

Implementacja wydajnych struktur danych do praktycznych operacji na słowach

(Implementation of efficient data structures
for practical string operations)

Michał Górniak

Praca licencjacka

Promotor: dr Paweł Gawrychowski

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Informatyki

11 września 2020

Streszczenie

...



...

Spis treści

1	Wprowadzenie	7
2	Definicje i formalny opis problemu	11
2.1	Definicje	11
2.2	Formalny opis problemu	12
3	Struktury danych	15
3.1	Wprowadzenie	15
3.2	Rozwiązanie naiwne	15
3.2.1	Opis rozwiązania i implementacji	15
3.2.2	Tabla złożoności czasowych	16
3.3	Drzewa zbalansowane	17
3.3.1	Pomysł na rozwiązanie	17
3.3.2	Drzepce (treaps)	18
3.3.3	Dygresja – utrwalanie struktur danych	22
3.3.4	Wykorzystanie drzepców do rozwiązania problemu	22
3.3.5	Tabela złożoności czasowych	23
3.4	Drzewa parsingów	24
3.4.1	Gramatyka bezkontekstowa	24
3.4.2	Tworzenie drzewa symbolu	25
3.4.3	Dekompozycja context-insensitive	26
3.4.4	Implementacja interfejsu	28
3.4.5	Tabela złożoności	29

4	Analiza wydajności programów	31
---	------------------------------	----

	Bibliografia	33
--	--------------	----

Rozdział 1

Wprowadzenie

Algorytmy tekstowe są niewątpliwie dziedziną algorytmów, która ma wiele praktycznych zastosowań. Wiele programów komputerowych, takich jak edytory programistyczne czy edytory tekstu, operują na tekście oraz bazują na jego ciągłej modyfikacji. Łączy się to najczęściej z potrzebą wykonywania pewnych typów zapytań dotyczących aktualnego stanu tekstu, takich jak wyszukiwanie wystąpień wybranego fragmentu czy porównywanie leksykograficzne dwóch fragmentów tekstu. Z drugiej strony, z algorytmicznego punktu widzenia, na każdy ciąg znaków, nie tylko alfanumerycznych, możemy popatrzeć jak na tekst. W związku z tym możemy jako tekst interpretować chociażby pliki komputerowe zapisane binarnie, stąd też popularnym tematem rozważań naukowców są algorytmy kompresji tekstu.

Przy analizie opisywanych algorytmów, w pierwszej kolejności będziemy zwracać uwagę na ich czas działania, a w drugiej kolejności na zużycie pamięci. Niektóre z analizowanych w pracy algorytmów będą korzystały z liczb losowych. W przypadku takich algorytmów będziemy musieli zdefiniować, jak tak naprawdę szacujemy czas działania takiego programu. Zostanie to dokładniej opisane w jednym z kolejnych rozdziałów pracy.

Opiszmy zatem dosyć wysokopoziomowo analizowany w tej pracy problem. Wyobraźmy sobie, że utrzymujemy w pewnej strukturze danych zbiór słów, gdzie słowem jest po prostu ciąg znaków, niekoniecznie alfanumerycznych. Chcemy móc modyfikować ten zbiór, to znaczy móc realizować następujące operacje:

- dodać do niego nowe słowo,
- złączyć dwa już istniejące w zbiorze słowa,
- wybrać słowo ze zbioru, pociąć je na dwa słowa względem pewnej pozycji, a następnie oba słowa dodać do naszego zbioru.

Za każdym razem gdy prosimy naszą strukturę danych o wykonanie którejś z wyżej wspomnianych operacji, struktura ta wyda nam etykiety nowo dodanych słów. Mo-

żemy sobie wyobrażać, że te etykiety są bardzo małe, bo słowa które mogą powstać w wyniku tworzenia tych operacji, mogą szybko stać się bardzo długie. W każdym momencie możemy również zapytać o coś naszą strukturę. Każde pytanie wygląda tak, że przekazujemy strukturze danych dwie etykiety, a ona może nam odpowiedzieć na jedno z zapytań, dotyczące słów które kryją się za tymi etykietami:

- czy słowa te są równe,
- czy pierwsze ze słów jest mniejsze leksykograficznie od drugiego,
- jak dużo początkowych liter w jednym i drugim słowie jest takich samych.

Z początku może się wydawać, że opisane wyżej operacje nie są zbyt praktyczne. Zobaczmy jednak jak możemy przy ich pomocy realizować niektóre zaawansowane zadania edytora tekstu. Powiedzmy, że chcemy umieć zaznaczać fragment tekstu i go skopiować w inne miejsce lub wyciąć i wkleić w inne miejsce, lub całkowicie usunąć. Możemy też zaznaczać dwa wybrane elementy i pytać czy są takie same lub gdzie jest pierwsza pozycja niezgodności między tymi fragmentami. Opiszę jak przy pomocy operacji naszej struktury danych, można wykonać te zapytania.

Utrzymujemy etykietę tekstu z edytora. Gdy chcemy operować na wybranym fragmencie, to możemy najpierw wykonać dwa cięcia, jedno przed początkiem, a drugie zaraz za zakończeniem i w ten sposób otrzymamy trzy etykiety, oznaczające podział tekstu na:

1. część przed wybranym fragmentem,
2. wybrany fragment,
3. część za wybranym fragmentem.

Teraz usunięcie fragmentu to złączenie części (1) oraz (3) oraz przyjęcie za nową etykietę całego tekstu etykiety z tego złączenia. Kopiowanie fragmentu to cięcie etykiety tekstu w miejscu, gdzie chcemy wkleić wybrany fragment, a następnie zrobienie dwóch złączeń z etykietą (2). Natomiast wycinanie i wklejanie w innym miejscu, to połączenie dwóch poprzednio opisanych sposobów.

Aby realizować zapytania, postępujemy analogicznie. Poprzez cięcia wybieramy etykiety dwóch wybranych fragmentów, a następnie używamy na nich odpowiadającego zapytania z naszego algorytmu. Pierwszą niezgodność to tak naprawdę powiększony o jeden wynik zapytania do struktury o to, jak dużo początkowych liter w jednym i drugim słowie jest takich samych.

Powyższy przykład pokazuje jedno z praktycznych zastosowań interfejsu opisanej struktury danych. Okazuje się również, że wspomniane operacje są w stanie realizować dużo bardziej skomplikowane zapytania dotyczące utrzymywanego zbioru słów. Staje się to dobrą motywacją do analizowania tego problemu.

W kolejnych rozdziałach pracy opiszę dokładnie definicję naszego problemu oraz kilka implementacji struktur danych realizujących podany interfejs. Ważną częścią pracy będzie analiza złożoności czasowej i pamięciowej operacji na zaimplementowanych strukturach. Z drugiej strony postaram się położyć nacisk na rozwiązania technicznych aspektów implementacji, zwłaszcza w tych miejscach, gdzie użyty sposób implementacji odbiega od klasycznego lub żadna implementacja danego algorytmu w ogóle nie istniała.

