

# Chapitre 1 - Logique mathématique

Manel TAYACHI (cours) - Mica MURPHY (note) - Antoine SAGET (note)

Lundi 1er Septembre 2018

## A) Fondements

- On part d'un petit nombre d'affirmations, appelées axiomes, supposées vraies *à priori* -> les cinq postulats d'Euclide
- On définit ensuite la notion de démonstration
- On appelle **théorème** toute affirmation obtenue en fin de démonstration. Une telle affirmation est vraie.
- On constitue ainsi la "vérité" mathématique

## B) Vocabulaire

- **Axiome.** Un axiome est un énoncé supposé vrai *a priori* et que l'on ne cherche pas à démontrer
- **Proposition ou assertion ou affirmation.** Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. Par exemple, "tout nombre premier est impair" et "tout carré de réel est un réel positif" sont deux propositions => cela reste à démontrer.
- **Théorème.** Un théorème est une proposition vraie. Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance.
- **Corollaire.** Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème.
- **Lemme.** Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.
- **Conjecture.** Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.

## C) Logique mathématique

### 1) Calcul propositionnel

#### a) Équivalence logique

**Définition.** Soient P et Q 2 propositions. Elles sont équivalentes si elles sont simultanément vraies et simultanément fausses.

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

*Exemple :*

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

#### b) Négation

**Définition.** Soit  $P$  une proposition. On définit sa négation  $\bar{P}$  par :

$P$	$\bar{P}$
V	F
F	V

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } x \leq y \text{ alors } f(x) \leq f(y)$$

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \leq y \text{ et } f(x) > f(y)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}$$

**Proposition :**  $\overline{\bar{P}} = P$

c) Les connecteurs “et” et “ou”

$P$	$Q$	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$P \vee Q$  Faux si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont faux simultanément ou inclusif

**Proposition.** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions,

$$\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

d) Implication logique

**Définition.** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions,  $P \Rightarrow Q$  est définie par son tableau de vérité :

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On peut penser à plusieurs analogies pour s’aider : un interrupteur et une ampoule ([villemin.gerard.free.fr](http://villemin.gerard.free.fr)), “Si tu parles, je te tue”...

**Théorème.** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions,  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$  (à prouver).

**Théorème.** Si

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

c’est la transitivité.

**Théorème.**  $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

### e) Condition nécessaire et suffisante (CN et CS)

**Définition.** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions. Dire que  $P$  est **nécessaire** à  $Q$  signifie que pour  $Q$  soit réalisé il faut que  $P$  le soit. Cela revient à dire  $Q \Rightarrow P$ .

*Exemple.* “Il y a des nuages” Condition Nécessaire de “Il pleut” : “Il pleut”  $\Rightarrow$  “Il y a des nuages”

**Remarque.**  $P$  peut ne pas être suffisant pour  $Q$  c’est-à-dire on peut avoir  $P$  réalisé sans que  $Q$  ne le soit.

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
CN	CS
il faut	il suffit
seulement si	si

### f) Négation, contraposée et réciproque d’une implication

**Théorème. Négation d’une implication.**

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$$

**Théorème. Contraposée d’une implication.**

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

on dit que  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$  est la contraposée de  $P \Rightarrow Q$

**Définition.** La réciproque de  $P \Rightarrow Q$  est  $Q \Rightarrow P$

## 2) Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

**Définition.** “Pour tous les éléments de  $\mathbb{E}$ , la proposition  $P(x)$  est vraie” s’écrit “ $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$ ”

**Définition.** “Il existe au moins un élément de  $\mathbb{E}$  tel que la proposition  $P(x)$  est vraie” s’écrit “ $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$ ”

- $\exists!$  : il existe un unique
- $\forall$  : quantificateur universel
- $\exists$  : quantificateur existentiel
- La fonction  $f$  est l’identité de  $\mathbb{R}$  :  $f = Id_{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$
- Pour tout point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$ ,  $M$  est sur le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  ssi la distance de  $M$  à  $\Omega$  vaut  $R$  :  $\forall M \in \mathcal{P}, (M \in \mathcal{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow D(M, \Omega) = R, \Omega M = R)$

**Théorème.** Soit  $E$  un ensemble et  $P(x)$  est une proposition dont les valeurs de vérité sont en fonction des éléments  $x$  de  $E$  :

- $(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \overline{P(x)})$
- $(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \overline{P(x)})$