Lógica digital

Las computadoras necesitan almacenar datos e instrucciones en memoria.
Sistema binario: sólo dos estados posibles.
¿Por qué?
Es mucho más sencillo identificar entre solo dos estados.
Es menos propenso a errores

Diseño de circuitos

Circuitos que operan con valores lógicos:
Verdadero = 1
Falso = 0
Idea: realizar diferentes operaciones lógicas y matemáticas combinando circuitos.

Álgebra de Boole

Figura: George Boole (1815-1864).

George Boole, desarrolló un sistema algebraico para formular proposiciones con símbolos.
Su álgebra consiste en un método para resolver problemas de lógica que recurre solamente a los valores binarios:

- verdadero / falso.
- on / off.
- 1 / 0.

Tres operadores:

- AND (y).
- OR (o).
- NOT (no).

Las variables Booleanas **sólo** pueden tomar los valores binarios: 1 ó 0.
Una variable Booleana **representa un bit**.

Definición
bit: se popularizó como una abreviatura de **Binary digIT**.

Operadores básicos: AND

Un operador booleano puede ser completamente descrito usando tablas de verdad.
El operador **AND** es conocido como producto booleano (.). También se lo nota como $\wedge$:

X	Y	X **AND** Y ($X \wedge Y$)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operadores básicos: OR

El operador OR es conocido como suma booleana (+). También se lo nota como $\vee$:

X	Y	X **OR** Y $(X \vee Y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operadores básicos: NOT

El operador NOT se nota con una barra X. Otra forma de notarlo es ¬X.

X	$\overline{X}$ $(\neg X)$
0	1
1	0

Funciones booleanas

Queremos hacer la tabla de verdad de esta función

$$F(x, y, z) = x\bar{z} + y$$

El **NOT** tiene mayor precedencia que el resto de los operadores

El **AND** mayor precedencia que el **OR**

Comenzamos con la operación que tiene mayor precedencia:

x	y	z	$\bar{z}$
0	0	0	**1**
0	0	1	**0**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

Seguimos resolviendo el **AND** usando lo que recién calculamos

x	y	z	$\bar{z}$	$x\bar{z}$
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**0**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**0**

Finalmente hacemos el **OR**

x	y	z	$\bar{z}$	$x\bar{z}$	$x\bar{z}+y$
0	0	0	1	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	0	0	**1**
1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	0	0	**0**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	**1**

Propiedades

Identidad	$1.A = A$	$0 + A = A$
Nula	$0.A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotencia	$A.A = A$	$A + A = A$
Inversa	$A.\overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
Conmutativa	$A.B = B.A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$(A.B).C = A.(B.C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributiva	$A + B.C = (A + B).(A + C)$	$A.(B + C) = A.B + A.C$
Absorción	$A.(A + B) = A$	$A + A.B = A$
de Morgan	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

Identidades: ejemplo de aplicación

- Usando identidades booleanas podemos reducir esta función:
  $F(x, y, z) = (x + y).(x + \overline{y}).\overline{(x.\overline{z})}$

$(x + y).(x + \overline{y}).(\overline{x} + z)$	de Morgan
$(x.x + x.\overline{y} + y.x + y.\overline{y}).(\overline{x} + z)$	Distributiva
$(x + x.\overline{y} + y.x + 0).(\overline{x} + z)$	Idempotencia e inversa
$(x + x.(\overline{y} + y)).(\overline{x} + z)$	Nula y distributiva
$x.(\overline{x} + z)$	Inversa, identidad y nula
$x.\overline{x} + x.z$	Distributiva
$x.z$	Inversa e identidad

Fórmulas equivalentes

Varias fórmulas pueden tener la misma tabla de verdad:

Son lógicamente equivalentes.