Na końcu pracy przeanalizuję prawdziwe czasy działania zaimplementowanych struktur, aby porównać je z czasami asymptotycznymi i sprawdzę dla różnych rozmiarów danych oraz zapotrzebowań na wybrane operacje, która z implementacji działa najszybciej, a która zużywa najmniej pamięci. Opiszę również sposób testowania poprawności zaimplementowanych programów.

Rozdział 2

Definicje i formalny opis problemu

2.1 Definicje

Na początek opiszę ogólne definicje używane w algorytmach tekstowych.

Definicja 2.1. *Alfabetem* (z reguły oznaczanym przez Σ) nazywamy skończony zbiór znaków.

Definicja 2.2. *Słowem* nad alfabetem Σ nazywamy skończony uporządkowany ciąg znaków z tego alfabetu. Notacja $w = w_1w_2 \dots w_n$ oznacza słowo w składające się z n znaków odpowiednio w_1, w_2, \dots, w_n . Długość słowa w oznaczamy przez $|w|$.

Przykład 2.2.1. Dla alfabetu $\Sigma = \{a, b\}$, słowami są między innymi a , bba , $baba$, $bbbbbbb$.

Definicja 2.3. Dla alfabetu Σ przez Σ^* oznaczamy zbiór wszystkich słów nad alfabetem Σ , w szczególności słowo puste, oznaczane symbolicznie jako ϵ , a przez Σ^+ oznaczamy $\Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$.

Definicja 2.4. (i, j) -*podśłowem* słowa $w = w_1w_2 \dots w_n$ dla $1 \leq i \leq j \leq n$ nazwiemy słowo $w_iw_{i+1} \dots w_{j-1}w_j$, zapisywane też czasem symbolicznie jako $w_{i\dots j}$.

Definicja 2.5. Słowo u jest *podśłowem* słowa w , jeśli u jest (i, j) -podśłowem słowa w dla pewnych i, j .

Przykład 2.5.1. Podśłowami słowa *bananowy* są między innymi *banan*, *nano*, *nowy*, ale *banowy* nie jest podśłowem słowa *bananowy*.

Definicja 2.6. i -*prefiksem* słowa w nazwiemy $(1, i)$ -podśłowo słowa w , zapisywane też czasem symbolicznie jako $w_{\dots i}$. Przyjmujemy też, że 0-prefiksem jest słowo puste.

Definicja 2.7. Słowo p jest *prefiksem* słowa w , jeśli p jest i -prefiksem słowa w dla pewnego i .

Przykład 2.7.1. Wszystkimi prefiksami słowa *koc* są ϵ , *k*, *ko*, *koc*.

Definicja 2.8. *i-sufiksem* słowa *w* długości *n* nazwiemy jego (i, n) -podśłowo, zapisywane też czasem symbolicznie jako $w_i \dots$. Przyjmujemy też, że $(n + 1)$ -prefiksem jest słowo puste.

Definicja 2.9. Słowo *s* jest *sufiksem* słowa *w*, jeśli *s* jest *i-sufiksem* słowa *w* dla pewnego *i*.

Przykład 2.9.1. Wszystkimi sufiksami słowa *koc* są ϵ , *c*, *oc*, *koc*.

Definicja 2.10. Dla uporządkowanej pary słów (w, v) , ich *konkatenacją* nazwiemy słowo powstałe poprzez sklejenie tych dwóch słów ze sobą zgodnie z kolejnością pary. Konkatenację taką zapisujemy symbolicznie jako *wv*.

Przykład 2.10.1. Konkatenacją słów *nie* oraz *zdrowy* jest słowo *niezdrowy*.

2.2 Formalny opis problemu

W tym podrozdziale sformalizuję opisany we wprowadzeniu problem. Mamy dany ustalony alfabet Σ oraz zbiór \mathcal{S} , który początkowo jest pusty. Chcemy modyfikować zbiór \mathcal{S} i przy dodawaniu do niego nowego elementu zwracać uruchamiającemu program etykietę, która będzie liczbą całkowitą mieszczącą się w słowie maszynowym. Dla etykiety *l*, oznaczmy przez $w(l)$ słowo reprezentowane przez tę etykietę. Chcemy zaimplementować strukturę danych, która realizuje poniższy interfejs:

- `make_string(word)` dla $\text{word} \in \Sigma^+$, aktualizuje

$$\mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{\text{word}\}$$

i zwraca etykietę nowo dodanego słowa,

- `concat(label1, label2)` dla etykiet *label1*, *label2* wcześniej podanych przez program, aktualizuje

$$\mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{w(\text{label1})w(\text{label2})\}$$

i zwraca etykietę nowo dodanego słowa,

- `split(label, position)` dla etykiety *label* wcześniej podanej przez program i pozycji *position* spełniającej $1 \leq \text{position} < |w(\text{label})|$, aktualizuje

$$\mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{w(\text{label})_{\dots \text{position}}, w(\text{label})_{(\text{position}+1) \dots}\}$$

i zwraca parę etykiet nowo dodanych słów,

- `equals(label1, label2)` dla etykiet *label1*, *label2* wcześniej podanych przez program, zwraca wartość logiczną wyrażenia $w(\text{label1}) = w(\text{label2})$,

- `smaller(label1, label2)` dla etykiet `label1, label2` wcześniej podanych przez program, zwraca wartość logiczną wyrażenia $w(\text{label1}) < w(\text{label2})$,
- `lcp(label1, label2)` dla etykiet `label1, label2` wcześniej podanych przez program, zwraca liczbę będącą długością najdłuższego wspólnego prefiksu $w(\text{label1})$ oraz $w(\text{label2})$.¹

¹Nazwa `lcp` wywodzi się od ogólnie przyjętego skrótu od angielskiej nazwy na *najdłuższy wspólny prefiks* (*longest common prefix*).

Rozdział 3

Struktury danych

3.1 Wprowadzenie

W tej części pracy zajmiemy się opisaniem struktur danych zaimplementowanych w folderze `/source/solutions`, teorią stojącą za ich poprawnością i czasem działania oraz szczegółami implementacyjnymi. Niektóre funkcje nie zostały zaimplementowane w sposób optymalny w sensie złożoności obliczeniowej lub pamięciowej. W części z tych przypadków opiszemy porównanie zaimplementowanej metody do metody optymalnej.

Aby kod był spójny z opisem problemu, zdecydowałem się na następujące podejście projektowe. Każdy plik reprezentuje osobną klasę i zawiera swój nagłówek. Zdecydowałem się na takie podejście, aby przeglądanie projektu było wygodniejsze i można było w prosty sposób sięgnąć do implementacji wybranej struktury. Plik `/source/solutions/solution.h` zawiera deklarację klasy wirtualnej `solution`, która realizuje interfejs opisany szczegółowo w poprzednim rozdziale. Dzięki temu przy testowaniu wydajności i poprawności nie trzeba używać żadnych instrukcji warunkowych, tylko korzystać z interfejsu klasy `solution`. Jedynym rozszerzeniem interfejsu względem poprzedniego rozdziału jest dodanie destruktora, który jest niezbędny aby uniknąć wycieków pamięci.

