1. Интегральная сумма

Задача: исследовать интегральную сумму функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$, заданной на отрезке $[a, b] : a = -1, b = 0.5$

План:

Интегральная сумма.

1. Составьте и изобразите интегральную сумму функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры:
   - Изобразите график функции.
   - Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции, вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка, и осью Ox.
   - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков, точками отметьте их концы на рисунке.
   - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметьте их на рисунке.
   - Вычислите значения функции в выбранных точках, отметьте их на рисунке.
   - Изобразите ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точек внутри элементарных отрезков.
2. Исследуйте ступенчатую фигуру. Для этого выберите количество ступеней (от 3 до 5) и посмотрите, как изменяется фигура при смещении точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения точек: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор). Затем выберите другое количество ступеней (от 6 до 10), а затем (от 11 и больше) и повторите процедуру.
3. Сделайте заключение.

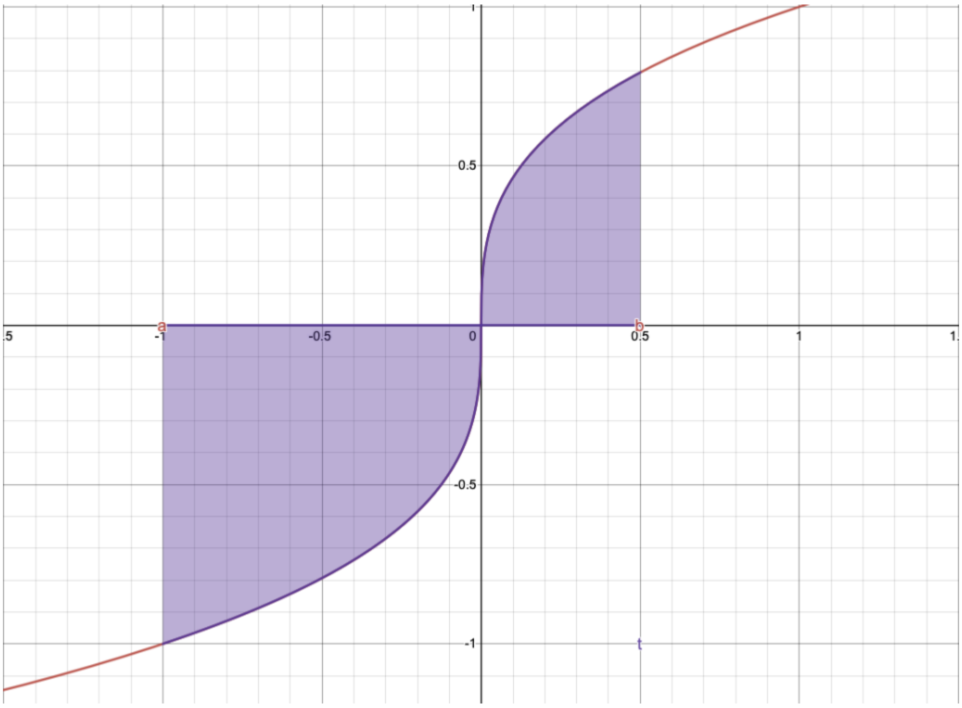
Последовательность интегральных сумм.

4. Постройте интегральную сумму функции на заданном отрезке:
   - Разбейте отрезок на n элементарных отрезков.
   - Выберите по одной точке внутри каждого элементарного отрезка.
   - Запишите интегральную сумму.
5. Исследуйте её значение с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (рассмотрите три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
6. Вычислите интеграл от данной функции по отрезку аналитически и сравните значения интегральных сумм с его величиной.
7. Постройте последовательность интегральных сумм, изобразите её на графике. Изобразите точное значение интеграла горизонтальной прямой. Продемонстрируйте сходимость построенной последовательности к точному значению интеграла с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков (три положения: крайнее левое, крайнее правое и промежуточное на выбор).
8. Сделайте заключение.

