Chaos I: Die Logistische Abbildung

Michael Hartmann

Kaffeeseminar

30. November 2015

Abbildungen

Allgemeine Abbildung:

$$X_{n+1} = F(X_n)$$

Vorteile von Abbildungen:

- schnell für numerische Untersuchungen
- einfach für analytische Untersuchungen
- aus kontinuierlichen Systemen erhält man oft diskrete Abbildungen, z.B. Poincaré-Abbildungen

Demographisches Modell

Modell für Enwicklung einer Population X_n:

1. Fortpflanzung:
   Population ist im Folgejahr um Faktor q_f größer
2. Verhungern:
   Population ist im Folgejahr um Faktor $(G - X_n)q_v$ geringer
   (G: Maximalgröße)

$$\Rightarrow X_{n+1} = q_f q_v X_n (G - X_n) \qquad \text{(logistische Gleichung)}$$

Logistische Gleichung

$$\Rightarrow X_{n+1} = q_f q_v X_n (G - X_n) \qquad \text{(logistische Gleichung)}$$

Vereinfachungen:

- x_n als Bruchteil der Maximalgröße G, $x_n = X_n / G$:

$$\Rightarrow x_{n+1} = G q_f q_v (1 - x_n)$$

- Zusammenfassen der Parameter $\alpha \equiv G q_f q v$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \alpha (1 - x_n)$$

Parameter α

Logistische Abbildung:

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n)$$

Extrema:

$$f'(x_n) = \alpha(1 - 2x_n) \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \frac{1}{2} \quad \text{(Maximum)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{4} \quad \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq 4$$

Fixpunkte und Stabilität

Fixpunkte:

$$f(x_s) = x_s \quad \Leftrightarrow \quad x_s = 0,\ x_s = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

Stabilität:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) = f(x_s + \epsilon) \\ &\approx f(x_s) + \epsilon f'(x_s) = x_s + \epsilon f'(x_s) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Fixpunkt stabil für $|f'(x_s)| < 1$

Stabilität von Fixpunkten

Ableitung der logistischen Gleichung:

$$f'(x_n) = \alpha(1 - 2x_n)$$

Fixpunkt $x_s = 0$:

$$f'(x_s = 0) = \alpha \quad \Rightarrow \text{stabil für } \alpha < 1$$

Fixpunkt $x_s = 1 - 1/\alpha$:

$$f'(x_s = 1 - 1/\alpha) = 2 - \alpha \quad \Rightarrow \text{stabil für } 1 < \alpha < 3$$

Stabilität von Fixpunkten

Ableitung der logistischen Gleichung:

$$f'(x_n) = \alpha(1 - 2x_n)$$

Fixpunkt $x_s = 0$:

$$f'(x_s = 0) = \alpha \quad \Rightarrow \text{stabil für } \alpha < 1$$

Fixpunkt $x_s = 1 - 1/\alpha$:

$$f'(x_s = 1 - 1/\alpha) = 2 - \alpha \quad \Rightarrow \text{stabil für } 1 < \alpha < 3$$

Was passiert für $\alpha > 3$?

Verhalten für $\alpha > 3$

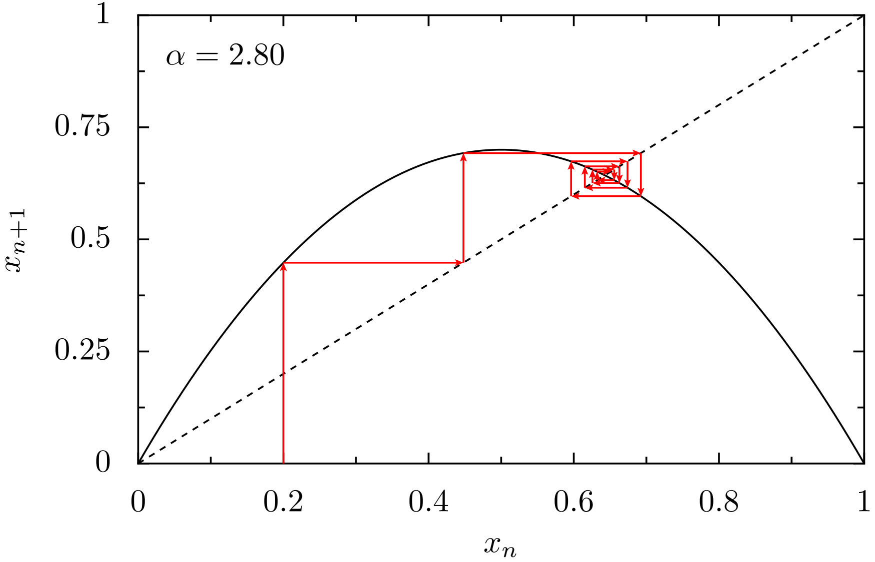
$$\begin{aligned} f^2(x_n) &\equiv f(f(x_n)) \\ &= \alpha^2 \left(-\alpha x_n^4 + 2\alpha x_n^3 - (1+\alpha)x_n^2 + x_n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^2(x_s) = x_s \quad \Leftrightarrow \quad & x_s = 0,\ x_s = 1 - 1/\alpha, \\ & x_s = \frac{1}{2\alpha}\left(\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 3}\right) \end{aligned}$$

$$f^{2'}(x_n) = \alpha^2 \left(-4\alpha x^3 + 6\alpha x^2 - 2(1+\alpha)x_n + 1\right)$$

