«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчет по расчетно-графической работе

По математическому анализу № 1

Команда 6

Выполнили: Хабнер Георгий P3131,

Билошицкий Михаил P3116,

Кобик Никита P3124,

Пархоменко Кирилл P3112,

Шикунов Максим P3133

Преподаватель: Константин Правдин

Ментор: Анастасия Кузьмина

Место выполнения: дистанционно

Дата: 31.10.22

г. Санкт-Петербург, 2022г.

Задание 1. Метод математической индукции.

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n ∈ N утверждение верно:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Проверим утверждение для n = 1, n = 2, n = 3.

При n = 1:

$$(1-1) \cdot 1 = \frac{(1-1) \cdot 1 \cdot (1+1)}{3}$$

$$0 = 0$$

При n = 2:

$$1 \cdot 2 = \frac{(2-1) \cdot 2 \cdot (2+1)}{3}$$

$$2 = \frac{6}{3}$$

$$2 = 2$$

При n = 3:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \frac{(3-1) \cdot 3 \cdot (3+1)}{3}$$

$$8 = \frac{24}{3}$$

$$8 = 8$$

Предположив, что утверждение верно, проверим справедливость утверждения для n + 1 элемента:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Основываясь на предположении, что утверждение верно, можем сделать замену в левой части уравнения. Тогда получим:

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Теперь нам остается преобразовать левую часть уравнения так, чтобы она была равна правой.

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) = \frac{(n-1)n(n+1) + 3n(n+1)}{3}$$
$$= \frac{(n+1)\big((n-1)n + 3n\big)}{3} = \frac{(n+1)n(n-1+3)}{3}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Таким образом, утверждение верно при любом n ∈ N элементе.

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности.

Вещественная последовательность задана рекуррентно: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, где $x_1 \in R$. Исследуйте

её предел $n \to \infty$ при в зависимости от значения x_1.

1) Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования
   предела будет проведено в п. 6):
   Предположим, что существует предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
   Пусть предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, где $x_n \geq 0$ и, следовательно, $A \geq 0$, тогда
   $$A = \sqrt{2+A}$$
   $$A^2 = \sqrt{2+A}^2$$
   $$A^2 - 2 - A = 0$$
   Получаем, что $\boldsymbol{A = 2}$ и $A = -1$ (не удовлетворяет условию $A \geq 0$).
2) Какими могут быть значения x_1? Укажите множество возможных значений x_1. Докажите ваш ответ аналитически:

Из $x_2 = \sqrt{2 + x_1}$ получаем, что $2 + x_1 \geq 0$ => $x_1 \geq -2$, тогда это означает, что x_1 может принимать значения $\epsilon\ [-2; +\infty)$

3) При каком значении x_1 последовательность является стационарной? Докажите это
аналитически:
***Стационарная последовательность** — это последовательность, все члены которой, начиная с некоторого, равны.*
Пусть $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ и $x_{n+1} = x_n = a$ и $a \geq 0$, тогда $a = \sqrt{2 + a}$; $a^2 = 2 + a$

$$a^2 - 2 - a = 0$$

Из уравнения получаем, что **a = 2** и a = -1 (ну удовлетворяет условию), тогда последовательность является стационарной при $x_1 = 2$.

4) Познакомьтесь с теоремой Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности и запишите её формулировку:
<u>Теорема Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности</u>:
Для того чтобы возрастающая (убывающая) последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху (снизу).

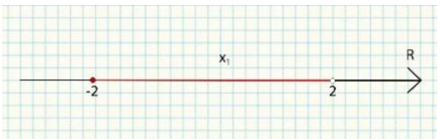
5) Выделите характерные случаи для значений x_1 (с точки зрения монотонности) и
проиллюстрируйте их графиками последовательности:
Рассмотрим три случая:
A. Когда последовательность возрастает и ограничена сверху:

$$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ x_n < x_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ x_n < \sqrt{2 + x_n} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ (x_n + 1)(x_n - 2) < 0 \end{cases}$$

Из системы неравенств получаем, что $x_n \epsilon\ [0; 2)$ => $x_1 \epsilon\ [-2; 2)$.



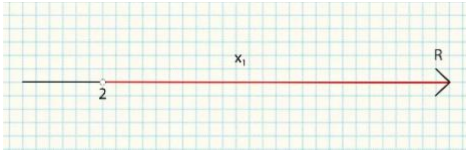
B. Когда последовательность убывает и ограничена снизу:

$$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ x_n > x_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ x_n > \sqrt{2 + x_n} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ (x_n + 1)(x_n - 2) > 0 \end{cases}$$

Из системы неравенств получаем, что $x_n \epsilon\ (2;\ +\infty)$ => $x_1 \epsilon\ (2; +\infty)$.



