Grundkompetenzen für die schriftliche Matura im Fach Mathematik

Legende:
Alle Variablen entsprechen ihren in den Beispielen definierten Werten, wenn nicht explizit erwähnt handelt es sich um reelle Zahlen oder Vektoren (Zahlenpaare/Zahlentriplets);
grau unterlegt = Mathematica Eingabe; && = logisches „Und“; || = logisches „Oder“;
i = Index/Laufvariable;
i =Index/Laufvariable/$\sqrt{-1}$;

Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition: Eine Abbildung P welche jedem Ereignis A aus dem Ereignisraum Ω (A ϵ Ω) eine Zahl P(A) ϵ R zuordnet.

Es muss gelten:
P(Ω) = 1;
∀ A ϵ Ω : P(A) ≥ 0;
$\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i \mid A_i bis\ A_n = disjunkt$;
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$;

Allgemeine (diskrete) Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition der Zufallsvariable:
Eine Zufallsvariable X ordnet jedem Ausfall eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zu.
Zum Beispiel: Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6. Zufallsvariable = Augenzahl. Wert(e) der Zufallsvariable = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung:
Wird jedem möglichen Ereignis A (Wert) der Zufallsvariable X eine Wahrscheinlichkeit P(X = A) zugeordnet, nennt man das Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Zum Beispiel:

Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Laplace-Würfels:						
X	1	2	3	4	5	6
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Bedingte Wahrscheinlichkeit:
Wahrscheinlichkeit dass ein Ereignis A eintritt unter der Voraussetzung, dass (das Ereignis) Ω‘ (Ω‘ ⊆ Ω) eingetreten ist und A abhängig von Ω‘ ist.
Es gilt: $\forall\ A \subseteq \Omega \mid P(A|\Omega') := \frac{P(A \cap \Omega')}{P(\Omega')}$;
Zum Beispiel: Ziehen aus einer Urne ohne zurücklegen

Unabhängige Wahrscheinlichkeit:
Zwei Ereignisse (A, B) sind unabhängig von einander wenn das Eintreten des Ereignisses B nicht die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A beeinflusst.
Es gilt: $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B|A) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P(A \cap B) = P(A).P(B)$;
Zum Beispiel: Ziehen aus einer Urne mit zurücklegen

Erwartungswert:
Der Erwartungswert entspricht näherungsweise dem Mittelwert aller Zufallsausfälle bei einer hohen Anzahl von Versuchsausführungen.

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in X} x \, . \, P(\{X = x\})$$

$$\mu = E(X) = a_1.p_1 + a_2.p_2 + \ldots + a_n.p_n$$

Wobei a die Werte der Zufallsvariablen sind und p die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Varianz und Standardabweichung:
Varianz V(X):

$$\sigma^2 = V(X) = (a_1 - \mu)^2.p_1 + (a_2 - \mu)^2.p_2 + \ldots + (a_n - \mu)^2.p_n$$

$$\sigma^2 = V(X) = {a_1}^2.p_1 + {a_2}^2.p_2 + \ldots + {a_n}^2.p_n - \mu^2$$

Standardabweichung σ:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$$

Wobei a die Werte der Zufallsvariablen sind, p die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und μ der Erwartungswert.

Binomialverteilung

Variablen: n und k sind die Anzahl bestimmter Mengen, p ist der Prozentsatz.

Fakultät:
Definition: n unterscheidbare Objekte können auf n! Arten geordnet werden.

$$n! = n.(n-1).(n-2).(\ldots).2.1$$

$$0! = 1$$

Binomialkoeffizient:
Definition: Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$$

Binomialverteilung:

$$P(X) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$$

Erwartungswert:
Bei der Binomialverteilung gilt für den Erwartungswert:

$$\mu = n.p$$

Standardabweichung:
Bei der Binomialverteilung gilt für die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}$$

Normalverteilung

Variablen: μ ist der Erwartungswert, σ ist die Standardabweichung und p der Prozentsatz.

Definition: Kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X durch eine Gauß'sche Glockenkurve mit den Parametern μ und σ annähern, so nennt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung Normalverteilung.

Allgemeine Grundlagen:
$P(X \leq \mu + z.\sigma) = \Phi(z)$ bzw. $P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
Fall 1: $P(X \leq x) = \Phi(\mathrm{z})$
Fall 2: $P(X \geq x) = 1 - \Phi(\mathrm{z}) = \Phi(-\mathrm{z})$
Fall 3: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

Symmetrische Intervalle:
$P(\mu - z.\sigma \leq X \leq \mu + z.\sigma) = 2.\Phi(\mathrm{z}) - 1$

Ermitteln von Intervallen zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten:
(geg. μ, σ und p)
$P(X \leq c) = p$ daraus folgt: $\Phi(\mathrm{z}) = \mathrm{p}$ daraus folgt z und daraus folgt: $c = \mu + z.\sigma$

Ermitteln von sym. Intervallen zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten:
(geg. μ, σ und p)
Es muss gelten: $P(\mu - z.\sigma \leq X \leq \mu + z.\sigma) = p$ daraus folgt: $2.\Phi(\mathrm{z}) - 1 = \mathrm{p}$
daraus folgt: $\Phi(\mathrm{z}) = \frac{p+1}{2}$ daraus folgt z und daraus folgt $[\mu - z.\sigma \leq X \leq \mu + z.\sigma]$

Ermitteln von μ bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit:
(geg. p, c und σ)
$P(X \leq c) = p$ daraus folgt: $\Phi(\mathrm{z}) = \mathrm{p}$ daraus folgt z und daraus folgt $\mu = c - z.\sigma$

Ermitteln von σ bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit:
(geg. Intervall [a; b], p und μ)
Es muss gelten: $P(\mu - z.\sigma \leq X \leq \mu + z.\sigma) = p$ daraus folgt: $2.\Phi(\mathrm{z}) - 1 = \mathrm{p}$
daraus folgt: $\Phi(\mathrm{z}) = \frac{p+1}{2}$ daraus folgt z und daraus folgt $\sigma = \frac{b-\mu}{z}$

Beurteilende Statistik

Allgemeine Grundlagen:

$\mu = n \cdot p$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$;
$\sigma^2 > 9$ => Normalverteilung ansonsten Binomial;
ɣ-Konfidenzintervall 95% = Irrtumswahrscheinlichkeit 5% => z = 1,96
ɣ-Konfidenzintervall 99% = Irrtumswahrscheinlichkeit 1% => z = 2,575
Untere Intervallgrenzen immer abrunden, Obere Intervallgrenzen immer aufrunden;

Schätzbereiche für Häufigkeit in einer Stichprobe:
Fragestellung: Ermittle ein (symetrisches) Intervall um p, das die (relative) Häufigkeit der „…“ in dieser Stichprobe mit 95%/99% Sicherheit enthalten wird.
Problemlösung: $\mu + \sigma$ berechnen; z wählen; -Intervall: $[\mu - z \cdot \sigma; \mu + z \cdot \sigma]$ => Absolute H.
-Intervall: $[\frac{\mu - z \cdot \sigma}{n}; \frac{\mu + z \cdot \sigma}{n}]$ => relative H.

