Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по расчетно-графической работе №3

По дисциплине «Математический анализ» (второй семестр)

Группа:
МАТБАЗ 1.5

Студенты:
Андриянова Софья
Беляев Михаил
Билошицкий Михаил
Дениченко Александр
Разинкин Александр

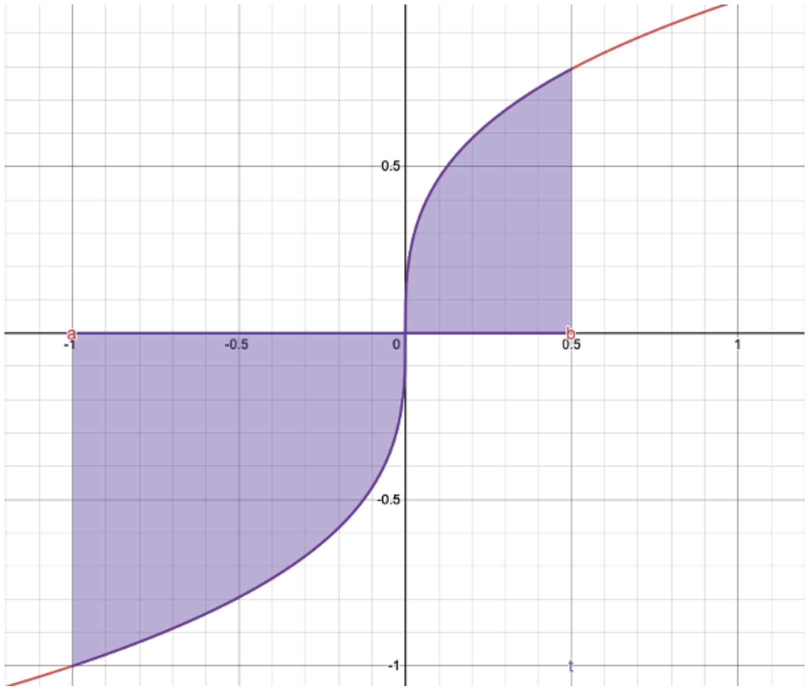
Лектор:
Правдин Константин Владимирович

Практик:
Правдин Константин Владимирович

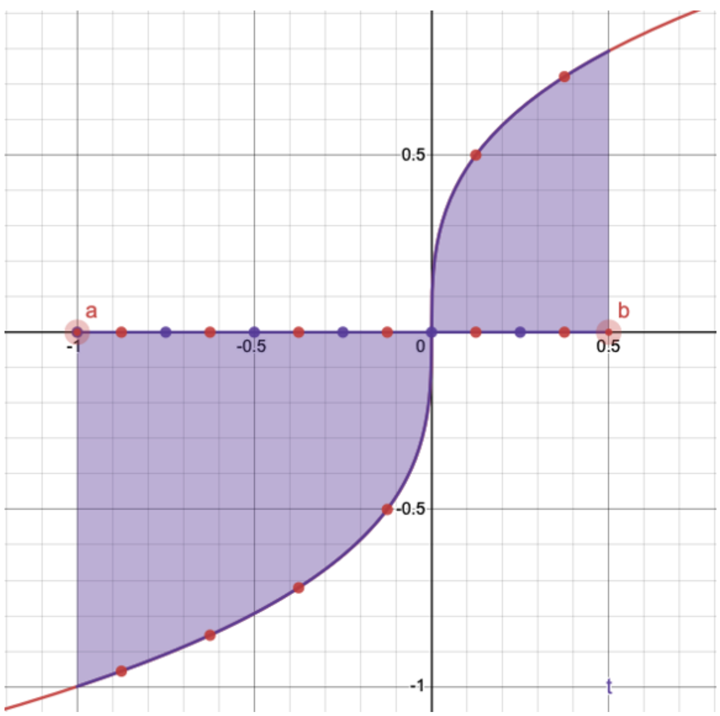
Санкт-Петербург
2023 г.

1 Интегральная сумма

Задача: исследовать интегральную сумму функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$, заданной на отрезке $[a,\ b]$ a=-1, b=0.5
Решение:
1. Составим и изобразим интегральную сумму функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры.
Изобразим график функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и криволинейную трапецию в соответствии с границами отрезка [-1, 0.5].

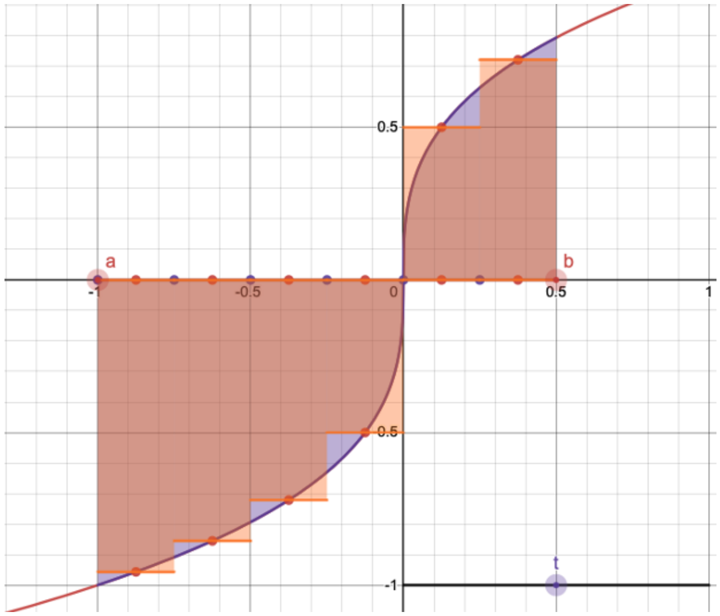


Разобьём отрезок на n элементарных отрезков и отметим точками их концы на рисунке, затем выберем по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметим их на рисунке и также отметим точками вычисленное значения функции в этих произвольных точках.