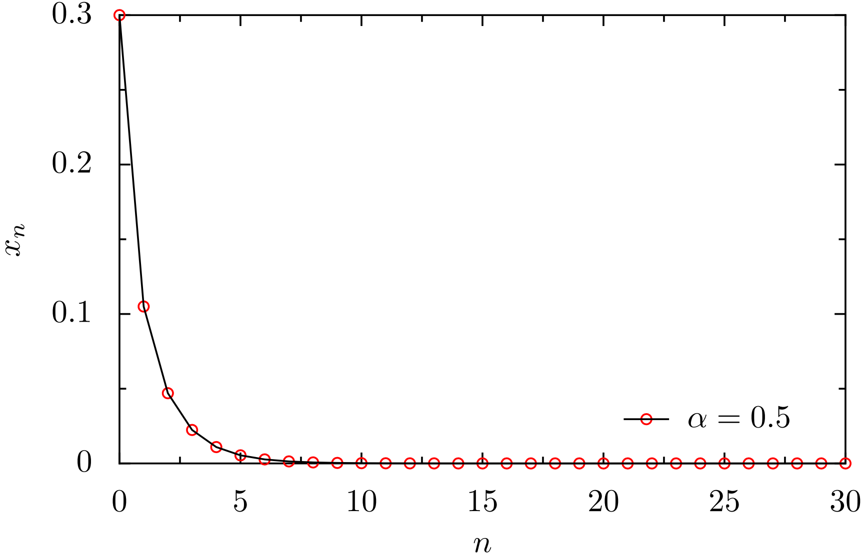
$$f^{2'}(x_s) = -\alpha^2 + 2\alpha + 4 \quad \Rightarrow \alpha \leq 1 + \sqrt{6}$$

