

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ
ТЕХНИКИ

Курсовая работа

по дисциплине

«Дискретная математика»

Вариант № 116

Выполнил:

Студент группы Р3116

Билошицкий Михаил Владимирович

Преподаватель:

Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2023

Задание

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при

$$-2 \leq (x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3) < 1$$

и неопределённое значение при

$$(x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3) = -5$$

Таблица истинности

№	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$	$x_4 x_5$	$(x_4 x_5)_{10}$	$x_1 x_2 x_3$	$(x_1 x_2 x_3)_{10}$	$(-)$	f
0	0 0 0 0 0	0 0	0	0 0 0	0	0	1
1	0 0 0 0 1	0 1	1	0 0 0	0	1	0
2	0 0 0 1 0	1 0	2	0 0 0	0	2	0
3	0 0 0 1 1	1 1	3	0 0 0	0	3	0
4	0 0 1 0 0	0 0	0	0 0 1	1	-1	1
5	0 0 1 0 1	0 1	1	0 0 1	1	0	1
6	0 0 1 1 0	1 0	2	0 0 1	1	1	0
7	0 0 1 1 1	1 1	3	0 0 1	1	2	0
8	0 1 0 0 0	0 0	0	0 1 0	2	-2	1
9	0 1 0 0 1	0 1	1	0 1 0	2	-1	1
10	0 1 0 1 0	1 0	2	0 1 0	2	0	1
11	0 1 0 1 1	1 1	3	0 1 0	2	1	0
12	0 1 1 0 0	0 0	0	0 1 1	3	-3	0
13	0 1 1 0 1	0 1	1	0 1 1	3	-2	1
14	0 1 1 1 0	1 0	2	0 1 1	3	-1	1
15	0 1 1 1 1	1 1	3	0 1 1	3	0	1
16	1 0 0 0 0	0 0	0	1 0 0	4	-4	0
17	1 0 0 0 1	0 1	1	1 0 0	4	-3	0
18	1 0 0 1 0	1 0	2	1 0 0	4	-2	1
19	1 0 0 1 1	1 1	3	1 0 0	4	-1	1
20	1 0 1 0 0	0 0	0	1 0 1	5	-5	d
21	1 0 1 0 1	0 1	1	1 0 1	5	-4	0
22	1 0 1 1 0	1 0	2	1 0 1	5	-3	0
23	1 0 1 1 1	1 1	3	1 0 1	5	-2	1
24	1 1 0 0 0	0 0	0	1 1 0	6	-6	0
25	1 1 0 0 1	0 1	1	1 1 0	6	-5	d
26	1 1 0 1 0	1 0	2	1 1 0	6	-4	0
27	1 1 0 1 1	1 1	3	1 1 0	6	-3	0
28	1 1 1 0 0	0 0	0	1 1 1	7	-7	0
29	1 1 1 0 1	0 1	1	1 1 1	7	-6	0
30	1 1 1 1 0	1 0	2	1 1 1	7	-5	d
31	1 1 1 1 1	1 1	3	1 1 1	7	-4	0

Аналитический вид

$$\begin{aligned} \text{КДНФ: } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = & \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \\ & \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \\ & \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ККНФ: } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = & (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) \cdot \\ & \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \cdot \\ & \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \cdot \\ & \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) \cdot \\ & \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \cdot \\ & \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \end{aligned}$$

Минимизация булевой функции методом Квайна-Мак-Класки

№	$K^0(f)$	Поглощение
1	00000	+
2	00100	+
3	00101	+
4	01000	+
5	01001	+
6	01010	+
7	01101	+
8	01110	+
9	01111	+
10	10010	+
11	10011	+
12	10100	+
13	10111	+
14	11001	+
15	11110	+

№ склеивания	$K^1(f)$
1 - 2	00X00
1 - 4	0X000
2 - 3	0010X
2 - 12	X0100
3 - 7	0X101
4 - 5	0100X
4 - 6	010X0
5 - 7	01X01
5 - 14	X1001
6 - 8	01X10
7 - 9	011X1
8 - 9	0111X
8 - 15	X1110
10 - 11	1001X
11 - 13	10X11

№	$Z(f)$
1	00X00
2	0X000
3	0010X
4	X0100
5	0X101
6	0100X
7	010X0
8	01X01
9	X1001
10	01X10
11	011X1
12	0111X
13	X1110
14	1001X
15	10X11

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам

Простые импликанты		0 - кубы											
		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	
		0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	
		0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	
		0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	00X00	*	*										
2	0X000	*			*								
3	0010X		*	*									
4	X0100		*										
5	0X101			*				*					
6	0100X				*	*							
7	010X0				*		*						
8	01X01					*		*					
9	X1001					*							
10	01X10						*		*				
11	011X1							*		*			
12	0111X								*	*			
13	X1110								*				
14	1001X										*	*	
15	10X11											*	*

Импликанты 4, 9, 13, 14, 15 – существенные, так как они покрывают вершины 12, 14, 15, 10, 13 соответственно, не покрытые другими импликантами. Вычеркиваем из таблицы строки, соответствующие этим импликантам, а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Это вершины 2, 5, 8, 10, 11, 12, 14, 15. Вершина 13 не покрывающая ни одного импликанта, также вычеркивается из таблицы. В результате получаем упрощенную импликантную таблицу.