En general se suelen elegir las formas **canónicas**

Suma de productos:

F1(x,y,z) = x.y +z.x +y.z

Producto de sumas:

F2(x,y,z) = (x +y).(z +x).(y +z)

Suma de productos

- Es fácil convertir una función a una suma de productos usando la tabla de verdad.
- Elegimos los valores que dan 1 y hacemos un producto (AND) de la fila (negando si aparece un 0)?
- Luego sumamos todo (OR):

	x	y	z	$x\overline{z} + y$	
	0	0	0	0	
	0	0	1	0	
→	0	1	0	1	←
→	0	1	1	1	←
→	1	0	0	1	←
	1	0	1	0	
→	1	1	0	1	←
→	1	1	1	1	←

$F(x, y, z) = (\overline{x}y\overline{z}) + (\overline{x}yz) + (x\overline{y}\overline{z}) + (xy\overline{z}) + (xyz)$

Circuitos booleanos

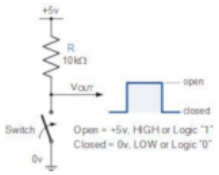
Las computadoras digitales contienen circuitos que implementan funciones booleanas.

Cuando más simple la función más chico el circuito.

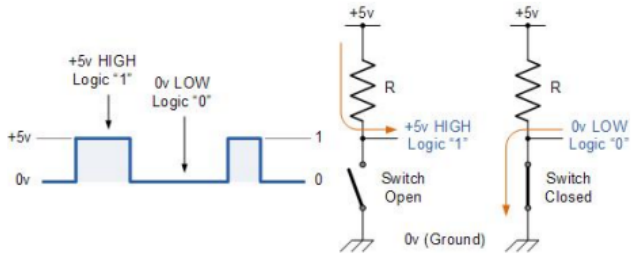
Son más baratos, consumen menos, y ¡son más rápidos!

Podemos usar las identidades del álgebra de Boole para reducir estas funciones y hacer circuitos más simples.

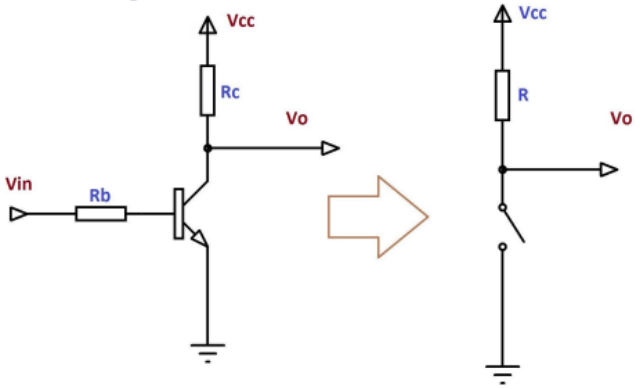
¿Qué hay dentro?



- Ya vimos que hay dos valores: 1 (5V) y 0 (0V).
- Este circuito se comporta como una **llave**.
- Se mira lo qué ocurre en **Vout** (tensión de salida).
- Cuando la llave está cerrada, `Vout` está conectada con la tierra (GROUND - 0 V), tiene un **0** o **False**.
- Cuando la llave está abierta, `Vout` está desconectada y `Vout` tiene **5V** o un **1** o **True**.

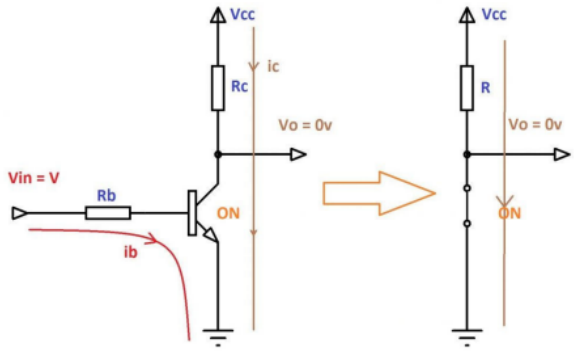


Pero, ¿lo digital dónde está?



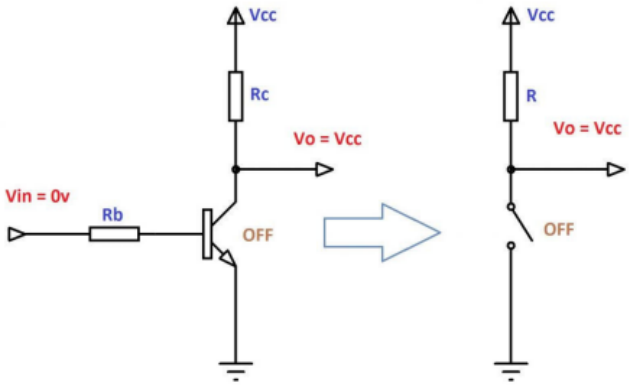
El dispositivo del centro del circuito es un **transistor**, dispositivo que revolucionó nuestra historia en los años 70.
Se lo puede usar como **amplificador** de una señal (lo que entra en Vin).
También puede ser usado como una llave controlada por una señal.

Llave cerrada



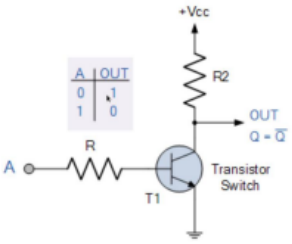
El transistor se satura (se lo conoce como saturated state) cuando se aplica un potencial suficientemente alto en Vin.
Durante esta condición el transistor actúa (casi) como si fuera un cortocircuito.
Circula una corriente que depende de la resistencia.

Llave abierta



El transistor está apagado (se lo conoce también como cut-off state cuando el potencial aplicado a Vin es 0V.
En este estado, el transistor actúa como si fuera un circuito abierto.
No hay circulación de corriente entre VCC y GROUND.

Pero... ¿Qué tiene que ver con la computadora?



- Se mira la señal marcada en `Out`.
- Cuando se aplica un **1** en A, en la salida tenemos un **0**.
- Cuando se aplica un **0** en A, en la salida tenemos un **1**.

Este circuito implementa la **negación** de una variable booleana.

Compuertas lógicas

Definición

Una **compuerta** es un dispositivo electrónico que produce un resultado en base a un conjunto de valores de entrada.

En realidad, están formadas por uno o varios transistores, pero lo podemos ver como una **unidad**.
Los circuitos integrados contienen colecciones de compuertas conectadas con algún propósito.

- Las más simples: AND, OR, y NOT:

X AND Y

X	Y	XY
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X OR Y

X	Y	X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT X

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

- Una compuerta muy útil: el OR exclusivo => XOR.
- La salida es 1 cuando los valores de entrada difieren.

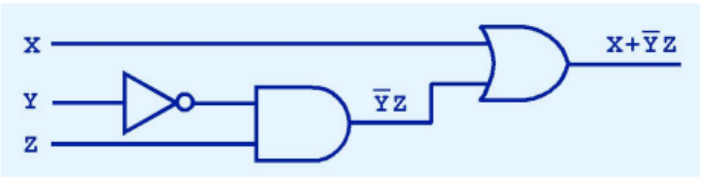
X XOR Y

X	Y	X⊕Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implementación de funciones booleanas

Combinando compuertas se pueden implementar funciones booleanas.

- Este circuito implementa la siguiente función: $F(x, y, z) = x + \bar{y}z$



Compuertas lógicas combinadas

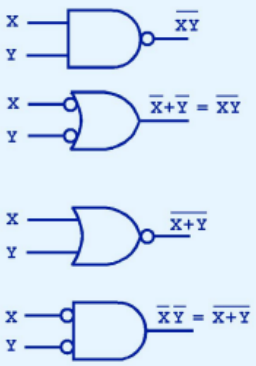
- NAND y NOR son dos compuertas lógicas combinadas.
- Con la identidad de Morgan se pueden implementar con AND u OR.
- Son más baratas y cualquier operación básica se puede representar usándolas cualquiera de ellas (¡sin usar la otra!).

