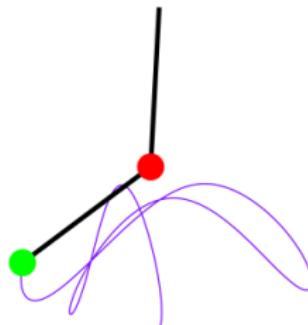


Klassisches Chaos und Poincaré-Schnitte

Michael Hartmann

Kaffeeseminar

2. Mai 2013



Überblick

① Was ist ein Doppelpendel?

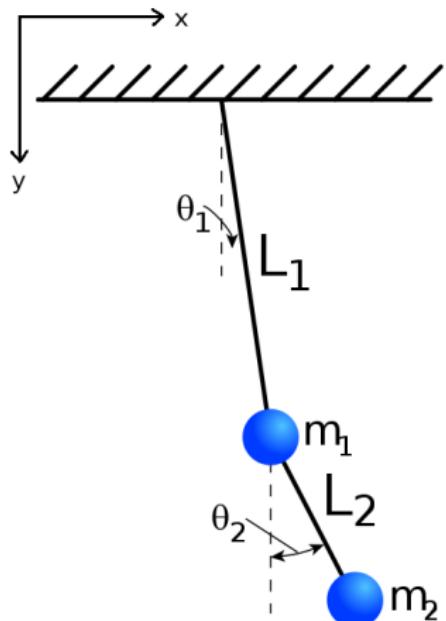
② Bewegungsgleichungen

③ Poincaré-Schnitte

④ Beispiele

Was ist ein Doppelpendel?

Was ist ein Doppelpendel?



$$x_1 = L_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2$$

$$y_1 = -L_1 \cos \theta_1$$

$$y_2 = -L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_2$$

Bildquelle: [Wikipedia](#)

Lagrange-Funktion

- Aufstellen der Bewegungsgleichung mit Lagrange (für $m_1 = m_2 \equiv m$ und $L_1 = L_2 \equiv L$)

$$\mathcal{L} = T - V$$

- potentielle und kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V = mgL(3 - 2\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

- Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 + mL^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & - 3mgL + 2mgL\cos\theta_1 + mgL\cos\theta_2\end{aligned}$$

Hamilton-Funktion und Bewegungsgleichungen

- Hamiltonfunktion

$$H = \sum_i \dot{\theta}_i p_i - \mathcal{L}$$

- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} & p_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} & p_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2}\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen

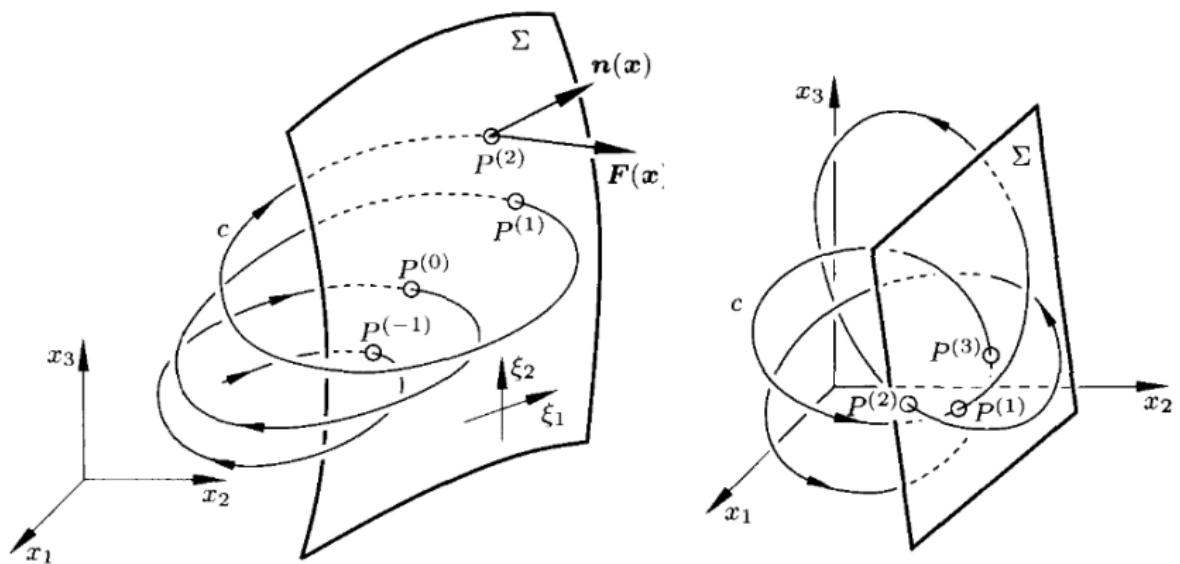
$$\dot{\theta}_1 = \frac{p_1 - p_2 \cos \Delta}{L^2 m [1 + \sin^2 \Delta]} \quad \dot{\theta}_1 = \frac{2p_2 - p_1 \cos \Delta}{L^2 m [1 + \sin^2 \Delta]}$$