Berechnung von Konfidenzintervallen:
Fragestellung: Gib ein 95%/99%-Konfidenzintervall an!
Problemlösung: 1) wie *Schätzbereiche für Häufigkeit in einer Stichprobe*
2) mit Formel (nur relative Häufigkeit):

$p = [\, h - z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} ; h + z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \,]$ dabei gilt $\phi(z) = \frac{1+\gamma}{2}$

Sprich $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}96$; $\gamma = 0{,}99 \Rightarrow z = 2{,}575$

Sicherheit eines Konfidenzintervalls:
Fragestellung: Wie sicher ist ein Konfidenzintervall? Mit welcher Sicherheit kann eine Behauptung aufgestellt werden?
Problemlösung: $z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = \frac{d}{2}$; - wobei d die Länge des Konfidenzintervalls ist und z die Unbekannte!
- z liefert ein $\phi(z)$ welches uns mit der Formel $\gamma = 2 \cdot \phi(z) - 1$ die Sicherheit des Konfidenzintervalls liefert!

Notwendige Größe einer Stichprobe:
Fragestellung: Wie groß muss die Stichprobe mindestens sein um ein … Konfidenzintervall der Länge … anzugeben?
Problemlösung: $n = \frac{4 \cdot z^2 \cdot h \cdot (1-h)}{d^2}$; - wobei d die Länge und z die Sicherheit des Konfidenzintervalls ist.
*im „Worst Case“ d.h. die relative Häufigkeit h ist unbekannt wird mit h = 0,5 gerechnet woraus sich die Formel $n = (z / d)^2$ ergibt!

Einseitige Anteilstests:
Fragestellung: Kann eine Behauptung verworfen werden? Lügt die Nullhypothese?
Problemlösung: $\mu = n \cdot p$ (Prozentsatz der Behauptung!); $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$
Prüfung ob die Voraussetzung für die Normalverteilung erfüllt ist, wenn nicht => Binomialverteilung!
Normalverteilung: $P(H \geq k) = ?$; $P(H \geq k) = \phi(-\frac{k-\mu}{\sigma})$ - wobei k die Anzahl der fehlerhaften Produkte oder ähnlichem aus der Stichprobe ist.
Binomialverteilung: $P(H \geq k)$ mittels Binomialverteilung/Gegenwahrscheinlichkeit berechnen oder in der Tabelle nachsehen!
Für beide gilt: Ist P größer als 5% (bei 95% Konfidenzintervall) bzw. 1% (bei 99% Konfidenzintervall) darf die Behauptung des Herstellers nicht verworfen werden, ist P kleiner darf die Aussage angezweifelt werden!
*In seltenen Fällen gibt es auch $P(H \leq k)$, was jedoch nichts an der Berechnung ändert außer dem Wegfallen des negativen Vorzeichens im Falle der Normalverteilung, daher $P(H \leq k) = \phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$

Kritische Werte:
Fragestellung: Ab wie vielen … kann eine Nullhypothese verworfen werden?

Problemlösung: μ = n . p (Prozentsatz der Behauptung!); σ = $\sqrt{\mathrm{n}\,.\,\mathrm{p}\,.\,(1-\mathrm{p})}$

P(H≥k) = 1 - ɣ => ϕ(- $\frac{k-\mu}{\sigma}$) = 1 - ɣ => Tabelle ϕ(z) = 1 - ɣ => z = $\frac{k-\mu}{\sigma}$ => k berechnen! (k = μ $\pm$ z . σ)
wobei 1 - ɣ die Irrtumswahrscheinlichkeit ist!
Wichtig ist dabei die Unterscheidung zwischen linksseitigen Anteilstests P(H≤k), daher Anteilstests nach unten, für die gilt: k = μ - z . σ; und rechtsseitigen Anteilstests P(H≥k), daher Anteilstests nach oben, für die gilt: k = μ + z . σ!

Mathematica Implementierung von Wahrscheinlichkeiten:
Laplace:

RandomInteger[a, b]	(*gibt eine Zufällige Zahl aus dem Intervall [a, b]*)
RandomReal[]	(*gibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1*)

„Unfaire“ Wahrscheinlichkeiten:

If[RandomReal[]>0.3, arg(if), arg(else)]	(*Unfaires Spiel mit p=0,3 bzw. p=0,7*)

Funktionen

Allgemeines zu Funktionen

Definition:
Eine Funktion ordnet jedem Wert x genau einen Wert y zu.

Änderungsmaße:

Bezeichnung:	Änderungsfaktor	absolute Änderung	relative Änderung
Berechnung:	$Äf = \frac{f(b)}{f(a)}$	$aÄ = f(b) - f(a)$	$rÄ = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$
Besonderheiten:		Konstant für lineare Funktionen	Konstant für exponentielle Funktionen

Bezeichnung:	mittlere Änderung	momentane Änderung
Berechnung:	$mÄ = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	$mÄ' = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Besonderheiten:	Differenzenquotient, Sekanten-Steigung	Differentialquotient, Tangenten-Steigung

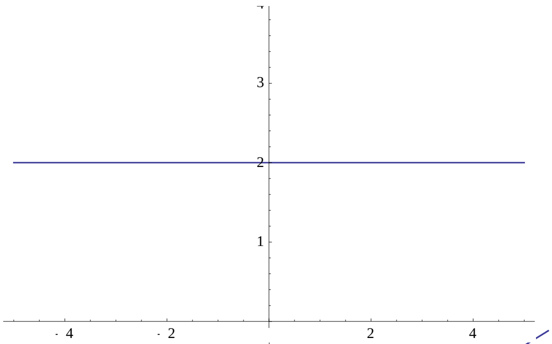
Differenzierbarkeit und Stetigkeit:
Stetigkeit:
Eine reelle Funktion $f: A \to R$ mit den Stellen p bis p_n ist stetig, wenn
$\forall\ [p; p_n]\ \in A |\ \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ gilt. Stetige Funktionen weisen keine Sprünge auf!

Differenzierbarkeit:
Eine reelle Funktion $f: A \to R$ mit den Stellen p bis p_n ist differenzierbar, wenn
$\forall\ [p; p_n]\ \in A | f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ gilt. Differenzierbare Funktionen weisen keine Knicke auf!

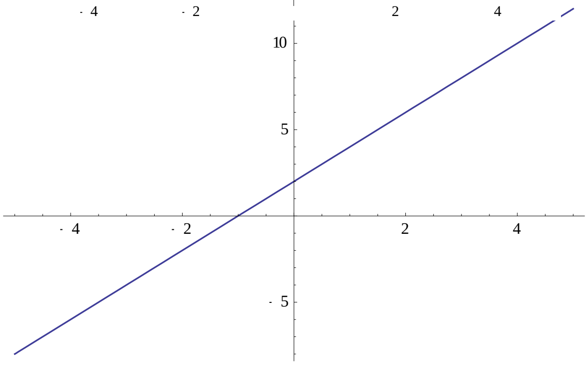
Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit:
Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit, umgekehrt jedoch nicht.
Folgende Funktionen sind immer differenzierbar und stetig: Potenzfunktionen, Polynomfunktionen, rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen und Winkelfunktionen.

Reelle Funktionen

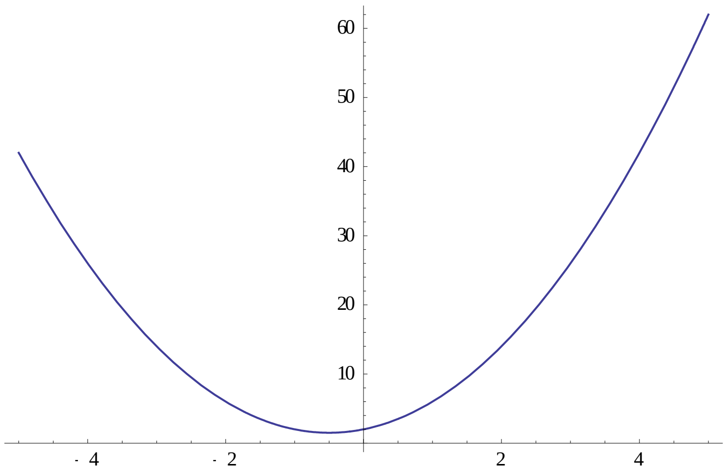
Konstante Funktion:
Allgemeine Form: $f(x) = d$
d = Abstand vom Ursprung auf der y-Achse;
Nullstellen: [0; ∞[
Extremstellen:[] (im Definitionsbereich R)
Monotonie: konstant;
Plot[2, {x, -5, 5}]



Lineare Funktion (Polynomfunktion 1. Grades):
Allgemeine Form: $f(x) = kx + d$
k = Steigung; d = Abstand vom Ursprung auf der y-Achse;
Nullstellen: [1]
Extremstellen: Je nach Definitionsbereich [0;2]
Monotonie: Streng monoton fallend für k < 0;
Streng monoton steigend für k > 0;
Plot[2*x+2, {x, -5, 5}]



Polynomfunktion 2. Grades:
Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$
a = positiv nach oben offen/negativ nach unten offen; b = horizontale Verschiebung;
c = Abstand vom Ursprung auf der y-Achse, vertikale Verschiebung;
Nullstellen: [0; 2]
Extremstellen: [1] (im Definitionsbereich R)
Monotonie: Streng monoton steigend bis Extremstelle und streng monoton fallend ab Extremstelle für a < 0; Streng monoton fallend bis Extremstelle und streng monoton steigend ab Extremstelle für a > 0;
Plot[2*x^2+2*x+2, {x, -5, 5}]



Polynomfunktion 3. Grades:

Allgemeine Form: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

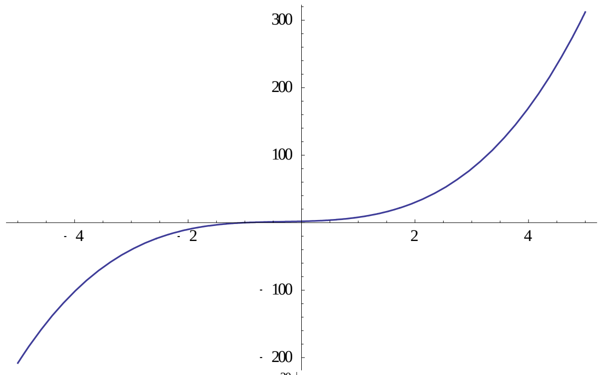
d = Abstand vom Ursprung auf der y-Achse;

Nullstellen: [0; 3]

Extremstellen: [0; 2] (im Definitionsbereich R)

Monotonie: kein allgemeines Monotonie-Verhalten;

Plot[2*x^3+2*x^2+2*x+2, {x, -5, 5}]



Polynomfunktion 4. Grades:

Allgemeine Form:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

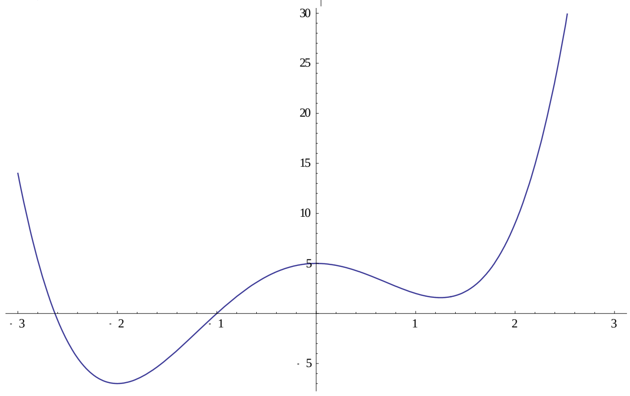
e = Abstand vom Ursprung auf der y-Achse;

Nullstellen: [0; 4]

Extremstellen: [1;3] (im Definitionsbereich R)

Monotonie: kein allgemeines Monotonie-Verhalten;

Plot[x^4+x^3—5*x^2+5, {x, -5, 5}]



Exponentialfunktion:

Allgemeine Form:

$f(x) = c.a^x$ bzw. $f(x) = c.e^{\lambda t}$ oder $f(x) = c.e^{-\lambda t}$

$N(t) = N_0.a^t$ bzw. $N(t) = N_0.e^{\lambda t}$ oder $N(t) = N_0.e^{-\lambda t}$

c = N_0 = N(0) = f(0) = „Startwert"; a = e^{λ} = $e^{-\lambda}$ = Prozentuelle Zu-/Abnahme;

Nullstellen: []

Extremstellen: Je nach Definitionsbereich [0; 2]

Monotonie: Streng monoton fallend für a < 1; Streng monoton steigend für a > 1;

Halbwertszeit:

$\frac{1}{2} = a^t$ bzw. $\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$

Verdopplungszeit:

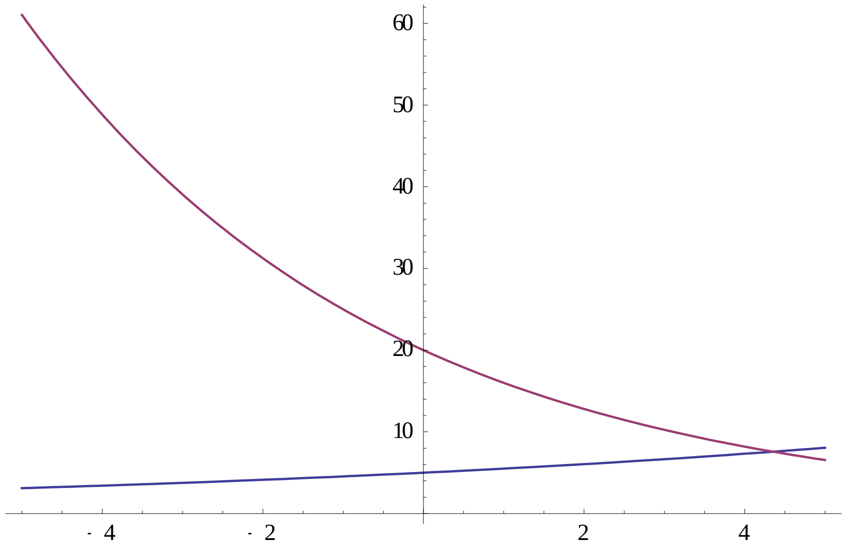
$2 = a^t$ bzw. $2 = e^{\lambda t}$

Zusammenhang zwischen a und e^{λ}:

$a = e^{\lambda}$; $\ln a = \lambda$

Plot[5*1.1^x, {x, -5, 5}] (* in blau *)

Plot[20*0.8^x, {x, -5, 5}] (* in rot *)



Logarithmusfunktion:

Allgemeine Form:

$f(x) = c.\log_a x$

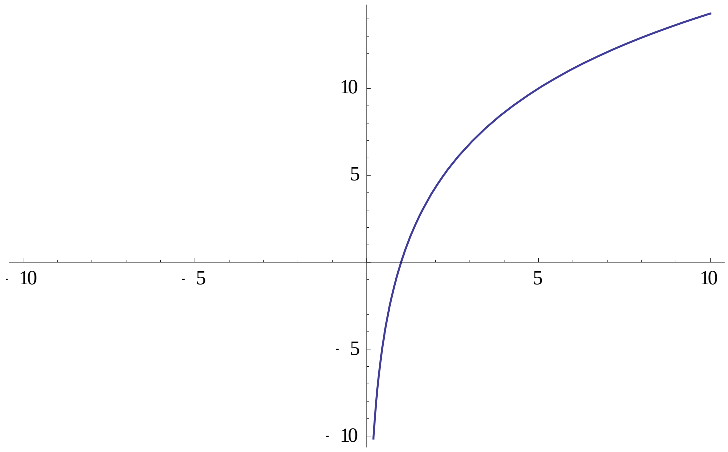
Nullstellen: [1] => N(1|0)