C. Когда последовательность монотонна:

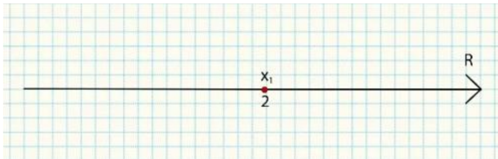
$$x_n = x_{n+1}$$

$$x_n = \sqrt{2 + x_n}$$

$$x_n^2 - 2 - x_\mathrm{n} = 0$$

$$\begin{cases} x_n \geq 0 \\ (x_n + 1)(x_n - 2) = 0 \end{cases}$$

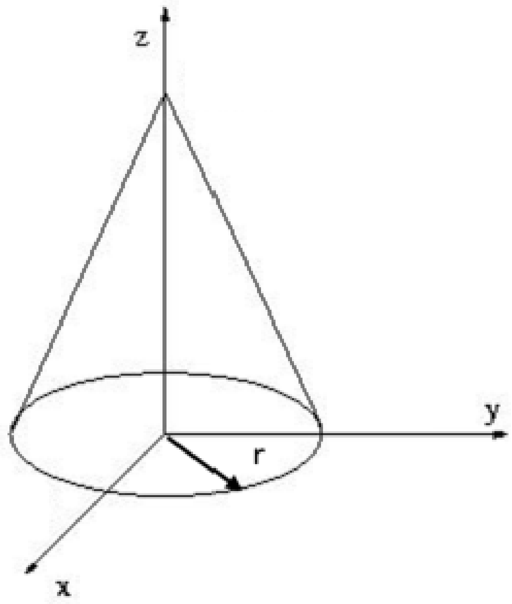
Из системы получаем, что $x_n = 2$ => $x_1 = 2$.



6) Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого
характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме
Вейерштрасса:
По теореме Вейерштрасса предел последовательности x_n = 2, так как:
   A. При $x_1 \in [-2; 2)$, последовательность строго возрастает и ограничена сверху. Возьмём $x_1 = -2$ и предположим, что x_n < 2, тогда $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$;
   $\sqrt{2 + x_n} < 2$ => x_n всегда будет меньше 2.
   Так как $x_1 = -2$, то $x_2 > x_1$.
   B. При $x_1 \in (2; +\infty)$, последовательность строго убывает и ограничена снизу. Возьмём $x_1 = 10$ и предположим, что $x_n > 2$, тогда $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$;
   $\sqrt{2 + x_n} > 2$ => x_n всегда будет больше 2.
   Так как x_n всегда будет больше 2, тогда $x_n < x_{n+1}$.

Задание 3. Сравнение бесконечно малых.

1) Геометрическая иллюстрация к задаче



2) Обозначения и формулы

- h = const
- r – радиус конуса
- Δr – бесконечно-малое приращение радиуса
- V = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ - объем конуса
- $\frac{1}{3}\pi \Delta r^2 h$ – бесконечно-малое приращение объема

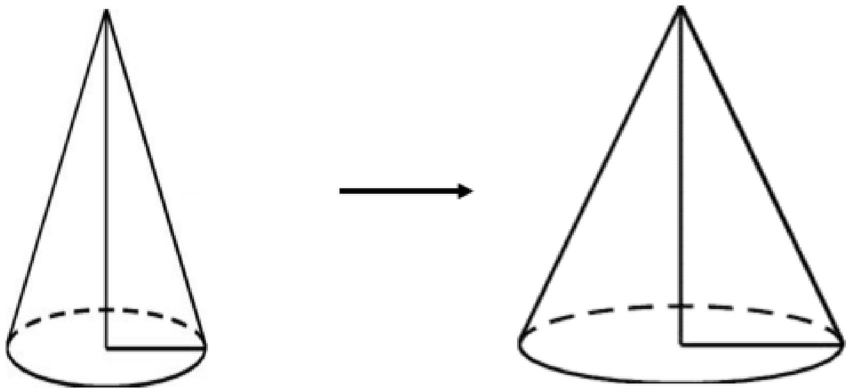
3) Решение задачи аналитически

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\frac{1}{3}\pi \Delta r^2 h}{\Delta r} = 0 \Rightarrow V = o(r)$$

Бесконечно-малое приращение объема конуса большего порядка малости, чем бесконечно-малое приращение радиуса и имеет 2 порядок малости.

4) Геометрическая иллюстрация решения

V



$$V_1 = V + \frac{1}{3}\pi \Delta r^2 h$$

r $\qquad$ $r_1 = r + \Delta r$

Задание 4. Прикладные задачи

План:

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.

2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

3) Решите задачу аналитически.

4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

Вычислите длину окружности как предел периметра вписанного многоугольника, полученного удвоением числа сторон вписанного правильного шестиугольника.

Геометрическая иллюстрация к задаче:

Вписанный 6-тиугольник, Вписанный 12-тиугольник, Вписанный 24-ехугольник и так далее…

Решение:

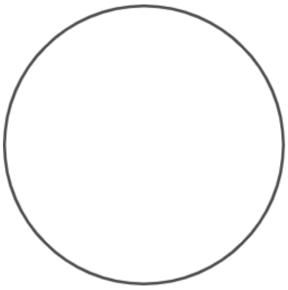
Сторона вписанного правильного многоугольника вычисляется по формуле $a_n\ = 2Rsin\frac{180°}{n}$ (n – число сторон многоугольника)

Тогда периметр многоугольника равен $P = n2Rsin\frac{180°}{n}$

Предел периметра вписанного многоугольника, полученного удвоением сторон вписанного правильного 6-ти угольника будет выглядеть так:

