Chapitre 6 - Équations différentielles

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Vendredi 26 Octobre 2018

Introduction

Ici on s'intéresse à des équations où l'inconnue est une fonction y et faisant intervenir les dérivées de y.

Exemple. Solutions pour $y''(t) - y(t) = 0$ (il y en a une infinité) : - $y = 0$ OK - $y(t) = e^t$ OK - $y(t) = e^{-t}$ OK - $y(t) = Ce^t$ OK

1) Équations linéaires du 1^{er} ordre

$$(E)\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

a) Équation homogène

$$(E_H)\ y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

"Idée" pour trouver la solution

$$\begin{array}{rcl} (E_H) & \Leftrightarrow & y' = -ay \\ & \Leftrightarrow & \frac{y'}{y} = -a \\ & \Leftrightarrow & ln(y) = -A + Ctse\ (A \text{ est une primitive de } a) \\ & \Leftrightarrow & y = Cste \times e^{-A} \end{array}$$

Les solutions de (E_H) sont $x \mapsto Ce^{-A(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a.

Exemple. $y' - y = 0$ (E_h)

$$\begin{array}{rcl} y' = y & \Leftrightarrow & \frac{y'}{y} = 1 \\ & \Leftrightarrow & ln(y(x)) = x +\ Cste \\ & \Leftrightarrow & y(x) = Cste \times e^x \end{array}$$

Donc les solutions de (E_H) sont $\{x \mapsto Ce^x |\ \ C \in \mathbb{R}\}$

Exemple. Soit (E_H) $y'(t) - ty(t) = 0$, ici $a(t) = -t$ et une primitive de a est $A : t \mapsto -\frac{t^2}{2}$ Donc les solutions de E_H sont $\{t \mapsto Ce^{\frac{t^2}{2}}\ |C \in \mathbb{R}\}$

Remarque. En général on a :

$$\begin{cases} y' - ay = b \\ y(0) = y_0 \leftarrow \text{ permet d'avoir une unique solution} \end{cases}$$

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) - ty(t) & = & 0 \\ y(0) & = & 4 \end{array} \right.$$

Solutions de (E_H) : $\{t \mapsto Ce^{t^2/2} | \ C \in \mathbb{R}\}$. On cherche donc la solution tq $y(0) = 4$ c'est-à-dire la valeur de C pour que $y(0) = 4$

$$\begin{array}{rcl} y(0 = 4) & \Leftrightarrow & Ce^0 = 4 \\ & \Leftrightarrow & C = 4 \end{array}$$

$\boxed{\text{Donc la solution du problème est : } t \mapsto 4e^{t^2/2}}$

b) Équation avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \ \ (E)$$

- **Étape 1.** Résoudre l'équation homogène associée

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \ (E_H)\{t \mapsto Ce^{-A(t)}\}$$

- **Étape 2.** Les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = \underbrace{y_H(t)}_{\text{solution de } (E_H) \rightarrow \text{ étape 1}} + \underbrace{y_P(t)}_{\text{solution particulière de } (E)}$$

  Il rest donc à trouver une solution particulière. Pour cela on peut utiliser **la méthode de la variation de la constante**.

Méthode de la variation de la constante (pour trouver une solution particulière)

Méthode. On cherche y_P sous la forme

$y_P(t) = C(t)e^{-A(t)}$ alors $y'_P(t) = C'(t)e^{-A(t)} - a(t)C(t)e^{-A(t)}$ et $y'_P(t) + a(t)y_P(t) = C'(t)e^{-A(t)}$ donc on veut $C'(t)e^{-A(t)} =$

Et C est une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$. On trouve ainsi $y_P(t) = C(t)e^{-A(t)}$

Exemple. $y' - y = 2$ (E) 1. Équation homogènes $y' - y = 0$ $y_H(t) = Ce^t$ 2. Solution particulière : on cherche la solution particulière sous la forme $y_P(t) = C(t)e^t$, ainsi $y'_P(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t$ or,

$$\begin{array}{rcl} y'_P(t) - y_P(t) = 2 & \Leftrightarrow & C'(t)e^t = 2 \\ & \Leftrightarrow & C'(t) = 2e^{-t} \end{array}$$