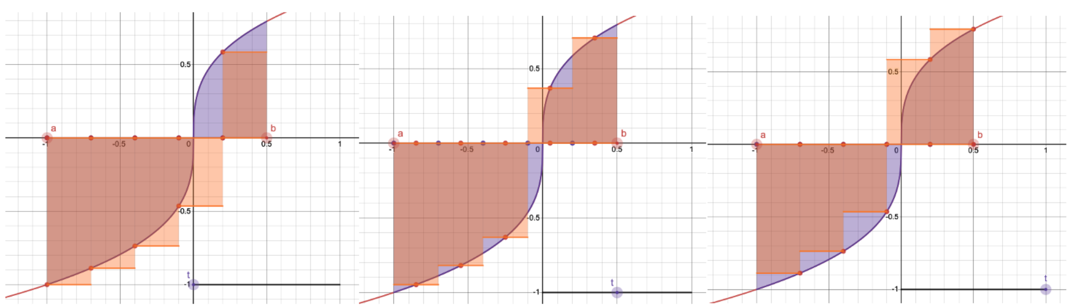
Примечание: фиолетовым цветом изображены концы n элементарных отрезков, красным цветом – произвольные точки внутри этих отрезков и соответствующие им значения функции.

Изобразим ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точки внутри элементарных отрезков.



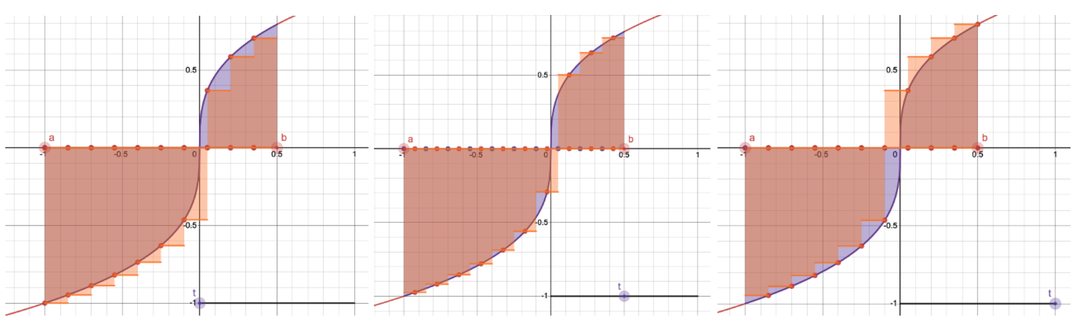
2. Исследуем ступенчатую фигуру.

Выберем количество отрезков за n=5 и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.



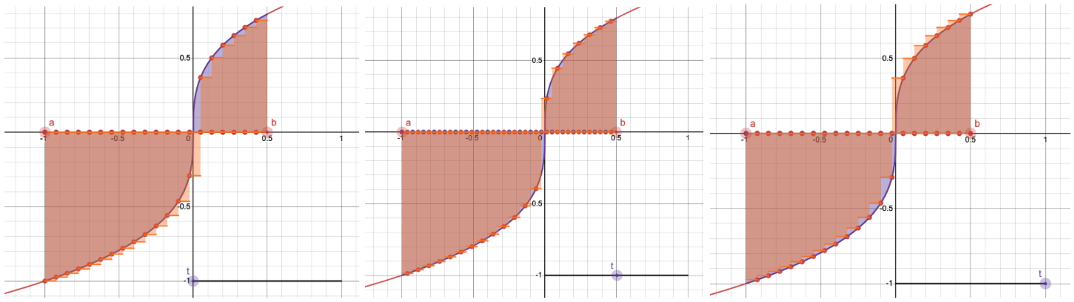
Крайнее левое — Промежуточное $t = 0.5$ — Крайнее правое

Выберем количество отрезков за n=10 и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.



Крайнее левое — Промежуточное $t = 0.5$ — Крайнее правое

Выберем количество отрезков за n=20 и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.



Крайнее левое   Промежуточное $t = 0.5$ Крайнее правое

3. Заключение

В заключении графического исследования по интегральной сумме можно сделать вывод, что при увеличении количества отрезков n, ступенчатая фигура все больше начинает совпадать с формой криволинейной трапеции под графиком и если найти сумму площадей каждой из ступеней, то величина этой суммы по мере увеличения n будет более точно совпадать с площадью криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x \cdot f(x_i)|$$

где n – количество отрезков (ступеней), Δx – длина отрезка (ступени), $f\,(x_i)$ – значение функции в точке на отрезке (высота ступени). Смещение точек внутри элементарных отрезков при предельном $(n \to \infty)$ увеличении количества отрезков не влияет на точность. В случае ограниченного количества отрезков наиболее точным будет расположение точек в центре отрезков.

Выполнение графического исследования по последовательности интегралов в графическом калькуляторе Desmos: https://www.desmos.com/calculator/frixo8lz4c

Последовательность интегральных сумм

4. Построим интегральную сумму функции $f\,(x) = \sqrt[3]{x}$ на заданном отрезке [-1, 0.5]

Разобьем отрезок на n элементарных отрезков, выберем по одной точке внутри каждого элементарного отрезка и запишем интегральную сумму. При n=5 и t=0.5.

$$S = \sum_{i=1}^{5} |\Delta x \cdot f(x_i)| = 1.04090491674$$

5. Исследуем значение с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков.

Выберем количество отрезков за n=5 и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое:

$$S = 1.04021197754$$

Промежуточное t=0.5:

$$S = 1.04090491674$$

Крайнее правое:

$$S = 1.10210181974$$

Выберем количество отрезков за n=10 и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое:

$$S = 1.04055844714$$

Промежуточное t=0.5:

$$S = 1.04543248557$$

Крайнее правое:

$$S = 1.07150336824$$

Выберем количество отрезков за n=20 и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях. Крайнее левое:

$$S = 1.04299546636$$

Промежуточное t=0.5:

$$S = 1.0468807487$$

Крайнее правое:

$$S = 1.05846792691$$

6. Вычислим интеграл данной функции по отрезку и сравним значения интегральных сумм с его величиной.

$$\int_{-1}^{0.5} \sqrt[3]{x} dx$$

Чтобы получить точное значение площади, так как функция может возвращать отрицательные значения, то по свойству аддитивности разобьем интеграл на 2, где 1 будет являться площадью в области y<0 и 2 – при y>0:

$$S = \left| \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x} dx \right| + \int_{0}^{0.5} \sqrt[3]{x} dx = \left| \left(\frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} \right) \Big|_{-1}^{0} \right| + \left| \left(\frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} \right) \Big|_{0}^{0.5} \right| =$$