Простые импликанты		0 - кубы					
		0	0	0	0	0	0
		0	0	1	1	1	1
		0	1	0	0	1	1
		0	0	0	1	0	1
		0	1	0	0	1	1
		a	c	d	f	g	i
A	00X00	*					
B	0X000	*		*			
C	0010X		*				
D	0X101		*			*	
E	0100X			*			
F	010X0			*	*		

G	01X01					*	
H	01X10				*		
I	011X1					*	*
J	0111X						*

Множество существенных импликант образуют ядро покрытия как его обязательную часть.

$$\text{Ядро покрытия } T = \begin{cases} X1110 \\ 1001X \\ 10X11 \end{cases}$$

Если упорядочить упрощенную импликантную таблицу до таблицы с импликантами, покрывающие только 2 вершины, то получим вторую часть минимального покрытия.

Простые импликанты		0 - кубы					
		0	0	0	0	0	0
		0	0	1	1	1	1
		0	1	0	0	1	1
		0	0	0	1	0	1
		0	1	0	0	1	1
		a	c	d	f	g	i
B	0X000	*		*			
D	0X101		*			*	
F	010X0			*	*		
I	011X1					*	*

$$C_{min}(f) = \begin{cases} X1110 \\ 1001X \\ 10X11 \\ 0X000 \\ 0X101 \\ 010X0 \\ 011X1 \end{cases} \quad S_a = 28, \quad S_b = 35$$

Этому покрытию соответствует МДНФ следующего вида:

$$f = x_3x_4\bar{x}_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_5$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

		x4x5			
x2x3		00	01	11	10
	00	1			
	01	1	1		
	11		1	1	1
	10	1	1		1

x1 = 0

		x4x5			
x2x3		00	01	11	10
	00			1	1
	01	d		1	
	11				d
	10		d		

x1 = 1

Примечание – серая ячейка, пересечение двух склеек.

$$C_{min}(f) = \begin{cases} 00X00 \\ 0X101 \\ 0100X \\ 0111X \\ 01X10 \\ 1001X \\ 10X11 \end{cases} \quad S_a = 28, S_b = 35$$

МДНФ имеет следующий вид:

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 x_5$$

Определение МКНФ

		x4x5			
x2x3		00	01	11	10
	00		0	0	0
	01			0	0
	11	0			
	10			0	

x1 = 0

		x4x5			
x2x3		00	01	11	10
	00	0	0		
	01	d	0		0
	11	0	0	0	d
	10	0	d	0	0

x1 = 1

$$C_{min}(f) = \begin{cases} 01100 \\ 00001 \\ 00X1X \\ 01011 \\ 10X0X \\ 11X0X \\ 10110 \\ 11X1X \end{cases} \quad S_a = 32, S_b = 40$$

МДНФ имеет следующий вид:

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \cdot \\ \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) \cdot \\ \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторное преобразование для МДНФ

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \\ \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 x_5 \quad S_q = 35$$

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_4 (\bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee x_3 x_5) \vee \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4 \vee x_4 \bar{x}_5) \vee x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 x_4 \vee x_4 x_5) \\ S_q = 23 \quad t = 3$$

Декомпозиция невозможна

Факторное преобразование для МКНФ

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \cdot \\ \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) \cdot \\ \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \quad S_q = 40$$

$$f = (x_1 \vee x_4)((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5)) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5)) \cdot \\ (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)((x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)\bar{x}_2) \quad S_q = 26 \quad t = 4$$

По правилу сокращения получим:

$$f = (x_1 \vee x_4)((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5)) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_5) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \\ (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee x_5) \quad S_q = 22 \quad t = 4$$