X NAND Y

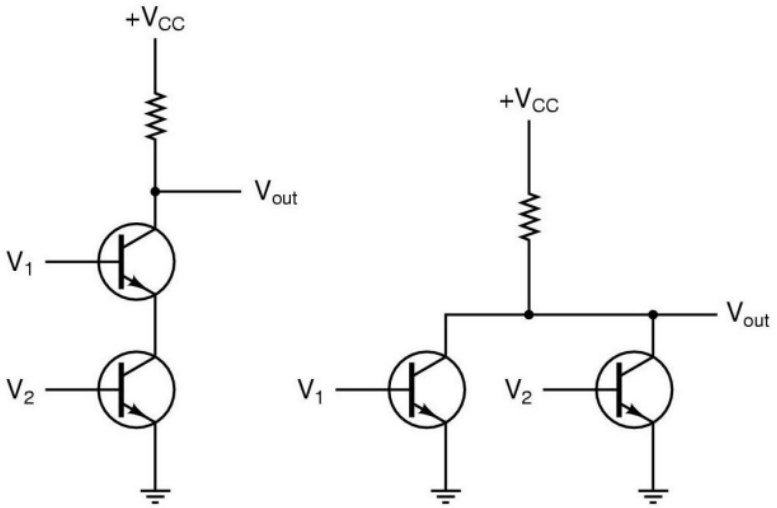
X	Y	X NAND Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

X NOR Y

X	Y	X NOR Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

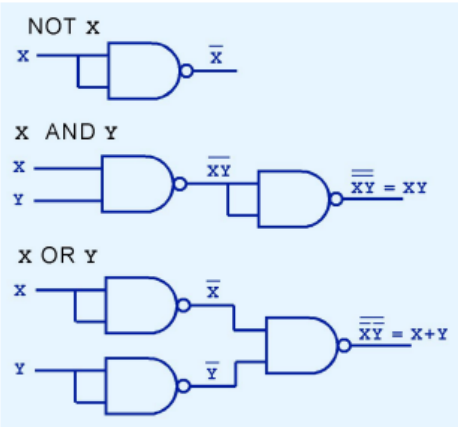


NAND y NOR



Ejemplos

- ➢ NOT usando NAND: simplemente unir las dos entradas.
- ➢ Utilizando solo NAND o NOR se pueden realizar circuitos con la misma funcionalidad que el AND y OR.



Circuitos combinatorios

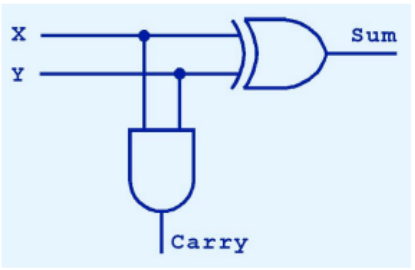
Producen una salida específica al (casi) instante que se le aplican valores de entrada.
Implementan funciones booleanas.
La aritmética y la lógica de la CPU se implementan con estos circuitos.

Sumador

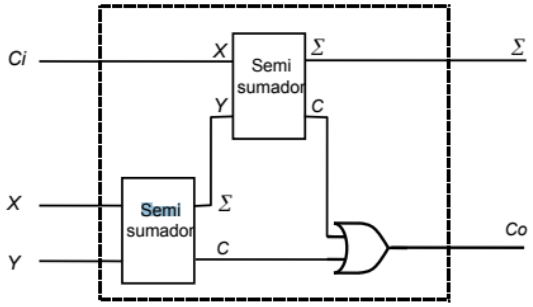
X	*Y*	*Suma*	*carry*
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Semi-Sumador

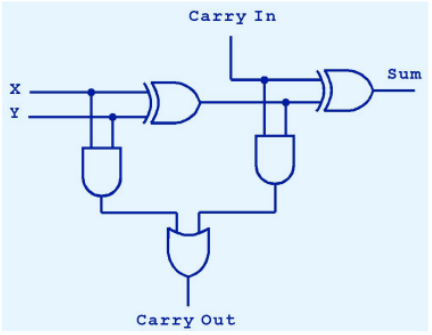
- Podemos usar un XOR para la suma y un AND para el carry.
- A este circuito se lo llama semi-sumador (*half-adder*).



Sumador: estructura interna



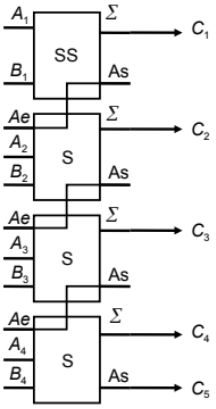
Sumador: estructura interna y tabla de verdad



X	*Y*	*Ci*	*Suma*	*Co*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Sumador de 4 bits