$\lim\limits_{n\to\infty} 6 \times 2^n \times 2Rsin\frac{180°}{6\times2^n}$ ($\frac{180°}{6\times2^n}$ $\to 0$ при $n \to \infty$, тогда $sin\frac{180°}{6\times2^n} \sim \frac{180°}{6\times2^n}$) =

$\lim\limits_{n\to\infty} 6 \times 2^n \times 2R\,\frac{\pi}{6\times2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\pi R = 2\pi R$



Ответ: $2\pi R$

Задание 5. Исследование сходимости

Анализ последовательности

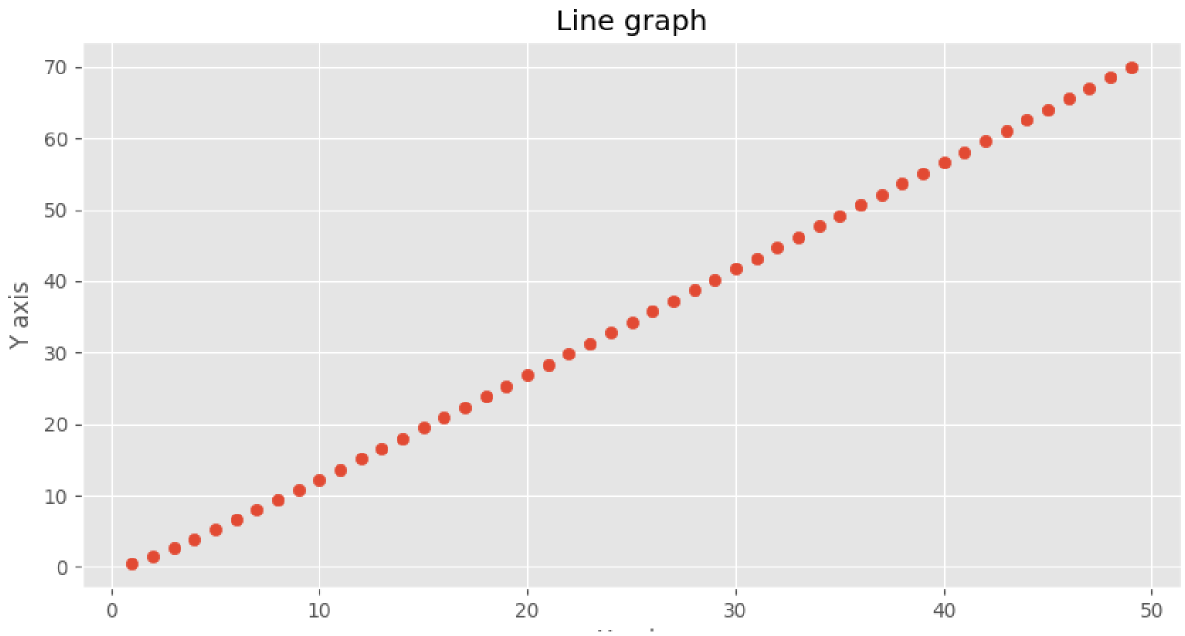
$$a_n = \frac{\sqrt{9\mathrm{n}^4 - 1} + \sqrt{3\mathrm{n}^2 + 1}}{7 + 9 + \cdots + (2\mathrm{n} + 5)}$$

Пункт 1. Вычислить предел последовательности при $n \to \infty$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\sqrt{9\mathrm{n}^4 - 1} + \sqrt{3\mathrm{n}^2 + 1}}{7 + 9 + \cdots + (2\mathrm{n} + 5)} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\sqrt{9\mathrm{n}^4 - 1} + \sqrt{3\mathrm{n}^2 + 1}}{\frac{\mathrm{n}(2\mathrm{n} + 12)}{2}} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{2\mathrm{n}(\sqrt{9\mathrm{n}^2 - \frac{1}{\mathrm{n}^2}} + \sqrt{3 + \frac{1}{\mathrm{n}^2}})}{\mathrm{n}(2\mathrm{n} + 12)}$$

$$= \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{n}(\sqrt{9 - \frac{1}{\mathrm{n}^4}} + \sqrt{\frac{3}{\mathrm{n}^2} + \frac{1}{\mathrm{n}^4}})}{\mathrm{n}(1 + \frac{6}{\mathrm{n}})} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\sqrt{9 - \frac{1}{\mathrm{n}^4}} + \sqrt{\frac{3}{\mathrm{n}^2} + \frac{1}{\mathrm{n}^4}}}{1 + \frac{6}{\mathrm{n}}} = 3$$

Пункт 2. Построить график общего члена последовательности в зависимости от номера n

