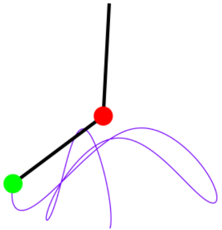
Klassisches Chaos und Poincaré-Schnitte

Michael Hartmann

Kaffeeseminar

2. Mai 2013

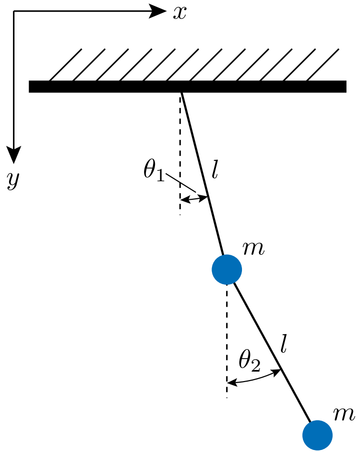


Überblick

1. Was ist ein Doppelpendel?
2. Bewegungsgleichungen
3. Poincaré-Schnitte
4. Beispiele

Was ist ein Doppelpendel?

Was ist ein Doppelpendel?



$$x_1 = L_1 \sin\theta_1$$
$$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2$$
$$y_1 = -L_1 \cos\theta_1$$
$$y_2 = -L_1 \cos\theta_1 - L_2 \cos\theta_2$$

Lagrange-Funktion

- Aufstellen der Bewegungsgleichung mit Lagrange (für $m_1 = m_2 \equiv m$ und $L_1 = L_2 \equiv L$)

$$\mathcal{L} = T - V$$

- potentielle und kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) \\ V &= mgL \left(3 - 2\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \right) \end{aligned}$$

- Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & mL^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_2^2 + mL^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ & - 3mgL + 2mgL\cos\theta_1 + mgL\cos\theta_2 \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion und Bewegungsgleichungen

- Hamiltonfunktion

$$H = \sum_i \dot{\theta}_i p_i - \mathcal{L}$$

- Bewegungsgleichungen

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2}$$

Bewegungsgleichungen

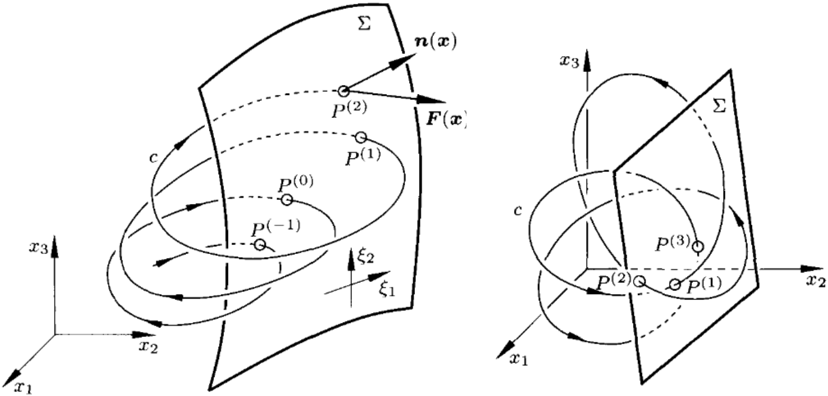
$$\dot{\theta}_1 = \frac{p_1 - p_2 \cos\Delta}{L^2 m \left[1 + \sin^2\Delta\right]} \qquad \dot{\theta}_1 = \frac{2p_2 - p_1 \cos\Delta}{L^2 m \left[1 + \sin^2\Delta\right]}$$

$$\dot{p}_1 = -2mgL\sin\theta_1 - C \qquad \dot{p}_2 = -mgL\sin\theta_2 + C$$

$$C = \frac{p_1 p_2 \sin\Delta - \left[p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos\Delta\right] \sin\Delta\cos\Delta}{L^2 m \left[1 + \sin^2\Delta\right]}$$

$$\Delta = \theta_1 - \theta_2$$

Poincaré-Schnitte



Bildquelle: An Exploration of Chaos, Argyris, Faus, Haase

Vorteile von Poincaré-Schnitten

- Vergleich verschiedener Anfangsbedingungen
- Reduktion der Dimension ohne Verlust an Informationen
- qualitatives Verhalten:
  - Fixpunkte entsprechen periodische Orbits
  - Unterscheidung chaotischer und regulärer Bereiche
  - Linien entsprechen quasiperiodischer Orbits