Donc $C(t) = -2e^{-t}$ convient et

$$\begin{array}{rcl} y_P(t) & = & C(t)e^t \\ & = & (-2e^{-t})e^t \\ & = & -2 \text{ convient} \end{array}$$

Donc les solutions de (E) sont

$$\{t \mapsto \frac{Ce^t}{y_H(t)} - \frac{2}{y_P(t)} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Exemple. $y'(t) - ty(t) = 2t$ 1. Équation homogènes

(E_H) $y'(t) - ty(t) = 0 y'(t) = ty(t) \Leftrightarrow \dfrac{y'(t)}{y(t)} = t \ln(y(t)) = \dfrac{t^2}{2} + Cste y(t) = Ce^{t^2/2}$ Ainsi $y_H(t) = Ce^{t^2/2}$

2. Solution particulière On cherche $y_P(t) = C(t)e^{\frac{t^2}{2}}$

$$y_P'(t) = C'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + tC(t)e^{\frac{t^2}{2}}$$

Donc $2t = y_P'(t) - ty_p(t) = C'(t)e^{\frac{t^2}{2}}$ Donc $C'(t) = 2te^{\frac{-t^2}{2}}$ Donc $C(t) = -2e^{\frac{-t^2}{2}}(+Cste)$ Ainsi

$$\begin{array}{rcl} Y_P & = & C(t)e^{\frac{t^2}{2}} \\ & = & (-2e^{\frac{-t^2}{2}})e^{\frac{t^2}{2}} \\ & = & -2 \end{array}$$

Donc les solutions de (E) sont $\{t \mapsto \underbrace{Ce^{t^2/2}}_{y_H(t)} - \underbrace{2}_{y_P(t)} \mid C \in \mathbb{R}\}$

D'autres méthodes pour trouver une solution particulière

Ces méthodes ne marchent pas tout le temps, et seulement quand a **est constant**.

- Si $b(t) = P(t)$, alors on peut chercher $y_P(t) = Q(t)$ (= polynôme en t avec $d\check{r}Q = d\check{r}P$)
- Si $b(t) = \underbrace{P(t)}_{\text{polynôme en } t} e^{\lambda t}$ alors on peut chercher $y_P(t) = Q(t)e^{\lambda t}$

$$\begin{array}{lll} d\check{r}Q = d\check{r}P & \text{si} & \lambda \neq -a \\ d\check{r}Q = d\check{r}P + 1 & \text{si} & \lambda = -a \end{array}$$

Exemple. Soit (E) $y'(t) + y(t) = (1+t)e^{2t}$, on cherche $y_P(t)$ sous la forme

$$y_P(t) = (at+b)e^{2t}$$

$$\begin{array}{rcl} y_P'(t) & = & ae^{2t} + 2(at+b)e^{2t} \\ & = & (2at + (a+2b))e^{2t} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y_P'(t) + y_P(t) & = & (3at + (a+3b)) \\ & = & (2tt) \end{array}$$

Donc

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3}(2-a) = \frac{1}{3}(\frac{6}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{5}{9} \end{cases}$$

Donc $\boxed{y_P(t) = \Big(\dfrac{t}{3} + \dfrac{5}{9}\Big)e^{2t}}$

Exemple. Soit $y'(t) - y(t) = (2t + t^2)e^t$, Chercher une solution particulière

$$y_P(t) = Q(t)e^t$$

on est danc le cas ou "$\lambda = -a$"

Donc $y_P(t) = (a + bt + ct^2 + dt^3)e^t$

$$\begin{array}{rcl} y_P' & = & (b + 2ct + 3dt^2)e^t + (a + bt + ct^2 + dt^3)e^t \\ & = & \Big((a+b) + (2c+b)t + (3d+c)t^2 + dt^3\Big)e^t \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_P'(t) - y_P(t) &= (b + 2ct + 3dt^2)e^t \\ &= (2ttt^2)e^t \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} b = 0 \\ 2c = 2 \\ 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1/3 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et enfin $\boxed{y_P(t) = (t^2 + \frac{t^3}{3})e^t}$

Remarque. Si $b(t) = P(t)cos(\omega t),\backslash$ Il faut se rappeler que $cos(\omega t) + isin(\omega t) = e^{i\omega t}$

On cherche alors $y_P(t) = Q(t)e^{i\omega t}$ solution de $y'(t) + ay(t) = P(t)e^{i\omega t}$