	A_4	A_3	A_2	A_1
+	B_4	B_3	B_2	B_1
C_5	C_4	C_3	C_2	C_1

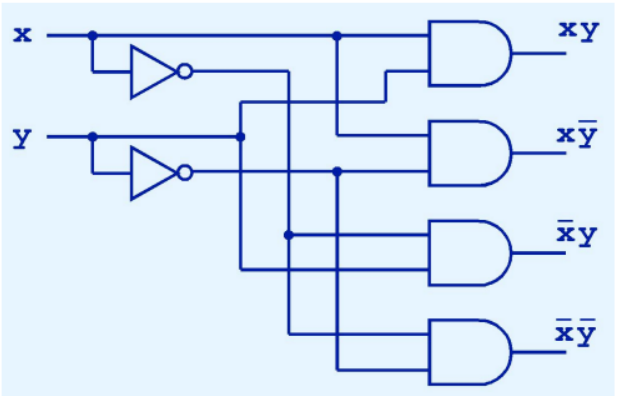


Decodificadores

Los decodificadores de n entradas pueden seleccionar una de 2^n salidas.
Son ampliamente utilizados.
Por ejemplo: Seleccionar una locación en una memoria a partir de una dirección colocada en el bus memoria.

Decodificadores: ejemplo

- Decodificador 2-a-4:

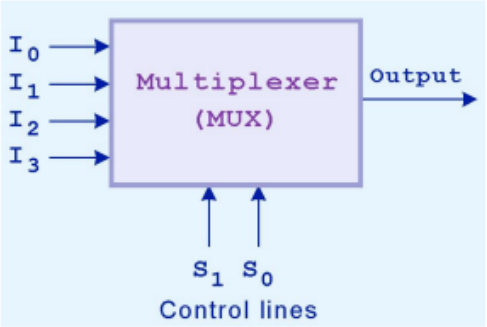


Multiplexores

Selecciona una salida a de varias entradas.
La entrada que es seleccionada como salida es determinada por las líneas de control.
Para seleccionar entre n entradas, se necesitan $\log_2 n$ líneas de control.

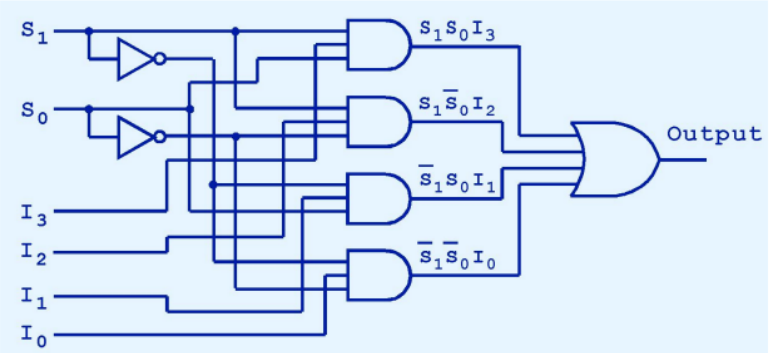
Demultiplexor

Exactamente lo contrario al multiplexor.
Dada una entrada la direcciona entre n salidas, usando $\log_2 n$ líneas de control.



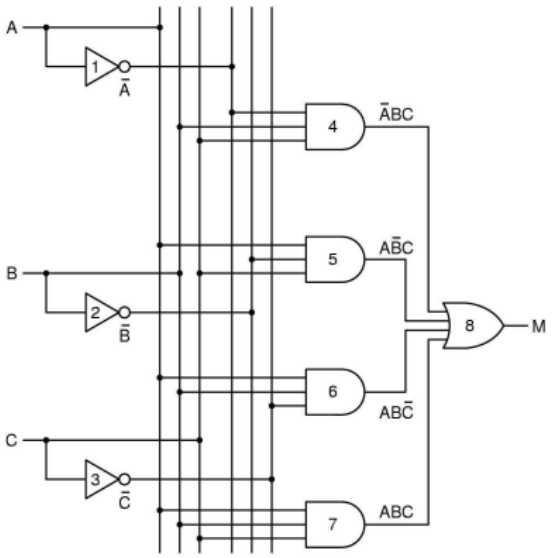
Multiplexor: ejemplo

- Multiplexor 4-a-1:

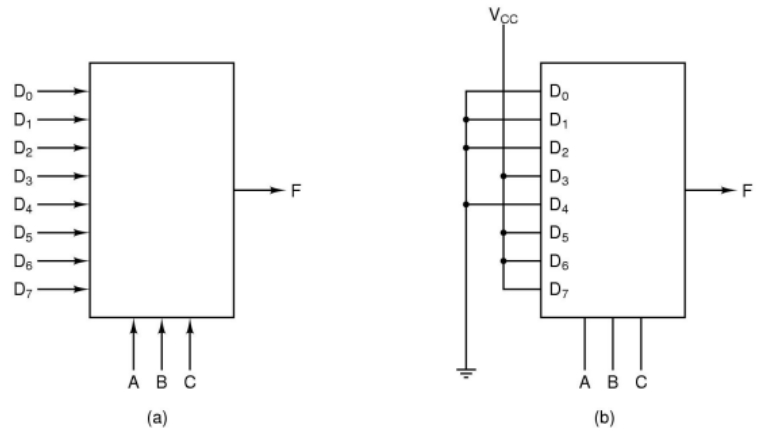


Función mayoría

A	B	C	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

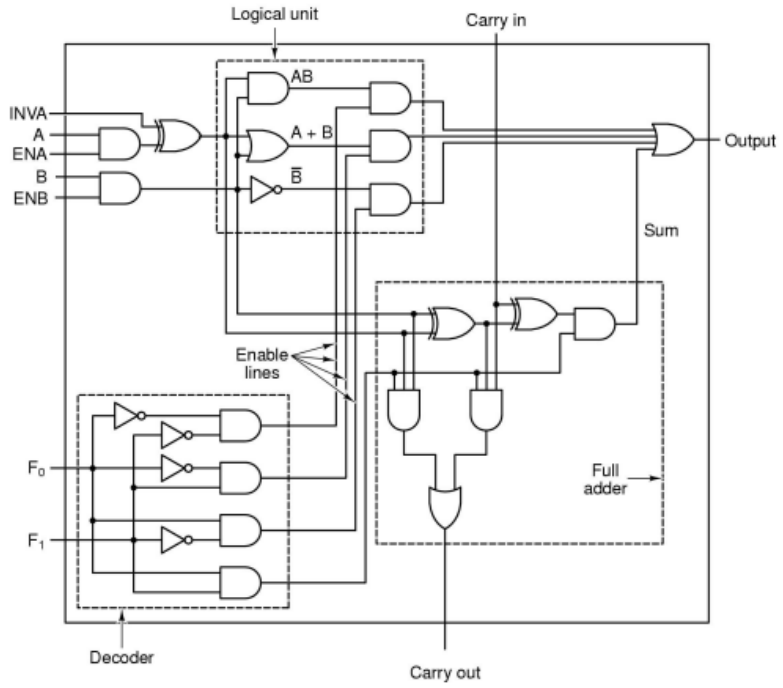


Función mayoría con multiplexor

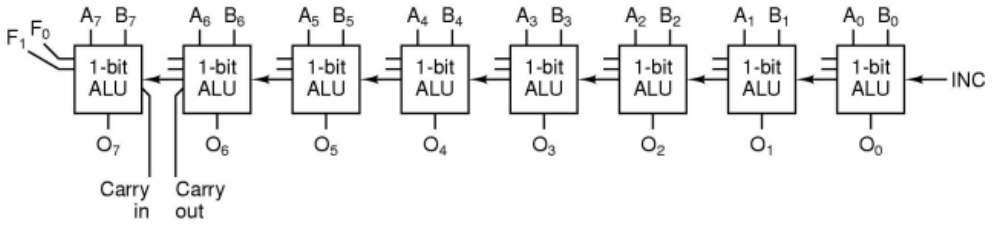


Ejemplo
Construir una ALU de 1 bit.
3 entradas: A, B, carry.
4 operaciones: A.B, A+B, NOT B, Suma(A,B,Carry).
Salidas: Resultado, Carry out.

ALU de 1 bit



ALU de 8 bits



Memoria ROM

Entradas					Salidas							
I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
		.							.			
		.							.			
		.							.			
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

ROM con decoder