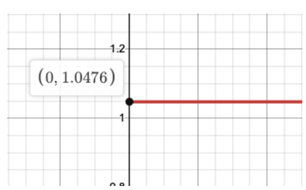
$$= \left| 0 - \frac{3\,(-1)\,\sqrt[3]{-1}}{4} \right| + \frac{3 \cdot 0.5 \cdot \sqrt[3]{0.5}}{4} - 0 =$$

$$= 0.75 + 0.29763769724 = 1.04763769724$$

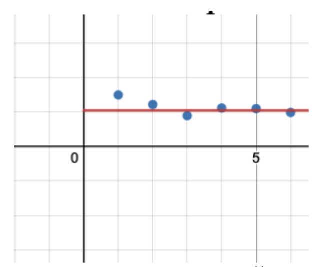
При сравнении значения интегральной суммы с величиной интеграла можно заметить, что значения интегральных сумм слегка неточные, но близки с искомой величиной интеграла.

7. Построение последовательности интегральных сумм на графике.

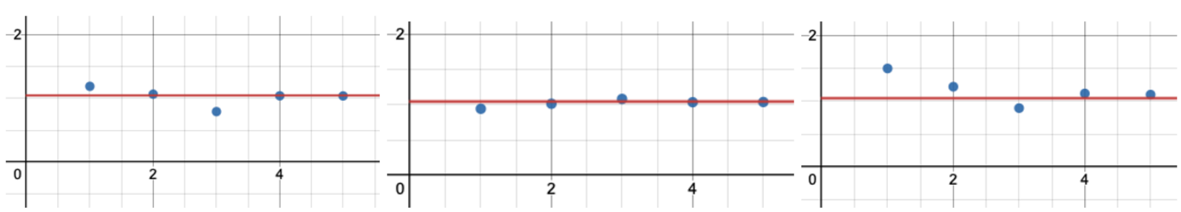
Сперва изобразим точное значение интеграла на графике.



Далее построим последовательность интегральных сумм.

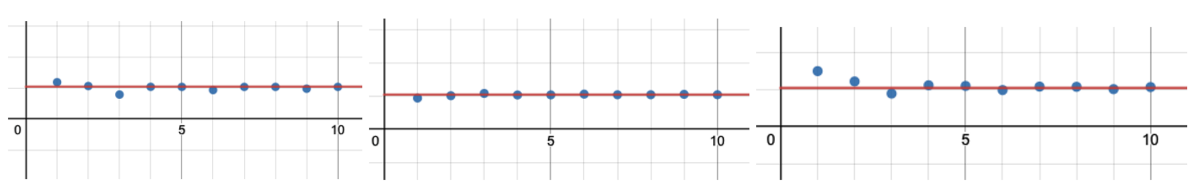


Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков n=5 в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.



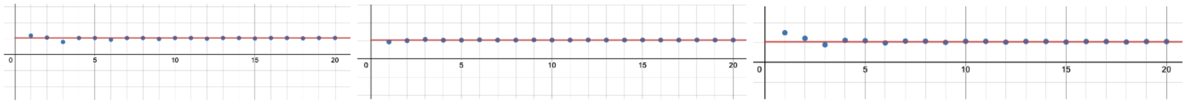
Крайнее левое | Промежуточное $t = 0.5$ | Крайнее правое

Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков n=10 в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.



Крайнее левое | Промежуточное $t = 0.5$ | Крайнее правое

Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков n=20 в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.



Крайнее левое Промежуточное $t = 0.5$ Крайнее правое

8. Заключение

В заключении графического исследования по последовательности интегральных сумм можно сделать вывод, что при увеличении количества отрезков интегральная сумма все более точно сходится к искомому значению интеграла функции, что мы смогли увидеть на графике и проверить аналитически. Метод нахождения интегральной суммы очень полезен для приближенного вычисления значений интеграла без взятия самого интеграла и достаточно точно с этим справляется при большом количестве взятых отрезков. На сегодняшний день этот метод очень популярен, например для вычисления интегралов компьютерами.

Выполнение графического исследования по последовательности интегральных сумм в графическом калькуляторе Desmos: https://www.desmos.com/calculator/iynuluoxsp

2 Площадь плоской фигуры

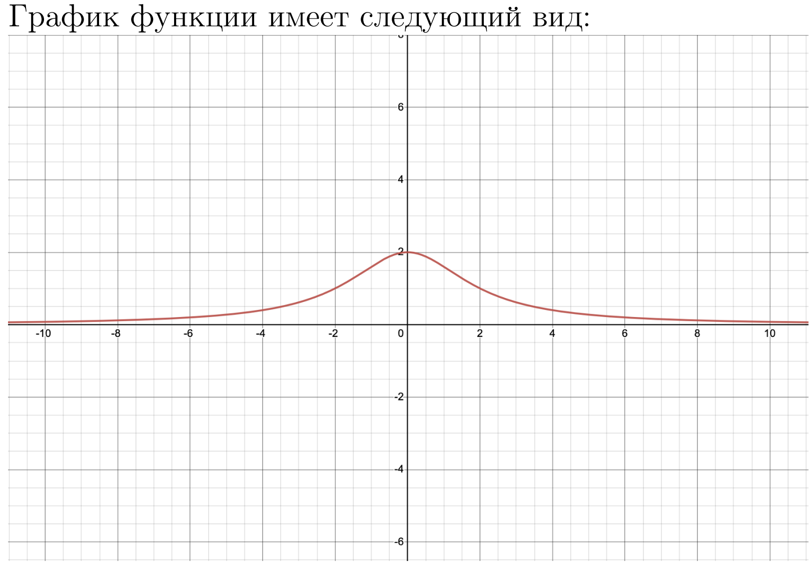
Задача: Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной верзьерой $x = t, y = \frac{8}{4+t^2}$ и осью абсцисс.
План:
1. Изобразите на графике кривую (-ые) и область, которую она (они) ограничивает.
2. Запишите формулу для нахождения площади при помощи определённого интеграла.
3. Вычислите интеграл и запишите ответ.
4. Оцените правдоподобность полученного ответа, приближая данную фигуру другими простыми фигурами с известными площадями (треугольники, прямоугольники, круги, ...).
Решение:

1) Прежде, чем приступить к изображению графика данной функции, давайте обратим внимание на то, что данную параметрически заданную функцию y(t) можно представить в виде y(x). Это делается максимально просто: нужно заменить t на x, так как они равны (см. на зависимость x(t)). Получим следующую функцию:

$$y(x) = \frac{8}{4+x^2}$$

Теперь можем приступить к изображению графика данной функции. Для реализации этого пункта воспользуемся сайтом Desmos.