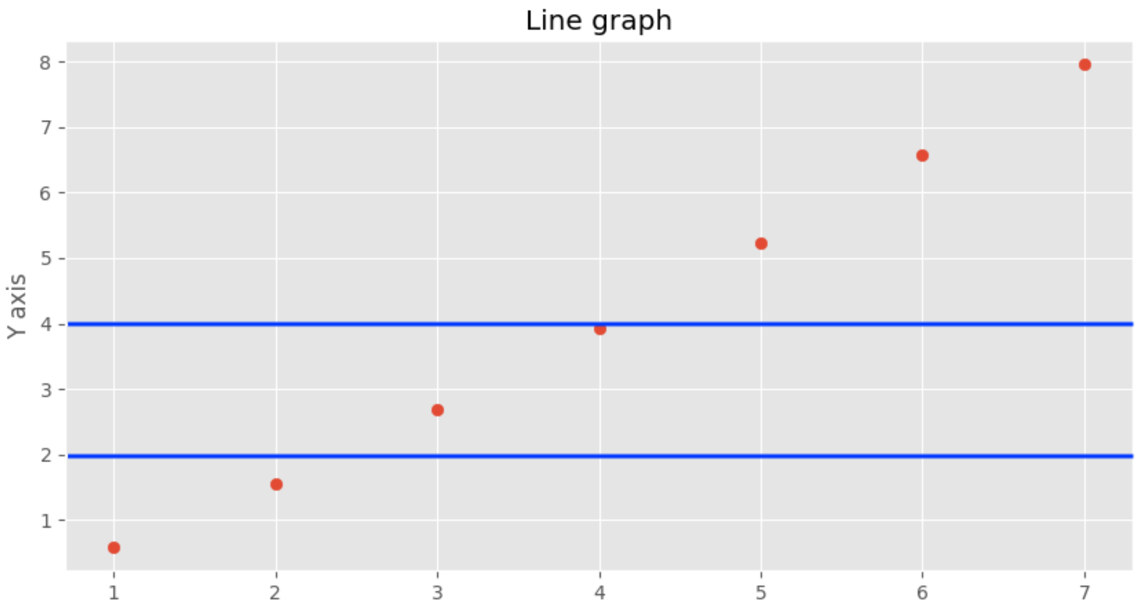

Line graph
Y axis
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50

Пункт 3. Проиллюстрировать сходимость (расходимость) последовательности

Пусть $\mathcal{E}_1 = 1,\ \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2},\ \mathcal{E}_3 = \frac{1}{4} \rightarrow \mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_3$

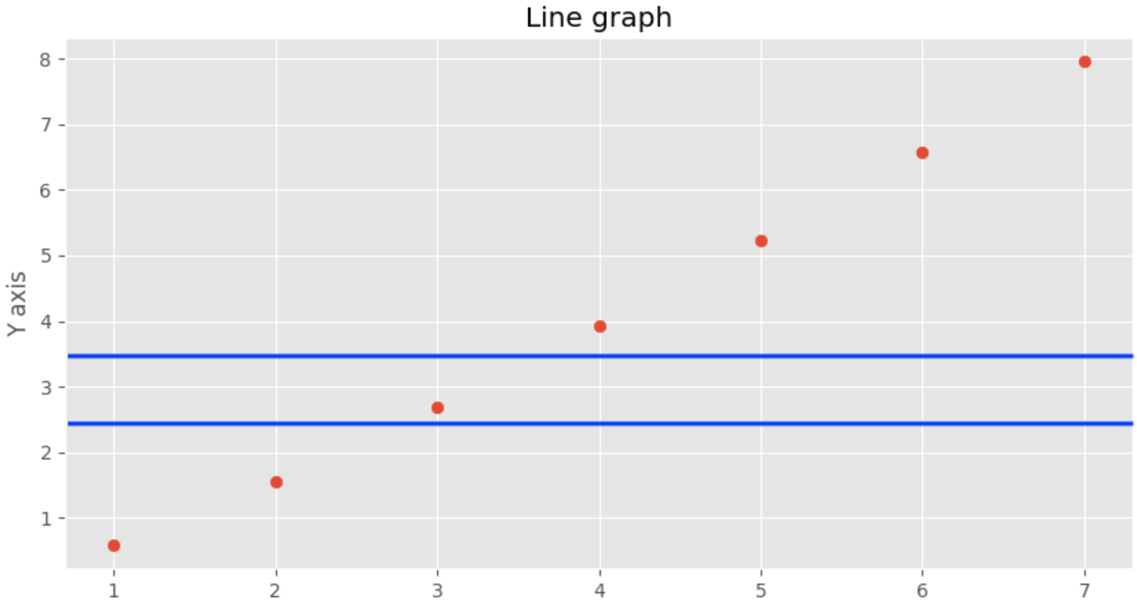
Для точки $\mathcal{E}_1 = 1$: $(3 - 1;\ 3 + 1), (2, 4)$

$\left|3 - \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{n^2+6}\right| < 1$; $N(\mathcal{E}) = 3$



