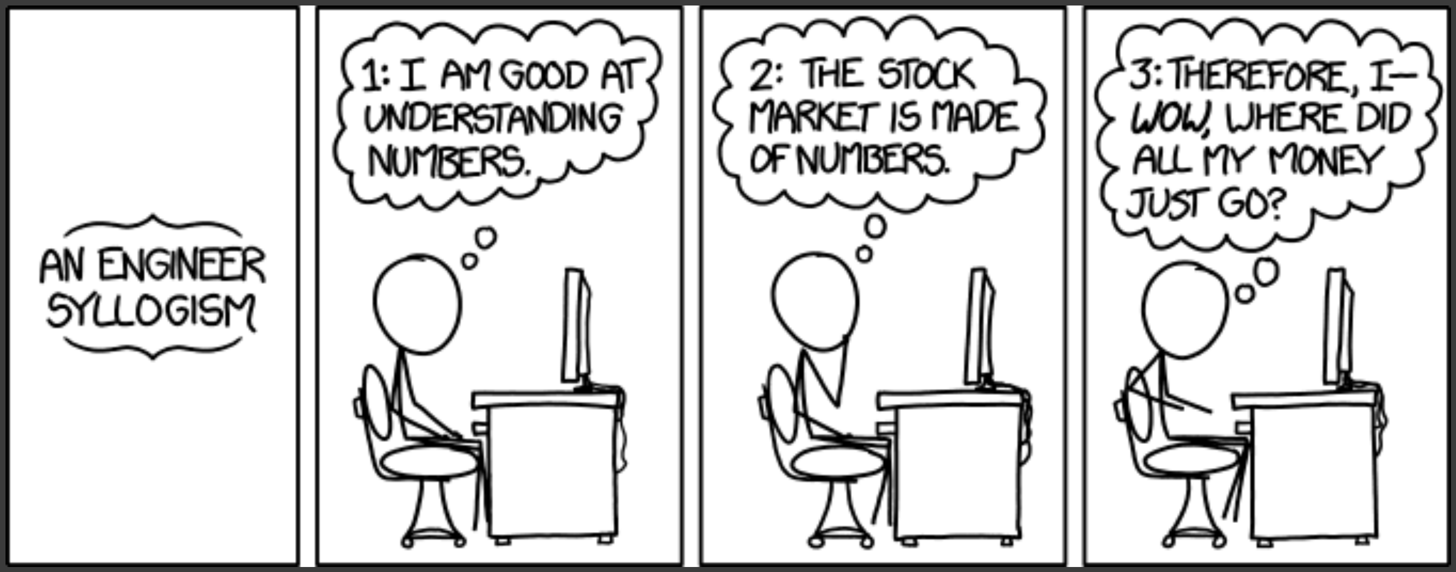
Das Black–Scholes–Merton-Modell



(https://xkcd.com/1570/)

Sebastian Tölle
Universität Augsburg
Theoretische Physik II

Kaffeeseminar, 11.11.2016

- Bewertung von Finanzoptionen
- Fischer Black und Myron S. Scholes:
  "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" (1973)
- Robert C. Merton:
  "Theory of Rational Option Pricing" (1973)
- Nobelpreis 1997 für Merton und Scholes
  (Black: † 30. August 1995)

Kurios: Der Artikel von Black und Scholes wurde vor der Veröffentlichung zwei mal abgelehnt

Brown'sche Bewegung:

Stochastischer Prozess $\beta(t)$ mit

(1) $\beta(t=0)=0$

(2) $\beta(t)-\beta(s), \beta(u)-\beta(v)$ stoch. unab., falls $(s,t)\cap(u,v)=\varnothing$

(3) $\beta(t)-\beta(s)\sim\mathcal{N}(0,|t-s|)$

Itô-Integral:

Def.: $\int\limits_S^T X(t)\mathrm{d}\beta(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} X(t_i)\big(\beta(t_{i+1})-\beta(t_i)\big)$

Interessant: $E\left(\int\limits_S^T X\mathrm{d}\beta\int\limits_S^T Y\mathrm{d}\beta\right)=\int\limits_S^T E(XY)\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \text{“}\mathrm{d}\beta(s)\mathrm{d}\beta(t)\equiv\delta(t-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\text{”}$$

Itô-Formel:

Stochastisches Differential (für Diffusionsprozess X):

$$\mathrm{d}X = F\mathrm{d}t + G\mathrm{d}\beta$$

Def.: $Y(t) = u(t, X(t))$

Dann: Y ist Diffusionsprozess mit

$$\mathrm{d}Y = \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial X}\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\underbrace{(\mathrm{d}X)^2}_{G^2\mathrm{d}t}$$

Formal: Taylor-Entwicklung & $(\mathrm{d}\beta)^2 = \mathrm{d}t$

Black-Scholes-Merton Optionsscheinbewertung

- Bank verkauft zur Zeit $t = 0$ einen Optionsschein.
- Optionsschein: Recht eine Aktie zur Zeit $t = T$ zum festen Preis p von der Bank zu kaufen.

$\longrightarrow$ Was ist der faire Preis hierfür?

Finde Portfolio aus Aktienkurs und fest verzinslichem Wertpapier (Bond), so dass die Bank den Wert des Optionsscheins immer ausgleichen kann.

Aktienkurs: $\mathrm{d}S = \underset{\text{Drift}}{\mu} S \mathrm{d}t + \underset{\text{Schwankung}}{\sigma} S \mathrm{d}\beta$

Bond: $\mathrm{d}B = \underset{\text{Zinssatz}}{r} B \mathrm{d}t$

- Wert des Portfolios: $V = \Phi S + \Psi B$
- Portfolio sei selbstfinanziert (nur Kursänderungen): $\mathrm{d}V = \Phi \mathrm{d}S + \Psi \mathrm{d}B$

Ein Preis $u(t, S)$ heißt fair, wenn $u(t, S) = V(t)$

$\Rightarrow p = u(0, S_0)$

Black-Scholes-Merton — Bestimmung von u

Wir haben:

$$\left[\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \Phi \mathrm{d}S + \Psi \mathrm{d}B \\ \mathrm{d}u &= (\partial_t u)\mathrm{d}t + (\partial_S u)\mathrm{d}S + \frac{1}{2}(\partial_S^2 u)(\mathrm{d}S)^2 \end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{d}S, \mathrm{d}B$$

$$\left[\begin{aligned} \mathrm{d}V &= [\mu \Phi S + r \Psi B]\mathrm{d}t + \sigma \Phi S \mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}u &= \left[(\partial_t u) + \mu S(\partial_S u) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 (\partial_S^2 u)\right]\mathrm{d}t + \sigma S(\partial_S u)\mathrm{d}\beta \end{aligned}\right.$$

Mit $V = \Phi S + \Psi B = u$ und den grünen Termen:

$$\Phi = \partial_s u \qquad \Psi = \tfrac{1}{B}\left[u - S(\partial_S u)\right]$$

Einsetzen in die gelben Terme ergibt schließlich:

$$\boxed{\partial_t u + r S \partial_S u + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_S^2 u - r u \quad = \quad 0}$$

Black-Scholes-Merton-PDE

Als Lösung der PDE ergibt sich:

$$u(t,S) = S\Phi(d_+) - pe^{-r\tau}\Phi(d_-)$$

mit

Restlaufzeit

$$\tau = T - t$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\left(\frac{S}{p}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]$$

(I) $\sigma \to 0$

1. $\log\left(\frac{S}{p}\right) + r\tau > 0 \Leftrightarrow S > p^{-r\tau}$

   Dann: $d_\pm \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \infty$ und $u(t,S) = S - pe^{-r\tau}$

2. $\log\left(\frac{S}{p}\right) + r\tau < 0 \Leftrightarrow S < p^{-r\tau}$

   Dann: $d_\pm \xrightarrow[\sigma\to 0]{}$ -∞ und $u(t,S) = 0$

(II) $\tau \to 0$

1. $S > p \Leftrightarrow \log\left(\frac{S}{p}\right) > 0$

   Dann: $d_\pm \xrightarrow[\tau\to 0]{} \infty$ und $u(t,S) \approx S - p$

2. $S < p \Leftrightarrow \log\left(\frac{S}{p}\right) < 0$

   Dann: $d_\pm \xrightarrow[\tau\to 0]{}$ -∞ und $u(t,S) = 0$

(III) $\sigma \to \infty$

Dann: $d_\pm \underset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ und $u(t,S) = S$

Was ist der Aktienkurs?

Aus Differential von S: $S = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\beta\right]$

Itô-Formel!

Interessant: $S \underset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Aber: $E(S) \underset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} S_0 e^{rt}$