График функции имеет следующий вид:

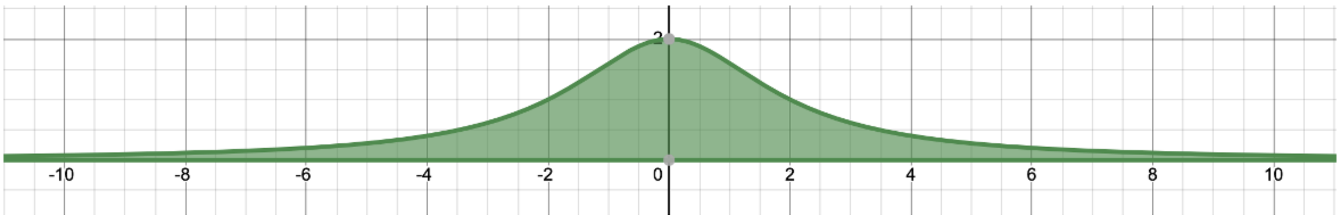


Также мы можем заметить еще одно свойство у данной функции - четность. Данная функция четная, так как f(x) = f(-x) (это происходит из-за второй степени над единственной переменной x в функции), это свойство мы можем наблюдать и на вышеприведенном графике - он симметричен относительно оси ординат. Данным свойством мы можем упростить в два раза дальнейшее решение, рассматривая лишь половину этого графика и затем увеличивая результат вдвое (чуть позже мы это увидим).

Мы можем обратить внимание на то, как график стремится на бесконечности к нулю, но не достигает его. Давайте это докажем при помощь предела:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8}{4+x^2}=0$$

Изобразим площадь между графиком функции и осью абсцисс:



2) Геометрический смысл определенного интеграла (интеграла Римана) заключается в том, что его абсолютное значение равняется площади фигуры, ограниченное графиком функции и осью абсцисс на данном промежутке интегрирования. Мы уже пришли к выводу, что график функции на бесконечности стремится к нулю, не достигая его, то есть это приводит нас к несобственному интегралу первого рода (на бесконечном промежутке интегрирования). Формула для расчета площади фигуры примет следующий вид:

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8}{4+x^2}dx$$

Чтобы упростить себе решение данного интеграла, поднимемся немного повыше и вспомним, что функция является четной, то есть нам достаточно взять, допустим, правую часть фигуры на промежутке $x\in[0;+\infty)$, найти ее площадь и затем результат умножить увеличить вдвое, так как есть такая же половинка слева. Таким образом формула примет следующий вид:

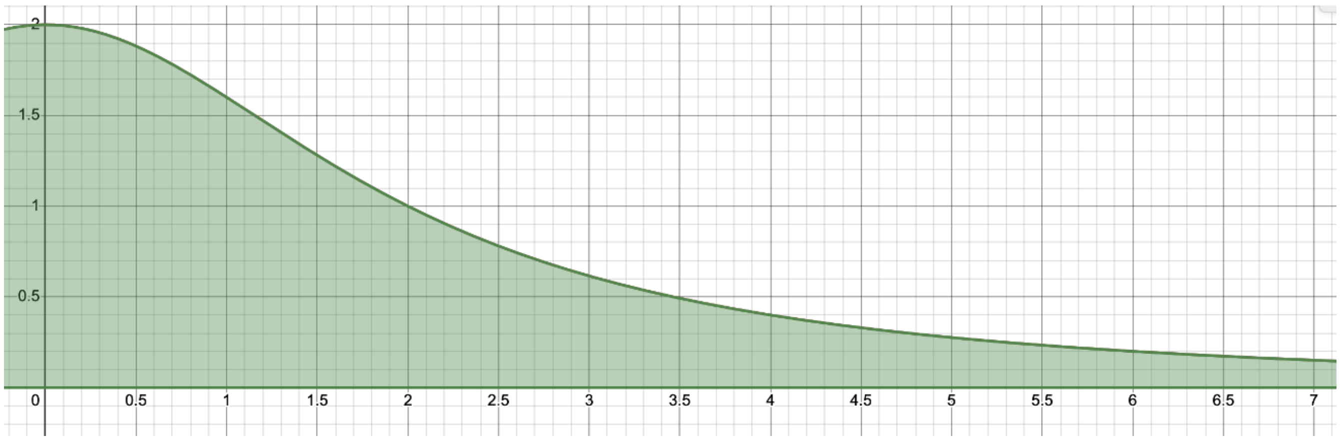
$$S=2\int_{0}^{+\infty}\frac{8}{4+x^2}d(x)$$

3) Вычислим площадь по выведенной формуле:

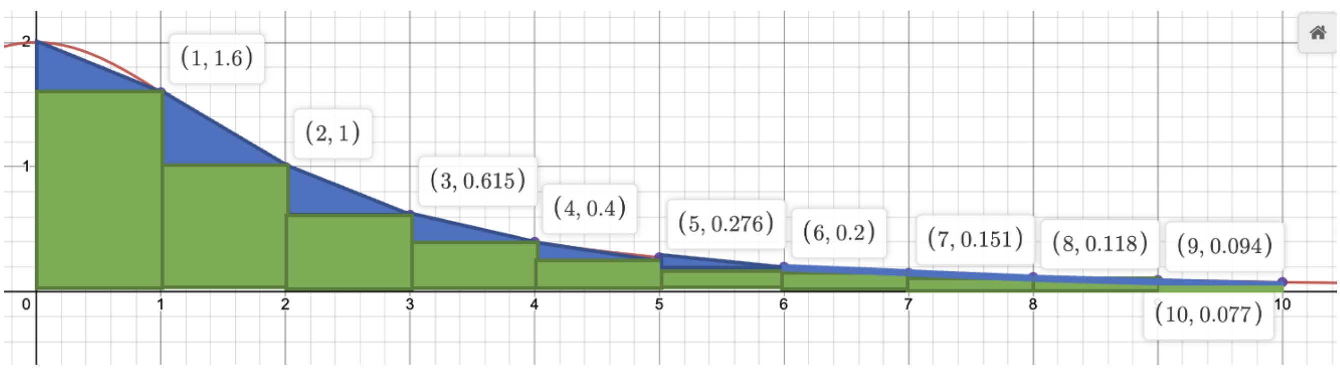
$$S=2\int_{0}^{+\infty}\frac{8}{4+x^2}dx=16\cdot\lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^a\frac{1}{4+x^2}dx\right)=16\cdot\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}tan^{-1}\Big(\frac{a}{2}\Big)-\frac{1}{2}tan^{-1}\Big(\frac{0}{2}\Big)\right)=$$
$$=8\cdot\lim_{a\to+\infty}\left(tan^{-1}\Big(\frac{a}{2}\Big)\right)=\frac{8\pi}{2}=4\pi$$