Декомпозиция невозможна

Синтез комбинационных схем в булевом базисе

Проверочные входные данные:

$$f(0, 1, 1, 0, 0) = 0$$

$$f(0, 0, 0, 0, 0) = 1$$

Схема по упрощенной МДНФ: $S_q = 23$ $t = 3$

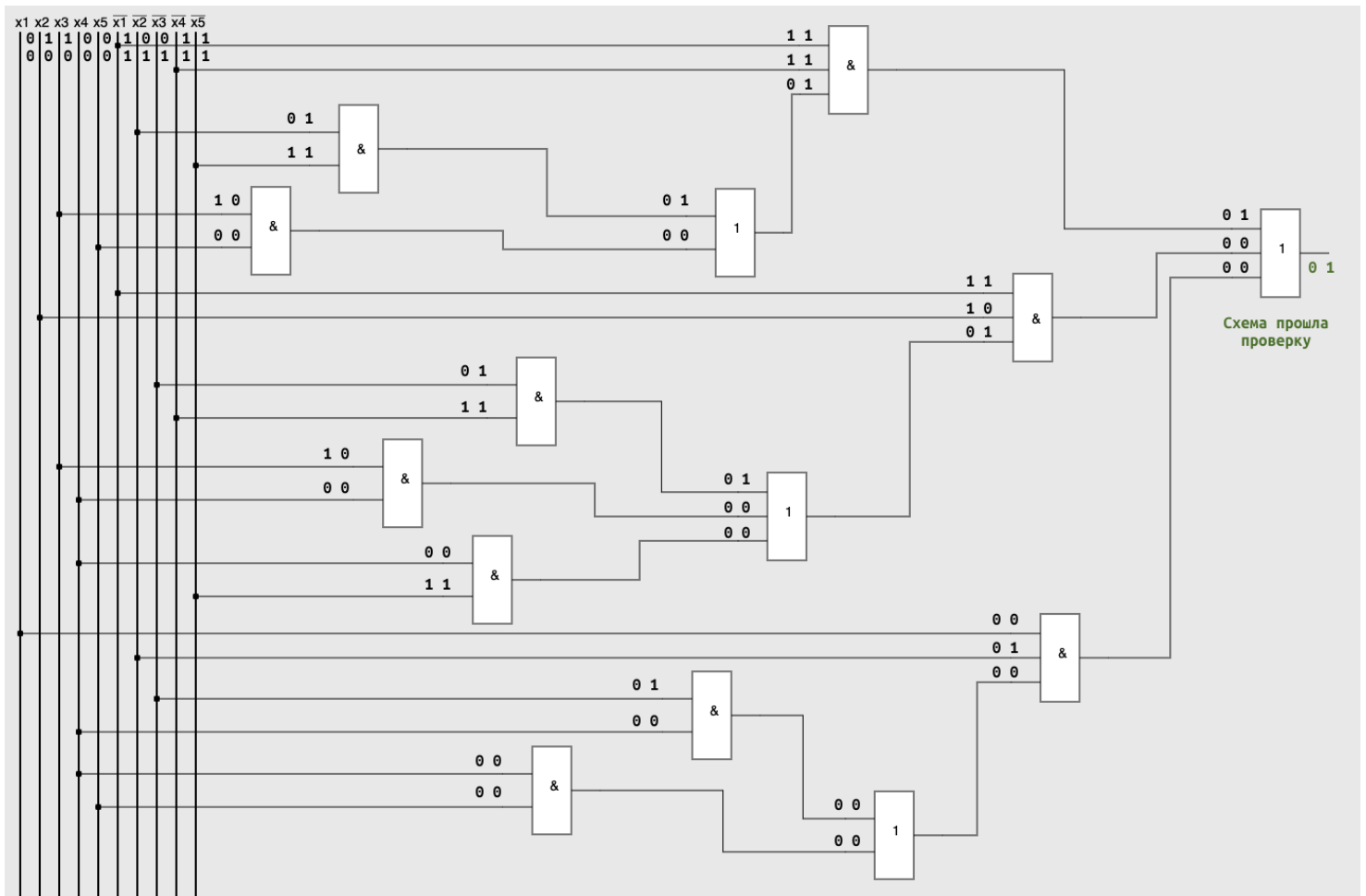
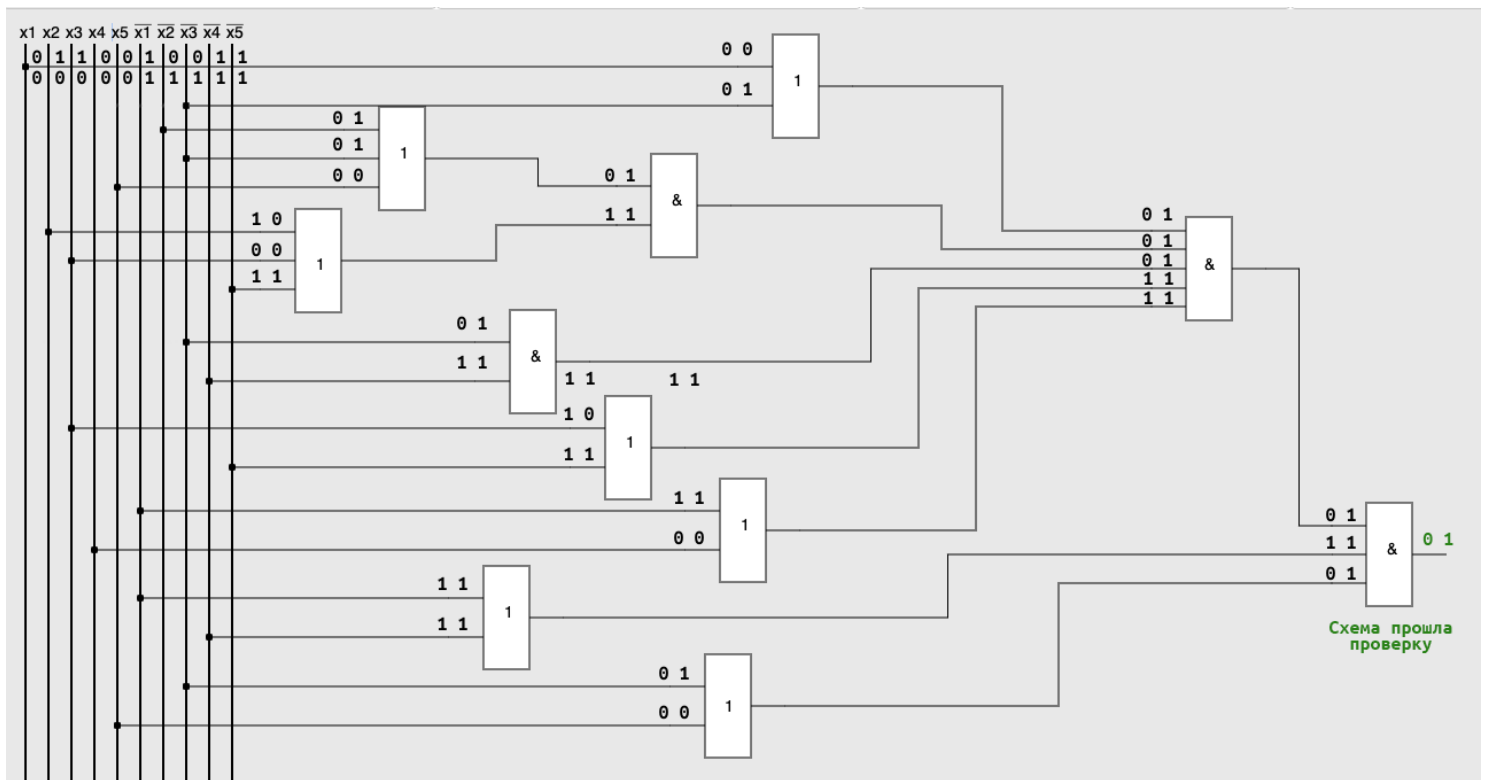