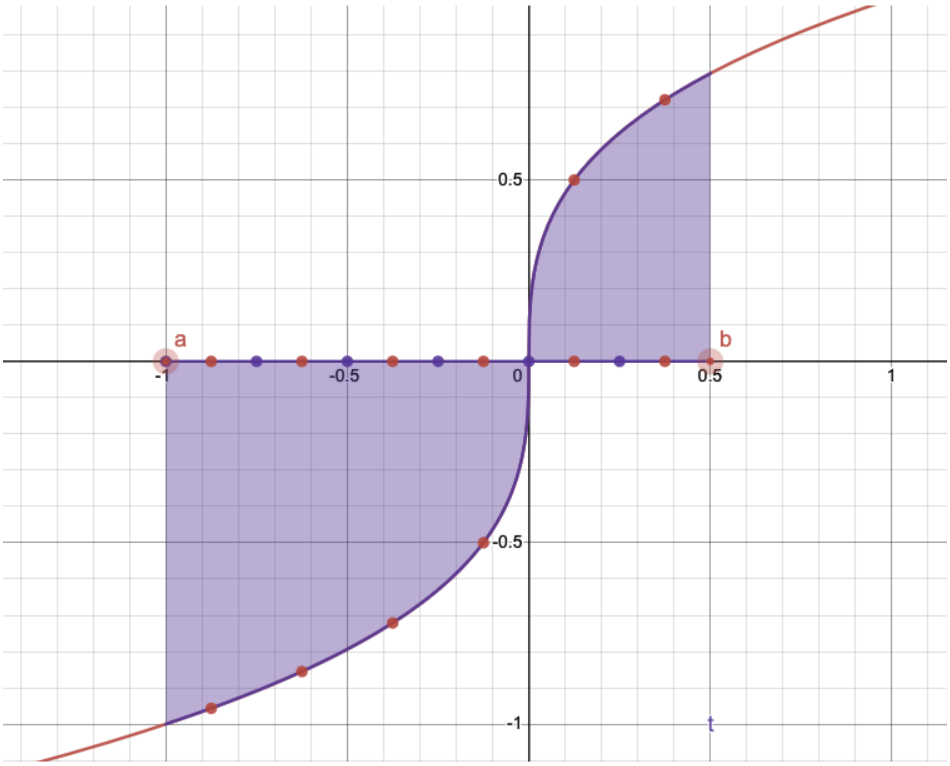
Решение:

Интегральная сумма

1. **Составим и изобразим интегральную сумму функции на заданном отрезке в виде ступенчатой фигуры.**
    - Изобразим график функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и криволинейную трапецию в соответствии с границами отрезка $[-1, 0.5]$.

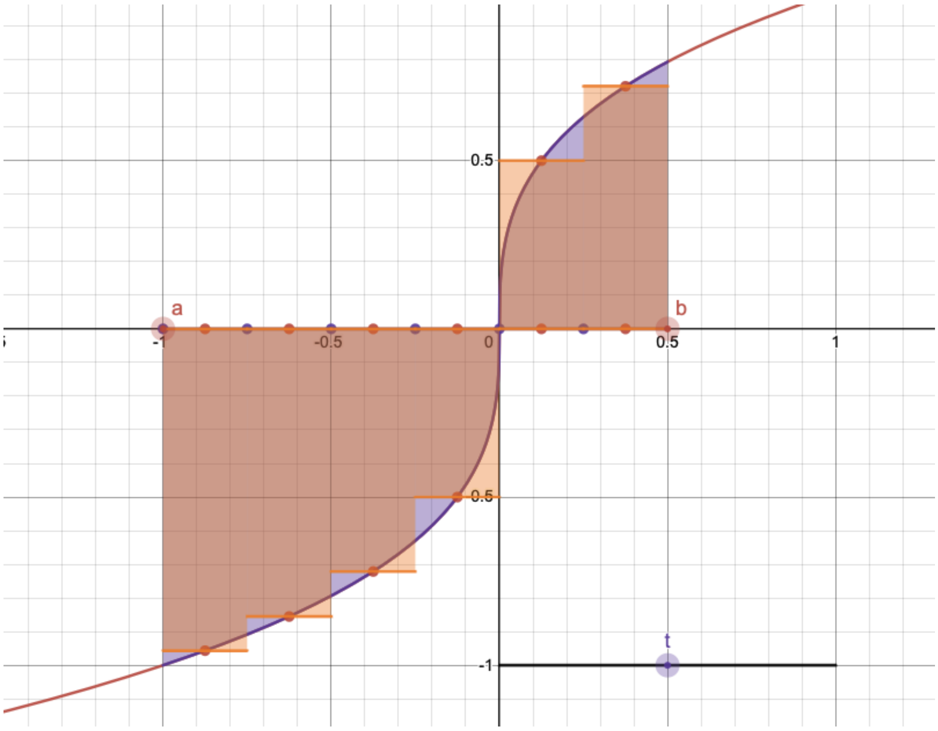


    - Разобьём отрезок на n элементарных отрезков и отметим точками их концы на рисунке, затем выберем по одной точке внутри каждого элементарного отрезка, отметим их на рисунке и также отметим точками вычисленное значения функции в этих произвольных точках.