Extremstellen: Je nach Definitionsbereich [0; 2]

Monotonie: Streng monoton steigend für a > 1;

Streng monoton fallend für 0 < a < 1;

Plot[10*Log[5, x], {x, -10, 10}]



Rationale Funktion:

Allgemeine Form:

$f(x) = C + \frac{A}{B.x^n}$

Definitionsbereich: R\{x|B.x^n=0}

Vertikale Asymptote: $B.x^n = 0$

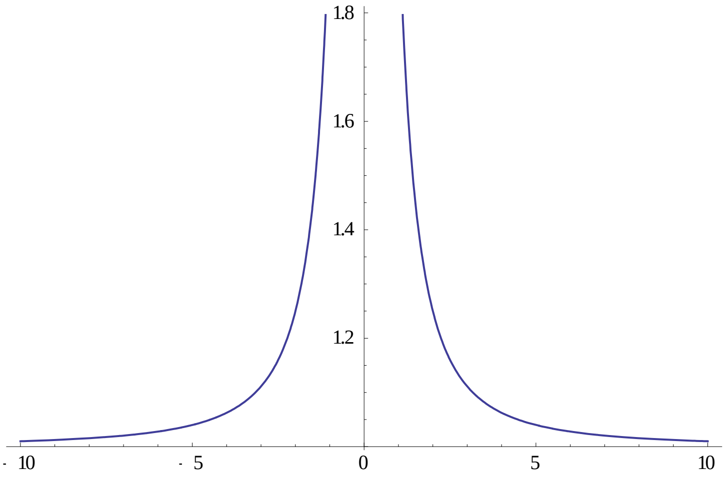
Horizontale/Schiefe Asymptote(n): $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

Nullstellen: kein allgemeines Nullstellen-Verhalten

Extremstellen: kein allgemeines Extremstellen-Verhalten

Monotonie: kein allgemeines Monotonie-Verhalten

Plot[1+1/x^2, {x, -10, 10}]



Interpolation von Polynomfunktionen

<u>*Schritt 1:*</u> *Welcher Funktionstyp ist gegeben?*

+Quadratische Funktion mit 3 Unbekannten -> 3 Informationen

+Funktion 3. Grades mit 4 Unbekannten -> 4 Informationen

+usw.

<u>*Schritt 2:*</u> *Herausfiltern von Informationen:*

+Hochpunkt, Tiefpunkt, Maximumstelle, Minimumstelle, Terrassenstelle…	=> f´(x) = 0
+Steigung an der Stelle S/am Punkt P ist 1	=> f'(S) = 1
+Wendetangente schließt mit der positiven x-Achse einen 45° Winkel ein	=> f'(W) = 1
+Wendepunkt, Wendestelle	=> f''(x) = 0
+Nullstellen	=> f(x) = 0

<u>*Schritt 3:*</u> *Gleichungssystem lösen*

Untersuchen von (rationalen) Funktionen

Ermittlung des Definitionsbereichs:	„Nenner = 0" setzen Gleichung lösen Definitionsbereich: R\{Lösung(en) der Gleichung}
Asymptoten bestimmen:	Vertikale/Senkrechte Asymptoten: x = Lösung der obigen Gleichung Horizontale/Waagrechte Asymptoten: y = $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$
Limes bilden:	1) Limes für x -> +∞ 2) Limes für x -> -∞
allgemein:	Zähler und Nenner der Ursprungsfunktion f(x) mit $\frac{1}{x^n}$ erweitern, wobei n die höchste Potenz von x im Nenner von f(x) ist. Summenglieder (Summanden, Minuenden, Subtrahenden) ohne x im Nenner werden nicht erweitert.

Monotonie-Intervalle:	Berechnung der Extremstellen Aufstellen der Monotonie-Intervalle
allg. Normalform:	]-∞; E/A] [E/A; E/A] [E/A; +∞[E/A… Extremstelle/Asymptote Extremstelle = Geschlossene Klammer Asymptote = offene Klammer Monotonie: Berechnung der Steigung in den einzelnen Intervallen
Skizzieren der Funktion:	Eventuell einzelne Funktionswerte ausrechnen
(*Wendestelle:*	f''(x) bzw. anhand des Grafen, Stelle an der sich die Krümmung ändert)

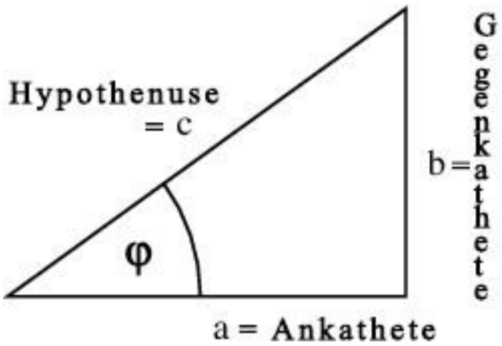
Trigonometrie & Vektorrechnung

Trigonometrische Formeln & Sätze

Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck:

$\sin(\varphi) = \frac{\#Gegenkathete}{\#Hypothenuse}$; $\cos(\varphi) = \frac{\#Ankathete}{\#Hypothenuse}$; $\tan(\varphi) = \frac{\#Gegenkathete}{\#Ankathete}$;

$c^2 = a^2 + b^2 | c = \#Hypothenuse$ (Satz des Pythagoras)



Trigonometrie im allgemeinen Dreieck:

Sinussatz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \; bzw. \; \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\gamma)$$

Mathematica Implementierung der Trigonometrie:

Sin[x]	(* gibt den Sinus zum Bogenmaß x *)
Sin[x Degree]	(* gibt den Sinus zum Gradmaß x *)
ArcSin[x]	(* gibt den Arcus Sinus von x im Bogenmaß *)
Cos[x]	(* gibt den Cosinus zum Bogenmaß x *)
Tan[x]	(* gibt den Tangens zum Bogenmaß x *)

Allgemeine Vektorrechnung

Allgemeine Grundlagen:

Rechenregeln für Vektoren siehe Formelsammlung bzw. „Mathematik Verstehen 5/6“

-Vektor von A nach B: $\overrightarrow{AB} = B - A$

-Parallelität: $\vec{A} \,|\, |\vec{B} = \vec{A} = t\,.\,\vec{B}$

-Betrag eines Vektors: $\left|\vec{A}\right| = \bar{A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + (a_3^2)}$

-Einheitsvektor zu $\vec{A}$: $\overrightarrow{A_0} = \frac{1}{|\vec{A}|}\,.\,\vec{A}$

-Normalvektor zu $\vec{A}$: $\overrightarrow{n_A} = (-a_2|a_1) = (a_2|-a_1)$ in IR^2

-Normalprojektion von $\vec{B}$ auf $\vec{A}$ im Raum: $\left|\overrightarrow{B_A}\right| = |\vec{B}\,.\,\overrightarrow{A_0}|$

-Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$: $\cos\varphi = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{|\vec{A}|\,.\,|\vec{B}|}$

-Skalarprodukt: $\vec{A}\,.\,\vec{B} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + (a_3.b_3)$

$\vec{A}\,.\,\vec{B} = 0$ => rechter Winkel; $\vec{A}\,.\,\vec{B} > 0$ => spitzer Winkel; $\vec{A}\,.\,\vec{B} < 0$ => stumpfer Winkel

-Vektorielles bzw. Kreuzprodukt: $\vec{A}\,x\,\vec{B} = (a_2.b_3 - a_3.b_2|\,a_3.b_1 - a_1.b_3\,|\,a_1.b_2 - a_2.b_1)$

Eigenschaften des Kreuzprodukts: + $\vec{A}\,x\,\vec{B}$ = Normalvektor auf $\vec{A}$ und $\vec{B}$

+ $|\vec{A}\,x\,\vec{B}|$ = Fläche des aufgespannten Parallelogramms.[1]

Achtung! Kein Kreuzprodukt in IR^2!!!

