Negative Casimir-Entropien in der Geometrie Kugel–Platte

Michael Hartmann

Kolloquium

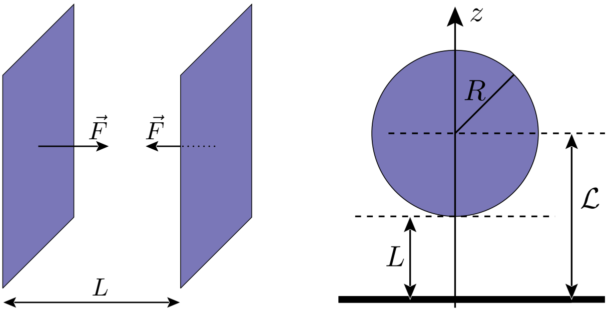
25. Juni 2014

Motivation

- Casimir: anziehende Kraft zwischen perfekt leitenden Metallplatten im Vakuum bei $T = 0$

$$\frac{F}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 L^4}$$

- experimentell relevant: Kugel–Platte Geometrie



Motivation

- Suche nach weiteren Grundkräften
- Gravitation und kosmologische Konstante
- van der Waals Kräfte

- Negative Casimir-Entropien
  - Platte–Platte Geometrie mit Drude Spiegeln
  - Kugel–Platte Geometrie mit perfekten Spiegeln

- Methoden
  - Proximity Force Approximation (PFA)
  - Streutheorie

Streutheorie

- Freie Energie

$$\mathcal{F} = k_\mathsf{B} T \sum_{n=0}^{\infty}{}' \ln\det\mathcal{D}(\omega_n), \qquad \omega_n = \frac{2\pi n k_\mathsf{B} T}{\hbar}$$

- Streuoperator

$$\mathcal{D} = \mathbb{1} - \mathcal{M}$$

- Round-Trip Operator für Kugel–Platte

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}_\mathsf{S} \mathcal{T}_{\mathsf{S}\leftarrow\mathsf{P}} \mathcal{R}_\mathsf{P} \mathcal{T}_{\mathsf{P}\leftarrow\mathsf{S}}$$

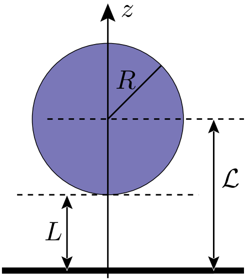
- Entropie

$$S = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T}$$

Symmetrien in der Geometrie Kugel–Platte

- Zeitumkehrinvarianz
- Rotationssymmetrie um z-Achse
- Freie Energie

$$\mathcal{F} = k_\mathsf{B} T {\sum_{n=0}^{\infty}}' {\sum_{m=0}^{\infty}}' \ln\det\left[\mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}(\omega_n)\right]$$



- Round-Trip Operator

$$\mathcal{M}^{(m)}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{(m)}(E,E) & \mathcal{M}^{(m)}(E,M) \\ \mathcal{M}^{(m)}(M,E) & \mathcal{M}^{(m)}(M,M) \end{pmatrix}$$

Streutheorie in der Geometrie Kugel–Platte

1. Reflexionsverhalten der Spiegel
2. Lösungen nach Basisfunktionen entwickeln
3. Round-Trip Operator in Multipolbasis entwickeln
4. Wick-Rotation
5. Skalieren

Streutheorie in der Geometrie Kugel–Platte

1. **Reflexionsverhalten der Spiegel**
   - Drude Modell
   - Plasma Modell
   - perfekte Spiegel

   $\Rightarrow$ Fresnel- und Mie-Koeffizienten
2. Lösungen nach Basisfunktionen entwickeln
3. Round-Trip Operator in Multipolbasis entwickeln
4. Wick-Rotation
5. Skalieren