Do reprezentacji słowa użyłem kontenera `std::vector<int>`, a etykietą jest po prostu liczba całkowita typu `int`.

3.2 Rozwiązanie naiwne

3.2.1 Opis rozwiązania i implementacji

Rozwiązanie to zostało zaimplementowane w pliku `/source/solutions/naive.cpp`. Celem tego rozwiązania jest otrzymanie jak najprostszej struktury danych realizu-

jącej nasz interfejs, jednocześnie nie robiąc nadmiernych uproszczeń. Chcemy móc założyć poprawność tego rozwiązania. W tym celu zaimplementowanie rozwiązania nie wykorzystuje żadnych obserwacji, a jedynie naiwnie realizuje podane operacje. Opiszę pokrótce ideę rozwiązania i implementację każdej z operacji.

Utrzymuję listę słów zapisaną w zmiennej `std::vector<std::vector<int>> stream`. Za każdym razem gdy operacja dodaje słowo do zbioru \mathcal{S} , nawet gdy dane słowo jest już w zbiorze, zapisuję je na końcu listy i zwracam indeks elementu pod którym się ono znajduje. W ten sposób otrzymując dwie etykiety mogę łatwo odzyskać słowa, które są pod nimi zapisane. Operacje realizuję zatem w następujący sposób:

- `make_string(word)` Dodaje słowo na koniec listy.
- `concat(label1, label2)` Tworzę nowe słowo poprzez pododawanie liter z drugiego słowa na koniec pierwszego słowa (w odpowiedniej kolejności). Tak powstałe słowo dodaję na koniec listy.
- `split(label, position)` Tworzę dwa nowe słowa i pierwsze `position` liter ze słowa opisanego przez `label` dodaję do pierwszego słowa, a pozostałe do drugiego. Oba te słowa dodaję na koniec listy i zwracam odpowiednie etykiety.
- `equals(label1, label2)` Porównuję dwa słowa operatorem `==` języka C++.
- `smaller(label1, label2)` Porównuję dwa słowa operatorem `<` języka C++.
- `lcp(label1, label2)` Iteruję się jednocześnie po dwóch słowach literka po literce, aż jedno ze słów się skończy lub litery będą różne. Odpowiedzią jest liczba wykonanych kroków w pętli.

3.2.2 Tabla złożoności czasowych

Niech n oznacza długość słowa, które jest podane jako pierwszy argument funkcji (lub długość słowa pod etykietą z pierwszego argumentu). W przypadku funkcji o dwóch argumentach będących słowami lub etykietami, długość drugiego słowa oznaczmy przez m .

W pierwszej tabeli prezentuję opis złożoności czasowej dla funkcji aktualizujących zbiór \mathcal{S} .

Rozwiązanie	<code>make_string</code>	<code>concat</code>	<code>split</code>
Naiwne	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}(n)$

W drugiej tabeli prezentuję opis złożoności czasowej dla zapytań do struktury.

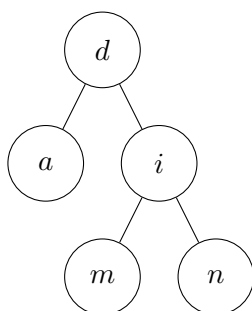
Rozwiązanie	<code>equals</code>	<code>smaller</code>	<code>lcp</code>
Naiwne	$\mathcal{O}(\min(n, m))$	$\mathcal{O}(\min(n, m))$	$\mathcal{O}(\min(n, m))$

3.3 Drzewa zbalansowane

3.3.1 Pomysł na rozwiązanie

Rozwiązanie to korzysta ze struktury zbalansowanych binarnych drzew przeszukiwań binarnych. Przez cały czas będziemy zakładać, że klucze w drzewach są zawsze różne. Załóżmy na chwilę, że dysponujemy implementacją zbalansowanego drzewa przeszukiwań binarnych, która poza podstawowymi operacjami takimi jak tworzenie drzewa ze zbioru kluczy, wstawianie lub usuwanie elementu, dysponuje też dwoma dodatkowymi operacjami:

- mając dane dwa drzewa o wysokościach odpowiednio h_1 i h_2 , spełniającymi warunek, że wszystkie klucze w pierwszym drzewie są mniejsze od wszystkich kluczy w drugim drzewie, potrafi złączyć te dwa drzewa w jedno zbalansowane drzewo w czasie $\mathcal{O}(h_1 + h_2)$,
- mając dane drzewo o wysokości h i parametr k , nieujemny i nie większy niż liczba kluczy w drzewie, potrafi podzielić to drzewo na dwa drzewa zbalansowane, jedno zawierające k najmniejszych kluczy z oryginalnego drzewa, a drugie zawierające pozostałe klucze w czasie $\mathcal{O}(h)$.



Rysunek 3.3.1. Drzewo zbalansowane reprezentujące słowo *admin*.

Możemy wtedy wykorzystać takie drzewo do rozwiązania naszego problemu. Każde słowo będzie reprezentowane przez jedno zbalansowane drzewo. Mając dane drzewo, słowo które ono reprezentuje jest wyznaczane przez kolejność preorder wierzchołków tego drzewa (rysunek 3.3.1). Każdy wierzchołek w drzewie będzie trzymał hasz słowa reprezentowanego przez poddrzewo w nim zawarte. Metody `concat` i `split` zrealizujemy dzięki opisanym wyżej dodatkowym operacjom. Metodę `equals` zrealizujemy dzięki haszom trzymanym w wierzchołkach drzew, a operację `lcp` zrealizujemy poprzez zastosowanie wyszukiwania binarnego po wyniku wraz z użyciem drugiej z opisanej wyżej dodatkowej funkcjonalności drzewa. Metoda `smaller` zostanie zrealizowana przy pomocy metody `lcp`, dzięki niej sprawdzimy ile początkowych liter jest takich samych, a następnie wyznaczymy jakie są litery na pozycji o jeden dalej w obu drzewach i w ten sposób porównamy słowa leksykograficznie.

3.3.2 Drzepce (treaps)

Koncept

Geneza nazwy drzepiec (z angielskiego treap) jest bardzo ciekawa. Pochodzi od połączenia słów drzewo (tree) i kopiec (heap), co wbrew pozorom bardzo trafnie oddaje ideę tego drzewa. Największą jego zaletą jest bardzo mała ilość trudności technicznych towarzyszących implementacji, co sprawia, że ta struktura danych jest bardzo popularna wśród zawodników zawodów algorytmicznych. W szczególności w implementacji tego drzewa nie trzeba używać żadnych rotacji, które są podstawą wielu innych zbalansowanych binarnych drzew przeszukiwań.

