

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчет по лабораторной работе №6

По дисциплине «Математическая статистика» (четвертый семестр)

Оценивание параметров двумерной случайной величины

Вариант 8

Студент:

Сиразетдинов

Билошицкий

Беляев

Практик:

Милованович Екатерина Воиславовна

Санкт-Петербург
2024 г.

Цель работы

Цель работы состоит в построении оценок математических ожиданий и дисперсии случайных величин, входящих в систему, а также оценок корреляционного момента и коэффициента корреляции.

Данные

Таблица группированных данных:

y_j^* x_i^*	29	39	44	49
24	45	80	0	0
34	0	20	10	0
44	0	0	15	30

Решение

Построим матрицу распределения ($n = 200$):

y_j^* x_i^*	29	39	44	49	$P(x = x_i)$
24	45/200	80/200	0	0	125/200
34	0	20/200	10/200	0	30/200
44	0	0	15/200	30/200	45/200
$P(y = y_i)$	45/200	100/200	25/200	30/200	1

Выпишем ряд для x :

x_i^*	24	34	44
P_i^*	$\frac{125}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{45}{200}$

Найдём математическое ожидание и дисперсию для x :

$$\overline{M}(x) = \frac{24 \cdot 125}{200} + \frac{34 \cdot 30}{200} + \frac{44 \cdot 45}{200} = 30$$

$$\overline{D}(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^*)^2 P_i^* - (\overline{M}(x))^2 = \frac{24^2 \cdot 125}{200} + \frac{34^2 \cdot 30}{200} + \frac{44^2 \cdot 45}{200} - 30^2 = 69$$

$$\underline{\overline{\sigma}(x) = \sqrt{\overline{D}(x)} = 8.3067}$$

Выпишем ряд для y :

y_i^*	29	39	44	49
P_i^*	$\frac{45}{200}$	$\frac{100}{200}$	$\frac{25}{200}$	$\frac{30}{200}$

Найдём математическое ожидание и дисперсию для y :

$$\overline{M}(y) = \frac{29 \cdot 45}{200} + \frac{39 \cdot 100}{200} + \frac{44 \cdot 25}{200} + \frac{49 \cdot 30}{200} = 38.875$$

$$\overline{D}(y) = \sum_{i=1}^n (y_i^*)^2 P_i^* - (\overline{M}(y))^2 = \frac{29^2 \cdot 45}{200} + \frac{39^2 \cdot 100}{200} + \frac{44^2 \cdot 25}{200} + \frac{49^2 \cdot 30}{200} - 38.875^2 = 40.609$$

$$\underline{\overline{\sigma}(y) = \sqrt{\overline{D}(y)} = 6.373}$$

Найдём корреляционный момент:

$$\begin{aligned}\overline{K(x, y)} = \overline{cov}(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^* y_j^* P_i^* - \overline{M}(x) \overline{M}(y) = \frac{24 \cdot 29 \cdot 45}{200} + \frac{24 \cdot 39 \cdot 80}{200} + \frac{34 \cdot 39 \cdot 20}{200} + \frac{34 \cdot 44 \cdot 10}{200} + \\ &+ \frac{44 \cdot 44 \cdot 15}{200} + \frac{44 \cdot 49 \cdot 30}{200} - 30 \cdot 38.875 = 40.75 \\ \bar{r}_{xy} &= \frac{\overline{K(x, y)}}{\overline{\sigma}(x) \cdot \overline{\sigma}(y)} = \frac{40.75}{8.3067 \cdot 6.373} = 0.7698\end{aligned}$$

Корреляционная матрица:

$$K = \begin{pmatrix} \overline{D}(x) & \overline{K}(x, y) \\ \overline{K}(x, y) & \overline{D}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 40.75 \\ 40.75 & 40.609 \end{pmatrix}$$

Найдём условное математическое ожидание y при условии, что $x = 24$:

y_j^*	29	39	44	49	$P(x = x_i)$
x_i^*					
24	45/200	80/200	0	0	125/200

y_j^*	29	39	44	49	Σ
x_i^*					
$P(y = y_j/x = 24)$	45/125	80/125	0	0	1

$$\begin{aligned}P(y = 29/x = 24) &= \frac{\frac{45}{200}}{\frac{125}{200}} = \frac{45}{125} \\ P(y = 39/x = 24) &= \frac{\frac{80}{200}}{\frac{125}{200}} = \frac{80}{125}\end{aligned}$$