Полученная площадь равняется 4π.

4) Оценка данной фигуры при помощи известных геометрических фигур:



Рассмотрим снова правую половину фигуры, а затем полученную приблизительную площадь умножим на два, получив тем самым приблизительную площадь всей фигуры (этот момент не раз упоминался выше). Наиболее подходящими известными геометрическими фигурами для нашего случая являются прямоугольник и прямоугольный треугольник. Предлагается данную половину фигуры разложить следующим образом:



Посчитаем площадь для каждой пары прямоугольник/треугольник:

$$S_1 = 1,6 + \frac{1}{2} \times (2 - 1,6) = 1,8; \;\; S_2 = 1 + \frac{1}{2} \times (1,6 - 1) = 1,3$$

$$S_3 = 0,615 + \frac{1}{2} \times (1 - 0,615) = 0,8075; \;\; S_4 = 0,4 + \frac{1}{2} \times (0,615 - 0,4) = 0,5075$$

$$S_5 = 0,276 + \frac{1}{2} \times (0,4 - 0,276) = 0,338; \;\; S_6 = 0,2 + \frac{1}{2} \times (0,276 - 0,2) = 0,238$$

$$S_7 = 0,151 + \frac{1}{2} \times (0,2 - 0,151) = 0,1755; \;\; S_8 = 0,118 + \frac{1}{2} \times (0,151 - 0,118) = 0,1345$$

$$S_9 = 0,094 + \frac{1}{2} \times (0,118 - 0,094) = 0,106; \;\; S_{10} = 0,077 + \frac{1}{2} \times (0,094 - 0,077) = 0,0855$$

Приблизительная площадь всей фигуры будет равняться:

$$\widetilde{S} = 2 \sum_{i=1}^{10} S_i = 10,985 \approx 3,5\pi$$

Полученная приблизительная площадь отличается на $0,5\pi$. Учитывая, что приближение было совершено лишь десятью парами геометрических фигур, можно с утверждать, что с увеличением пар геометрических фигур приблизительная площадь будет стремиться к значению, равному 4π.

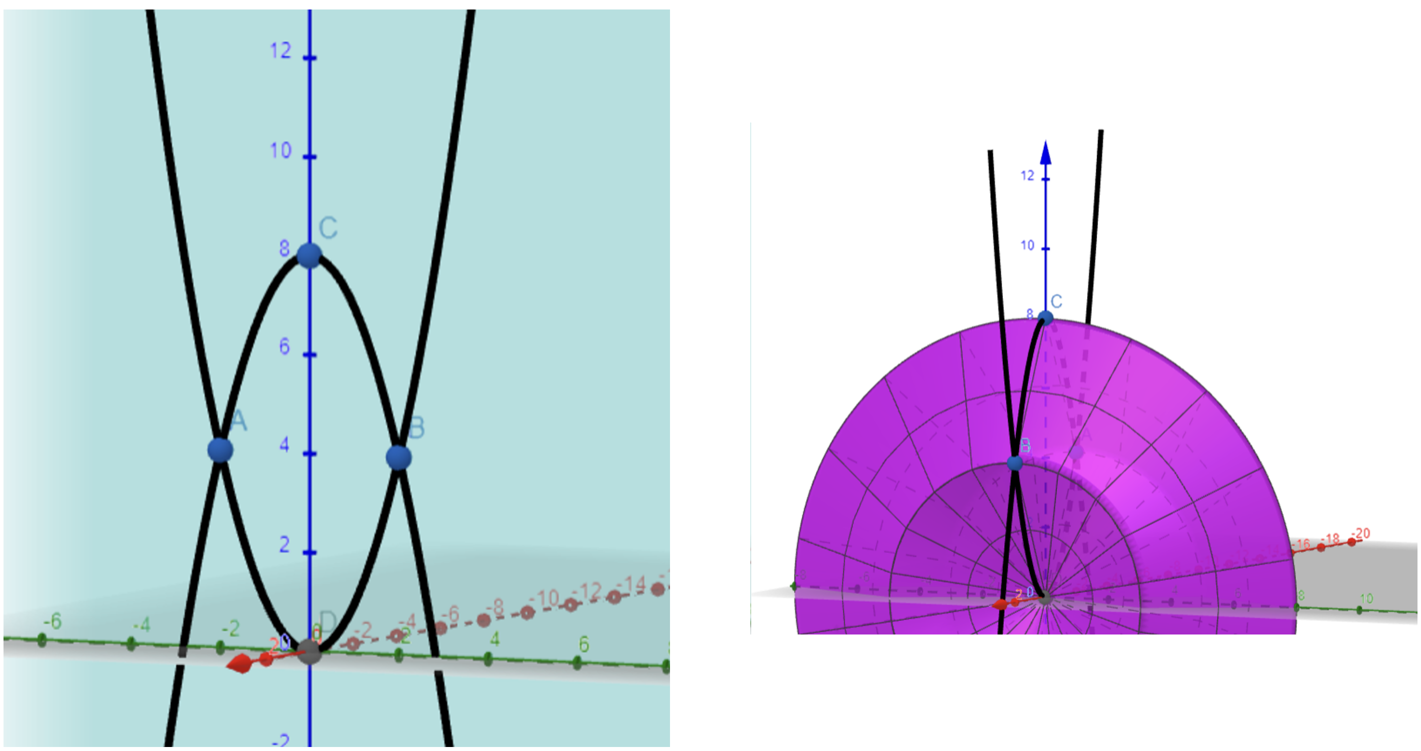
Вывод:
I. В данном пункте мы рассмотрели несколько важных тем, связанных с определенным интегралом:
II. Использовали геометрический смысл интеграла
III. Вспомнили относительно, как ищется определенный интеграл при помощи интегральных сумм (в четвертом шаге мы приближали площадь при помощи известных геометрических фигур)
IV. Решили несобственный интеграл первого рода
V. Вспомнили, как находить предел функции на бесконечности

3 Объём тела вращения

Задача: Найдите объём тела T, полученного вращением фигуры Φ вокруг указанной оси. Фигура Φ ограничена следующими кривыми (ось Ox):

$$y = 8 - x^2, \; y = x^2,$$

Решение:
1)Изобразим на графике фигуру Φ и тело вращения T.