Streutheorie in der Geometrie Kugel–Platte

1. Reflexionsverhalten der Spiegel
2. **Lösungen nach Basisfunktionen entwickeln**
   - Maxwell-Gleichungen äquivalent zu

$$\left(\Delta - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0, \qquad \left(\Delta - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = 0$$

   - Ebene Wellen-Basis $|\mathbf{k}_{xy}, \phi, p\rangle$
   - Multipolbasis $|\ell, m, P\rangle$
   - Matrixelemente für den Basiswechsel $\langle \mathbf{k}_{xy}, \phi, p \mid \ell, m, P\rangle$
3. Round-Trip Operator in Multipolbasis entwickeln
4. Wick-Rotation
5. Skalieren

Streutheorie in der Geometrie Kugel–Platte

1. Reflexionsverhalten der Spiegel
2. Lösungen nach Basisfunktionen entwickeln
3. **Round-Trip Operator in Multipolbasis entwickeln**

$$\mathcal{M}^{(m)}_{\ell_1\ell_2}(P_1,P_2) = \langle \ell_1, m, P_1 \mid \mathcal{R}_\mathsf{S}\mathcal{T}_{\mathsf{S}\leftarrow\mathsf{P}}\mathcal{R}_\mathsf{P}\mathcal{T}_{\mathsf{P}\leftarrow\mathsf{S}} \mid \ell_2, m, P_2\rangle$$

4. Wick-Rotation
5. Skalieren

Streutheorie in der Geometrie Kugel–Platte

1. Reflexionsverhalten der Spiegel
2. Lösungen nach Basisfunktionen entwickeln
3. Round-Trip Operator in Multipolbasis entwickeln
4. **Wick-Rotation**
   - Satz von Cauchy
   - imaginäre Frequenzen $\omega \to i\xi$ mit $\xi \in \mathbb{R}$
   - oszillierende Integranden $\to$ exponentiell gedämpfte Integranden
5. Skalieren

Streutheorie in der Geometrie Kugel–Platte

1. Reflexionsverhalten der Spiegel
2. Lösungen nach Basisfunktionen entwickeln
3. Round-Trip Operator in Multipolbasis entwickeln
4. Wick-Rotation
5. **Skalieren**

$$\mathcal{F} \to \frac{\mathcal{L}}{\hbar c}\mathcal{F}, \qquad T \to \frac{2\pi k_\mathrm{B}\mathcal{L}}{\hbar c}T$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}\left(T, L/R\right)$$

Proximity Force Approximation

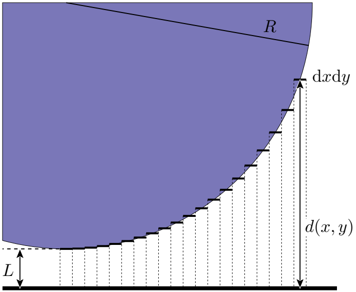
- PFA verknüpft beliebige Geometrien mit Platte–Platte Geometrie
- Freie Energie

$$\mathcal{F}_{\mathsf{PFA}} = \int_{\Sigma} \frac{\mathcal{F}_{\mathsf{PP}}\left(d(x,y)\right)}{A} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

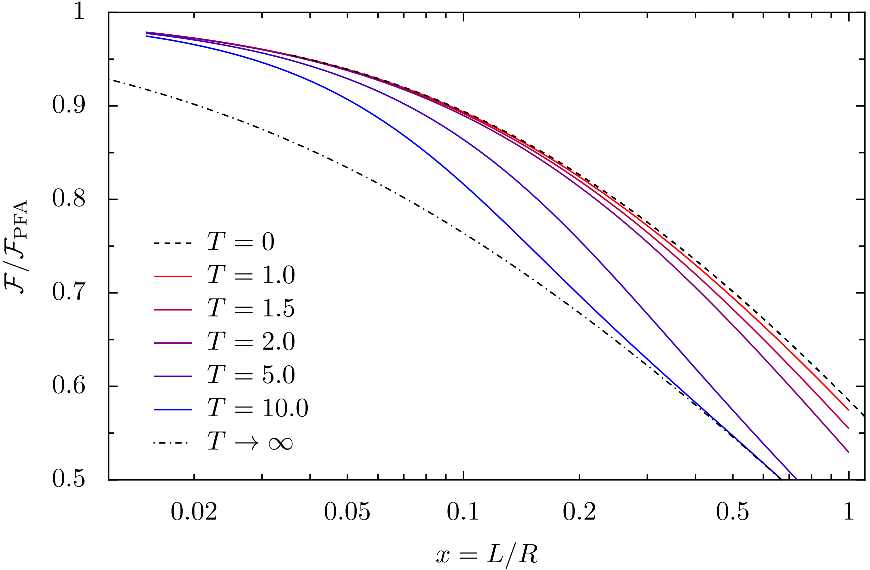
Näherungen:

- PFA ignoriert Krümmung der Kugel
- PFA ignoriert Polarisationswechsel
- Flächenelemente infinitesimal klein
- Casimir Energie ist nicht-additiv

$\Rightarrow$ PFA liefert nicht-negative Entropien



Proximity Force Approximation



Näherung für große Abstände

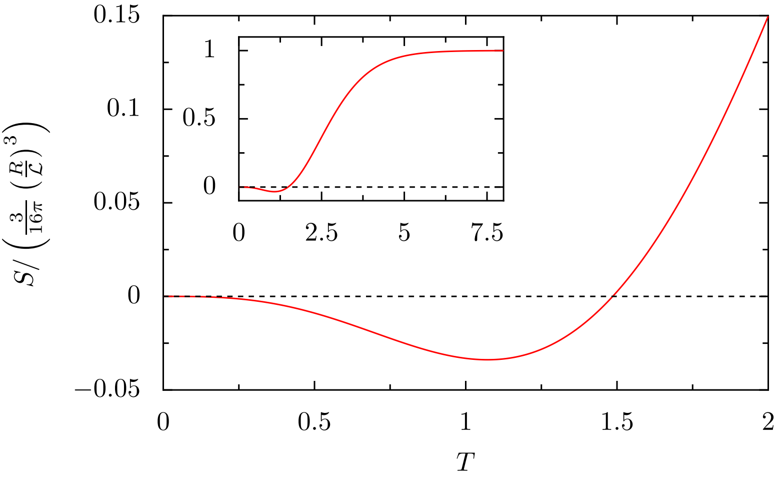
- Näherung für $L/R \gg 1$
- großer Abstand $\Leftrightarrow$ kleiner Kugelradius $\Leftrightarrow$ große Krümmung

- Dipolnäherung
- Taylor-Näherungen für Mie-Koeffizienten
- Näherung für Logarithmus der Determinante

$$\ln\det\left(\mathbb{1} - \mathcal{M}^{(m)}\right) \approx - \sum_{P=\mathsf{E},\mathsf{M}} \mathcal{M}^{(m)}_{1,1}(P,P)$$

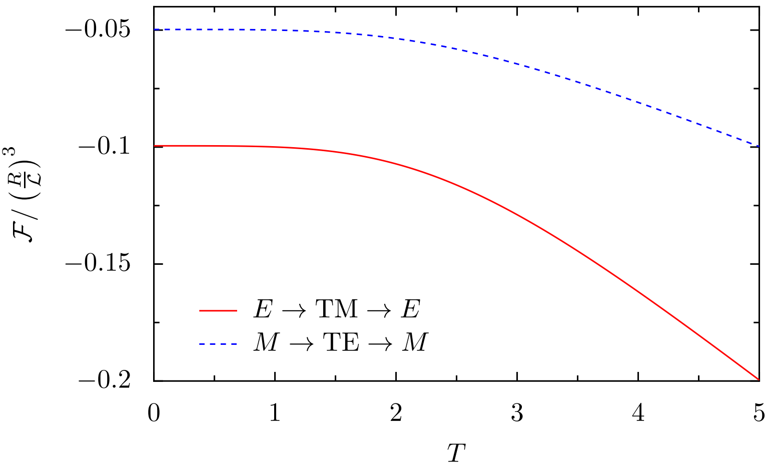
$\Rightarrow$ analytischer Ausdruck für Freie Energie