Spinnwebdiagramm

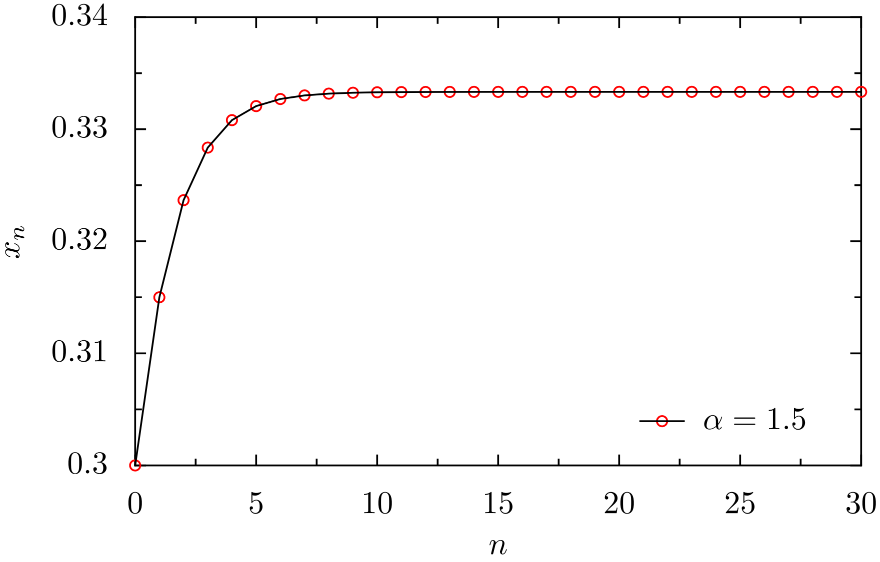


Spinnwebdiagramm

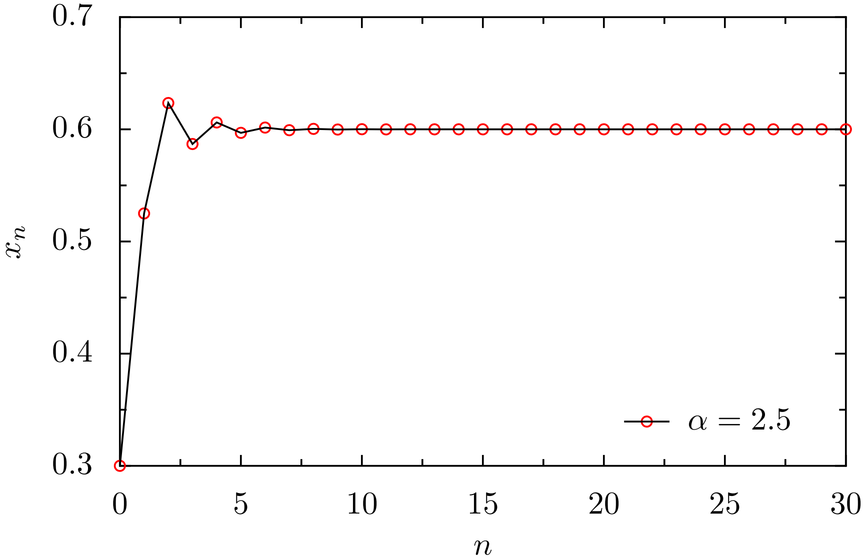
Plots



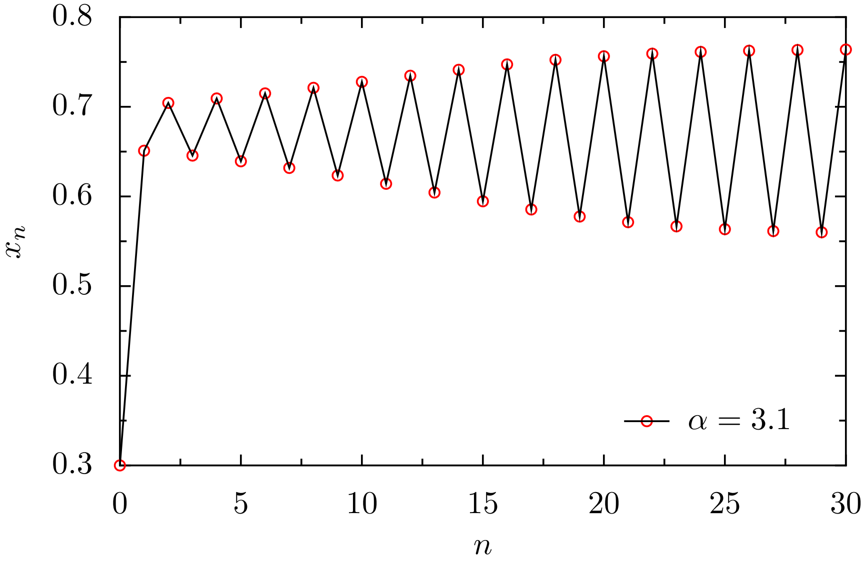
Plots



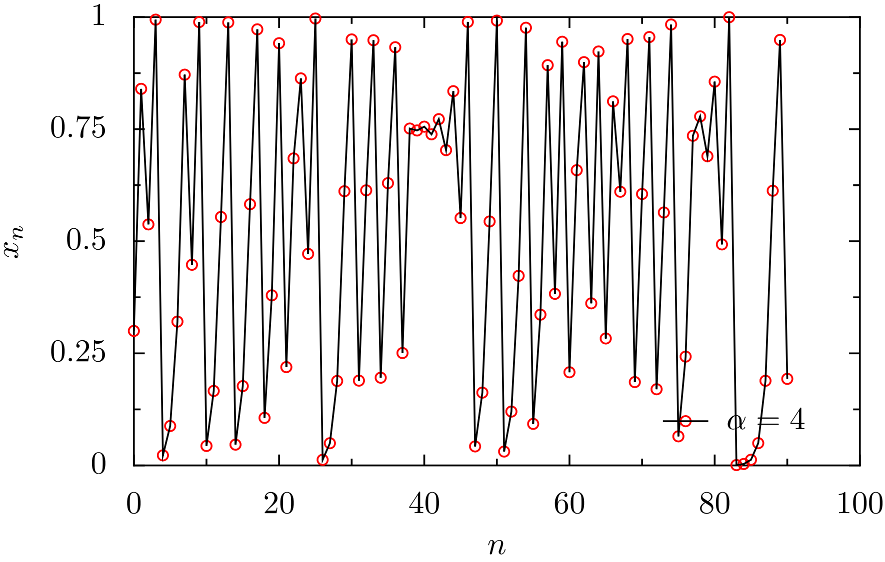
Plots



Plots



Plots



Bifurkationsdiagramm

Bifurkationsdiagramm (Feigenbaumdiagramm)

Häufungspunkte des Systems in Abhängigkeit eines Parameters

Algorithmus für logistische Abbildung:

1. Wähle Wert für Parameter α, wähle einen Startwert x_0.
2. Wende die logistische Abbildung N-mal an (z.B. $N = 1000$).
3. Berechne die Punkte $x_N, \ldots, x_{N+n}$.
4. Trage die berechneten Punkte ins Diagramm ein und wiederhole den Algorithmus für einen anderen Wert des Parameters α.