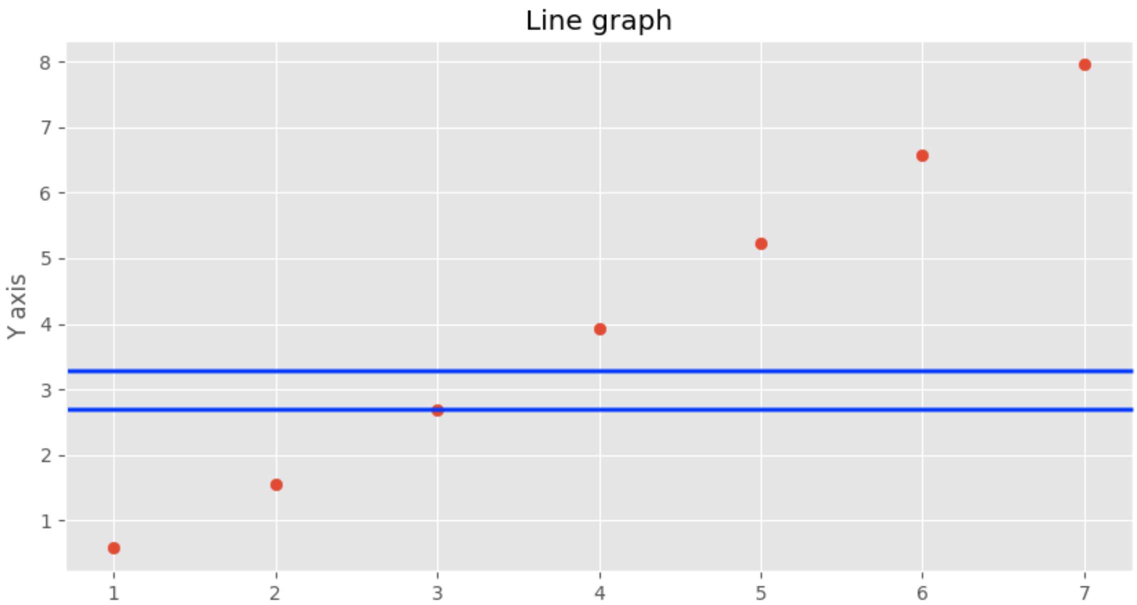
Для точки $\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}$: $(3 - 0.5;\ 3 + 0.5), (2.5, 3.5)$

$\left|3 - \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{n^2+6}\right| < \frac{1}{2}$; N($\mathcal{E}$) = 3



Для точки $\mathcal{E}_3 = \frac{1}{4}$: $(3 - 0.25;\ 3 + 0.25), (2.75, 3.25)$

$\left|3 - \frac{\sqrt{9n^4-1} + \sqrt{3n^2+1}}{n^2+6}\right| < \frac{1}{4}$; Не существует такого номера, что все номера после него входят в окрестность



Анализ функции

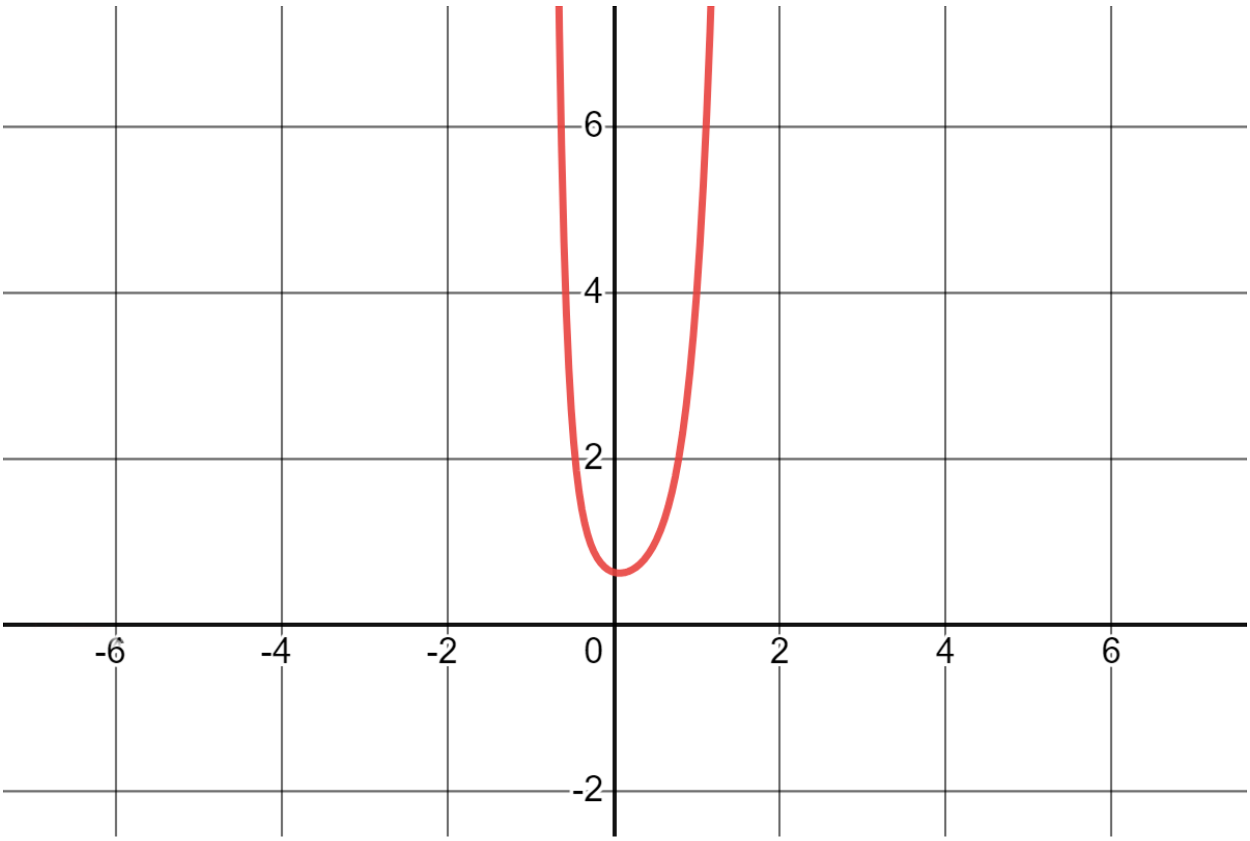
$$\boldsymbol{f(x)} = \left(\frac{4x + 2}{5 + x}\right)^{7x+2}$$