Näherung für große Abstände



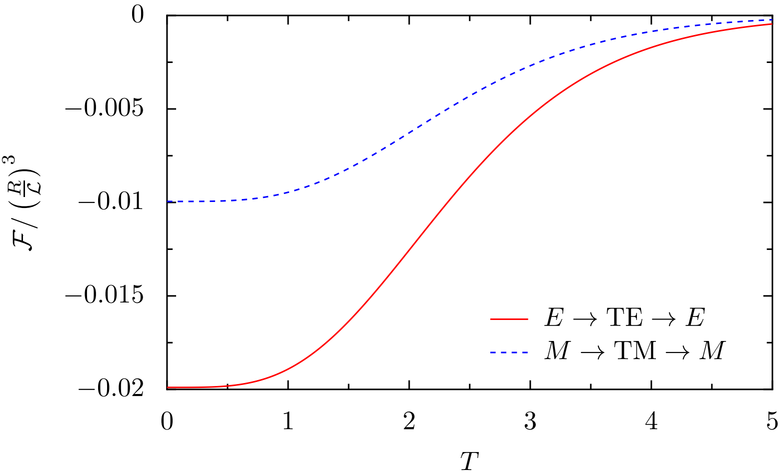
Entropie

Näherung für große Abstände



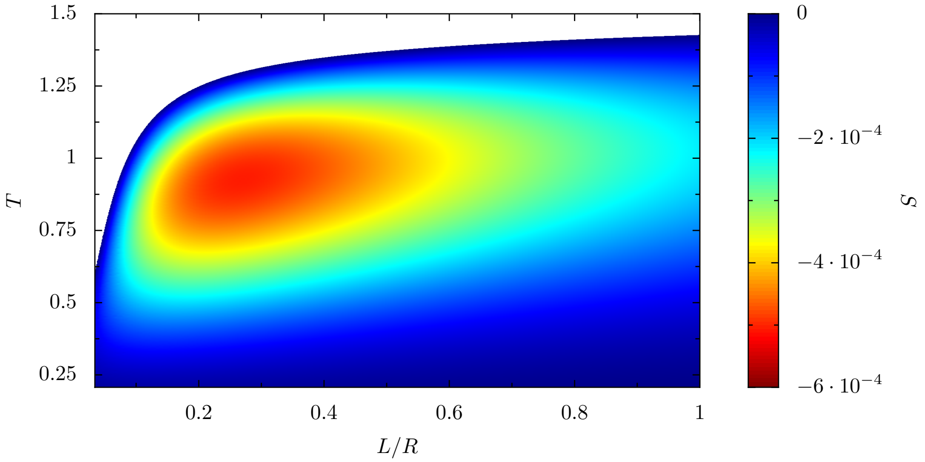
Freie Energie – kein Polarisationswechsel

Näherung für große Abstände



Freie Energie – Polarisationswechsel

Negative Casimir-Entropien



skalierte Einheiten

Zusammenfassung

- große Abstände
  - analytischer Ausdruck für Freie Energie
  - negative Entropien für $T \lesssim 1.5$
  - Ursache: Polarisationswechsel
- kleine Abstände
  - PFA gute Näherung
  - Entropien berechnet mit PFA sind positiv
- numerisch
  - Effekt negativer Entropien für große Abstände stärker
  - aber: Casimir-Effekt für große Abstände schwächer
  - Minimum der Entropie für $L/R \approx 0.27$ und $T \approx 0.93$
  - negative Entropien verschwinden (wahrscheinlich) für $L/R \to 0$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!