Фигура Φ заключена между точками A, B, C, D. Тело вращения T изображено фиолетовым цветом.

2) Запишем формулу для нахождения объёма тела вращения T при помощи определённого интеграла.

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

3) Вычислим интеграл и запишим ответ.
Объем тела вращения вычислим как разность объемов тел (Ф1 – Ф2). Точки пересечения кривых будут равны следующим значениям: a = -2, b = 2 (по Ox). Фигура Ф1 ограничена:

$$y = \ 8 - x^2$$

Тогда,

$$V_{\Phi 1} = \pi \int_{-2}^{2} \left(8 - x^2\right)^2 dx$$

Фигура Ф2 ограничена:

$$y = x^2$$

Тогда,

$$V_{\Phi 2} = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^2\right)^2 dx$$

Значит объем фигуры Ф можно вычислить следующим образом:

$$V_{\Phi} = \pi \int_{-2}^{2} \left(8 - x^2\right)^2 dx - \ \pi \int_{-2}^{2} \left(x^2\right)^2 dx = \ \pi \left(\left(\frac{x^5}{5}\right) \Big|_{-2}^{2} - \left(64x - \frac{16x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) \Big|_{-2}^{2} \right)$$

$$= \pi \left(64x - \frac{16x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^{2} = \ \pi \left(64 \cdot 2 - \frac{16 \cdot 2^3}{3} - 64 \cdot (-2) + \frac{16 \cdot (-2)^3}{3}\right) = 170\frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $170\frac{2\pi}{3}$.

4 Несобственный интеграл

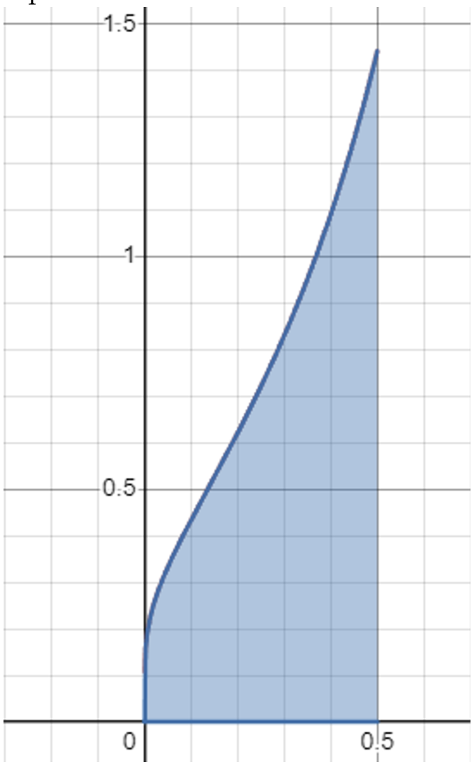
Задача: Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α.
Решение:

Дан несобственный интеграл (упростим его):

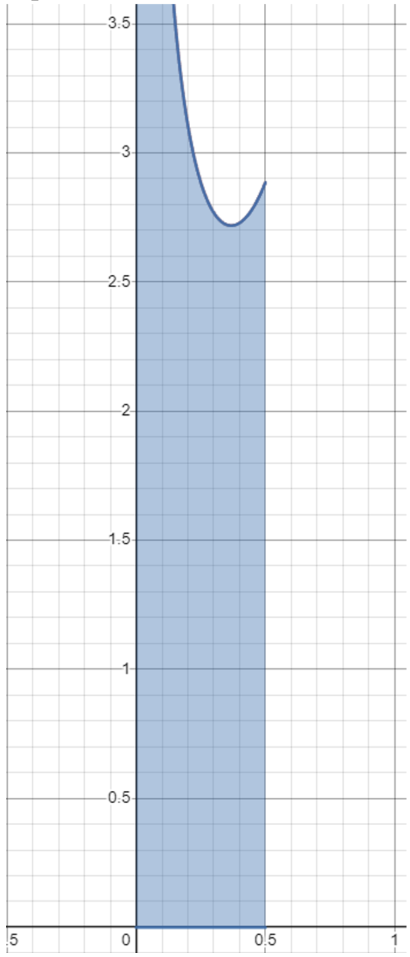
$$\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x^a \ln \frac{1}{x}} = \int_{0}^{1/2} \frac{dx}{-x^a lnx}$$

1) Особая точка несобственного интеграла: $x = 0$. Данный интеграл является несобственным интегралом 2 рода. На промежутке интегрирования подынтегральная функция является неотрицательной.
2)Графики подынтегральной функции на промежутке интегрирования:

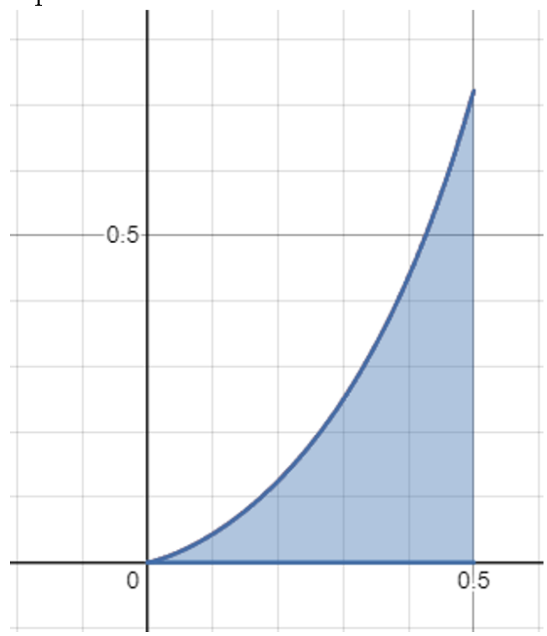
При a = 0:



При a = 1:



При a = -1:



3) При a = 1, легко находится первообразная. Найдем значение неопределенного интеграла:

$$\int \frac{dx}{-xlnx} = -\int \frac{dx}{xlnx} = \left| \begin{matrix} t = \ln(x) \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -ln\,|t| = -ln\,|ln(x)|$$

Перепишем несобственный интеграл:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{-xlnx} = \lim_{a\to 0+} (\int_a^{1/2} \frac{dx}{-xlnx}) = \lim_{a\to 0+} (-\ln(\ln 2) + \ln|\ln a|) = +\infty$$

Следовательно, при a = 1 данный интеграл расходится.

4) Признаки для определения сходимости несобственных интегралов 2 рода на промежутке от 0 до $\frac{1}{2}$. Пусть у нас есть два интеграла: $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ и $\int_0^{1/2} g(x)\,dx$ с бесконечным разрывом в точке $\frac{1}{2}$.

I. Признак сравнения с неравенствами: Если условие $0 \le f(x) \le g(x)$ выполняется на всем промежутке $[0;\frac{1}{2})$ и интеграл $\int_0^{1/2} g(x)\,dx$ – сходится, то интеграл $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ тоже сходится.

II. Предельный признак сравнения: Если $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $A \neq \infty$, $A \neq 0$ и один из интегралов сходится, то второй интеграл тоже сходится. Если $A\ = \infty$, то если f(x) сходится, тогда g(x) тоже сходится. Если $A\ = 0$, то если g(x), тогда f(x) тоже сходится.

III. Абсолютный признак: Если $\int_0^{1/2} |f\left(x\right)| \, dx$ – сходится, то $\int_0^{1/2} f\left(x\right) dx$ тоже сходится.

5) Исследование на сходимость эталонного интеграла:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\beta} dx = \begin{cases} -\frac{1}{\beta-1} \cdot \frac{1}{x^{\beta-1}} \Big|_0^{\frac{1}{2}}\ ,\ \beta \neq 1 \\ \ln|x| \Big|_0^{\frac{1}{2}}\ ,\ \beta = 1 \end{cases} = \begin{cases} PX, \beta > 1 \\ PX, \beta = 1 \\ CX, \beta < 1 \end{cases}$$

6) Трансцендентная функция:

$$t\left(x\right) = -\ln x$$

Сравним данную функцию с $g\left(x\right) = x$ на промежутке от 0 до $\frac{1}{2}$. Тогда t(x) – убывающая, g(x) – возрастающая; $t\left(0\right) = \infty, g\left(0\right) = 0$. Проверим, произошло ли пересечение данных функций до $x = \frac{1}{2}$, для этого сравним значения этих функций в данной точке:

$$t\left(\frac{1}{2}\right)\ ?\ g\left(\frac{1}{2}\right)\ \ => \ \ln 2\ ?\ \frac{1}{2}\ \ => \ e^{\ln 2}\ ?\ e^{\frac{1}{2}}\ \ => \ 2\ > \sqrt{e}$$

Следовательно, $t\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$, а значит $t\left(x\right) > g(x)$ на всем выделенном промежутке. Заменим трансцендентную функцию в исходном выражении на x и получим следующее:

$$\frac{1}{-x^a \ln(x)} < \ \frac{1}{x^{a+1}}$$

Заметим, что в результате оценки мы получили в правой части эталонный интеграл, в котором $\beta = a{+}1$, проведем сравнение данного интеграла с эталонным и получим следующие промежутки сходимости и расходимости:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{a+1}} dx = \begin{cases} PX, a > 0 \\ PX, a = 0 \\ CX, a < 0 \end{cases}$$

Исходя из признака сравнения по неравенствам данного интеграла с эталонным, можно сделать вывод, что исходный интеграл сходится при значениях $a < 0$.

7) Из пункта 3 нам известно, что при a = 1, исходный интеграл расходится. Используем предельный признак сравнения подынтегральных функций у исходного интеграла, и интеграла с a = 1, для выявления промежутков расходимости.

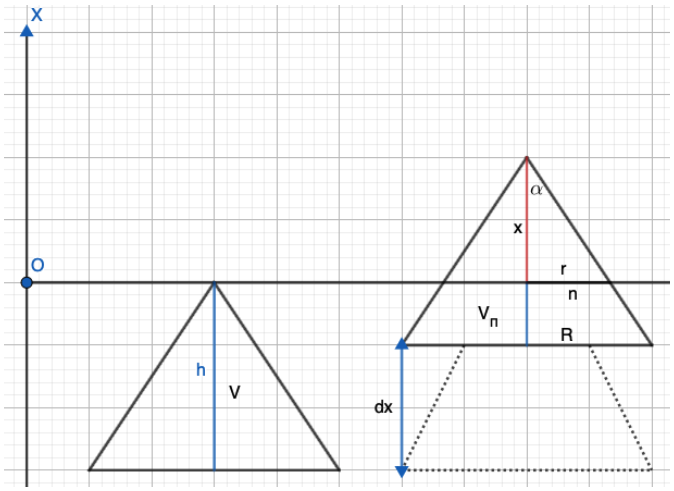
$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{-x^a lnx}{-xlnx} = \lim_{x \to 0+} x^{a-1} = \begin{cases} 0, a-1 > 0 \\ 1, a-1 = 0 \\ \infty, a-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} PX, a > 1 \\ PX, a = 1 \\ CX, a < 1 \end{cases}$$

8) Интеграл сходится в промежутке $(-\infty; 1)$ и расходится в промежутке $[1;\ +\infty)$

5 Приложения определенного интеграла

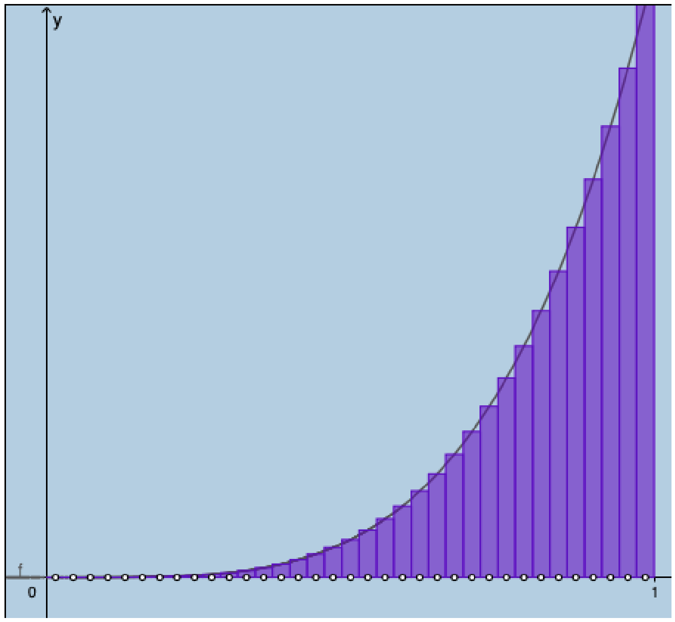
Задача: Прямой круговой конус с радиусом основания и высотой 1 м вертикально погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды.
Найдите: работу, необходимую для извлечения цилиндра из воды, если его удельный вес равен 3. (Указание: сила, совершающая работу по подъему тела, равна разности веса тела и веса воды, вытесняемой подводной частью тела).
Решение:

1)Сделаем графическую иллюстрацию к условию задачи:



r - радиус малого конуса
R - радиус большого конуса
V_p - объём погруженной части конуса
V_m - объём верхней части конуса
V - объём конуса
ρ_k - плотность конуса
ρ_j - плотность воды (1000 кг/m^3)
h - высота конуса
$P_k = mg$ - вес конуса
A - работа, которую нужно найти
g = 9,8 м/с (ускорение свободного падения)

2) Определим работу силы по подъёму конуса на величину dx:
По мере того, как мы будем поднимать конус, сила Архимеда булет уменьшаться, так как вес воды, вытесняемой подводной частью тела, убывает. Из этого следует, что мы должны прикладывать большую силу для поднятия детали, поэтому при увеличении высоты надводной части конуса, сила для извлечения будет расти. В физике работа - это энергия, передаваемая на объект или от него путем применения силы вдоль водоизмещения. В своей простейшей форме для постоянной силы, согласованной с направлением движения, работа равна произведению силы и пройденного расстояния, но обычно мы имеем дело с равномерной силой, которая на каждом равном промежутке данного расстояния одинакова, в нашей же задаче она не является константой, поэтому мы должны рассмотреть каждый промежуток dx и получить общую работу при помощи интегральной суммы. Говорят, что сила делает положительную работу, если при применении она имеет компонент в направлении смещения точки применения. Сила выполняет отрицательную работу, если она имеет компонент, противоположный направлению смещения в точке применения силы. Работа - это энергия, связанная с действием силы, поэтому работа впоследствии обладает физическими размерами и единицами энергии. Обсуждаемые здесь принципы работы идентичны принципам электрической работы.



$A = mg - \rho_j V_p g,$ где mg - вес тела, а $\rho V g$ - сила Архимеда действующая на него

Работа силы - это прямой интеграл ее скалярной тангенциальной составляющей вдоль пути ее точки применения. Если сила варьируется, нам нужно использовать исчисление, чтобы найти проделанную работу. Если сила задается F(x), то работа, выполняемая силой вдоль оси x от a до b, составляет:

$$A = \int_a^b F(x)\ dx$$

Небольшой объем работы δA, который происходит в течение момента времени, рассчитывается как:

$$\delta A = F(x)\ dx$$

$$\delta A = dA = mg\ dx - \rho_j V_p(x) g\ dx$$

3) Определим плотность конуса из удельного веса:

$$P_k = m_k g = \rho_k V_k g,\ \gamma = \frac{P_k}{V_k} \ \ \text{(P - вес тела)}$$

$$\gamma = \frac{\rho_k V_k g}{V_k} = \rho_k g = 3$$

$$P_k = m_k g = \gamma V_k = 3 \cdot \frac{\pi}{3} R^2 h = \pi$$

4) Выразим объем погруженной части через глубину погружения (x). Она равна объему усеченного конуса:

$$V_k = \frac{\pi}{3} h R^2,\ V_m = \frac{\pi}{3} x r^2$$

Так как конус прямой и по условию у него высота равна радиусу основания, то очевидно следующее соотношение:

$$r = x \tan(\alpha) = x \tan(\frac{\pi}{4}) = x$$

(α − угол наклона стенки конуса относительно основания)

Тогда,

$$V_p(x) = V_k(x) - V_m(x) = \frac{\pi}{3} h R^2 - \frac{\pi}{3} x r^2 = \frac{\pi}{3} h R^2 - \frac{\pi}{3} x^3$$

5) Перейдем к интегрированию:

$$dA = dm_k g - d\rho_j V_p g = dm_k g - d\rho_j g(\frac{\pi}{3}hR^2 - \frac{\pi}{3}x^3)$$

$$A = \int_0^h (m_k g - \rho_j g(\frac{\pi}{3}hR^2 - \frac{\pi}{3}x^3))dx = \int_0^1 (\pi - 9800 \cdot (\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}x^3))dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 (1 - \frac{9800}{3} + \frac{9800}{3}x^3))dx = (\frac{-9797\pi x + 2450\pi x^4}{3})\Big|_0^1 = \frac{-7347\pi}{3} = -2449\pi = -7693,8$$

Ответ: $-2449\pi = -7693,8$ Дж

Вывод: отрицательность работы физически связана с тем, что конус очень лёгкий и выталкивается водой на поверхность. Внешнюю силу приходится прикладывать для замедления этого выталкивания.

Итоги: В данной расчётно-графической работе мы исследовали интегральные суммы и несобственный интеграл на сходимость при различных значениях параметра, нашли площадь плоской фигуры, объём нескольких тел вращения, пользуясь определённым интегралом, и увидели применение интегралов в физических задачах.

Оценочный лист:

Андриянова Софья - 100%
Беляев Михаил - 100%
Билошицкий Михаил - 100%
Дениченко Александр - 100%
Разинкин Александр - 100%