y\ dy}{y^2+3/4} \\
&= \left[\ln(y^2+3/4)\right]_{1/2}^{1}
\end{aligned}$$

   (Avec $x = y - 1/2 \Rightarrow y = x + 1/2$ et $dy = dx$)

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx &= \tfrac{1}{12} - \tfrac{4}{3}ln(2) + \tfrac{1}{3}(ln(7) - 2ln(2)) \\
&= \boxed{\frac{1}{12} + \frac{1}{3}ln(7) - 2ln(2)}
\end{aligned}$$

6) Integrales generalisées

Définition $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b[& \to & \mathbb{R} \end{array} \right.$ continue (par morceaux) où $b \int \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si $\int_a^x f(t)dt$ converge quand $x \to b^-$. On a la même des à gauche pour $F :]a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Exemple. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & 1/X^2 \end{array} \right.$, est-ce que $\int_1^{+\infty} \frac{dX}{X^2}$ converge ?

Soit $X > 1$,

$$\begin{array}{rcl} \int_1^X \frac{dt}{t^2} & = & \left[-\frac{1}{t} \right]_1^X \\ & = & -\frac{1}{X} + 1 \xrightarrow[X \to +\infty]{} 1 \end{array}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dX}{X^2}$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{dX}{X^2} = 1$

Exemple. $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t}$ converge ?

Soit $X > 1$,

$$\begin{array}{rcl} \int_1^X \frac{dt}{t} & = & \left[\ln(t) \right]_1^X \\ & = & \ln(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty \end{array}$$

Donc $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t}$ ne converge pas.

Exemple. $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ cv ? Soit $x \in]0,1[$

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} =$$

Exemple. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ cv ? Soit $x \in]0,1[$

Exemple. Est ce que $\int_0^1 \frac{ln(t)}{t} dt$ cv ? Soit $\epsilon \in]0,1[$,

$$\int_\epsilon^1 \frac{ln(t)}{t} dt = [\frac{1}{2}(ln(t))^2]_\epsilon^1 = -1_over2ln(\epsilon)^2 \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} -\infty$$

Donc $\int_0^1 \frac{ln(t)}{t} dt$ diverge.

Soit $A > 0$,

$$\begin{array}{rcl} \int_0^A e^{-\lambda t} dt & = & \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^A \\ & = & -\frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\lambda} \end{array}$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt}$

Définition. $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue (par morceaux) avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in]a,+\infty[\cup \{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\exists c \in]a,b[$ tq $\int_a^c f(t)dt$ CV et $\int_c^b f(t)dt$ CV.

Exemple.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \overbrace{\int_0^1 \frac{dt}{t^2}}^{??} + \overbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}}^{CV}$$

Problème en 0 et $+\infty$!

Est ce que $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ CV ? Soit $x \in]0,1[$,

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = [\frac{-1}{t}]_x^1 = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ DV et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ DV.

Exemple.

$$\int_0^{+\infty} cos(t)dt$$

Soit $A > 0$,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^A \cos(t)dt &= \Big[\sin(t)\Big]_0^A \\ &= \sin(A) \end{aligned}$$

or $A \mapsto sin(A)$ n'a pas de limite quand $A \to +\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} cos(t)dt$ ne CV pas.

Attention. Ne pas converger ne veut pas dire $\to +\infty$ ou $-\infty$!

Remarque. Par contre si $f \geq 0$, $\int_a^b f(t)dt$ CV ou est $+\infty$

Schéma de l'aire sous une courbe entre 1 et A

Définition. $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue (par morceaux). On dit que f est **integrable** (sur $]a,b[$) si $\int_a^b |f(t)|dt$ CV.

Proposition Si f est integrable sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)dt$ CV et $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

Attention. Si $\int_a^b f(t)dt$ CV, on n'a pas forcément f intégrable !

intégrable $\Rightarrow$ CV mais CV $\not\Rightarrow$ intégrable

Exemple. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable mais $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ CV.

En général, pour montrer qu'une intégrale CV, on essaie de montrer que la fonction est intégrable en utilisant par exemple le résultat de comparaison suivant :

Théorème. (comparaison) Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $g :]a,b[\to \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont à valeurs positive et que $\forall x \in]a,b[, f(x) \leq g(x)$:

- Si $\int_a^b g(t)dt$ CV, alors $\int_a^b f(t)dt$ CV et $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$
- Si $\int_a^b f(t)dt$ DV, alors $\int_a^b g(t)dt$ DV.

Schéma des courbes des fonctions f et g

Exemple. Soit $f(t) = \frac{1+\cos(t)^2+\sin(t)}{t^2}$, est-ce que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ CV ?

Essayons de voir si f est integrable :

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \tfrac{|1+cos^2(t)+sin(t)|}{t^2} \\ &\leq \tfrac{|1|+|cos^2(t)|+|sin(t)|}{t^2} \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{t^2} \end{aligned}$$

or $\int_1^{+infty} \frac{3dt}{t^2}$ CV Donc f est intégrable et $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ CV

Propriété. Intégrales de Riemann.

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha < 1$

Exemple important. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ CV ssi $\lambda > 0$