$$\dot{p}_1 = -2mgL \sin \theta_1 - C \quad \dot{p}_2 = -mgL \sin \theta_2 + C$$

$$C = \frac{p_1 p_2 \sin \Delta - [p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \Delta] \sin \Delta \cos \Delta}{L^2 m [1 + \sin^2 \Delta]}$$

$$\Delta = \theta_1 - \theta_2$$

Poincaré-Schnitte



Bildquelle: An Exploration of Chaos, Argyris, Faus, Haase

Vorteile von Poincaré-Schnitten

- Vergleich verschiedener Anfangsbedingungen
- Reduktion der Dimension ohne Verlust an Informationen
- qualitatives Verhalten:
 - Fixpunkte entsprechen periodische Orbits
 - Unterscheidung chaotischer und regulärer Bereiche
 - Linien entsprechen quasiperiodischer Orbits

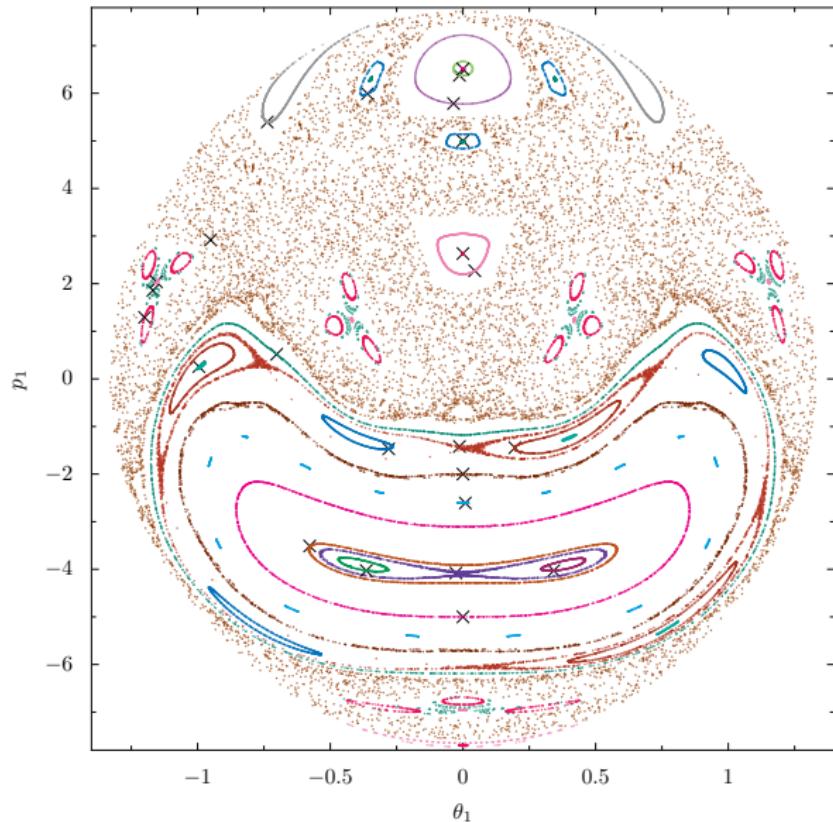
Poincaré-Schnitte für das Doppelpendel

- abhängig von Parametern: E, L_1, L_2, m_1, m_2, g
- 4 Freiheitsgrade: 2 Impulse, 2 Winkel
- Energieerhaltung: Trajektorien auf Hyperfläche eingeschränkt
- Poincaré-Bedingung $\theta_2 = 0$: noch zwei Variablen
- Abbildung von Punkten:

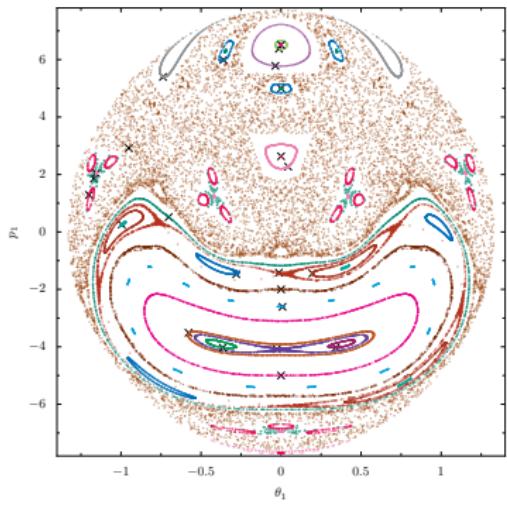
$$P(\theta_1^{(0)}, p_1^{(0)}) \mapsto (\theta_1^{(1)}, p_1^{(1)})$$

- Durchstoßrichtung beachten!

Poincaré-Schnitt für $E = 15$

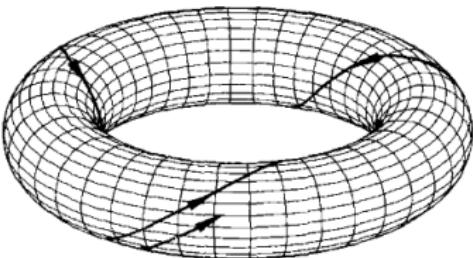
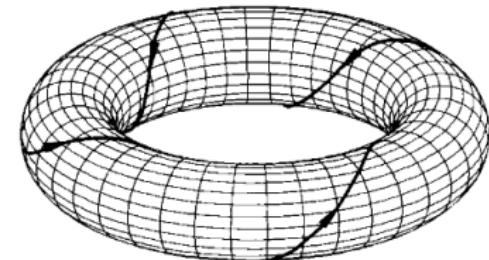


Fixpunkte im Poincaré-Schnitt

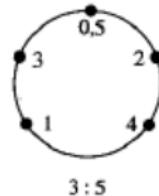
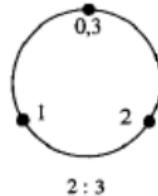


- Elliptische Fixpunkte
 - Orbit stabil
- Hyperbolische Fixpunkte
 - Orbit instabil
 - liegt im chaotischen Bereich
 - anfällig gegen Störungen
- Chaos

Orbits



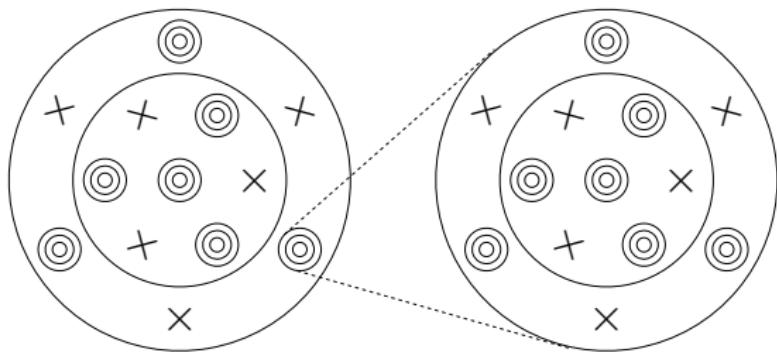
- um elliptische Fixpunkte quasiperiodische Orbits
- dazwischen: beliebig viele periodische Orbits



Bildquelle: An Exploration of Chaos, Argyris, Faus, Haase

Chaos in hamiltonischen Systemen

- Liouville-Theorem
 - Phasenraumvolumen ist inkompressibel
 - keine Attraktoren
- Poincaré-Birkhoff-Theorem
- Selbstähnlichkeit
- KAM-Theorem



Beispiel – stabiler periodischer Orbit

$$E = 15, \theta_1 = 0, p_1 = 2.63362868$$

Beispiel – stabiler periodischer Orbit

$$E = 15, \theta_1 = 0, p_1 = -2.78854801$$

Beispiel – instabiler periodischer Orbit

$$E = 15, \theta_1 = 0, p_1 = -4.10536235$$

Beispiel – quasiperiodischer Orbit

$$E = 15, \theta_1 = 0, p_1 = -5$$

Beispiel – Chaos

links: $E = 15, \theta_1 = 0.8, p_1 = -4$

rechts: $E = 15, \theta_1 = 0.8, p_1 = -4.01$

Poincaré-Schnitt in Abhängigkeit von E