Условное математическое ожидание:

$$M(y/x = 24) = \frac{29 \cdot 45}{125} + \frac{39 \cdot 80}{125} = 35.4$$

Найдём условное математическое ожидание y при условии, что $x = 34$:

y_j^*	29	39	44	49	$P(x = x_i)$
x_i^*					
34	0	20/200	10/200	0	30/200

y_j^*	29	39	44	49	Σ
x_i^*					
$P(y = y_j/x = 34)$	0	20/30	10/30	0	1

$$\begin{aligned}P(y = 39/x = 34) &= \frac{\frac{20}{200}}{\frac{30}{200}} = \frac{20}{30} \\ P(y = 44/x = 34) &= \frac{\frac{10}{200}}{\frac{30}{200}} = \frac{10}{30}\end{aligned}$$

Условное математическое ожидание:

$$M(y/x = 34) = \frac{39 \cdot 20}{30} + \frac{44 \cdot 10}{30} = 40.67$$

Найдём условное математическое ожидание y при условии, что $x = 44$:

y_j^* x_i^*	29	39	44	49	$P(x = x_i)$
42	0	0	15/200	30/200	45/200

y_j^* x_i^*	29	39	44	49	Σ
$P(y = y_j/x = 44)$	0	0	15/45	30/45	1

$$P(y = 44/x = 44) = \frac{\frac{15}{200}}{\frac{45}{200}} = \frac{15}{45}$$

$$P(y = 49/x = 44) = \frac{\frac{30}{200}}{\frac{45}{200}} = \frac{30}{45}$$

Условное математическое ожидание:

$$M(y/x = 34) = \frac{44 \cdot 15}{45} + \frac{49 \cdot 30}{45} = 47.3$$

Зависимость условного математического ожидания компонента y от значений компоненты x .

x_i^*	24	34	44
$M(y/x = x_i)$	35.4	40.67	47.3

Найдём функцию регрессии (оценка несмещённости и эффективности):

$$y = m_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x)$$

Получим уравнение:

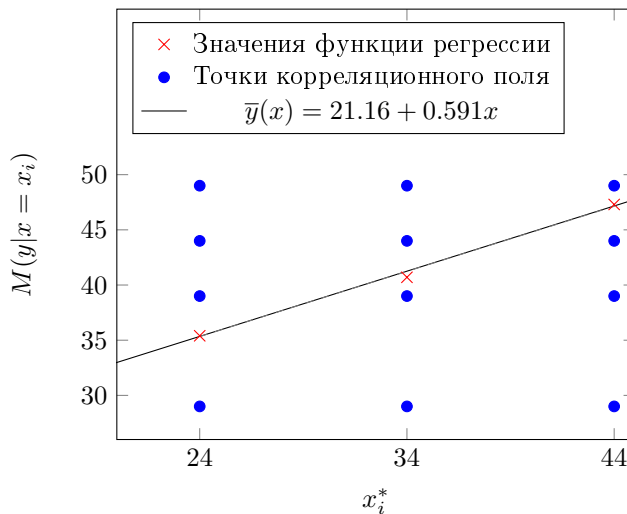
$$\bar{y}(x) = \bar{M}(y) + \bar{r}_{xy} \frac{\bar{\sigma}(y)}{\bar{\sigma}(x)} (x - \bar{M}(x)) = 38.875 + 0.7698 \cdot \frac{6.373}{8.307} (x - 30) = 21.16 + 0.591x$$

$$\delta_{x=24} = \frac{|35.33 - 35.4|}{30.3} \cdot 100\% = 0.23\%$$

$$\delta_{x=34} = \frac{|41.24 - 40.7|}{38.8} \cdot 100\% = 1.39\%$$

$$\delta_{x=44} = \frac{|47.13 - 47.3|}{45.3} \cdot 100\% = 0.38\%$$

График:



Вывод

Построили оценки математических ожиданий и дисперсий случайных величин, входящих в систему, а также оценки корреляционного момента и коэффициента корреляции.