Схема по упрощенной МКНФ: $S_q = 22 \quad t = 4$



Синтез комбинационных схем в универсальных базисах

Базис ИЛИ-НЕ

$$f = (x_1 \vee x_4)((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5)) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_5) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee x_5) = (x_1 \downarrow x_4) \downarrow ((\bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3 \downarrow x_5) \downarrow (x_2 \downarrow x_3 \downarrow \bar{x}_5)) \downarrow \downarrow (x_1 \downarrow \bar{x}_4) \downarrow (x_3 \downarrow \bar{x}_5) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_4) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_4) \downarrow (\bar{x}_3 \downarrow x_5)$$

Базис И-НЕ

$$f = \overline{(\bar{x}_1|\bar{x}_4)|((x_2|x_3|\bar{x}_5)|(\bar{x}_2|\bar{x}_3|x_5))|(\bar{x}_1|x_4)|(\bar{x}_3|x_5)|(x_1|\bar{x}_4)|} \overline{|(x_1|x_4)|(\bar{x}_3|\bar{x}_5)}$$

Синтез комбинационных схем в сокращенных булевых базисах

Базис ИЛИ, НЕ

$$f = (x_1 \vee x_4)((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5))(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_4) \overline{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee x_5)} = \overline{(x_1 \vee x_4) \vee ((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5)) \vee (x_1 \vee \bar{x}_4) \vee (x_3 \vee \bar{x}_5) \vee (\bar{x}_1 \vee x_4) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_3 \vee x_5)}$$

Базис И, НЕ

$$f = \overline{(x_1 \vee x_4)((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5))(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_5)} \overline{(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee x_5)}$$