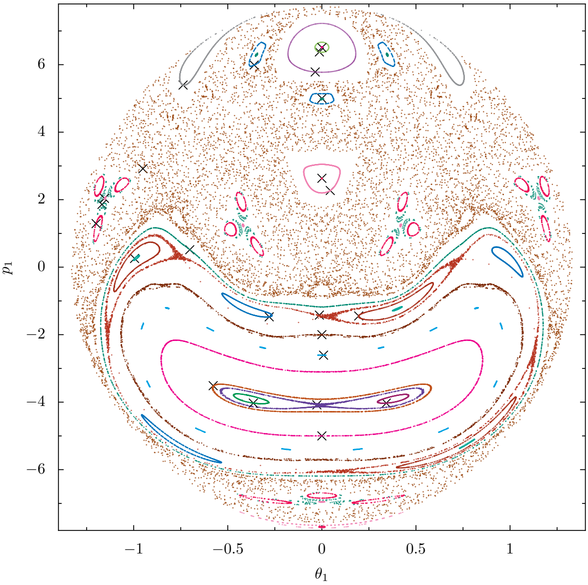
Poincaré-Schnitte für das Doppelpendel

- abhängig von Parametern: E, L_1, L_2, m_1, m_2, g
- 4 Freiheitsgrade: 2 Impulse, 2 Winkel
- Energieerhaltung: Trajektorien auf Hyperfläche eingeschränkt
- Poincaré-Bedingung $\theta_2 = 0$: noch zwei Variablen
- Abbildung von Punkten:

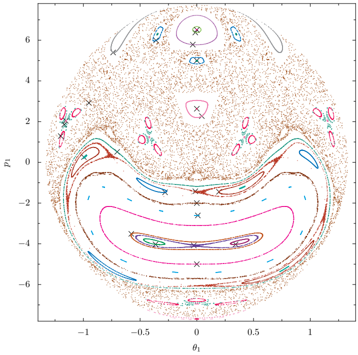
$$P(\theta_1^{(0)}, p_1^{(0)}) \mapsto (\theta_1^{(1)}, p_1^{(1)})$$

- Durchstoßrichtung beachten!

Poincaré-Schnitt für $E = 15$

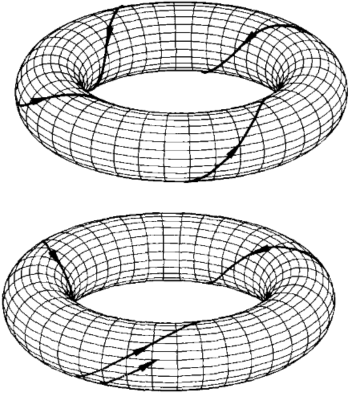


Fixpunkte im Poincaré-Schnitt

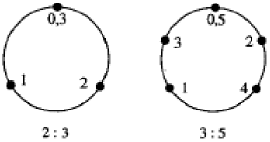


- Elliptische Fixpunkte
  - Orbit stabil
- Hyperbolische Fixpunkte
  - Orbit instabil
  - liegt im chaotischen Bereich
  - anfällig gegen Störungen
- Chaos

Orbits



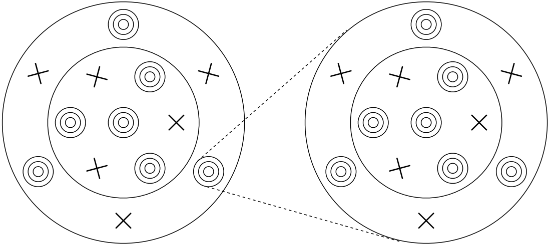
- um elliptische Fixpunkte quasiperiodische Orbits
- dazwischen: beliebig viele periodische Orbits



Bildquelle: An Exploration of Chaos, Argyris, Faus, Haase

Chaos in hamiltonischen Systemen

- Liouville-Theorem
  - Phasenraumvolumen ist inkompressibel
  - keine Attraktoren
- Poincaré-Birkhoff–Theorem
- Selbstähnlichkeit
- KAM-Theorem



Beispiel – stabiler periodischer Orbit

$$E = 15,\ \theta_1 = 0,\ p_1 = 2.63362868$$

Beispiel – stabiler periodischer Orbit

$$E = 15,\ \theta_1 = 0,\ p_1 = -2.78854801$$

Beispiel – instabiler periodischer Orbit

$$E = 15,\ \theta_1 = 0,\ p_1 = -4.10536235$$

Beispiel – quasiperiodischer Orbit

$$E = 15,\ \theta_1 = 0,\ p_1 = -5$$

Beispiel – Chaos

links: $E = 15$, $\theta_1 = 0.8$, $p_1 = -4$
rechts: $E = 15$, $\theta_1 = 0.8$, $p_1 = -4.01$

Poincaré-Schnitt in Abhängigkeit von E