Chapitre 5 - Primitives et intégrales

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 12 Octbre 2018

A) Primitives

Définition. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (continue). Une **primitive** de g est une fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable tq $G' = g$

Exemple. Soit $g(x) = x^2$, les fonctions $G_1 : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3}{3} \end{array}$ et $G_2 : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3}{3} + 12 \end{array}$ sont des primitives de g.

Il n'y a pas unicité de la primitive

Proposition. Si G_1 et G_2 sont deux primitive de g , alors $G_1 - G_2 =$ cste. De plus, toute les primitives de g sont de la forme $G_1 + c$ où c est une constante

Notation. On note $\int_b^a g(x)\ dx$ l'ensemble des primitves de g.

Exemple.

$$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + Cste (= \{x \mapsto \frac{x^3}{3} + C | C \in \mathbb{R}\})$$

Primitives usuelles

Soit $b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\},\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$f(x)$	$\int f(x)\ dx$
b	$bx + Cste$
ax	$a\frac{x^2}{2} + Cste$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + Cste$
$\frac{1}{x}$	$ln
$\cos(x)$	$\sin(x) + Cste$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + Cste$
e^x	$e^x + Cste$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + Cste$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + Cste$

B) Intégrales

1) Formule de somme

- $\int (g_1(x) + g_2(x))\ dx = \int g_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx$

Exemple. $\int (2x^2 + 1)\ dx = \frac{2x^3}{3} + x + Cste$

- $\int \lambda g(x)\ dx = \lambda \int g(x)\ dx$

  Remarque. On a pas de formule pour le produit (IPP)ni pour le quotient... On a pas on plus de formule pour la composée (*changement de variable*)

2) Calcul intégral

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (continue) $\int_a^b g(t)dt$ = aire algébrique (avec signe) entre le graphe de g et l'axe des abscisses entre a et b

Schéma de la correspondance entre intégrale et aire algébrique $\int_a^b g(t)dt = A_1 - A_2 + A_3$

Remarque. Lorsqu'il y a des bornes, $\int_a^b g(t)dt \in \mathbb{R}$

Exemple. $\int_0^1 x\ dx$ *Schéma de int^1_0 x dx*

$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$

Schéma de int^1_-1 x dx $\int_{-1}^1 x\ dx = A_2 - A_1$

C) Lien primitives et intégrales

Théorème. (Théorème fondamental de l'analyse) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et soir G une primitive de g. Alors $\int_a^b g(t)dt = [G(t)]_{t=a}^{t=b} = G(b) - G(a)$ ■

Exemple. $\int_0^1 x^2\ dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$ *Schéma correspondant*

$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ dx = [\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} = \sin(\pi/2) = 1$ *Schéma correspondant*

Corollaire Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors $\forall c \in [a, b]$,

$$G_c : \begin{array}{c} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_c^x g(t)\ dt \end{array}$$

est une primitive de g.

D) Méthodes de calcul d'une intégrale

1) Chasles

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b g(t)\ dt = \int_a^c g(t)\ dt + \int_c^b g(t)\ dt$$

2) Utiliser les symétries

- Si f pair $\forall a > 0$

  $$\int_0^a f(x)\ dx = \int_{-a}^0 f(x)\ dx$$

  Schéma d'une fonction paire

  Donc

  $$\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$$

- Si f impaire, $\forall a > 0$

  $$\int_0^a f(x)dx = -\int_{-a}^0 f(x)\ dx$$

  Schéma d'une fonction impaire

  Donc $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0$

  Exemple $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\ dx = 0$

- On peut utiliser d'autres "symétries" comme la périodicité (exemple avec cos et sin)