Opiszę zatem na czym polega wspomniane wcześniej połączenie drzewa i kopca. Wyobraźmy sobie, że mamy zbiór par postaci $\langle \text{klucz}, \text{priorytet} \rangle$, gdzie wszystkie klucze są parami różne i wszystkie priorytety są parami różne. Chcemy utworzyć drzewo ukorzenione, które w każdym wierzchołku trzyma wartość jednej takiej pary, przy czym:

- patrząc na same klucze drzewo to jest binarnym drzewem przeszukiwań,
- patrząc na same priorytety drzewo to jest kopcem typu maksimum.

Okazuje się, że dla każdego takiego zbioru par istnieje dokładnie jedno drzewo spełniające opisane wymagania. Formułuje to poniższy lemat.

Lemat 3.1. *Mając dany zbiór $\{\langle k_1, p_1 \rangle, \langle k_2, p_2 \rangle, \dots, \langle k_n, p_n \rangle\}$ n par spełniających $k_i \neq k_j$ oraz $p_i \neq p_j$ dla wszystkich $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$, istnieje dokładnie jedno drzepiec spełniający warunki opisane powyżej.*

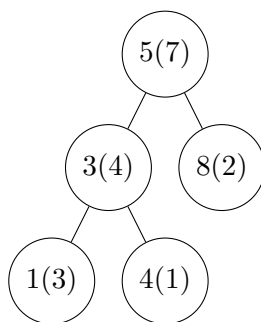
Dowód. Indukcja względem n (silna zasada indukcji).

1° Dla $n_0 = 0$ puste drzewo jest zarówno poprawnym kopcem jak i binarnym drzewem przeszukiwań i jest jedynym takim obiektem.

2° Ustalmy $n > 0$. Chcemy pokazać, że $(\forall_{0 \leq k < n} \mathcal{T}(k)) \implies \mathcal{T}(n)$, gdzie $\mathcal{T}(x)$ jest tezą lematu dla ustalonej liczby naturalnej x . Mamy dany zbiór $\mathcal{P} = \{\langle k_i, p_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\}$. Zauważmy, że z własności $p_i \neq p_j$ dla $i \neq j$ mamy, że istnieje dokładnie jedno takie m ($1 \leq m \leq n$), że $p_m = \max\{p_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, zatem m -ta para musi być korzeniem drzewa, aby nie naruszyć porządku kopcowego. Z drugiej strony z konieczności zachowania porządku binarnego drzewa przeszukiwań wiemy, że lewe poddrzewo musi być drzepcem stworzonym ze zbioru $\mathcal{P}_{\text{left}} = \{\langle k_i, p_i \rangle \mid k_i < k_m \wedge 1 \leq i \leq n\}$, a prawe poddrzewo musi być drzepcem stworzonym ze zbioru $\mathcal{P}_{\text{right}} = \{\langle k_i, p_i \rangle \mid k_m < k_i \wedge 1 \leq i \leq n\}$. Zbiory te są rozłączne i w sumie z parą $\langle k_m, p_m \rangle$ dają cały zbiór \mathcal{P} , a także $0 \leq |\mathcal{P}_{\text{left}}|, |\mathcal{P}_{\text{right}}| < n$, zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieje dokładnie jeden drzepiec realizujący lewe i prawe poddrzewo naszego drzepca, czyli

istnieje dokładnie jeden drzewiec realizujący podane założenia składający się z wierzchołków zawierających w wierzchołkach wartości par ze zbioru \mathcal{P} .

Priorytety będą wykorzystywane do balansowania drzewców. Każdemu kluczowi wylosujemy priorytet z bardzo dużego uniwersum (tak, aby się nie powtarzały). Okazuje się, że takie losowanie wystarcza, aby zapewnić zbalansowanie drzewca.



Rysunek 3.3.2. Drzewiec dla zbioru $\{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 7 \rangle, \langle 8, 2 \rangle\}$. Poza nawiasem zapisane są klucze, a w nawiasie priorytety.

Przykładowy drzewiec został przedstawiony na powyższym rysunku. Pozostaje jeszcze pokazać, że oczekiwana (w sensie probabilistycznym) głębokość tego drzewca jest logarytmiczna względem liczby wierzchołków. Skorzystajmy z faktu, że oczekiwana głębokość drzewa rekurencji dla algorytmu quick sort jest logarytmiczna względem długości ciągu, który sortujemy. Wystarczy już tylko zaobserwować, że proces opisany w dowodzie lematu 3.1 jest w pełni analogiczny do procesu wyboru losowego piwota, a jako że wartości przydzielone do lewego i prawego poddrzewa są niezależnie względem priorytetów, na niższych poziomach największy priorytet będzie znów losowym z kluczy.

Konstrukcja w oczekiwanym czasie liniowym

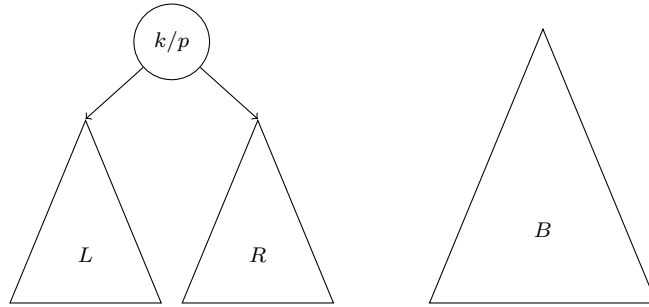
Konstrukcja ta będzie korzystała z procedury **merge** opisanej w kolejnym fragmencie, która działa w oczekiwanym czasie proporcjonalnym do sumy wysokości łączonych drzewców. Sposób postępowania jest identyczny jak w przypadku algorytmu tworzenia kopca w czasie liniowym. Mamy daną listę n par postaci $\langle \text{klucz}, \text{priorytet} \rangle$. Na początku tworzymy n drzewców jednoelementowych, każdy w czasie stałym. Przypisujemy kluczom priorytety. Następnie dopóki lista drzewców jest dłuższa niż jeden, łączymy drzewce operacją merge w następujący sposób: pierwszy z drugim, trzeci z czwartym, piąty z szóstym, etc. W ten sposób otrzymujemy algorytm działający w oczekiwanym czasie $\mathcal{O}(\sum_{i=0}^{\lceil \log_2(n) \rceil} i \cdot \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor)$, co daje oczekiwany czas $\mathcal{O}(n)$.

Operacje merge i split

Cała magia drzewca dzieje się tutaj. Zauważmy, że z lematu 3.1 istnieje tylko jeden drzepec powstały przez użycie operacji **merge** na dwóch drzewcach. Wobec czego wystarczy zadbać o poprawność metody **merge**, a utworzony drzepec będzie miał odpowiednią wysokość i nie trzeba będzie używać żadnych rotacji.

Mamy zatem dwa drzewce A oraz B i chcemy je połączyć. Jeśli A lub B jest drzewem pustym, zwracamy drugi drzepec z pary. Rozpatrzmy zatem drugi przypadek.