Пункт 1. Вычислить предел функции при $n \to \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x + 2}{5 + x}\right)^{7x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{4}{x} + 3}{\frac{5}{x} + 1}\right)^{7x+2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x + 2}{5 + x}\right)^{7x+2} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{4}{x} + 3}{\frac{5}{x} + 1}\right)^{7x+2} = 4^{-\infty} = 0$$

Пункт 2. Построить график функции в зависимости от x

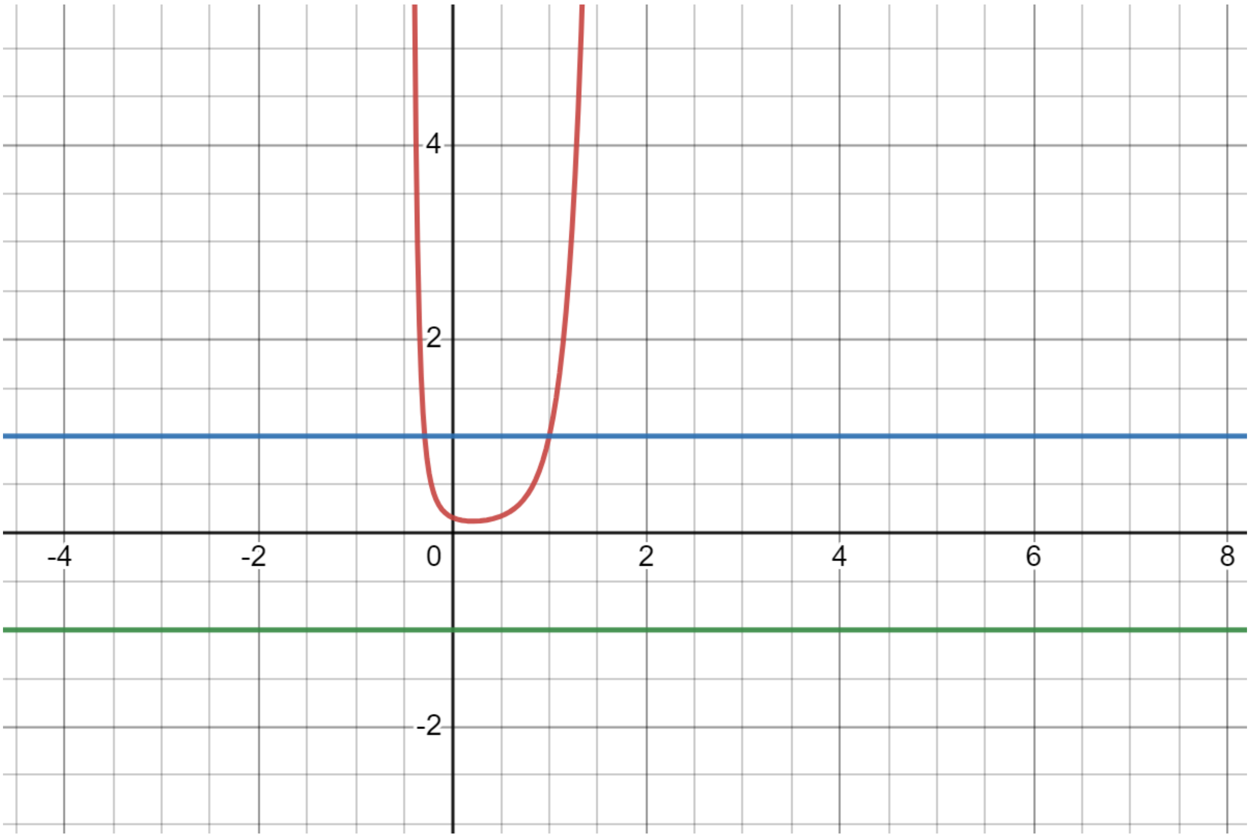


Пункт 3. Проиллюстрировать сходимость (расходимость) функции

Пусть $\mathcal{E}_1 = 1,\ \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2},\ \mathcal{E}_3 = \frac{1}{4} \rightarrow \mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \ \mathcal{E}_3$

