Chapitre 1 - Analyse de Fourier

Rémi MOLINIER (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 30 Novembre 2018

Séries de Fourier

1. Fonction périodiques

Définition. Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-periodique si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

Exemples.

- $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont 2π-périodiques
- $t \mapsto \tan(t)$ est π-périodique
- $t \mapsto \cos(\frac{2\pi}{T}t)$ est T-périodique (preuve en développant $\cos(\frac{2\pi}{T}(t+T))$)

  Remarque. Si F est T-périodique alors F est kT-périodique $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Exercice. Tracer le graphe de la fonction f paire puis de la fonction g impaire, toutes deux telles qu'elles soient 1-périodiques tq $f(t) = g(t) = t,\ \forall\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Remarque.

- Pour définir une fonction T-périodique il suddit de la donner sur un intervalle de longueur T.
- Si de plus on a des symétries (paire, impaire, etc.) il suffit de la définir surun plus petit intervalle (typiquement, si f paire ou impaire, $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ suffit)

Exemple. $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{T}t}$ es une fonction T-périodique à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition. Un polynôme trigonometrique c'est une fonction f tq

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-N}^{N} C_k \underbrace{e^{\frac{2i\pi}{T}kx}}_{T\text{-périodique}} \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{N} \left(a_k \cos\left(\tfrac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\tfrac{2\pi}{T}kx\right)\right) \end{aligned}$$

On passe d'une forme à l'autre en utilisant les formules d'Euler

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) = \frac{e^{\frac{2\pi}{T}ikx} + e^{\frac{2\pi}{T}i(-k)x}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) = \frac{e^{\frac{2\pi}{T}ikx} + e^{\frac{2\pi}{T}i(-k)x}}{2i}$$

$$\text{Avec : } a_0 = C_0,\ C_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \text{ et } C_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

Remarque. Si f est T-périodique, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \int_0^T f(t)dt & = & \int_a^{a+T} f(t)dt \text{ mais aussi} \\ & = & \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \text{ en particulier} \end{array}$$

2. Coefficients de Fourier

Définition. Soit f, T-périodique : $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\frac{-2\pi}{T}int}dt}$$

Remarque. Comme f est T-périodique et $t \mapsto e^{\frac{-2\pi}{T}int}$ aussi on peut changer le domaine d'integraiton par $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ou autre chose de plus commode

Définition. La série de Fourier de f est alors

$$\boxed{S_f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)e^{\frac{2\pi}{T}int}}$$

Remarque. Pourquoi cette définition ? Si $f(t) = \sum\limits_{k=-N}^{N} C_n e^{\frac{2\pi}{T}ikt}$

$$\begin{array}{rcl} C_n(f) & = & \frac{1}{T}\int_0^T \big(\sum\limits_{k=-N}^{N} C_k e^{\frac{2\pi}{T}ikt}\big)e^{\frac{-2\pi}{T}int}dt \\ & = & \sum\limits_{k=-N}^{N} \frac{C_k}{T}\underbrace{\Big(\int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}i(k-n)t}dt\Big)}_{=\ I_{n,k}} \end{array}$$

- si $k = n$:

$$\begin{array}{rcl} I_{n,k} & = & \int_0^T 1dt \\ & = & T \end{array}$$

- si $k \neq n$

$$\begin{array}{rcl} I_{n,k} & = & \int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}i(k-n)t}dt \\ & = & \Big[\frac{e^{\frac{2\pi}{T}i(k-n)t}}{\frac{2\pi}{T}i(k-n)}\Big]_0^T \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc $C_n(f) = \frac{C_n}{T}T = C_n$. Donc $S_f(t) = f(t)$