3) Changement de variable

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

Rappel des fonctions bijectives. $f : x \to y$ bijective si $\forall y \in Y$, $\exists! x \in X$ tq $f(x) = y$ $f : [c, d] \to [a, b]$ dérivable et bijective (En pratique on vérifie que $u([c, d]) = [a, b]$ et que u est strictement monotone)

$$\boxed{\int_c^d f(u(t))\ u'(t)\ dt = \int_{u(c)}^{u(d)} f(x)\ dx}$$

$$"u' = \frac{du}{dt} \Rightarrow u'\ dt = du"$$

Exemple. $\int_0^{\frac{1}{4}} x e^{x^2}\ dx$

$$u : \begin{array}{c} [0, \frac{1}{2}] \to [0, \frac{1}{4}] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

bijectif et C^1

$u'(x) = 2x$ "$du = 2xdx$" Donc

$$I + \frac{1}{to} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2} 2x\ dx = \frac{1}{2} \int^{u(\frac{1}{2})_{u(0)} e^u\ du} = \frac{1}{2} \int_0^{1_over4} e^u\ du = \frac{1}{2}[e^u]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{4}} - 1)$$

Exemple. Soit $\int_0^{1/4} \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$, choisissons $u : \begin{array}{c} [0, \frac{1}{4}] \to [\frac{1}{2}, 1] \\ x \mapsto 1 - \sqrt{x} \end{array}$

Schéma de u

u est strictement décroissante, $u([0, \frac{1}{4}]) = [\frac{1}{2}, 1]$ et $u'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

Donc

$$J = -2 \int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x})(\frac{-dx}{2\sqrt{x}})$$

$$= -2 \int_{u(0)}^{u(1)} ln(u)\ du = -2 \int_1^{\frac{1}{2}} ln(u)\ du = 2 \int_{1/2}^1 \ln u\ du$$

$$= 2[u \ln(u) - u]_{1/2}^1 = 2\Big(-1 - (\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2})\Big) = \boxed{ln(2) - 1}$$

4) Intégration par parties (IPP)

Rappel.

$$(uv)' = u'v + uv' \int (uv)' = \int u'v + \int uv'$$

Donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\ dx + \int_a^b u(x)v'(x)\ dx$$

Donc $\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx}$

Exemple.

$$\int_0^1 xe^x\ dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ dx$$

Prenons $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

Donc $I = e - \int_a^1 e^x\ dx = e - \big[e^x\big]_0^1 = e - (e-1) = \boxed{1}$

Exemple.

$$J = \int_0^{\pi/2} (x^2+1)\cos(x)\ dx$$

Prenons $u(x) = \sin(x)$, $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = x^2+1$ et $v'(x) = 2x$

Donc $J = \Big[(x^2+1)\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\ dx = \frac{\pi^2}{1} + 1 - 2\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\ dx = \boxed{1}$

Prenons $u(x) = -\cos(x)$, $u'(x) = \sin(x)$, $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(x)\ dx = \Big[-xcos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Donc $\boxed{J = \dfrac{\pi^2}{4} - 1}$

5) Décomposition en éléments simples

- **But.** intégrer des fonctions de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynôes (on appelle ça des fonctions rationnelle en x)
- **Étape 1.**
  - si le degré $P <$ le degré de Q, alors on ne fait rien
  - si le degré $P \geq$ le degré de Q, on va se ramener à une fraction rationnelle $\frac{\widetilde{P}}{\widetilde{Q}}$ avec la décomposition $P <$ le degré de Q Pour cela, on fait la division euclidienne de P par Q. C'est-à-dire $P = LQ+R$ avec L et R deux polynômes tq degré $R <$ degré Q Ansi $\frac{P}{Q} = L + \frac{R}{Q}$ En pratique, comment trouve-t-on L et R ?

  Exemple $P = X^5 + X^4 - X^2 + 1$
  $Q = X^2 - 1$
  Division euclidienne de P par Q
  Donc $P(x) = \underbrace{(X^3 + X^3 + X)}_{L(X)}\underbrace{(X^2-1)}_{Q(X)} + \underbrace{R(X)}_{X+1}$