- Streckensymetrale: (spez. im Dreieck = Umkreismittelpunkt)

  geg. zwei Punkte A und B

  symS: $X = \left(A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + t\,.\,\overrightarrow{n_{AB}} = \frac{1}{2}.(A + B) + t\,.\,\overrightarrow{n_{AB}}$

-Winkelsymetrale: (spez. im Dreieck = Inkreismittelpunkt)

  geg. zwei Strecken AB und AC

  symW: $X = A + t\,.\,(\overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0})$

Gerade und Ebene im Raum:

Parameterdarstellung einer Geraden durch die Punkte A, B:

$X = A + t\,.\,\overrightarrow{AB}$

Normalvektordarstellung einer Geraden durch die Punkte A, B (nur in IR^2):

$X\,.\,\overrightarrow{n_{AB}} = (x.n_{1AB} + y.n_{2AB}) = \overrightarrow{n_{AB}}\,.\,A = \overrightarrow{n_{AB}}\,.\,B$

Parameterdarstellung einer Ebene durch die Punkte A, B, C:

$X = A + t\,.\,\overrightarrow{AB} + s\,.\,\overrightarrow{AC}$

Normalvektordarstellung einer Ebene durch die Punkte A, B, C:

$X\,.\,\overrightarrow{n_{ABC}} = (x.n_{1ABC} + y.n_{2ABC} + z.n_{3ABC}) = \overrightarrow{n_{ABC}}\,.\,A = \overrightarrow{n_{ABC}}\,.\,B = \overrightarrow{n_{ABC}}\,.\,C$

[1] Vgl. Malle u. A.: Mathematik Verstehen 6. 2010. S 168-171.

Lage und Schnitt zweier Geraden:

(geg. g: $X = A + s\,.\overrightarrow{AB}$; h: $X = C + t\,.\overrightarrow{CD}$)

+Fall 1: $\overrightarrow{AB} \;||\; \overrightarrow{CD} \;||\; \overrightarrow{AC}$ => Parallel zusammenfallend

+Fall 2: $\overrightarrow{AB} \;||\; \overrightarrow{CD} \nparallel \overrightarrow{AC}$ => Parallel verschieden

+Fall 3: $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{CD}$ => Windschief oder Schnittpunkt

-x Zeile von g mit x Zeile von h gleichsetzen

-y Zeile von g mit y Zeile von h gleichsetzen

-Gleichungssystem lösen (s, t = Unbekannte)

-kontrollieren ob s und t die dritte Gleichung (also die gleichgesetzten z Zeilen) erfüllen,

+wenn ja, Schnittpunkt berechnen (Einsetzen von s oder t in g bzw. h)

+wenn nein => windschief.

Lage und Schnitt zweier Ebenen:

(geg. Ebene E_1 mit Punkt P_1 und Normalvektor $\overrightarrow{n_1}$ & Ebene E_2 mit Punkt P_2 und Normalvektor $\overrightarrow{n_2}$)

+Fall 1: $\overrightarrow{n_1} \,||\, \overrightarrow{n_2} \;\wedge\; P_1 \in E_2 \;\wedge\; P_2 \in E_1$ => Parallel zusammenfallend

+Fall 2: $\overrightarrow{n_1} \,||\, \overrightarrow{n_2} \;\wedge\; P_1 \notin E_2 \;\wedge\; P_2 \notin E_1$ => Parallel verschieden

+Fall 3: $\overrightarrow{n_1} \nparallel \overrightarrow{n_2}$ => Schnittgerade

-Richtungsvektor erhält man durch $\overrightarrow{n_1} x\, \overrightarrow{n_2}$

-Punkt erhält man indem man eine Variable durch eine reelle Zahl ersetzt (z. Beispiel y = 1) und anschließend das Gleichungssystem (unterbestimmtes Gleichungssystem wird zu bestimmtem Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen) löst.

ODER

-Substitution einer Variable (z. Beispiel y = t)

-Lösen des Gleichungssystem (unterbestimmtes Gleichungssystem wird durch Substitution zu bestimmtem Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen, da t ≠ Variable)

-Lösung: (5 – 2t|t|3) => s: $X = (5|0|3) + t.(-2|1|0)$ [nur Beispiel]

Schnitt dreier Ebenen:

Lösung des bestimmten Gleichungssystems mit 3 Gleichungen zu 3 Variablen mithilfe von Substitutionsmethode oder dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.[2]

Lösung ist ein Schnittpunkt (x|y|z).

[2] Vgl. Malle u. A.: Mathematik Verstehen 6. 2010. S 193.

Lage und Schnitt von Gerade und Ebene:

(geg. Gerade g: $X = G + t.\vec{g}$ und Ebene E mit Punkt P und Normalvektor $\overrightarrow{n_E}$)

+Fall 1: $\vec{g}.\overrightarrow{n_E} = 0 \ \wedge G \in E$ => g||E und g liegt in E

+Fall 2: $\vec{g}.\overrightarrow{n_E} = 0 \ \wedge G \notin E$ => g||E und g liegt nicht in E

+Fall 3: $\vec{g}.\overrightarrow{n_E} \neq 0 \ \wedge G \notin E$ => Schnittpunkt

-x Zeile der Gerade in x Variable der Ebene einsetzen
-y Zeile der Gerade in y Variable der Ebene einsetzen
-z Zeile der Gerade in z Variable der Ebene einsetzen
-Gleichung nach t auflösen
-Einsetzen von t in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt

Winkel zwischen zwei Geraden, Gerade und Ebene, zwei Ebenen:

Lösung mithilfe der vektoriellen Winkelformel.

Beachte: $0 \leq \alpha \leq 90$

wenn $\varphi > 90$ gilt: $\alpha = 180 - \varphi$

Abstand eines Punktes von einer Ebene:

(geg. Punkt O ∉ E und Ebene E mit Punkt P und Normalvektor $\vec{n}$)

$d = |\overrightarrow{n_0}.\overrightarrow{PO}|$

Abstand Gerade-Ebene und Ebene-Ebene laufen nach dem selben Schema.

Gerade, Kreis, Kugel:

Kreis k mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2)$: $(x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 = r^2$

Kugel K mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$: $(x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 + (z-m_3)^2 = r^2$

Schnitt von Gerade mit Kreis/Kugel:

+Parameterform: x-Zeile der Gerade in x-Variable des Kreises einsetzten
y-Zeile… (und z-Zeile bei Kugel)
Gleichungssystem lösen
Diskriminante negativ = keine Lösung/Pasante
Diskriminante = 0 = eine Lösung/Tangente
Diskriminante positiv = zwei Lösungen/Schnittpunkte

+Normalvektorform: Gleichungssystem lösen (nur Kreis!)

Schnitt von Kreis mit Kreis:

Kreisgleichungen voneinander subtrahieren/(bzw. addieren)
nach x oder y auflösen
x oder y in eine der beiden Kreisgleichungen einsetzen und Variable(n) berechnen
andere Variable(n) durch vorige Substitutions-Gleichung errechnen

<u>Sonderfälle:</u> Ermitteln des Zentralabstandes M_1M_2 und betrachten der Radien r_1 und r_2

$z=0$	…Die Kreise sind konzentrisch (kein oder ∞ Schnittpunkt(e))
$0 < z < r_1-r_2$	...k_2 liegt im Inneren von k_1 (kein Schnittpunkt)
$z=r_1-r_2$	...k_2 berührt k_1 von innen (1 Schnittpunkt)
$r_1-r_2 < z < r_1+r_2$	...k_1 und k_2 schneiden einander in 2 Punkten
$z=r_1+r_2$	...k_2 berührt k_1 von außen (1 Schnittpunkt)
$z > r_1+r_2$	...k_2 liegt außerhalb von k_1 (kein Schnittpunkt)

Tangenten an einen Kreis:

(geg. Punkt $P \in k$ und Kreis k)

t: $X = P + s.\overrightarrow{n_{MP}}$ oder t: $X.\overrightarrow{MP} = P.\overrightarrow{MP}$

+Tangenten aus einem Punkt an einen Kreis

(geg. $Q \notin k$ und Kreis k)

-Aufstellung des Thaleskreises k_t

$M_t = \frac{1}{2}.(M + Q); r = |\overrightarrow{MM_t}|$

-Schneiden von k_t mit k ergibt die Schnittpunkte P_1 und P_2

-Tangenten: t_1: $X = P_1 + s.\overrightarrow{QP_1}$

t_2: $X = P_2 + r.\overrightarrow{QP_2}$

+Tangenten mit vorgegebener Richtung:

(geg. Richtungsvektor $\vec{r}$ der Tangente und Kreis k)

-Schneiden der Gerade $X = M + s.\overrightarrow{n_r}$ mit k ergibt die Schnittpunkte P_1 und P_2

-Tangenten: t_1: $X = P_1 + u.\vec{r}$

t_2: $X = P_2 + v.\vec{r}$

Winkel zwischen Kreis und Gerade:

(geg. Gerade g und Kreis k)

-Kreis und Gerade schneiden

-Winkel zwischen g und Tangente am Schnittpunkt mithilfe der vektoriellen Winkelformel berechnen

- Beachte: $0 \leq \alpha \leq 90$

Winkel zwischen zwei Kreisen:

-Kreise schneiden

-Winkel zwischen den Tangenten der Schnittpunkte berechnen

Tangentialebene an einer Kugel:

(geg. Punkt $P \in K$ und Kugel K)

E_t: $X.\overrightarrow{MP} = P.\overrightarrow{MP}$

Mathematica Implementierung der Vektorrechnung:

A = {x, y}	(* Definiert den Vektor A als (x|y) in IR^2 *)
B = {x, y, z}	(* Definiert den Vektor B als (x|y|z) in IR^3 *)
C = {x, y, z, a}	(* Definiert den Vektor C als (x|y|z|a) in IR^4 *)
…	
Cross[A, B]	(* gibt das Kreuzprodukt der Vektoren A und B *)
A.B	(* gibt das Skalarprodukt der Vektoren A und B *)
Norm[A]	(* gibt den Betrag des Vektors A *)

Differential- & Integralrechnung

Allgemeine Grundlagen der Differentialrechnung:

Ableitungsregeln für lineare Funktionen:	f(x) = c	=>	f'(x) = 0
	f(x) = k . x	=>	f'(x) = k
Ableitungsregeln für Potenzfunktionen:	f(x) = x^n	=>	f'(x) = n . x^{n-1}
Ableitungsregeln für Expotentialfunktionen:	f(x) = e^x	=>	f'(x) = e^x
	f(x) = a^x	=>	f'(x) = a^x . ln(a)
Ableitung einer Quadratwurzelfunktion:	f(x) = $\sqrt{x}$	=>	f'(x) = $\frac{1}{2.\sqrt{x}}$
Trigonometrische Ableitungen:	f(x) = sin(x)	=>	f'(x) = cos(x)
	f(x) = cos(x)	=>	f'(x) = -sin(x)
	f(x) = tan(x)	=>	f'(x) = $\frac{1}{cos^2 x}$ = 1 + $\tan^2$(x)
Ableitungen von Logarithmusfunktionen:	f(x) = ln x	=>	f'(x) = $\frac{1}{x}$
	f(x) = ^{a}log x	=>	f'(x) = $\frac{1}{x.\ln a}$

Allgemeine Ableitungsregeln:

+Produktregel:	f(x) = u(x).v(x)	=>	f'(x) = u'(x) . v(x) + u(x) . v'(x)
+Quotientenregel:	f(x) = u(x)/v(x)	=>	f'(x) = $\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$
+Kettenregel:	f(x) = u(v(x))	=>	f'(x) = u'(v(x)) . v'(x)
			u'(v(x)) …äußere Ableitung
			v'(x) …innere Ableitung

Im speziellen gilt für die Differentialrechnung, die erste Ableitung gibt Auskunft über die Steigung an einer Stelle x, die zweite Ableitung gibt die Krümmung an dieser Stelle an.

Allgemeine Grundlagen der Integralrechnung:

Stammfunktionen für lineare Funktionen:	f(x) = 0	=>	F(x) = c
	f(x) = c	=>	F(x) = c . x
	f(x) = k . x	=>	F(x) = $\frac{k.x^2}{2}$
Stammfunktionen für Potenzfunktionen:	f(x) = x^n	=>	F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$
	für n = -1	=>	F(x) = ln x
Stammfunktionen für Expotentialfunktionen:	f(x) = e^x	=>	F(x) = e^x
	f(x) = a^x	=>	F(x) = $\frac{a^x}{\ln a}$
Stammfunktion einer Quadratwurzelfunktion:	f(x) = $\sqrt{x}$	=>	F(x) = $\frac{2.\sqrt{x^3}}{3}$
Trigonometrische Stammfunktionen:	f(x) = sin(x)	=>	F(x) = -cos(x)
	f(x) = cos(x)	=>	F(x) = sin(x)
	f(x) = tan(x)	=>	F(x) = -ln cos(x)
Stammf. von Logarithmusfunktionen:	f(x) = ln x	=>	F(x) = x . ln x - x
	f(x) = ^{a}log x	=>	F(x) = $\frac{x.\ln x - x}{\ln a}$

Für alle gilt außerdem: F(x) = F(x) + c; c muss in den meisten Fällen nicht berücksichtigt werden, wird jedoch mehrmals hintereinander integriert, muss c in die Stammfunktion miteinbezogen werden.

Für Integrale gilt: $\int f(x)dx = F(x)$ und $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Das Integral gibt die Summe bzw. die Differenz aller von der Funktion eingeschlossenen Flächen an.