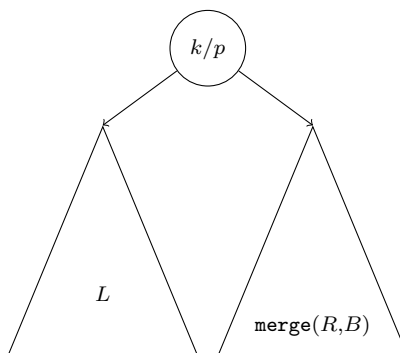
Zauważmy, że korzeń powstałego drzewca musi być elementem o największym priorytecie ze wszystkich wierzchołków obu drzew, czyli tak naprawdę musi być korzeniem jednego z drzewców które chcemy połączyć, tego który ma większy priorytet. Załóżmy, że lewy drzepec ma korzeń o większym priorytecie, bo drugi przypadek jest analogiczny. Sytuacja ta jest przedstawiona na rysunku 3.3.3.



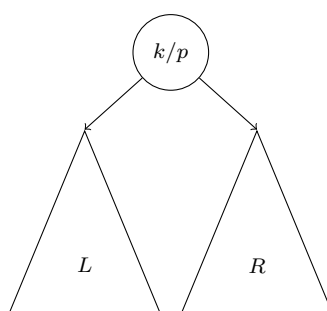
Rysunek 3.3.3. Po lewej stronie mamy rozpisany drzepec A na korzeń i dwa poddrzewa L oraz R .

Zauważmy teraz, że skoro mamy wybrany korzeń, to z własności binarnego drzewa przeszukiwań znamy podział na lewe i prawe poddrzewo, czyli wierzchołki z L muszą zostać dołączone z lewej strony, a drzepec utworzony z wierzchołków z R oraz B z prawej strony, ale para $\langle R, B \rangle$ spełnia warunki funkcji **merge**, bo wszystkie klucze z R są mniejsze od dowolnego klucza z B , dlatego że wszystkie klucze z A były mniejsze od dowolnego klucza z B . W takim razie wystarczy wykonać jedno wywołanie rekurencyjne i na koniec podpiąć jego wynik jako prawe poddrzewo tworzonego wynikowego drzewca. Zostało to przedstawione na rysunku 3.3.4. Niech h_A (h_B) będzie wysokością drzewca A (B). Każde wywołanie rekurencyjne zmniejsza wysokość dokładnie jednego z drzew o jeden. Wobec czego złożoność tej procedury to $\mathcal{O}(h_A + h_B)$.

Implementacja funkcji **split** jest bardzo podobna. Do jej realizacji będziemy dodatkowo przechowywać w wierzchołkach rozmiar jego poddrzewa. Następnie otrzymujemy drzepec D oraz liczbę k nieujemną i nie większą niż rozmiar drzewca. Przyjmijmy, że k jest nie większe niż rozmiar poddrzewa lewego syna korzenia drzewca D . Sytuacja ta jest przedstawiona na rysunku 3.3.5.

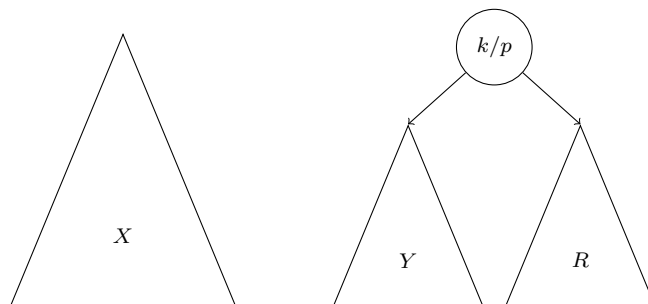


Rysunek 3.3.4. Drzebiec powstały z połączenia drzewców A oraz B .



Rysunek 3.3.5. Drzebiec D .

Zastosujemy zatem procedurę **split** na drzewcu L wraz z parametrem k . Wynikiem tej procedury są dwa drzewce X oraz Y . Zauważmy, że X jest pierwszym drzewcem który ma zwrócić nasza funkcja, a drugim ma być połączenie drzewców Y oraz R wraz z korzeniem D . Do tego łączenia nie musimy jednak używać funkcji **merge**. Wystarczy odpowiednio podpiąć wskaźniki, tak jak zostało to pokazane na rysunku 3.3.6. Złożoność czasowa funkcji **split** wynosi zatem $\mathcal{O}(h_D)$, gdzie eh_D jest wysokością drzewca D .



Rysunek 3.3.6. Wynik funkcji **split** na drzewcu D , gdzie $\langle X, Y \rangle$ jest parą drzewców zwróconą przez funkcję **split**(L , k).

Aktualizacja wartości trzymanych w wierzchołku

Za każdym razem gdy przepinamy wskaźniki aktualizujemy wartości trzymane w wierzchołku. Tymi wartościami są: rozmiar poddrzewa, skrajny lewy znak w poddrzewie oraz hasz wyliczany dla słowa $s = s_1 s_2 \dots s_n$, liczby $p > \max\{z \mid z \in \Sigma\}$ i dużej liczby pierwszej M w następujący sposób

$$\mathcal{H}(s) = \left(\sum_{i=1}^n p^{i-1} * s_i \right) \bmod M.$$

Trzymamy też w wierzchołku wartość $p^{\text{rozmiar poddrzewa}} \bmod M$. Wiemy, że jeśli lewe poddrzewo ma rozmiar k , to reprezentuje słowo $s_{\dots k}$, a prawe poddrzewo słowo $s_{(k+2)\dots}$. Zatem możemy wylicz hasz w następujący sposób

$$\mathcal{H}(s) = (\mathcal{H}(s_{\dots k}) + p^k \cdot s_{k+1} + p^{k+1} \cdot \mathcal{H}(s_{(k+2)\dots})) \bmod M.$$

3.3.3 Dygresja – utrwalanie struktur danych

We właściwym problemie będę chciał wykorzystać drzepce, ale nie chciałbym niszczyć struktury drzeczów które już są utworzone w programie. Takie niszczenie może się odbywać jedynie w momencie przepinania wskaźników do synów. Wobec tego stosuję technikę utrwalania struktur danych. Jest to ogólna metoda dla struktur opartych na wskaźnikach. Za każdym razem, gdy chcę przepiąć wskaźniki jakiegoś wierzchołka, nie robię tego. Tworzę za to nowy świeży wierzchołek i jego wskaźniki podpinam tak jak potrzebuję. Z tego powodu na wybrany wierzchołek może być wskazywany przez bardzo wiele różnych wierzchołków, ale jako że drzewa przeglądam zawsze rozpoczynając od wskaźnika na korzeń, to z tej perspektywy jest ono zwykłym drzeczem, bo nie mamy żadnej możliwości przechodzenia wskaźnikami w drugą stronę. Nadaaje to narzut pamięciowy równy liczbie wykonanych operacji, czyli w przypadku drzeczów oczekiwany logarytmiczny na operację.

3.3.4 Wykorzystanie drzeczów do rozwiązania problemu

Okazuje się teraz, że zaopatrzeni w strukturę trwałego drzeczca, możemy bardzo łatwo zrealizować interfejs naszego zadania. Każde słowo będzie reprezentowane przez jeden trwały drzepec (a technicznie formalnie to wskaźnik na niego).

