Chapitre 4 - Étude d'une fonction d'une variable réelle

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 5 Octobre 2018

A) Fonctions usuelles

- Fonctions **affines** : $\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad = \\ x \mapsto ax + b = \end{array}$

  Exemple. [Schéma d'une fonction affine]

- Fonctions **puissances** : $\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} = \\ x \mapsto x^n = \end{array}$

  Exemples. [Schéma de fonctions puissances]

  Si n pair, $x \mapsto x^n$ est une fonction **paire** $(\forall, f(-x) = f(x))$

  Si n impair, $x \mapsto x^n$ est une fonction **impaire** $(\forall, f(-x) = -f(x))$

- Fonctions **sin** : $\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad = \\ x \mapsto sin(x) = \end{array}$

- Fonction **cos** : $\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad = \\ x \mapsto cos(x) = \end{array}$

Exemples. [Schémas de fonctions sin et cos]

sin et cos sont 2π-périodiques $(f(x + 2\pi) = f(x))$

sin impaire

cos paire

- Fonctions **exponentielle** : $\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} = \\ x \mapsto e^x = \end{array}$

- Fonction **ln** : $\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} = \\ x \mapsto ln(x) = \end{array}$

  exp et ln sont des fonctions **réciproques** l'une de l'autre. C'est-à-dire : - $\forall x > 0,\ e^{ln(x)} = x$
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ ln(e^x) = x$

Exemples. [Schémas de fonctions exponentielle et log]

- Fonctions **puissance** généralisées : $\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \qquad\qquad = \\ x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha ln(x)},\ \alpha \in \mathbb{R}^+ = \end{array}$

Exemple. $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ [Schéma de fonctions puissance]

B) Dérivation

Définition. $F : I \to \mathbb{R}, a \in I$ - f est **dérivable en a** si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite quand $h \to 0$. Cette limite est alors noté $f'(a)$. - f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I.

Exemple. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} = \\ x \mapsto x^2 = \end{array} a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= 2a + h \underset{h \to 0}{\to} 2a \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$; ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

Exemple. Code LaTeXpour deux choses en-dessous : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x)$

Remarque. - f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a *Exemple.* Une fonction non continue en 0 donc non dérivable en 0 [Schémas]

1) Interprétation géométrique

[Schéma taux d'accroissement / tangente]

$f'(a) =$ coefficient directeur de la tangente au graphe en a

a) Équation de la tangente

Si $(x, y) \in$ Tangente,

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a) \Rightarrow \boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

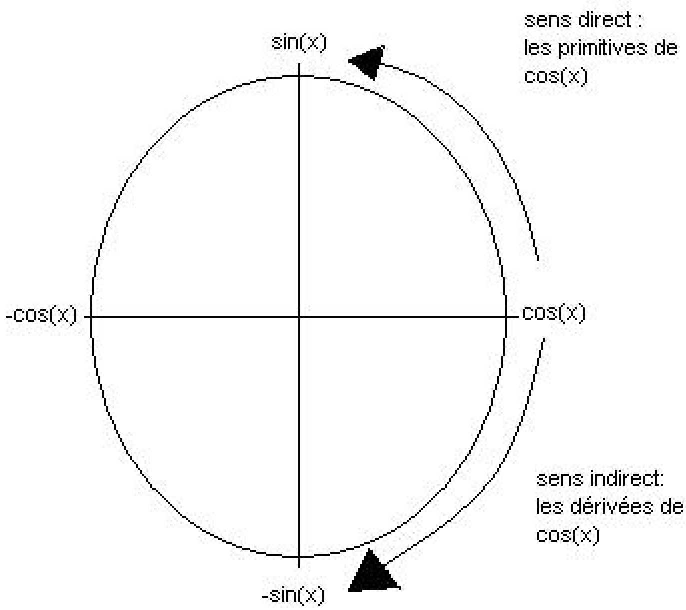
2) Calcul de dérivées

a) Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
b	0
ax	a
$n \in \mathbb{Z},\ x^n$	nx^{n-1}
e^x	e^x
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$sin(x)$	$cos(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

Exemple. $\begin{array}{l} F : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$ non dérivable en 0

Figure 1: Sens des dérivées et primitives de sin et cos



b) Formules de somme, produit, quotient

Soient u, v deux fonctions dérivables :

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(\lambda u)' = \lambda u'(\lambda \in \mathbb{R})$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u - v - uv'}{v^2}$$

Exemple. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

c) Composée de fonctions

Soient u, v deux fonctions : $u \circ v(x) = u(v(x))$

Exemple.

$$u : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$$

$$v : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array}$$

$$f = u \circ v(x) = u(v(x)) = u(x^2+1) = e^{x^2+1}$$

Dérivée d'une composée : $(u \circ v)' = (u' \circ v)v'(x)$

Exemple. $f'(x) = (u' \circ v)(x)v'(x) = e^{v(x)}v'(x) = (e^{x^2+1})(2x) = 2xe^{x^2+1}$, sachant que $u'(x) = e^x$

Applications.

