Chapitre 3 - Relations binaires

Benjamin WACK (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Lundi 3 Décembre 2018

1) Notion de relation binaire sur un ensemble X

Définition. Une **relation binaire** sur X est un ensemble de couples ordonnés (x, y) où x et $y \in X$. Si R est une relation, on dira : $(x, y) \in R$ ou $x\ R\ y$ ou x est en relation avec y (tous synonymes).

Une **relation binaire** est donc une partie du produit cartésien $X^2 = X \times X$. Si X est fini, $card(X^2) = card(X)^2$. Il y a donc $2^{((card\ X)^2)}$ relations distinctes sur X *(si $card\ X = 3$ on en a 2^9, si $card\ X = 5$ on en a 2^{25}).*

Notation à la UML : $X \ \underline{\ 0..*\quad 0..*\ }\ X$

a) Types de relations particulières

Définitions

- Une relation est **réflexive** si : $\forall x \in X,\ x\ R\ x$
- Une relation est **transitive** si : $\forall x, y, z \in X,\ (x\ R\ y \wedge y\ R\ z) \Rightarrow x\ R\ z$
- Une relation est **antisymétrique** si : $\forall x, y \in X,\ (x\ R\ y \wedge y\ R\ x) \Rightarrow x = y$
- Une relation est **symétrique** si : $\forall x, y \in X,\ (x\ R\ y \Leftrightarrow y\ R\ x)$

Vocabulaire et exemples

- On dit qu'une relation est un **préordre** si elle est à la fois **réflexive et transitive** (RT).

  Exemples.

  - Sur la promo INFO3, "être plus jeune que" à l'année près et au sens large est un préordre
  - Sur $X = \{1, 2, 2', 3\}$ avec $1 \to \{2, 2'\} \to 3$, $1 \to 3$, $2 \leftrightarrow 2'$ et chacun $\to$ avec lui-même, on a un préordre. Graphe des relations

- On dit qu'une relation est un **ordre** si elle est **réflexive, transitive et antisymétrique** (RTA).

  Exemples.

  - La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$
  - Sur A^*, on connaît :
    * l'ordre préfixe $\sqsubseteq$
    * l'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ (de plus, l'ordre lexicographique est **total**)

  Remarque. **Ordre total** = on peut comparer chaque élément avec n'importe quel autre :
  on a toujours $a \geq_{lex} b$ ou $a \leq_{lex} b$ mais on peut avoir $a \not\sqsubseteq_{lex} b$ et $a \not\sqsupseteq_{lex} b$.

  Remarque. Tout ordre est un préordre (par définition).

- On dit qu'une relation est une **équivalence** si elle est **réflexive, transitive et symétrique** (RTS).

  Exemples.

  - Toute relation d'équivalence est un préordre
  - Sur $\mathbb{Z}$ la relation "être congru modulo 5" (avoir le même reste)
  - Sur A^*, "avoir la même longueur"
  - Sur INFO3, "être né la même année"
  - Plus généralement, "avoir le même quelque chose" donne **toujours** une relation d'équivalence

b) Représentation sous forme de graphe

Si X est fini, on peut construire un graphe dont les sommets sont les éléments de X. Pour tout couple (x, y) dans R, on trace un arc de x vers y.

Exemple. $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, c)\}$

- Graphe des relations
- Si R est **réflexive**, on a toutes les boucles $x \to x$ *(en général on ne les dessine pas)*
- Si R est **symétrique**, on a des arcs de la forme $x \leftrightarrow y$ *(en général on les remplace par un seul trait sans flèche)*
- Si R est **antisymétrique**, on n'a jamais d'arc de la forme $x \leftrightarrow y$
- Si R est **transitive**, à chaque fois qu'on a $x \to y \to z$ on a aussi $x \to z$
  - *En général on ne représente* ***que*** *les arcs de la forme prédécesseur $\to$ successeur, càd $x \to y$ tel qu'il n'existe aucun z tel que $x \to z \to y$*
  - *Mais par exemple $a \to b \to c \to a$ ne permet pas de supprimer des arcs (cycle)*

  Remarque. Dans une relation d'équivalence, on aura des groupes de sommets tous reliés entre eux (composantes connexes complètes) Graphe d'une équivalence entre 4 éléments

c) Représentation par une matrice

On choisit un ordre sur $X = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On a $M_{i,j} = 1$ ssi $x_i \ R \ xj$

$$\begin{pmatrix} x_1 \ R \ x_1 & \cdots & x_1 \ R \ x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n \ R \ x_1 & \cdots & x_n \ R \ x_n \end{pmatrix}$$

M est une matrice carrée de taille $card \ X$ à coefficients dans $\{0, 1\}$.

- Si R est **réflexive**, sa matrice a une diagonale de 1.
- Si R est **symétrique**, sa matrice est symétrique par rapport à la diagonale (la diagonale a des valeurs quelconques).
- Si R est **antisymétrique**, sa matrice n'a jamais deux 1 symétriques.
- Si R est **transitive**, sa matrice respecte : si $M_{i,j} = 1$ et $M_{j,k} = 1$ alors $M_{i,k} = 1/$
- Une relation d'équivalence, si on choisit le bon ordre sur X alors sa matrice est "diagonale par blocs"

  Exemple.

- Sur $X = \{1,2,3,4,5\}$. Soit la relation “avoir même parité” en prenant $1 < 2 < 3 < 4 < 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si on prend l’ordre $1 < 3 < 5 < 2 < 4$ la matrice est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un exemple

$X = 0,1^*$

Soit une relation L telle que $u \; L \; v$ ssi $lg(u) \leq lg(v)$.

Elle est clairement réflexive, non symétrique, transitive et non antisymétrique.

Elle n’est pas antisymétrique : $0L1$ et $1L0$.