Integralsätze:
$\int_a^b c \,.\, f = c \,.\, \int_a^b f$; $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$;

„Kettenregel“ für Integrale:
$\int f(k\,.\,x)dx = \frac{1}{k}\,.\,F(k\,.\,x)$;

Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\big(g(t)\big).\,g'(t)dt;\ \text{Es gilt: a = g(c) und b = g(d)}$$

Zum Beispiel: $\int_0^1 \sqrt{x+1}$ t = $\sqrt{x+1}$ *Neue Grenzen:* $\sqrt{0+1}$ *und* $\sqrt{1+1}$ *also* 1 *und* $\sqrt{2}$

g(t) = x = $t^2 - 1$ *Substitutionsregel:* $\int_0^{\sqrt{2}} t\,.\,2t\;dt = \frac{2}{3}t^3$

Anwendung der Integralrechnung:

Flächenberechnung:

-Fläche einer positiven Funktion im Intervall [a; b]

A = $\int_a^b f(x)dx$

- Fläche einer negativen Funktion im Intervall [a; b]

A = - $\int_a^b f(x)dx$ = | $\int_a^b f(x)dx$ |

-Fläche einer Funktion mit Nullstelle b im Intervall [a; c]

A = | $\int_a^b f(x)dx$ | + | $\int_b^c f(x)dx$ |

-Fläche zwischen zwei Funktion f(x) > g(x) im Intervall [a; b]

A = $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Kurvenlänge und Umfang:

-Kurvenlänge S im Intervall [a; b]

S = $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\;dx$

-Umfang einer Funktion im Intervall [a; b]

U = (b - a) + f(a) + f(b) + S

Volumenberechnung:

-Volumen allgemein: V = $\int_a^b A(z)dz$

a = Höhe Grundfläche 1; b = Höhe Grundfläche 2

A(z) ist die von der Höhe abhängige Querschnittsfläche

Das Volumen V ist das Integral der Querschnittsfläche A(z) nach der Höhe z.

-Rotationsvolumen: Es gilt die allgemeine Volumenformel V = $\int_a^b A(z)dz$; da es sich bei Rotationsvolumen jedoch immer um Volumen mit Grundfläche $r^2\pi$ handelt und sich nur der Radius aufgrund von Figur und Rotationsrichtung ändert, gilt:

+bei Rotation um die x-Achse: V = $\pi\,.\int_a^b y^2\;dx$; (Umformung nach y=…)

+bei Rotation um die y-Achse: V = $\pi\,.\int_a^b x^2\;dy$; (Umformung nach x=…)

-Beweise:
Beweise laufen auf obiges hinaus, die Querschnittsfläche bzw. die Höhe wird meist durch Strahlensatz hergeleitet.[3]

Physikalische Anwendungen:

-Berechnung von Weglängen: s = $\int_a^b v(t)dt$
a, b = Zeitpunkte; s(t) = V(t) + c; c = s(0) = bereits zurückgelegter Weg
Die Weglänge s ist das Integral der Geschwindigkeit v(t) nach der Zeit t.

-Berechnung der Geschwindigkeit: v = $\int_a^b a(t)dt$
a, b = Zeitpunkte; v(t) = A(t) + c; c = v(0) = Anfangsgeschwindigkeit
Die Geschwindigkeit v ist das Integral der Beschleunigung a(t) nach der Zeit t.

-Berechnung der Arbeit I: w = $\int_a^b F(x)dx$
a, b = Wegpunkte
Die Arbeit w ist das Integral der Kraft F(x) nach dem Weg x.

-Berechnung der Arbeit II (Energie): w = $\int_a^b P(t)dt$
a, b = Zeitpunkte
Die Arbeit w ist das Integral der Leistung P(t) nach der Zeit t.

Mathematica Implementierung der Differential- und Integralrechnung:	
D[f(x), x]	(* gibt die erste Ableitung der Funktion f(x) *)
Integrate[f(x), x]	(* gibt die Stammfunktion (das undefinierte Integral) der Funktion f(x) *)

Extremwertaufgaben

<u>Schritt 1:</u> Herausfiltern/finden der Funktion:

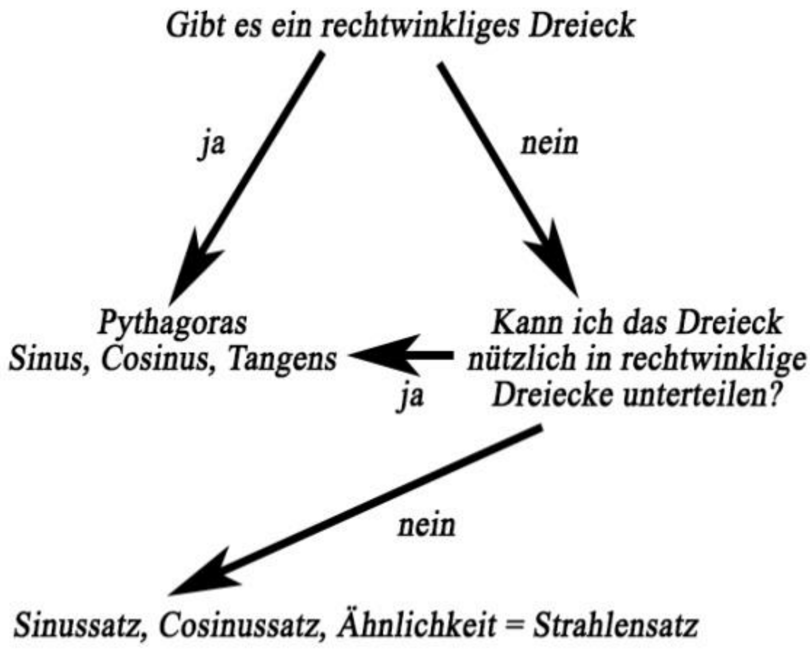
Was ist meine Zielfunktion?
Welche Informationen habe ich noch? Nebenfunktion?
Welche Variablen habe ich in meiner Zielfunktion? Welche Variablen kann ich durch andere ausdrücken? Welche muss aufgrund meiner Zielfunktion Variable bleiben?
Will ich ein Maximum oder ein Minimum?
Nach der Beantwortung all dieser Fragen -> Funktion aufstellen

<u>Schritt 2:</u> Ableitung der Funktion bilden und Null setzen f'(x) = 0

Funktionswerte betrachten, was ist Maximum? Was ist Minimum? Eventuell f''(x) bilden und Randstellen mit einbeziehen.

[3] Vgl. Malle u. A.: Mathematik Verstehen 8. 2012. S 37.

Funktionen mit Dreiecken:



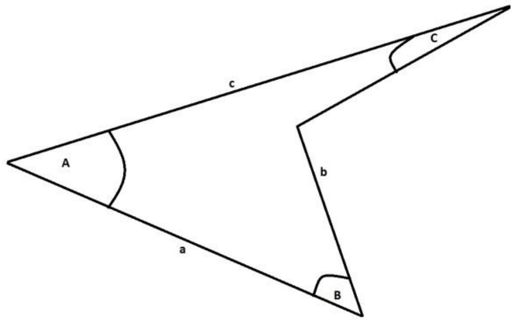
Mathematica Implementierung von Extremwertaufgaben:

Solve[D[f(x), x]==0, x]   (* Gibt die Extremstelle(n) der Funktion f(x) *)

Übungsbeispiele

- Im Casino wird Roulette & Poker gespielt:
  -Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass Manque (Schwarz) kommt?
  -Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass Manque kommt unter der Voraussetzung dass die Transversale (1, 2, 3) eintritt?
  -Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass die Transversale kommt unter der Voraussetzung dass Manque eintritt?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen Poker (daher 4 gleiche Karten) zu ziehen?
- Eine Laplace-Münze wird 5-mal geworfen:
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass mindestens 4-mal Kopf kommt?
- Ein Spieler spielt ein Spiel und hat anfangs 5€ Kapital, er gewinnt mit 50% Wahrscheinlichkeit und verliert mit 50% Wahrscheinlichkeit. Wenn er gewinnt, bekommt er 1€ und wenn er verliert, verliert er 1€ (faires Spiel).
  -Berechne den Erwartungswert! Was sagt der Erwartungswert aus?
  -Berechne den Erwartungswert unter der Bedingung, dass er nicht mehr weiterspielen darf wenn er Pleite geht! *(Tipp: logisch denken!)*
  -Wann hat der Spieler im Durchschnitt kein Kapital mehr?
- Bei einem Multiple-Choice-Test mit 20 Fragen bei denen jeweils nur eine von fünf Antwortmöglichkeiten richtig ist, wird annähernd zufällig angekreuzt.
  -Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit positiv (≥60%) zu sein?
  -Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit kein Sehr Gut zu erhalten?