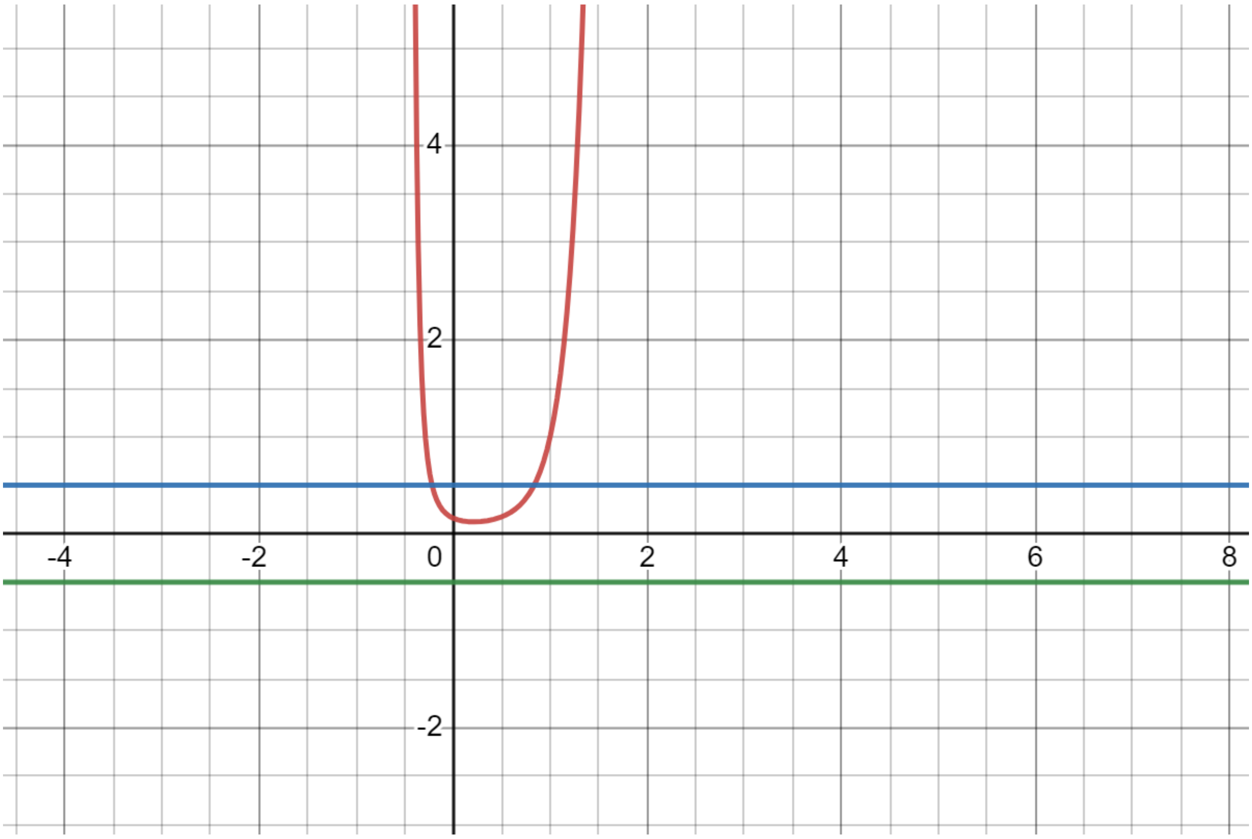
Для точки $\mathcal{E}_1 = 1$: $(-1, 1)$

$\left|0 - \left(\frac{4x+2}{5+x}\right)^{7x+2}\right| < 1$; x ∈ (-0.29;1)



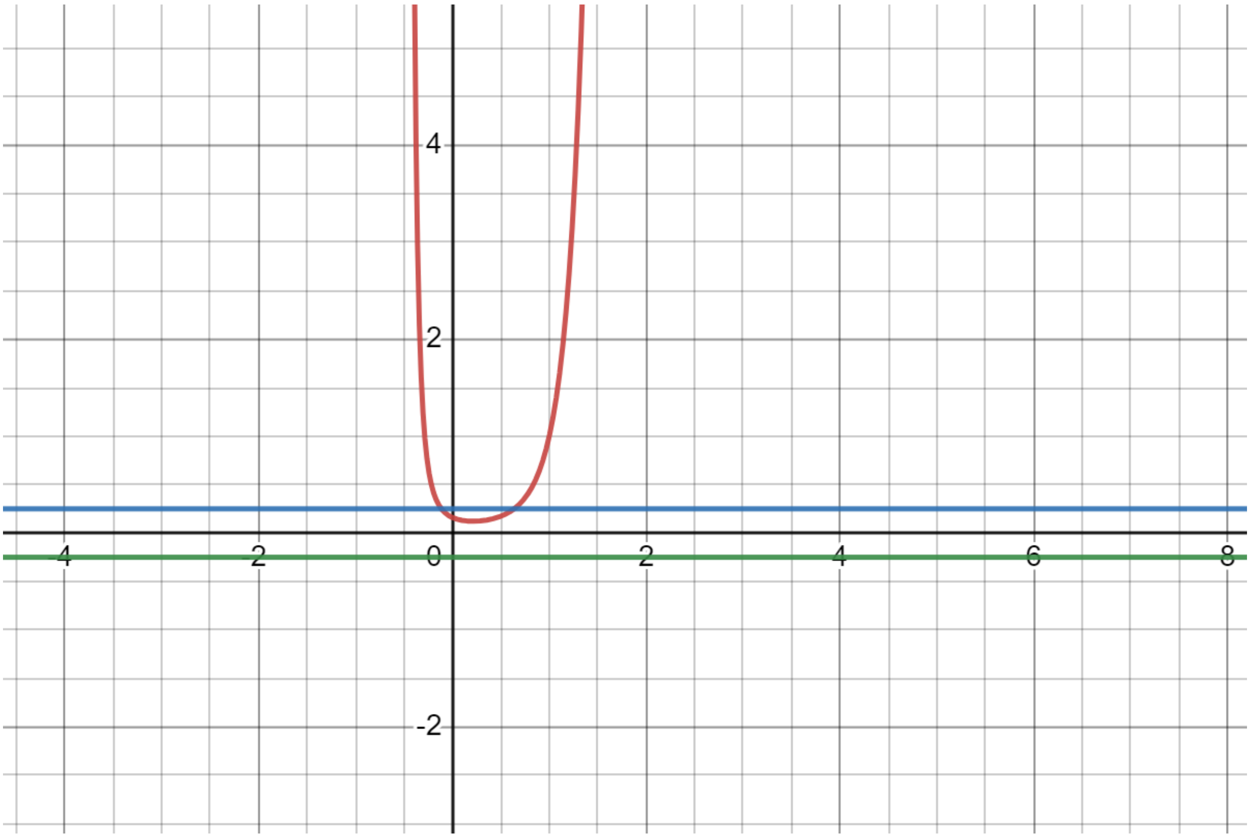
Для точки $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}$: $(-0.5, 0.5)$

$\left|0 - \left(\frac{4x+2}{5+x}\right)^{7x+2}\right| < \frac{1}{2}$; x ∈ (-0.22;0.84)

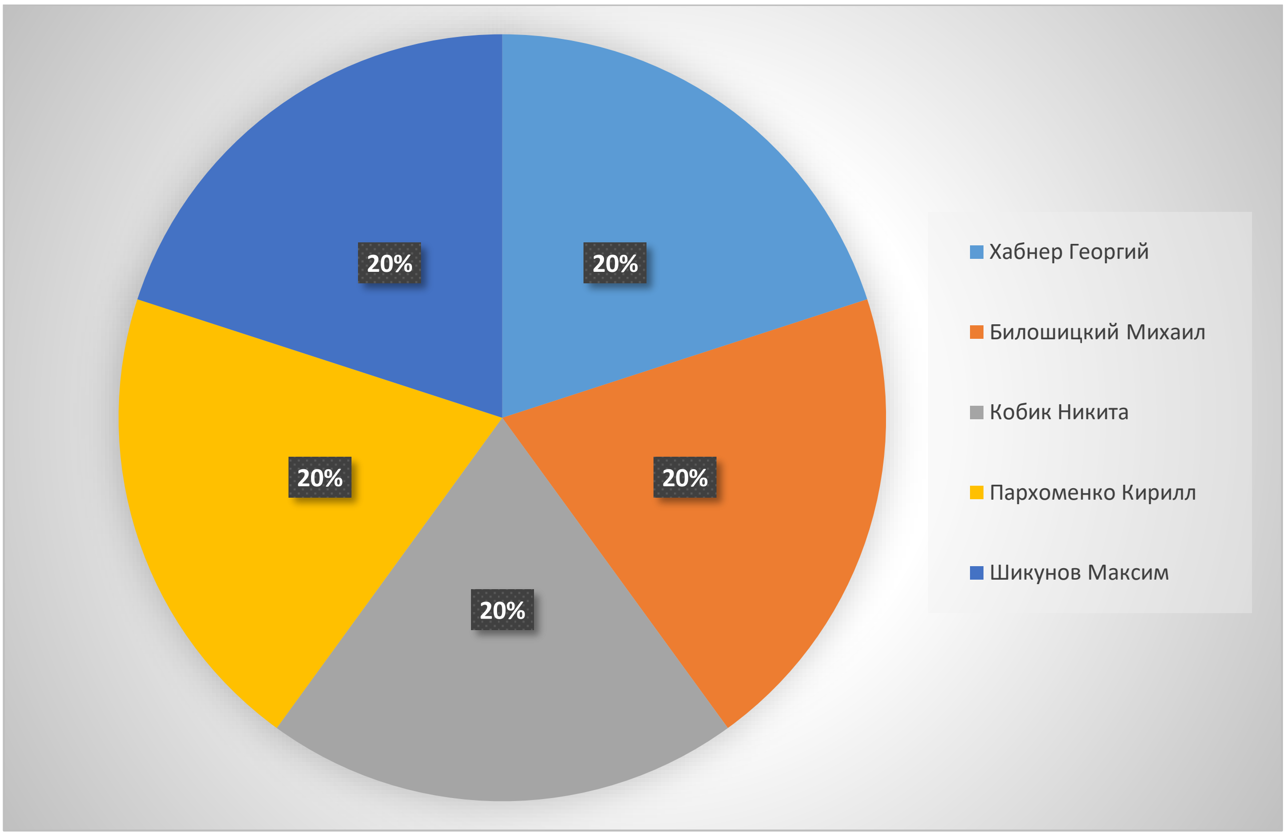


Для точки $\mathcal{E}_3 = \frac{1}{4}$: $(-0.25, 0.25)$

$\left|0 - \left(\frac{4x+2}{5+x}\right)^{7x+2}\right| < \frac{1}{4}$; x ∈ (-0.11;0.64)



Оценочный лист



Каждый из участников команды вложил равный вклад в выполнение работы.