Bifurkationsdiagramm

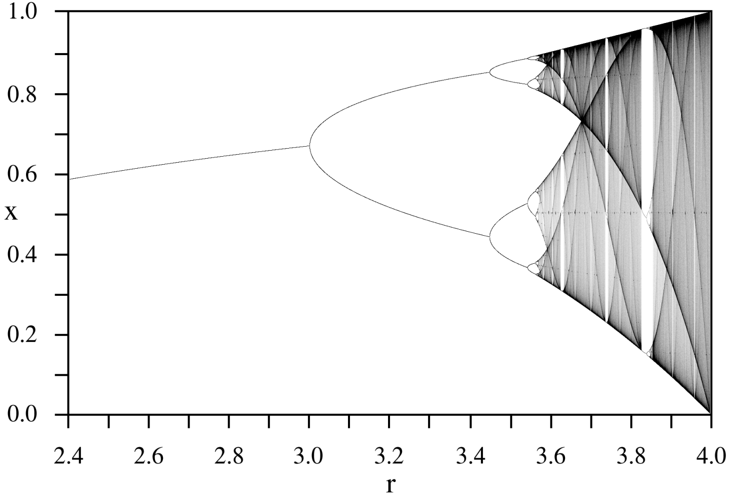
Bifurkationsdiagramm (Feigenbaumdiagramm)

Häufungspunkte des Systems in Abhängigkeit eines Parameters

Algorithmus für logistische Abbildung:

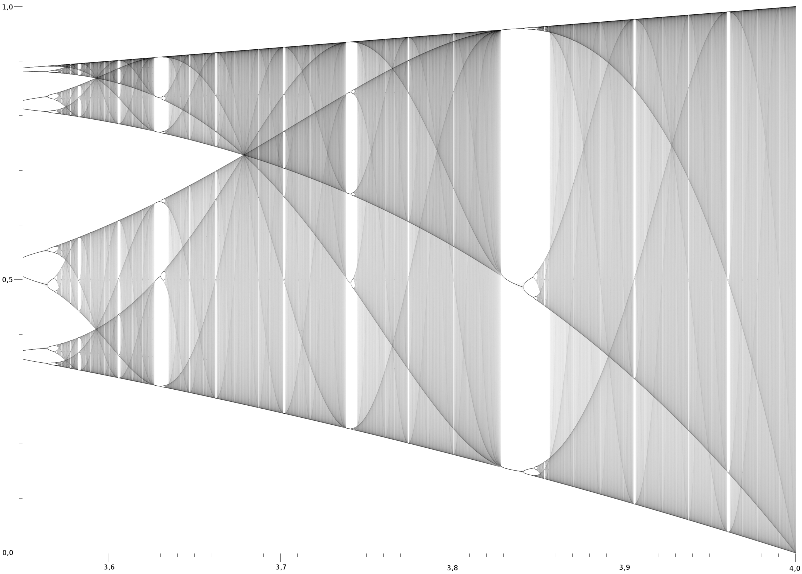
1. Wähle Wert für Parameter α, wähle einen Startwert x_0.
2. Wende die logistische Abbildung N-mal an (z.B. $N = 1000$).
3. Berechne die Punkte $x_N, \dots, x_{N+n}$.
4. Trage die berechneten Punkte ins Diagramm ein und wiederhole den Algorithmus für einen anderen Wert des Parameters α.

Bifurkationsdiagramm



Bildquelle: Wikipedia

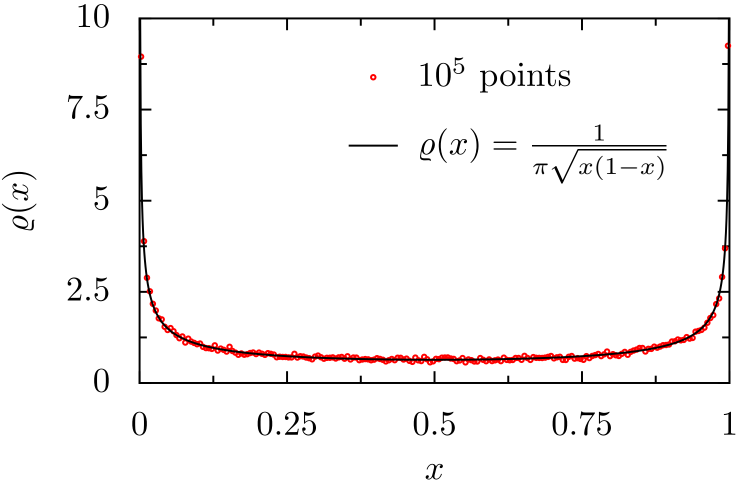
Bifurkationsdiagramm



Bildquelle: Wikipedia

Invariante Dichte

Chaos bedeutet nicht Zufall! Z.B. $\alpha = 4$:



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!