- Die Poker-Spieler des Casinos werden nach ihrem Intelligenzquotienten eingeteilt der annähernd normalverteilt zu sein scheint mit μ = 150 IQ und σ = 30 IQ. Die Poker Spieler werden in fünf Gruppen zu je 20% eingeteilt in: „sehr dumm“ - „dumm“ - „durchschnitt“ - „klug“ - „sehr klug“.
  -Lege die Grenzen für die fünf Gruppen fest!
  -Das Casino-Prüfpersonal will eine randomisierte Studie durchführen und misst bei 20 Spielern den IQ, nur 10% werden als „sehr klug“ eingestuft. Um sicher zu gehen wird ein zweiter Versuch mit 200 Befragten durchgeführt, doch das Ergebnis bleibt gleich. Teste beide Ausfälle mit Signifikanz von 5%! Interpretiere die Ergebnisse!
  -Wie viele Poker-Spieler müsste das Casino-Prüfpersonal testen um ein 99% Konfidenzintervall mit der länge 0,02 angeben zu können?
  -Die Statistiker sind auf Urlaub und der Casino-Besitzer möchte selbst den Anteil seiner „sehr klugen“ Poker-Spieler angeben. Er testet 200 und darunter befinden sich 40 „sehr Kluge“. Er behauptet: „19 bis 21 Prozent meiner Spieler sind „sehr klug“!“ Wie groß ist seine Sicherheit?
- Gegeben ist eine Funktion $f(x) = |x|$
  -Ist die Funktion differenzierbar? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?
  -Ist die Funktion stetig? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?
  -Berechne die absolute Änderung, die mittlere Änderungsrate und die relative Änderung für beliebige gleich große Intervalle! Was zeigt sich?
- Der Graf einer Polynomfunktion vom Grad 4 geht durch den Koordinatenursprung und den Punkt P(-2|12). Außerdem hat er bei x = 2 einen Wendepunkt und bei x = -1 einen Wendepunkt mit zur 1. Achse paralleler Tangente.
  -Gib die Funktion f(x) und ihre Extremstellen an und skizziere sie!
- Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$
  -Untersuche die Funktion im Hinblick auf Definitionsbereich, Asymptoten, Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Monotonie-Intervalle!
- Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 5 - \frac{1}{x^5+32}$
  -Bestimme alle Asymptoten der Funktion!
  -[Für besonders Mutige: Skizziere die Funktion!]
- Die Halbwertszeit des Plutonium-Isotops 244 beträgt 80 Millionen Jahre.
  -Was besagt die Halbwertszeit?
  -Gib die Zerfallsgleichung in zwei Formen an!
  -Wie viel Plutonium 244 hättest du am Lebensende wenn du zur Geburt 1000 g geschenkt bekommen hättest? (Durchschnittsalter eines Mannes/einer Frau: 78,0a/83,3a; Ansatz!)
  -Nach wie vielen Jahren ist nur noch ein Drittel des anfänglichen Plutoniums vorhanden? Wann gar nichts mehr?
- Berechne den Umfang dieser Figur:



Winkel A = 30°
Winkel B = 45°
Winkel C = ?
Strecke a = 11 cm
Strecke b = 5 cm
Strecke c = 13 cm

- Die Ebene E: x - 3y + 5z = 98 schneidet die Kugel K [M_1(3/-8/7); r_1=8].
  -Bestimme Mittelpunkt M_2 und Radius r_2 des Schnittkreises k_1!
  -Die Kugel berührt eine der Koordinatenebenen. Welche ist es? Wo liegt der Berührpunkt?
  -Stelle eine Ebene auf, die den zum Schnittkreis k_1 parallelen Schnittkreis k_2 enthält und denselben Radius r_2 hat!
- Gegeben sind: E_1: 3x + 5y – z = 33
  E_2: x – 5y + 3z = -19
  E_3: 5x – y + z = 11
  Punkt $P \in E_1 \cap E_2 \cap E_3$
  -Ermittle die Gleichung der Kugel K die den Punkt P auf der Ebene E_1 berührt und Radius $\sqrt{140}$ hat!
  -Ermittle die Durchstoßpunkte A und B der Geraden (durch K) die durch den Punkt P geht und normal auf die Ebene E_2 steht!
  -Ermittle den Winkel den die Tangentialebenen durch A und B einschließen!
  -Ermittle den Winkel den die Ebenen E_2 und E_3 einschließen!
- Ermittle Gleichungen der Kreise die durch die Punkte P und Q gehen und eine Koordinaten-Achse berühren:
  - P(-4|1); Q(4|5); berührt die 1. Achse
  - P(4|-3); Q(2|-1); berührt die 2. Achse
- Berechne Umfang und Flächeninhalt der Funktion $f(x) = x^2 + 17$ im Intervall [0; 2]!
- Löse mithilfe der Substitutionsmethode: $\int_{-0,2}^{0} \tan(5x+1) . \cos(5x+1)$
- Zeige dass folgendes Integral nicht durch Substitution lösbar ist: $\int_{ln2}^{ln3} \frac{e^{e^x}}{e^2}$
- Die Freihantelpharisäer brauchen zum „Curlen“ neue Gewichte aus Osmium (ρ=22,59 g/cm^3). Sie bestellen im Tempel Curlomons Hanteln der Länge 20 cm. Die Form der Hanteln kann annähernd mit einer Hyperbel der Brennweite 5 und Hauptachsenlänge 8 beschrieben werden. Berechne die Masse der Hanteln!
- Bill Gepunkt fährt mit seinem Rinspeed sQuba die 10 km lange Küstenstraße entlang um seinen Freund Steve Jotpunkt zu besuchen. Dieser wohnt allerdings auf einer Insel, die wenn man am Ende der Straße genau 90° abbiegt noch etwa 1 km weit entfernt im Wasser liegt. Wo muss Bill ins Wasser fahren um so schnell wie möglich bei Steve zu sein, wenn sein sQuba am Land 120 km/h und im Wasser 3 km/h schafft? Wie lange dauert es bis er bei Steve ist?
- Berechne den maximale Abstand der Funktionen $f(x) = -x^2 + 25$ und $f(x) = x^2 - 25$ im Intervall [-5; 5]! Wie groß ist er? Wie groß ist der maximale Abstand der beiden Funktionen außerhalb des Definitionsbereichs? (Ansätze!)

Lösungen -> https://sites.google.com/site/michabirklbauer/mathematik

Contact me on Skype: midnight_wesker
Please report any mistakes to micha.birklbauer@gmail.com
or check for updates: https://sites.google.com/site/michabirklbauer/mathematik