Exemple. f est 2π-périodique paire tq $f(t) = t$ si $t \in [0, \pi]$

Soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} C_n(f) & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{f(t)e^{-int}}_{\text{n'est pas pair !}} dt \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \text{ (on peut décaler comme} f \text{ est } 2\pi\text{-périodique)} \\ & = & \frac{1}{2\pi}\big(\int_{-\pi}^{0} -te^{-int}dt + \int_0^{\pi} te^{-int}dt\big) \text{ (on peut découper comme } f \text{ est paire)} \\ & = & \frac{1}{2\pi}\Big[([-t\frac{e^{-int}}{-in}]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt) + ([\frac{te^{-int}}{int}]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{e^{-int}}{in}dt)\Big] \text{ (IPP)} \\ & = & \frac{1}{2\pi}\Bigg(\frac{\pi}{in}e^{in\pi} - \frac{1}{in}\Big[\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_{-\pi}^{0} + \frac{-\pi}{in}e^{-in\pi} + \frac{1}{in}\Big[\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_0^{\pi}\Bigg) \text{ (or } e^{-in\pi} = e^{in\pi}\text{)} \\ & = & \frac{1}{2\pi}\Bigg(\frac{1}{in}\Big(-\Big[\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_0^{\pi}\Big)\Bigg) \text{ (on peut donc simplifier)} \\ & = & \frac{1}{2\pi in}\Big(\frac{(-1)^n}{-in} - \frac{1}{-in} - (\frac{1}{-in} - \frac{(-1)^n}{-in})\Big) \\ & = & \frac{1}{2\pi in}\big(\frac{2}{in}\big) \\ & = & \frac{-1}{\pi n^2} \end{array}$$

Donc $\boxed{C_n(f) = \dfrac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$

Et $C_0(f) = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt}_{= \pi^2} = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

Donc $\boxed{S_f(t) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \dfrac{2((-1)^n - 1)e^{int}}{\pi n^2}} = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} e^{(2k+1)it}}_{(n = 2k+1)}$

Remarque. $(-1)^n - 1 = 0$ (si n pair) ou -2 (si n impair)

Remarque. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)e^{i\frac{2\pi}{T}nt} = \lim_{N\to+\infty}(\sum\limits_{n=-N}^{N} C_n(f)e^{i\frac{2\pi}{T}nt})$

3. Premières propriétés

Propriétés.

- $C_n(f+g) = C_n(f) + C_n(g)$
- $C_n(\lambda f) = \lambda C_n(f)$
- $C_n(f') = \frac{2\pi in}{T}C_n(f)$

Théorème. $C_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (si f continue par morceaux)

4. Coefficients réels

$$\begin{array}{rcl} S_f(t) & = & \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \\ & = & a_0(f) + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(\frac{2\pi}{T}nt) + b_n(f)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)) \end{array}$$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} a_0(f) & = & C_0(f) \\ a_n(f) & = & c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) & = & i(C_n(f) - C_n(f)) \\ c_n(f) & = & \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \\ c_{-n}(f) & = & \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \end{array}$$

Formules.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_0(f) & = & \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ a_n(f) & = & \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)\ dt \\ b_n(f) & = & \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)\ dt \end{array}}$$

Remarque.

- Si f paire, $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)}_{\text{(impair)}}dt = 0$
- Si f impaire, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)}_{\text{(impair)}}dt = 0$

Remarque.

- pair $\times$ pair $\to$ pair
- impair $\times$ impair $\to$ pair
- pair $\times$ impair $\to$ impair
- impair $\times$ pair $\to$ impair

Exemple. $f(t) = t$ sur $[0, \pi]$, paire et 2π-périodique

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Soit $n \geq 1$

$$\begin{array}{rcl} b_n(f) & = & 0 \text{ (car f paire)} \\ a_n(f) & = & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \\ & = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt)\, dt \\ & = & \frac{2}{\pi} ([\frac{t \sin(nt)}{n}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n}\, dt) \\ & = & \frac{-2}{\pi} [\frac{-\cos(nt)}{n^2}]_0^{\pi} \\ & = & \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \\ & = & \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \\ & = & \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} \text{ si n impair} \\ 0 \text{ si n pair} \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{S_f(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} cos((2k+1)t)}$$

Exemple.

- Soit $f \mapsto 1 - \frac{2x}{\pi}$ $\forall t \in [0, \pi]$ une fonction paire 2π périodique. Ses coefficienfs de Fourier sont :

$$\begin{array}{rcl} a_0(f) & = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ & = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \frac{2x}{\pi}) dx \text{ (car paire)} \\ & = & \frac{1}{\pi} \big[\cdots \big]_0^{\pi} \\ & = & 0 \end{array}$$

Soit $n \geq 1$ comme f f paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$

$$\begin{array}{rcl} a_n(f) & = & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx \text{ (car paire)} \\ & = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \frac{2x}{\pi}) cos(nx) dx \\ & = & \frac{2}{\pi} \Big(\underbrace{\Big[(1 - \frac{2x}{\pi}) \frac{sin(nx)}{n} \Big]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{sin(nx)}{n} dx \Big) \\ & = & \frac{4}{\pi^2 n} \Big[\frac{-cos(nx)}{n} \Big]_0^{\pi} \\ & = & \frac{4}{\pi^2 n^2} \big(1 - \underbrace{cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \big) \\ & = & \boxed{\frac{4}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n)} \\ & = & 0 \text{ si n pair ou } \frac{8}{\pi^2 n^2} \text{ sinon} \end{array}$$

$$\boxed{S_f(x) \underset{(x=2k+1)}{=} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}}$$

5. Théorème de Parseval

Théorème. Soif f continue par morceaux et T-périodique. La puissance moyenne du signal est

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

Applications

1. Calcul du nombre d'harmonique nécessaire pour transmettre $X\%$ de la puissance du signal.

Principe :

1. On calcule $E = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$ (la puissance moyenne du signal)
2. On calcule $E_0 = |a_0(f)|^2$, $E_1 = |a_0(f)|^2 + |a_1(f)|^2 + |b_1(f)|^2$, $E_2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |b_1|^2 + |a_2|^2 + |b_2|^2 + \dots$

On s'arrête lorsque $\frac{E_i}{E} \geq X\%$

Exemple. f pair 2π-périodique tq $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ $\forall t \in [0, \pi]$

$$\begin{array}{rcl} E & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \\ & = & \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1 - \frac{2t}{\pi})^2 dt \\ & = & \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi}{6}(1 - \frac{2t}{\pi})^3\right]_0^{\pi} \\ & = & \frac{1}{6}(1+1) \\ & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & 0 \\ E_1 & = & \frac{|a_1|š}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \approx 0,32 \\ \frac{E_1}{E} & = & \frac{3}{2}(\frac{8}{\pi^2})^2 \approx 0,98 \end{array}$$

Donc avec 1 harmonqiue on transfère 98% de la puissance du signal

2. Calcul de séries

Exemple. f pair 2π-périodique tq $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ $\forall t \in [0, \pi]$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{-f}{\pi^2(2k+1)^2}\right)^2$$

Donc $\frac{1}{3} = \frac{2^5}{\pi^4}\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}$ et $\boxed{\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$

$$\begin{array}{rcl} \text{Soit } S & = & \sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} \\ & = & \underbrace{\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^4}}_{=\frac{1}{2^4}\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^4}=S} + \underbrace{\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}}_{=\frac{\pi^4}{96}} \\ & = & \frac{1}{16}S + \frac{\pi^4}{96} \\ & = & \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} \\ & = & \frac{\pi^4}{90} \end{array}$$

$$\text{Donc : } \boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{pi^4}{90}}$$

6. Convergence des séries de Fourier

Théorème de convergence normale.

Soit f une fonction T périodique, on suppose que :

- f continue
- f C^1 par morceaux

Alors

$$S_{f,N}(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n(f)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

converge uniformément (et même normalement) vers f.

Rappels.

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f,

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tq } \forall n \geq \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$$

dessin d'une CVU

- f C^1 par morceaux, si $\exists(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ strictement croissante tq f C^1 sur $]t_n, t_{n+1}[$ $\forall n$ et $f'(t)$ à une limite finie quand $t \to t_n^+$ et $t \to t_n^-$

Théorème de Dirichlet.

f continue par morceaux et T-périodique. On suppose que en tout point t on a une limite à gauche $f(t^-)$ et une limite à droite $f(t^+)$

Alors $S_{f,N}(t) = \sum_{i=-N}^{N} C_n(f)e^{\frac{-2i\pi}{T}nt} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$

Remarque. - Si f continue en t alors $f(t^-) = f(t^+) = f(t)$ donc $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = f(t)$ *Exemple*

Phenomène de Gibbs. Quand le signal n'est pas continu, on n'a pas CVU de la série de Fourier : en chaque discontinuité on a des pics qui apparaissent.

[Schéma d'une fonction discontinue]

On peut aussi utiliser Dirichlet pour du calcul de série.

Exemple. f pair 2π-périodique tq $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ $\forall t \in [0, \pi]$. En appliquant Dirichlet et en prenant $t = 0$ on obtient la valeur de $\boxed{\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$ et ensuite avec le même jeu que tout à l'heure, on obtient

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$