

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»  
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6  
ПО ИНФОРМАТИКЕ  
«Работа с системой компьютерной вёрстки T<sub>E</sub>X»  
Вариант №62

Выполнил студент группы РЗ116:  
Билопицкиц Михаил Владимирович  
Преподаватель: Машина Екатерина Алексеевна



Ю. Ионин, Л. Курляндчик

## Поиск инварианта

В этой статье рассматриваются задачи, сходные по формулировке. В каждой из них идет речь о некоторой совокупности чисел или знаков, и указаны операции, которые можно над ними производить. Читатель, внимательно проработавший статью, обнаружит не только внешнее сходство встречающихся в ней задач и упражнений, но и общую идею, на которой основано их решение.

**Задача 1.** На доске написано десять плюсов и пятнадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения двадцати четырех таких операций?

**Решение.** Заменим каждый плюс числом 1, а каждый минус числом -1. Разрешенная операция описывается тогда так: стираются любые два числа и записывается их произведение. Поэтому произведение всех написанных на доске чисел остается неизменным. Так как вначале это произведение равнялось -1, то и в конце останется число -1, то есть знак минус.

Это рассуждение можно было провести иначе. Заменим все плюсы ну-

лями, а минусы - единицами, и заметим, что сумма двух стираемых чисел имеет ту же четность, что и число, записываемое вместо них. Так как сначала сумма всех чисел была нечетной (она равнялась 15), то и последнее оставшееся на доске число будет нечетным, то есть единицей, и, значит, на доске останется минус.

Наконец, третье решение задачи можно получить заметив, что в результате каждой операции число минусов либо не изменяется, либо уменьшается на два. Поскольку сначала число минусов было нечетным, то и в конце останется один минус.

Проанализируем все три решения.

Первое решение основывалось на неизменяемости произведения написанных чисел, второе - на неизменяемости четности их суммы и третье - на неизменяемости четности числа минусов. В математике вместо слова «неизменяемость» употребляют термин «инвариантность». Можно сказать, что в каждом решении нам удалось найти *инвариант*: произведение написанных чисел, четность суммы, четность числа минусов. Решение последующих задач и упражнений также основывается на удачном подборе инварианта.

**Упражнение 1.** На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они различны, и минус в противном случае. Докажите, что последний оставшийся на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

**Задача 2.** В таблице  $4 \times 4$  знаки «+» и «-» расставлены так, как показано на рисунке 1.

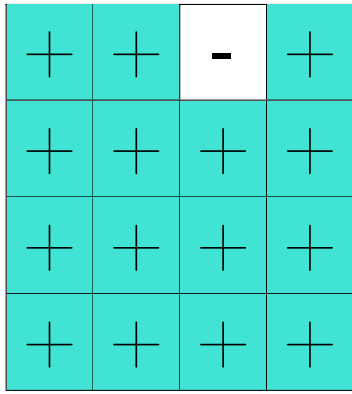


Рис. 1.

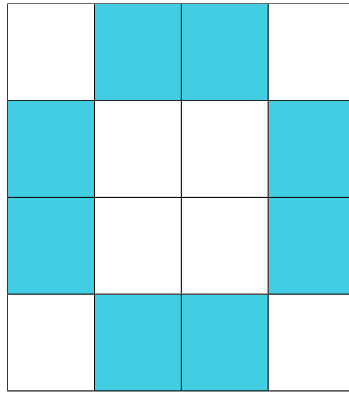


Рис. 2.

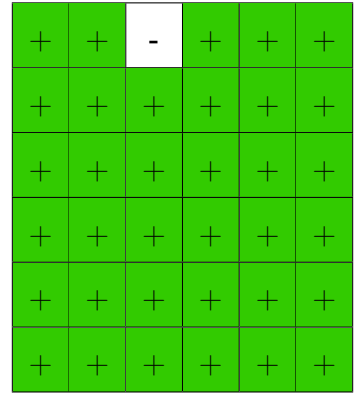


Рис. 3.

Бином Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$