Ainsi, - $Re(y_P(t))$ est solution de $y'(t) + ay(t) = P(t)\cos(\omega t)$ - $Im(y_P(t))$ est solution de $y'(t) + ay(t) = P(t)sin(\omega t)$

Exemple. Trouver la solution de (E) : $\begin{cases} y' - 2y = e^{2x} \\ y(0) = 1 \\ t \end{cases}$

- Solution homogène : $y_H' - 2y_H = 0 \Leftrightarrow y_H(x) = \lambda e^{2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
- Solution particulière : on peut chercher y_P sous la forme :

$$\begin{array}{lcl} y_P(x) = (ax + b)e^{2x} & : & -2 \\ y_P'(x) = (2ax + (a + 2b))e^{2x} & : & 1 \\ \rightarrow y_P(x) - 2y_P(x) = ae^{2x} & \Rightarrow & a = 1 \end{array}$$

  ainsi, $y_P(x) = xe^{2x}$ convient et les solutions de $y' - 2y = e^{2x}$ sont $\{x \mapsto (\lambda + x)e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Cherchons maintenant les solutions tel que $y(0) = 1 \Leftrightarrow (\lambda + 0)e^{-2\times 0} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$. Donc la solution du système (E) est $\boxed{y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1 + x)e^{2x} \end{array} \right.}$

Principe de superposition

Comment trouver une solution particulère de (E) $y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t) + b_2(t)$?

On considère

$$(E_1) \;\; y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)(E_2) \;\; y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$$

On cherche alors : - y_1 solution particulière de (E_1) - y_2 solution particulière de (E_2)

Alors $y_P = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E)

Exemple. (E) $y' - 2y = e^{2x} + e^{3x}$

Chercher une solution particulière :

$$(E_1) \;\; y' - 2y = e^{2x}(E_2) \; y' - 2y = e^{3x}$$

- Une solution particulière de (E_1) est $y_1(t) = xe^{2x}$
- Cherchons une solution particulère de (E_2) : On cherche $y_2(x) = Ce^{3x}$

$$\begin{array}{rclcl} y_2(x) & = & Ce^{3x} & : & -2 \\ y_2'(x) & = & 3Ce^{3x} & : & 1 \\ \rightarrow y_2'(x) - 2y_2(x) & = & Ce^{3xa} & \Rightarrow & C = 1 \end{array}$$

  Ainsi, $y_2(x) = e^{3x}$, donc une solution particulière pour (E) est :

$$\begin{aligned} y_P(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ &= xe^{2x} + e^{3x} \end{aligned}$$

2) Équations differentielles d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E)\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

Comme d'habitude les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \underbrace{y_H(t)}_{\text{sol. de } (E_H)} + \underbrace{y_P(t)}_{\text{sol. part. de } (E)}$ où (E_H) est l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Solution homogène

Pour résoudre (E), on passe par le **polynôme caractéristique** : $P(r) = ar^2 + br + c$ (ici r est la variable) et on cherche alors les racine de ce polynôme.

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Cas 1 $(\Delta > 0)$: r_1 et r_2 sont les deux racines réelles distinctes

  Alors, les solutions de (E_H) sont :

$$\boxed{y_H(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- Cas 2 $(\Delta = 0)$: une racine réelle double r_0

  Alors, les solutions de (E_H) sont :

$$\boxed{y_H(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Cas 3 $(\Delta < 0)$: $z_1 = r + i\omega$ et $z_2 = r - i\omega$ sont les deux racines complexes distinctes

  Alors, les solutions de (E_H) sont :

$$\boxed{y_H(t) = \lambda_1 e^{rt}\cos(\omega t) + \lambda_2 e^{rt}\sin(\omega t)} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple. $y'' - y = 0$ Polynôme caractéristique : $P(r) = r^2 - 1$

$\Delta > 0$ et les racines de P sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$

Les solutions de E_H sont de la forme

$$\boxed{y_H(t) = \lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t}} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple. (E_H) $y'' + y = 0$

Polynôme caractéristique : $P(r) = 1 \times r^2 + 0 \times r + 1$

$\Delta < 0$ et les deux racines complexes de P sont $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ $(r = 0$ et $\omega = 1)$

Les solutions de E_H sont de la forme

$$\boxed{y_H(t) = \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Solution particulière

$$(E)\ ay'' + by' + cy = d(t)$$

- Il existe une méthode de variation de la constante (voir sur Unisciel)
- Si $d(t) = P(t)e^{\lambda t}$ On cherche alors $y_p(t)$ sous la forme $y_p(t) = \underset{\text{polynôme en t}}{Q}(t)e^{\lambda t}$ avec

$$\begin{cases} d\check{r}Q = d\check{r}P & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine du polynôme caractéristique} \\ d\check{r}Q = d\check{r}P+1 & \text{si } \lambda \text{ est racine simple du polynôme caractéristique} \\ d\check{r}Q = d\check{r}P+2 & \text{si } \lambda \text{ est racine double du polynôme caractéristique} \end{cases}$$

Exemple. $y'' - y = e^{-t}$

- solution homogène
$$y_h(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^t$$
- solution particulière On cherche y_p sous la forme

$$\begin{array}{rcll} y_P(t) & = & (at+b)e^{-t} & : \ -1 \\ y_P'(t) & = & (-at+(a-b))e^{-t} & : \ 0 \\ y_P''(t) & = & (at+(-2a+b))e^{-t} & : \ 1 \\ \Rightarrow\ y_P''(t) - y_P(t) & = & -2a\ e^{-t} & \end{array}$$

Donc y_P solution $\Leftrightarrow -2a = 1 \Leftrightarrow a = 1$

Ainsi $y_P(t) = \frac{-1}{2} te^{-t}$ convient.

Les solutions de (E) sont :

$$\boxed{\{t \mapsto \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^t - \frac{1}{2} t\ e^{-t} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}}$$

- Si $d(t) = P(t)e^{rt}\cos(\omega t)$ (ou $P(t)e^{rt}\sin(\omega t)$) on regarde alors

$$(\widetilde{E})\ ay'' + by' + cy = P(t)e^{(r+i\omega)t}$$

On cherche alors une solution particulière comme dans le cas précedent avec $\lambda = r + i\omega$

Ob obtient alors $\widetilde{y}(t) = Q(t)e^{(r+i\omega)t}$

Alors

- $y_P(t) = Re(\widetilde{y}(t))$ donne une solution particulière de
$$ay'' + by' + cy = P(t)e^{rt}\cos(\omega t)$$
- $y_P(t) = Im(\widetilde{y}(t))$ donne une solution particulière de
$$ay'' + by' + cy = P(t)e^{rt}\sin(\omega t)$$

Remarque. On a aussi un principe de superposition :

Pour trouver une solution de $ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t)$ on fait la somme d'une solution particulière de $(E_1)\ \ ay'' + by' + cy + d_1(t)$ et d'une solution particulière de $(E_2)\ \ ay'' + by' + cy + d_2(t)$

Exemple. $y'' + 2y' + y = \cos(t)e^{-t}$

- Solution homogène :

$$\begin{array}{rcl} P(r) & = & r^2 + 2r + 1 \\ & = & (r+1)^2 \end{array}$$

Donc $y_H(t) = (\lambda t + \mu)e^{-t}$

- Solution particulière :

$$(\widetilde{E})\ y'' + 2y' + y = e^{(-1+i)t}$$

$>$ $(-1+i)$ n'est pas racine de P donc on cherche une solution particulière de la forme $\widetilde{y}(t) = ae^{(-1+i)t}$

$$\begin{array}{rrcll} & \widetilde{y}(t) & = & ae^{(i-1)t} & : \ 1 \\ & \widetilde{y}'(t) & = & a(i-1)e^{(i-1)t} & : \ 2 \\ & \widetilde{y}''(t) & = & a(i-1)^2e^{(i-1)t} & : \ 1 \\ \Rightarrow & \widetilde{y}''(t) + 2\widetilde{y}'(t) + \widetilde{y}(t) & = & a(1 + 2(i-1) + (i-1)^2)e^{(i-1)t} & \\ & & = & a(1 + (i-1))^2e^{(i-1)t} & \\ & & = & ai^2e^{(i-1)t} & \\ & & = & -ae^{(i-1)t} & \end{array}$$

Ainsi une solution particulière de $(\widetilde{E})$ est $\widetilde{y}(t) = -e^{(i-1)t}$

Ainsi, une solution particulière de (E) est