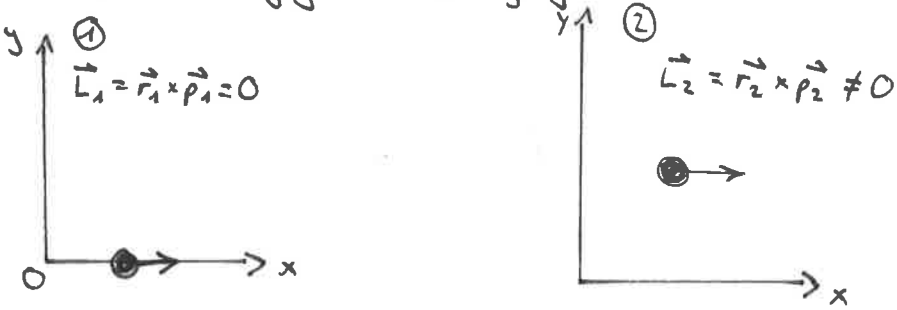
Drehimpuls in der QM

Klassische Physik

- Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
- Erhaltungsgröße für Zentralpotentiale $V = V(r)$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \frac{1}{m} \underbrace{\vec{p} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \underbrace{(-\vec{\nabla} V(r))}_{\sim \vec{e_r}} = 0$$

- Drehimpuls abhängig vom Bezugssystem



Anm: Energie und Impuls sind auch abh. vom Bezugssystem, Zentralpotentiale besitzen einen ausgezeichneten Punkt

QM

Symmetrien

Transformationen werden durch unitäre Operatoren dargestellt:

$|\phi\rangle$ Zustand des Systems, $\hat{D}(g)$ Transformation

Forderung: Messgrößen dürfen sich nicht ändern!

$|\phi'\rangle = \hat{D}(g)|\phi\rangle$ Zustand des transformierten Systems

Erwartungswert einer Observablen $\hat{O}$:

$$\langle\phi'|\hat{O}'|\phi'\rangle = \langle\hat{D}\phi|\hat{D}\hat{O}\hat{D}^+|\hat{D}\phi\rangle = \langle\phi|\hat{D}^+\hat{D}\hat{O}\hat{D}^+\hat{D}|\phi\rangle \overset{!}{=} \langle\phi|\hat{O}|\phi\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{D}^+(g) = \hat{D}^{-1}(g)$$

Kommutatorrelationen des Drehimpulses

$\hat{\mathcal{R}}_z$: Rotationsoperator um z-Achse

Drehungen bilden eine Gruppe: $\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1)\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2) = \hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1+\varphi_2) = \hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2)\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1)$

Es gilt: $(\varphi = \varphi_1 + \varphi_2)$

$$\frac{d\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1)}{d\varphi_1}\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2) = \frac{d}{d\varphi_1}\Big(\underbrace{\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1)\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2)}_{=\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1+\varphi_2)}\Big) = \frac{d}{d\varphi}\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi)\underbrace{\frac{d\varphi}{d\varphi_1}}_{=1}$$

Andererseits:

$$\frac{d\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2)}{d\varphi_2}\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1) = \frac{d}{d\varphi}\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi)$$

Somit:

$$\frac{d\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1)}{d\varphi_1}\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2) = \frac{d\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2)}{d\varphi_2}\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1) \qquad \Big|\cdot \hat{\mathcal{R}}_z^{-1}(\varphi_1)\hat{\mathcal{R}}_z^{-1}(\varphi_2)$$

$$\frac{d\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_1)}{d\varphi_1}\hat{\mathcal{R}}_z^{-1}(\varphi_1) = \frac{d\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi_2)}{d\varphi_2}\hat{\mathcal{R}}_z^{-1}(\varphi_2) =: \hat{G}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi)}{d\varphi} = \hat{G}\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi) \qquad \Rightarrow \hat{\mathcal{R}}_z = e^{\varphi\hat{G}}, \quad \text{da } \hat{\mathcal{R}}_z(\varphi=0) \overset{!}{=} \mathbb{1}$$

$\hat{\mathcal{R}}_z$ unitär $\Leftrightarrow \hat{G} = -\frac{i}{\hbar}\hat{J}_z$ mit $\hat{J}_z$ hermitesch

Drehoperator für Drehung um z-Achse:

$$\hat{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \text{ infinitesimal: } \hat{R}_z(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\varphi & 0 \\ \delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehung eines Vektors: $\vec{v}\,' = \hat{R}_z(\varphi)\vec{v}$