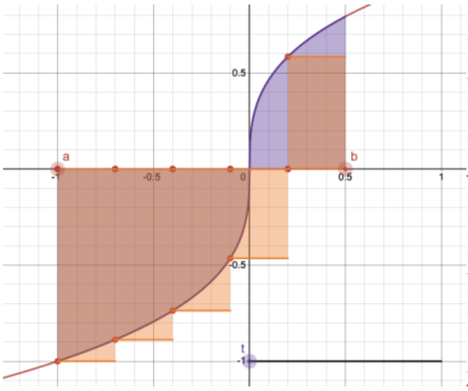


Примечание: фиолетовым цветом изображены концы n элементарных отрезков, красным цветом – произвольные точки внутри этих отрезков и соответствующие им значения функции.

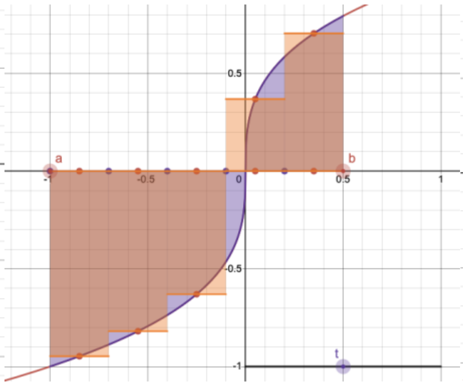
- Изобразим ступенчатую фигуру на основе выбранного разбиения и точки внутри элементарных отрезков.



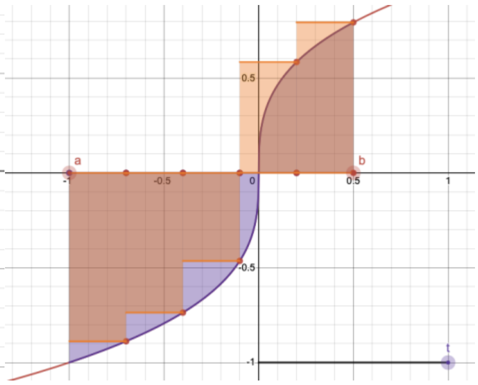
2. **Исследуем ступенчатую фигуру.**
   - Выберем количество отрезков за $n = 5$ и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.



Крайнее левое

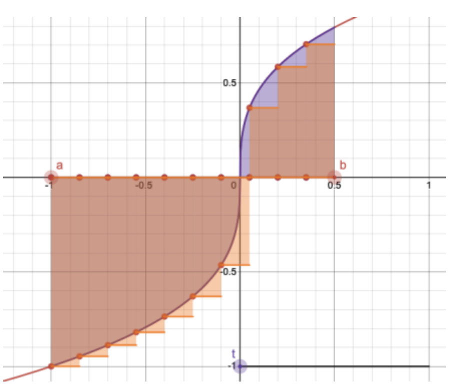


Промежуточное $t = 0.5$

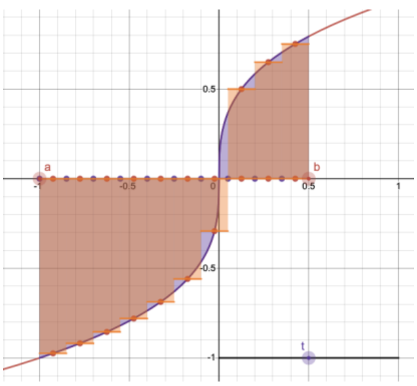


Крайнее правое

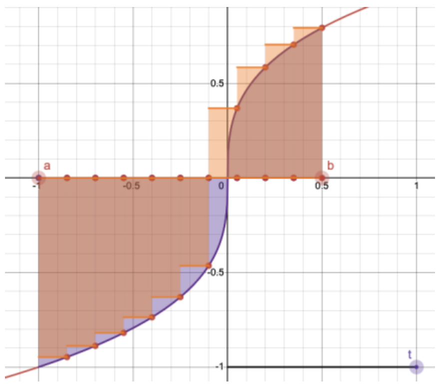
   - Выберем количество отрезков за $n = 10$ и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.



Крайнее левое

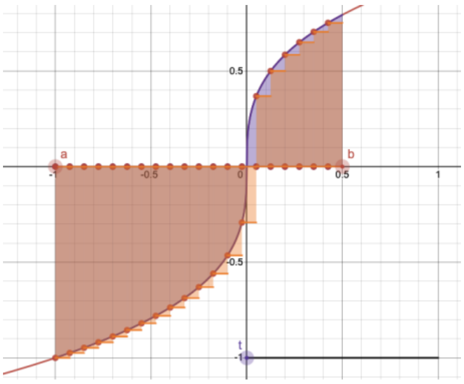


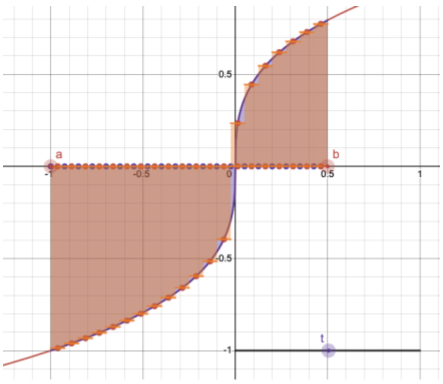
Промежуточное $t = 0.5$

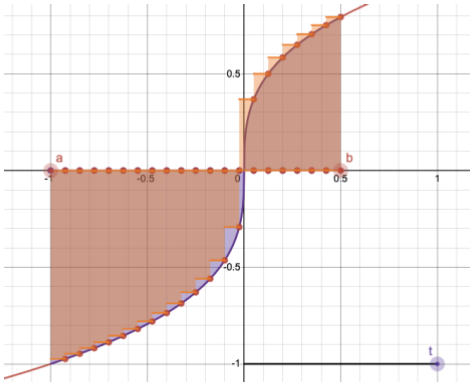


Крайнее правое

- Выберем количество отрезков за $n = 20$ и рассмотрим, как фигура изменится при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.


Крайнее левое


Промежуточное $t = 0.5$


Крайнее правое

3. Заключение

В заключении графического исследования по интегральной сумме можно сделать вывод, что при увеличении количества отрезков n, ступенчатая фигура все больше начинает совпадать с формой криволинейной трапеции под графиком и если найти сумму площадей каждой из ступеней, то величина этой суммы по мере увеличения n будет более точно совпадать с площадью криволинейной трапеции:

$$S_{\text{трапеции}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x \cdot f(x_i)|$$

где n – количество отрезков (ступеней),
Δx – длина отрезка (ступени),
$f(x_i)$ – значение функции в точке на отрезке (высота ступени)

Смещение точек внутри элементарных отрезков при предельном ($n \to \infty$) увеличении количества отрезков не влияет на точность. В случае ограниченного количества отрезков наиболее точным будет расположение точек в центре отрезков.

Выполнение графического исследования по интегральной сумме в графическом калькуляторе Desmos: https://www.desmos.com/calculator/frixo8lz4c

Последовательность интегральных сумм

4. Построим интегральную сумму функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на заданном отрезке $[-1, 0.5]$

- Разобьем отрезок на n элементарных отрезков, выберем по одной точке внутри каждого элементарного отрезка и запишем интегральную сумму. При $n = 5$ и $t = 0.5$:

$$S = \sum_{i=1}^{5} |\Delta x \cdot f(x_i)| = 1.04090491674$$

5. Исследуем значение с ростом n при различных положениях точек внутри элементарных отрезков.

- Выберем количество отрезков за $n = 5$ и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое: $S = 1.04021197754$

Промежуточное $t = 0.5$: $S = 1.04090491674$
Крайнее правое: $S = 1.10210181974$

- Выберем количество отрезков за $n = 10$ и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое: $S = 1.04055844714$
Промежуточное $t = 0.5$: $S = 1.04543248557$
Крайнее правое: $S = 1.07150336824$

- Выберем количество отрезков за $n = 20$ и рассмотрим, как изменится значение суммы при смещении точек внутри элементарных отрезков в 3 положениях.

Крайнее левое: $S = 1.04299546636$
Промежуточное $t = 0.5$: $S = 1.0468807487$
Крайнее правое: $S = 1.05846792691$

6. **Вычислим интеграл данной функции по отрезку и сравним значения интегральных сумм с его величиной.**

$$\int_{-1}^{0.5} \sqrt[3]{x}dx$$

Чтобы получить точное значение площади, так как функция может возвращать отрицательные значения, то по свойству аддитивности разобьем интеграл на 2, где 1 будет являться площадью в области $y < 0$ и 2 – при $y > 0$:

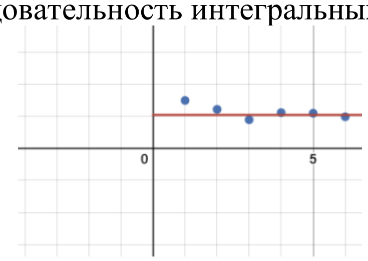
$$\mathrm{S} = \left|\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x}\mathrm{dx}\right| + \int_{0}^{0.5} \sqrt[3]{x}dx = \left|\left(\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}\right)\Big|_{-1}^{0}\right| + \left(\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}\right)\Big|_{0}^{0.5} =$$
$$= \left|0 - \frac{3(-1)\sqrt[3]{-1}}{4}\right| + \frac{3 \cdot 0.5 \cdot \sqrt[3]{0.5}}{4} - 0 =$$
$$= 0.75 + 0.29763769724 = 1.04763769724$$

При сравнении значения интегральной суммы с величиной интеграла можно заметить, что значения интегральных сумм слегка неточные, но близки с искомой величиной интеграла.

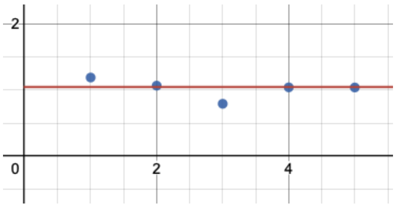
7. **Построение последовательности интегральных сумм на графике.**

- Сперва изобразим точное значение интеграла на графике.

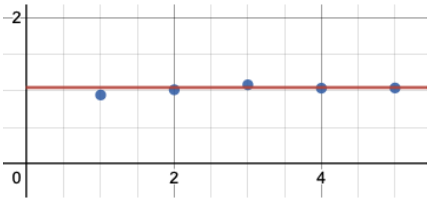
- Далее построим последовательность интегральных сумм.



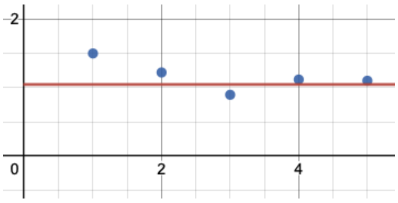
- Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков $n = 5$ в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.



Крайнее левое

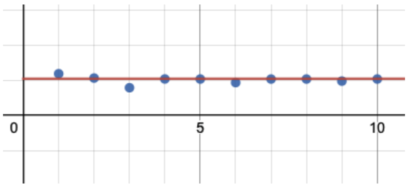


Промежуточное $t = 0.5$

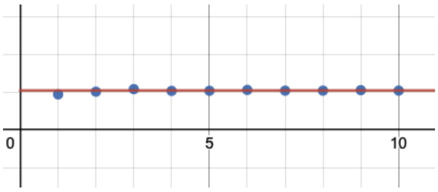


Крайнее правое

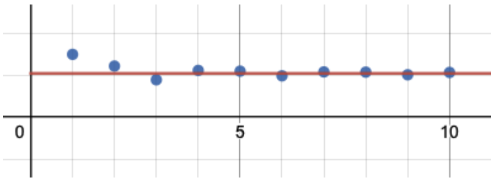
- Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков $n = 10$ в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.



Крайнее левое

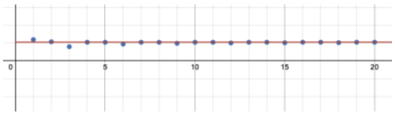


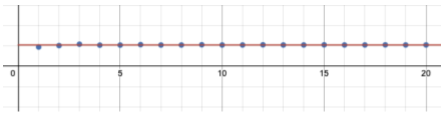
Промежуточное $t = 0.5$

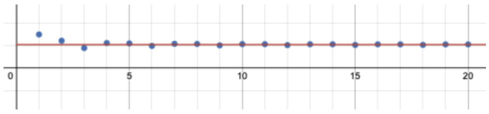


Крайнее правое

- Рассмотрим сходимость построенной последовательности к точному значению при количестве отрезков $n = 20$ в трех положениях точек внутри элементарных отрезков.


Крайнее левое


Промежуточное $t = 0.5$


Крайнее правое

8. Заключение

В заключении графического исследования по последовательности интегральных сумм можно сделать вывод, что при увеличении количества отрезков интегральная сумма все более точно сходится к искомому значению интеграла функции, что мы смогли увидеть на графике и проверить аналитически. Метод нахождения интегральной суммы очень полезен для приближенного вычисления значений интеграла без взятия самого интеграла и достаточно точно с этим справляется при большом количестве взятых отрезков. На сегодняшний день этот метод очень популярен, например для вычисления интегралов компьютерами.

Выполнение графического исследования по последовательности интегралов в графическом калькуляторе Desmos: https://www.desmos.com/calculator/iynuluoxsp