Forme 1	Forme 2
$(u^n)'$	$nu^{n-1}u'$
e^u	$u'e^u$
$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$cos(u)$	$-sin(u)u'$
$sin(u)$	$cos(u)u'$

d) Théorèmes importants

Théorème (lien dérivée et variation). Soit $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ dérivable - $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Leftrightarrow F$ est strictement **croissante** sur I - $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Leftrightarrow F$ est strictement **décroissante** sur I - $\forall x \in I, f'(x) = 0 \Leftrightarrow F$ est **constante** sur I

Exemple. $f(x) = (x^3+1)^7 = u \circ v(x)$ avec $u(x) = x^7,\ u'(x) = 7x^6,\ v(x) = x^3+1,\ v'(x) = 3x^2$ Alors $f'(x) = u'(v(x))v'(x) = 7(x^3+1)3x^2 = \overset{>0}{21x^2} \times \overset{>0}{(x^3+1)^6}$

[tableau de variation]

Théorème (TVI ou Théorème des Valeurs Intermédiaires). Soit $f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ Alors $\exists x \in [a,b]\ tq\ f(x) = y$

Exemple.

$$x^7 + x + \pi$$
$$f'(x) = 7x^6 + 1 > 0$$

Donc f strictement croissante

[tableau de variation]

Par le TVI, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq $x_0^7 + x_0 + \pi = 0$ et comme f est strictement croissante x_0 est unique

Théorème (Rolle).

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - f continue sur $[a,b]$ - f dérivable sur $]a,b[$ - $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$

[Graphe d'une fonction qui respecte le théorème de Rolle]

Théorème (TAF ou Théorème des Accroissements Finis).

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - f continue sur $[a,b]$ - f dérivable sur $]a,b[$

Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

[Graphe d'une fonction qui respecte le TAF]

Inegalité des accroissements finis

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - f continue sur $[a,b]$ - f dérivable sur $]a,b[$ - $\exists m, M\ tq\ m \leq f'(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$

Alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

C) Développements limités

1) Formule de Taylor Young

Soit $f \in C^n(I,\mathbb{R})$ (c'est-à-dire n fois dérivable et $F^{(n)}$ continue) et $a \in I$,

Alors $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \overbrace{o(h^n)}^{=h^n\epsilon(h)}$

Remarques. - $o(h^n)$: négligeable devant h^n quand $h \to 0$ - $\epsilon(h)$: fonction qui tend vers 0 quand $h \to 0$

Exemple. $f(x) = e^x$ et en 0 (pour toutes ces équations) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(X^n)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

2) Développements limités classiques en 0

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Remarques. On peut passer d'une équation à l'autre : - (1) à (2) : en faisant $x \mapsto -x$ - (2) à (3) : en faisant la dérivée de (2) - (4) à (1) et (2) : cas particuliers de (4)

Exemple.

Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

$$e^x = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 + x + x^2 + o(x^2) - 1}{x}$$

$$= 1 + x + o(x) \underset{x\to 0}{\to} 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Exemple. Développement limité de $f(x) = \frac{1}{2-e^{x^2}}$ en 0 :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Donc $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-e^{x^2}} &= \frac{1}{2-(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4))} \\
&= \frac{1}{1-(x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4))} \underset{x\to 0}{\to} 0 \\
\frac{1}{1-v} &= 1 + v + v^2 + o(v^2)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-e^{x^2}} &= 1 + \big(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\big) + \big(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\big)^2 + \overset{o(x^4)}{o\Big(\big(x^2 + \frac{x^4}{2}\big)^2\Big)} \\
&= 1 + x^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x^2 + \frac{3}{4}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exemple. Développement limité en 0 de $\frac{ln(1+x^2)}{x^3+x^2}$

$$\begin{aligned}
&= ln(1+x^2) + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} \\
ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\
\text{Donc } ln(1+x^2) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \big(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\big)\frac{1}{x}\big(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\big) \\
&= (x - \frac{x^3}{2} + o(x^3))(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)) \\
&= x - x^2\big(\frac{-1}{2} + 1\big)x^3 + o(x^3) \\
&= x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3) Quelques dl en plus

- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-cos(x)}{x^2}$

$$e^u = 1 + u + u^2\ 2 + o(u\check{s})$$

$$\text{Donc } e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4\ over 2 + o(x^4)$$

$$\text{Et } cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\text{Ainsi } e^{x^2} - cos(x) = \frac{3}{2}x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{24})x^4 + o(x^4)$$

$$\text{Donc } \frac{e^{x^2} - cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Donc } \frac{e^{x^2} - cosx}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} \frac{3}{2}$$

- Donner le dl en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{2e - e^x}$

$$f(1+h) = \sqrt{2e + e^{1+h}} = \sqrt{2e + ee^h}$$

$$\text{Or } e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

$$\text{Donc } f(1+h) \underset{h\to 0}{=} \sqrt{e}\sqrt{2 + 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)} = \sqrt{e}\sqrt{3 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)}$$

$$= \sqrt{e}\sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{18} + o(h^3)}$$

$$\text{Or } \sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}u^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}u^3 + o(u^3) = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$$

$$\text{Donc } f(1+h) = \sqrt{3e}(1 + \frac{1}{2}(\frac{h}{3} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{18}) - \frac{1}{8}(\frac{h}{3} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{18})^2 + \frac{1}{16}(\frac{h}{3} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{18})^3 + o(h^3)$$

$$= \sqrt{3e}(1 + \frac{1}{2}h + (\frac{1}{12} - \frac{1}{24})h^2 + (\frac{1}{36} - \frac{2}{8} - \frac{1}{18} + \frac{1}{16\times 9})h^3) = \sqrt{3e}(1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{24}h^2 + \frac{3}{144}h^3)$$

$$\text{Et enfin } f(1+h) = \sqrt{3e} + \frac{\sqrt{3e}}{2}h + \frac{\sqrt{3e}}{24}h^2 + \frac{3\sqrt{3e}}{144}h^3 + o(h^3)$$