Warto tutaj wspomnieć o jednej ważnej rzeczy. Drzepce które trzymamy w pamięci w rzeczywistości nie posiadają zapisanych kluczy. Można sobie wyobrazić że kluczem jest indeks danej litery w słowie reprezentowanym przez drzepec. Zauważmy, że w podanym wcześniej opisie w implementacji drzeczów nigdzie nie korzystaliśmy z dokładnych wartości kluczy, a jedynie z relacji mniejszości jaka między nimi zachodzi.

Poniżej opisuję jak zrealizować poszczególne metody:

- `make_string(word)` Tworzę drzewiec tak jak opisane w jednym z poprzednich podrozdziałów.
- `concat(label1, label2)` Wykonuję pojedynczą operację `merge` na drzewcach opisywanych przez podane etykiety. Warto zaznaczyć, że dzięki trwałości nie naruszam struktury łączonych drzewców i mogę się do nich bezpiecznie odwoływać w późniejszym czasie.
- `split(label, position)` Analogicznie jak `concat`, tutaj jednak używam drzewcowej operacji `split`.
- `equals(label1, label2)` Porównuję hasze w korzeniach drzewców reprezentowanych przez etykiety.
- `lcp(label1, label2)` Wyszukuję binarnie po wyniku. W każdym kroku wyszukiwania binarnego rozcinam operacją `split` oba drzewce w ustalonej pozycji i porównuję czy lewe części podziału reprezentują te same słowa poprzez porównanie haszy.
- `smaller(label1, label2)` Używam metody `lcp`, a następnie odnajduję i porównuję litery następujące po najdłuższym wspólnym prefiksie lub zwracam odpowiednią wartość, jeśli długość najdłuższego wspólnego prefiksu jest równa długości któregoś z porównywanych słów.

Opisana struktura realizuje algorytm typu Monte Carlo. Jeśli porównujemy hasze dwóch podslów i są one różne, to mamy pewność, że reprezentowane słowa są różne. Jednakże gdy są równe, istnieje bardzo małe, ale niezerowe prawdopodobieństwo że te słowa nie będą takie same.

Zaimplementowałem strukturę drzewców dlatego że moim zdaniem jej kod jest bardzo przejrzysty i czytelny. Kosztem tego rozwiązania jest oczekiwana złożoność logarytmiczna na operację. Cała teoria tutaj opisana zadziała, gdybyśmy podmienili drzewce na inny rodzaj drzew zbalansowanych, które realizują te same operacje (`merge` i `split`). Można w ten sposób pozbyć się losowości i złożoności typu oczekiwana.

3.3.5 Tabela złożoności czasowych

Niech n oznacza długość słowa, które jest podane jako pierwszy argument funkcji (lub długość słowa pod etykietą z pierwszego argumentu). W przypadku funkcji o dwóch argumentach będących słowami lub etykietami, długość drugiego słowa oznaczmy przez m .

W pierwszej tabeli prezentuję opis złożoności czasowej dla funkcji aktualizujących zbiór \mathcal{S} .

Rozwiązanie	<code>make_string</code>	<code>concat</code>	<code>split</code>
Drzewce	oczekiwana $\mathcal{O}(n)$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log(n + m))$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log(n))$

W drugiej tabeli prezentuję opis złożoności czasowej dla zapytań do struktury.

Rozwiązanie	<code>equals</code>	<code>smaller</code>	<code>lcp</code>
Drzewce	$\mathcal{O}(1)$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log^2(n + m))$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log^2(n + m))$

W pliku `/source/solutions/balanced.trees.cpp` znajduje się implementacja tej struktury.

3.4 Drzewa parsingów

3.4.1 Gramatyka bezkontekstowa

Rozważmy gramatykę bezkontekstową, w której graf zasad produkcji jest acykliczny. W naszej gramatyce każda produkcja będzie miała więcej niż jednego syna. Zauważmy, że w takim przypadku każdy nieterminal odpowiada dokładnie jednemu słowu. W tym podejściu naszym celem będzie utrzymywanie tego typu gramatyki, która dodatkowo będzie spełniała, że różne nieterminale będą reprezentowały różne słowa. Zapewnienie dodatkowego warunku będzie proste, wystarczy zadbać aby nie istniały dwa takie różne nieterminale, że ich zasada produkcji jest taka sama. Należy tu zwrócić uwagę, że formalnie utrzymywany przez nas obiekt nie jest gramatyką bezkontekstową, bo nie zawiera symbolu startowego. Będę jednak to określał tym określeniem, co powinno ułatwić czytelność tej części pracy.

Zauważmy, że otrzymując symbol (terminalny lub nie) w takiej gramatyce i znając obowiązujące produkcje, jesteśmy w stanie odtworzyć *drzewo symbolu*. Przez drzewo symbolu będę rozumiał drzewo indukowane przez produkcje o korzeniu w danym symbolu. W liściach i tylko w liściach tego drzewa znajdować się będą symbole terminale, a słowo stworzone przez ustawienie liści w kolejności preorder jest słowem, które reprezentuje otrzymany symbol.

Aby to podejście miało szansę działać lepiej niż podejście z drzewami zbalansowanymi musimy zastosować jakiegoś rodzaju sztuczkę, która pozwoli ograniczyć wysokość drzew symboli. W tym przypadku, podobnie jak w przypadku drzewców, skorzystamy z losowości.

W tym miejscu warto zaznaczyć, że cały pomysł na drzewa parsingów pochodzi z pracy *Optimal dynamic strings*, umieszczonej w bibliografii. Zaimplementowane

przeze mnie rozwiązanie zawiera wiele uproszczeń względem skomplikowanej struktury opisanej w tej pracy. Będę zamieszczał informację w miejscach, gdzie moje rozwiązanie i implementacja różni się od oryginalnej struktury.

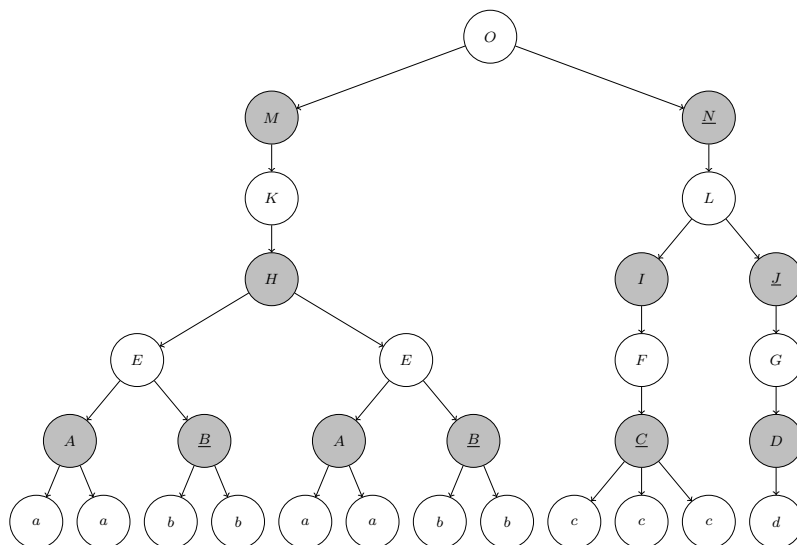
W rozwiązaniu przeze mnie implementowanym, wymagam od gramatyki dodatkowego warunku. Każdy symbol będzie miał dobrze zdefiniowany *poziom*, który oznacza odległość w sensie liczby produkcji od terminala. Aby było to dobrze definiowane, odległość od każdego terminala musi być taka sama. Przyjmuję, że terminale mają poziom równy 0. Ta zasada sprawi, że w opisywanej gramatyce będą musiały się pojawić produkcje jednoelementowe i zakłócą one zasadę o tym, że każde słowo może być reprezentowane tylko przez jeden symbol. Jednak musimy pamiętać o tym, że struktura ujawnia użytkownikowi wykonującemu na niej operacje tylko niektóre symbole z gramatyki. Zapewnimy zatem, aby dla ustalonego słowa struktura zwracała zawsze ten sam symbol, tak naprawdę będzie to symbol indukujący to słowo o najmniejszym poziomie, a taki jest już tylko jeden.

3.4.2 Tworzenie drzewa symbolu

W oryginalnej pracy drzewo symbolu zostało nazwane *parse tree*, zatem będę czasami będę używał tych nazw wymiennie. Pomysł na rozwiązanie okazuje się być dosyć prosty. Każdy symbol (nieterminalny i terminalny) ma przypisany jeden losowy bit. Jest on losowany w momencie gdy dany symbol powstaje. Konstruując drzewo symbolu nad słowem $s = s_1s_2 \dots s_n$, początkowo zbiór symboli gramatyki stanowią litery słowa s . Następnie poczynając od poziomu 0 wykonujemy naprzemiennie dwa rodzaje kompresji. Jeśli numer poziomu jest liczbą parzystą, stosujemy kompresję typu RLE (od angielskiego *run-length encoding*), czyli każdy maksymalny spójny fragment wystąpień tego samego symbolu zostanie zastąpiony przez jeden symbol, na przykład kompresja typu RLE dla słowa *aabaaacadd* to $S_{a,2}S_{b,1}S_{a,3}S_{c,1}S_{a,1}S_{d,3}$. Jeśli natomiast numer poziomu jest nieparzysty stosujemy kompresję typu shrink (od nazwy z oryginalnej pracy). Stosując tę kompresję mamy pewność, że sąsiednie symbole są różne, bo zawsze poprzedza ją kompresja typu RLE. Niech $\mathcal{B}(x)$ oznacza bit losowy symbolu x . Teraz dla dwóch sąsiednich symbolów a oraz b na tym poziomie stosujemy dla nich kompresję wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}(a) = 0$ i $\mathcal{B}(b) = 1$. Zauważmy, że jest to dobrze zdefiniowane, bo nigdy dwie kompresje na siebie nie nachodzą. W przypadku gdy wierzchołek nie bierze udziału w żadnej kompresji, do gramatyki zostaje dodana jednoelementowa produkcja. Przykładowe tworzenie drzewa symbolu zostało przedstawione na rysunku 3.4.1.

W oryginalnej pracy w procesie kompresji nie są dozwolone produkcje jednoelementowe, dzięki czemu powstałe drzewo ma zawsze $2n - 1$ wierzchołków. W zaimplementowanym rozwiązaniu oczekiwana liczba wierzchołków jest liniowa, czego dowodzi poniższy lemat.

Lemat 3.2. *Opisany powyżej proces kompresji działa w oczekiwanym czasie $\mathcal{O}(n)$,*



Rysunek 3.4.1. Drzewo symbolu dla słowa *aabbaabbcccd*. Na szaro zostały wypełnione wierzchołki przed fazą kompresji typu shrink, a na biało przed fazą kompresji typu RLE. Zauważmy, że wartości bitów losowych mają znaczenie tylko w przypadku szarych poziomów. Podkreślane wierzchołki mają losowy bit równy 1, a niepodkreślane 0.

gdzie n jest długością słowa, nad którym budujemy drzewo symbolu.

Dowód. Tutaj będzie dowód.

Na koniec zauważmy, że w analogiczny sposób możemy tworzyć drzewo symbolu mając daną niekoniecznie listę symboli terminalnych, ale także dowolną listę symboli (terminalnych i nie). Należy wtedy jedynie wykonywać kompresje w odpowiedniej kolejności i starannie łączyć wierzchołki na poziomach (nowo powstałe z kompresji wraz z danymi w początkowej liście), można to realizować metodą dwóch wskaźników. Ogólniejsza wersja metody (dla listy dowolnych symboli) została zaimplementowana jako funkcja `find_representant` w pliku z implementacją drzew parsingów.

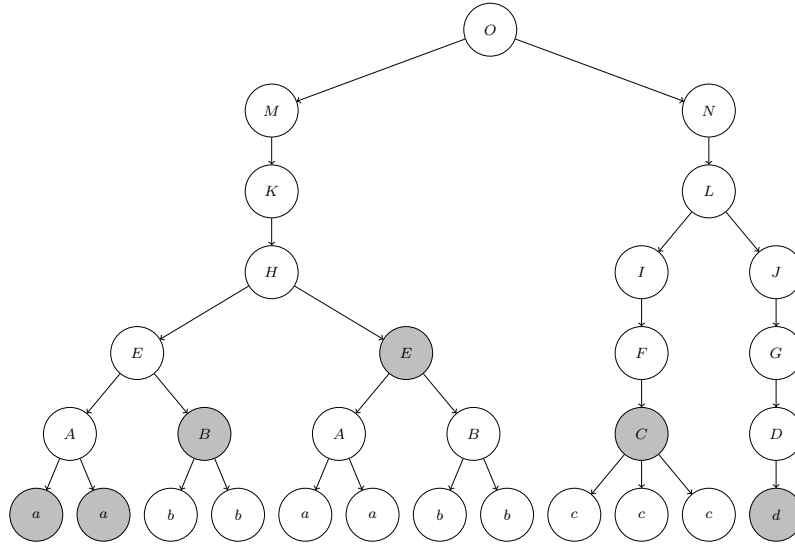
3.4.3 Dekompozycja context-insensitive

Wyobraźmy sobie drzewo symbolu dla pewnego słowa. Weźmy pewne jego pod-słowo. Nie zawsze będzie tak, że możemy wykroić pewne poddrzewo z drzewa symbolu, które będzie drzewem symbolu dla wybranego pod-słowa. Powodem tej sytuacji jest możliwość kompresji z symbolami spoza analizowanego pod-słowa. Spójrzmy na przykład z rysunku 3.4.1 i na $(2, 5)$ -pod-słowo (*abba*). Nie potrafimy wykroić jednego poddrzewa tak, aby reprezentowało ono dokładnie to pod-słowo. Wprowadźmy zatem pojęcie wierzchołka typu *context-insensitive* w ustalonym drzewie symbolu. Jest to

taki wierzchołek, że niezależnie od tego czy po lewej lub prawej stronie początkowego słowa dopiszemy dowolne znaki, on zawsze powstanie w procesie kompresji. Możemy też zdefiniować wierzchołki typu *left context-insensitive* oraz *right context-insensitive*, tak jak poprzednio, ale pozwalamy na dopisywanie liter tylko z lewej (prawej) strony. Zauważmy, że wszystkie wierzchołki na poziomie 0 są typu context-insensitive. W pracy *Optimal dynamic strings* zostało udowodnione, że:

- jeśli v jest typu left context-insensitive, to prawy brat jego ojca również jest wierzchołkiem tego typu,
- jeśli v jest typu right context-insensitive, to lewy brat jego ojca również jest wierzchołkiem tego typu,
- jeśli v jest typu context-insensitive, to wszyscy jego potomkowie też są.

Połączenie poprzednich własności skutkuje algorytmem tworzącym *dekompozycję context-insensitive*. Jest to zbiór wierzchołków drzewa, które są typu context-insensitive oraz każdy liść ma dokładnie jednego przodka (być może siebie samego), który należy do tego zbioru. Możemy wyznaczać taką dekompozycję, której wielkość kompresji typu RLE jest nie większa niż wysokość drzewa symbolu, korzystając z opisanego pomysłu. Szczegóły tej procedury są dostępne w zaimplementowanym rozwiązaniu. Pomysł polega na tym, że startujemy z dwóch skrajnych wierzchołków na poziomie 0, a następnie wykonujemy w każdej fazie dwa przejścia: lewą ścieżką podążamy do góry i w prawo, a prawą podążamy do góry i w lewo. Za każdym razem gdy robimy ruch do góry i w bok, musimy dopisać do naszej dekompozycji przeskoczone wierzchołki. Dlatego potrzebujemy skompresowanej wersji dekompozycji, aby mieć pewność co do tego, czy jest odpowiednio krótka. Robimy to tak długo aż nasze ścieżki się nie złączą. Problem w tym, że implementując to rozwiązanie, nie mamy nigdy dostępu do pełnego drzewa w formie grafu, a jedynie będąc w danym wierzchołku możemy pamiętać jego ścieżkę do korzenia, dla każdego wierzchołka na tej ścieżce informację o tym, którym jest on synem, a także informację o jego bezpośrednich synach (zapisaną w zasadach produkcji gramatyki). Wobec tego każdy skok w lewo lub prawo, w implementacji realizuje się przez cofnięcie się w stosie poprzedników do takiego miejsca, z którego jest możliwe pójście w odpowiednią stronę, a następnie wykonanie tylu kroków ile było cofnąć włąb, trzymając się skrajnie prawej (lewej) ścieżki. Dodatkowo w programie dochodzi wymaganie na liczenie dekompozycji context-insensitive dla wybranego podsłowa drzewa symbolu, a niekoniecznie zawsze dla całego drzewa. Całość została zaimplementowana w metodzie `context_insensitive_decomposition` w klasie z rozwiązaniem z drzewami parsingów. Poniżej w rysunku 3.4.2 została zaznaczona dekompozycja drzewa z rysunku 3.4.1.



Rysunek 3.4.2. Wierzchołki zaznaczone na szaro tworzą dekompozycję drzewa z rysunku 3.4.1, utworzoną opisanym algorytmem.

3.4.4 Implementacja interfejsu

W tej części opiszę jak przy pomocy opisanych narzędzi zaimplementować funkcje opisane w interfejsie.

- `make_string(word)` Używamy wprost funkcji `find_representant`.
- `concat(label1, label2)` Znajdujemy RLE dekompozycji context-insensitive dla obu słów i korzystamy z lematu z pracy *Optimal dynamic strings*, który mówi, że konkatencja dekompozycji context-insensitive jest dekompozycją context-insensitive. Następnie uruchamiamy na tym funkcję `find_representant`.
- `split(label, position)` Korzystamy z możliwości wybrania dekompozycji context-insensitive dla ustalonego pod słowa. Znajdujemy dekompozycję `position`-prefiksu i `(position + 1)`-sufiksu, następnie na obu uruchamiamy funkcję `find_representant`.
- `equals(label1, label2)` Porównujemy etykiety.
- `lcp(label1, label2)` Zostały zaimplementowane dwa sposoby. Pierwszy wyszukuje binarnie po wyniku tak samo jak w przypadku drzewców. Drugi bazuje na pomysle opisanym w pracy *Optimal dynamic strings* i polega na schodzeniu jednoczesnym w obu drzewach wglęb, jednocześnie przeskakując w prawo jeśli opisywane w danym momencie pod słowa są równe. Drugi sposób działa w czasie proporcjonalnym do wysokości drzew. Istnieje jeszcze trzeci sposób, dzięki któremu całość działa w czasie stałym, nie został on jednak zaimplementowany ani opisany w tej pracy.

- `smaller(label1, label2)` Podobnie jak w przypadku drzewców, korzystamy z metody `lcp` a następnie porównujemy następujące po najdłuższym wspólnym prefiksie literki lub rozpatrujemy czy któreś ze słów już się skończyło.

3.4.5 Tabela złożoności

Niech n oznacza długość słowa, które jest podane jako pierwszy argument funkcji (lub długość słowa pod etykietą z pierwszego argumentu). W przypadku funkcji o dwóch argumentach będących słowami lub etykietami, długość drugiego słowa oznaczmy przez m .

W pierwszej tabeli prezentuję opis złożoności czasowej dla funkcji aktualizujących zbiór \mathcal{S} .

Rozwiązanie	<code>make_string</code>	<code>concat</code>	<code>split</code>
Parsingi	oczekiwana $\mathcal{O}(n)$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log(n + m))$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log(n))$

W drugiej tabeli prezentuję opis złożoności czasowej dla zapytań do struktury.

Rozwiązanie	<code>equals</code>	<code>smaller</code>	<code>lcp</code>
Parsingi	$\mathcal{O}(1)$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log(n + m))$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log(n + m))$
Parsingi (wolne <code>lcp</code>)	$\mathcal{O}(1)$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log^2(n + m))$	oczekiwana $\mathcal{O}(\log^2(n + m))$

Główna różnica między zaimplementowanym rozwiązaniem, a rozwiązaniem opisanym w pracy *Optimal dynamic strings* jest taka, że uzyskane przy implementacji złożoności są oczekiwane, a uzyskane w pracy złożoności są złożonościami typu *z dużym prawdopodobieństwem* (od angielskiego *with high probability*). Oznacza to, że przy parametrach dążących do nieskończoności, prawdopodobieństwo danej złożoności dąży do 1.

Rozdział 4

Analiza wydajności programów

Bibliografia

- [1] <https://tex.stackexchange.com/questions/208771/how-to-draw-triangles-as-subtree-with-the-forest-package>