Drehung eines Vektoroperators: $\hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \\ \hat{v}_z \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_k = \hat{R}_z \hat{v}_k \hat{R}_z^{-1}$

$$\hat{v}_x' = \hat{R}_z \hat{v}_x \hat{R}_z^{+} = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi\hat{J}_z\right)\hat{v}_x\left(1 + \frac{i}{\hbar}\delta\varphi\hat{J}_z\right) = \hat{v}_x - \delta\varphi\underbrace{\frac{i}{\hbar}[\hat{J}_z, \hat{v}_x]}_{\overset{!}{=}\hat{v}_y}$$

$$\Rightarrow i\hbar\,\hat{v}_x = [\hat{J}_z, \hat{v}_x]$$

$\hat{\vec{v}}$ war beliebig, also speziell für $\hat{\vec{v}} = \hat{\vec{J}}$: $\quad i\hbar\hat{J}_y = [\hat{J}_z, \hat{J}_x]$

Eigenwertproblem

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z$$
$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x$$
$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y$$

$\hat{\vec{J}}^2$ vertauscht mit $\hat{J}_z$:

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z] = [\hat{J}_x^2, \hat{J}_z] + [\hat{J}_y^2, \hat{J}_z] + [\hat{J}_z^2, \hat{J}_z]$$
$$= \hat{J}_x[\hat{J}_x, \hat{J}_z] + [\hat{J}_x, \hat{J}_z]\hat{J}_x + \hat{J}_y[\hat{J}_y, \hat{J}_z] + [\hat{J}_y, \hat{J}_z]\hat{J}_y$$
$$= i\hbar(-\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_x\hat{J}_y) = 0$$

Definiere die nicht-hermiteschen Operatoren

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$$

mit den Eigenschaften

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_\pm] = 0, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar\hat{J}_\pm, \quad \hat{J}_\pm\hat{J}_\mp = \hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_z^2 \pm \hbar\hat{J}_z$$

Betrachte das EW-Problem

$$\hat{\vec{J}}^2|u\rangle = a\hbar^2|u\rangle$$
$$\hat{J}_z|u\rangle = m\hbar|u\rangle$$

- $\hat{J}_z\hat{J}_\pm|u\rangle = \hat{J}_\pm\hat{J}_z|u\rangle \pm \hbar\hat{J}_\pm|u\rangle = (m\pm 1)\hbar\hat{J}_\pm|u\rangle$
- $\hat{\vec{J}}^2\hat{J}_\pm|u\rangle = \hat{J}_\pm\hat{\vec{J}}^2|u\rangle = a\hbar^2\hat{J}_\pm|u\rangle$

Da $\underline{\langle\varphi|\hat{\vec{J}}^2|\varphi\rangle} = \langle\varphi|\hat{J}_x^2|\varphi\rangle + \langle\varphi|\hat{J}_y^2|\varphi\rangle + \langle\varphi|\hat{J}_z^2|\varphi\rangle \geq \underline{\langle\varphi|\hat{J}_z^2|\varphi\rangle} \; \underline{\geq 0}$

mit $|\varphi\rangle = |u\rangle$

$$\hbar^2 a \geq \hbar^2 m^2 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{a} \leq m \leq \sqrt{a}$$

Also gibt es ein m_{max} mit

$$\hat{J}_z\hat{J}_+|u_{max}\rangle = (m_{max}+1)\hbar\hat{J}_+|u_{max}\rangle \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{J}_+|u_{max}\rangle = 0$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+|u_{max}\rangle = (\hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z)|u_{max}\rangle = 0$$

also $~~m_{max}~~$ $m_{max} = \sqrt{a}$: $\hbar^2(a - m_{max}^2 - m_{max}) = 0 \Rightarrow a = m_{max}(m_{max}+1)$

Analog für untere Grenze: $a = m_{min}(m_{min}-1)$

Da $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm^n] = \pm n\hbar\, \hat{J}_\pm^n$:

$$\hat{J}_z \hat{J}_-^n |u_{max}\rangle = (m_{max}-1)\hbar\, \hat{J}_-^n |u_{max}\rangle$$

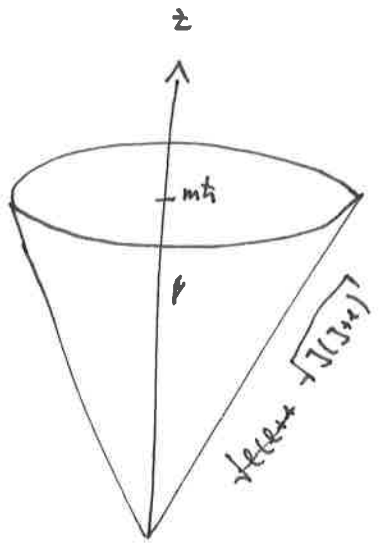
$\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $m_{max} - n = m_{min}$

Also: $m_{min}(m_{min}-1) = m_{max}(m_{max}+1) = (m_{max}-n)(m_{max}-n-1)$

$$\Rightarrow m_{max} = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a =: J = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots$$

$$m = -J, -J+1, \dots, +J$$



Literatur

Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie