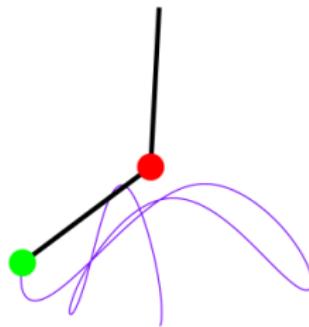


Was ist Chaos?

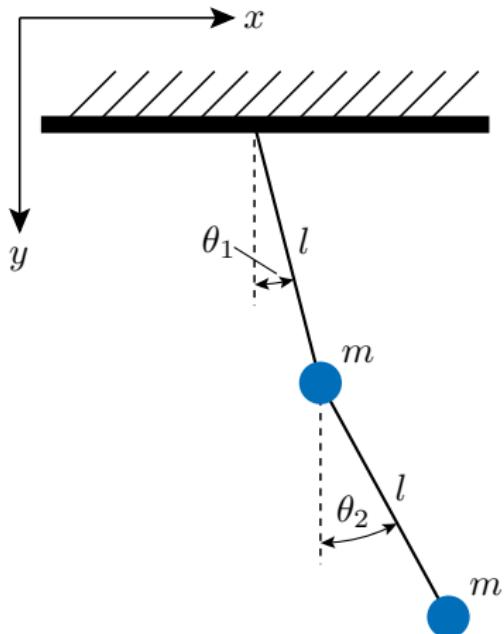
Michael Hartmann

Theoretische Physik I

18. November 2015



Was ist ein Doppelpendel?



$$x_1 = l \sin \theta_1$$

$$y_1 = -l \cos \theta_1$$

$$x_2 = l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2$$

$$y_2 = -l \cos \theta_1 - l \cos \theta_2$$

Was ist ein Doppelpendel?

Wovon hängt die Bewegung ab?

Parameter:

- Massen m_1, m_2
- Längen l_1, l_2
- Erdbeschleunigung g

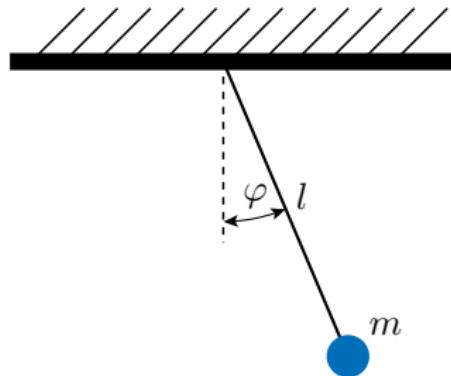
Zustand:

- Winkel θ_1, θ_2
- Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$

Phasenraum

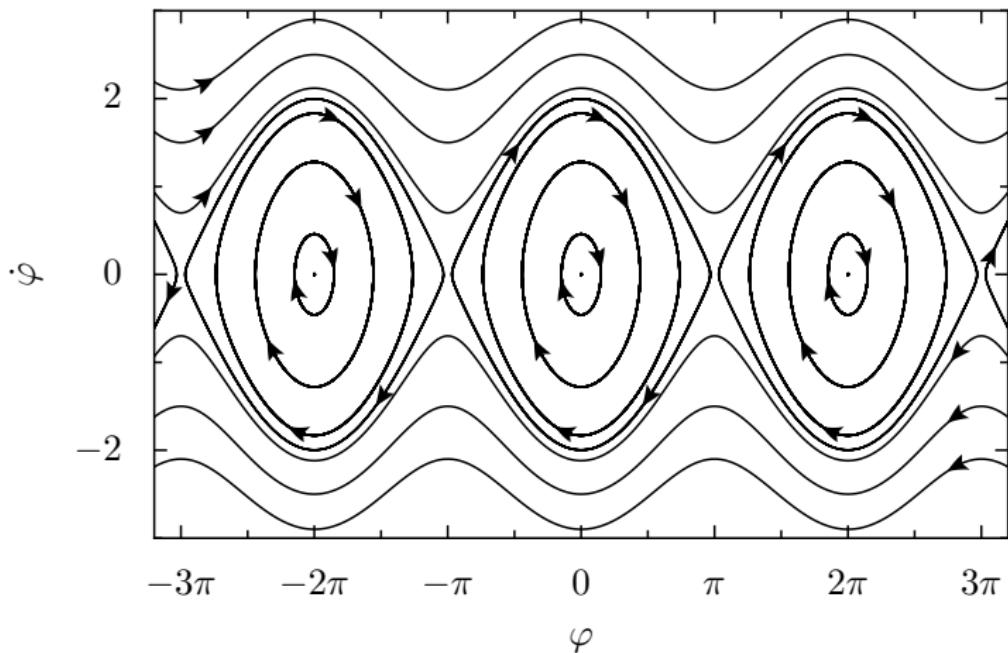
- Menge aller möglichen Zustände eines physikalischen Systems
- Zustand: Punkt im Phasenraum
- Trajektorien können sich nicht schneiden

Beispiel: Pendel



Phasenraum

Beispiel Pendel:

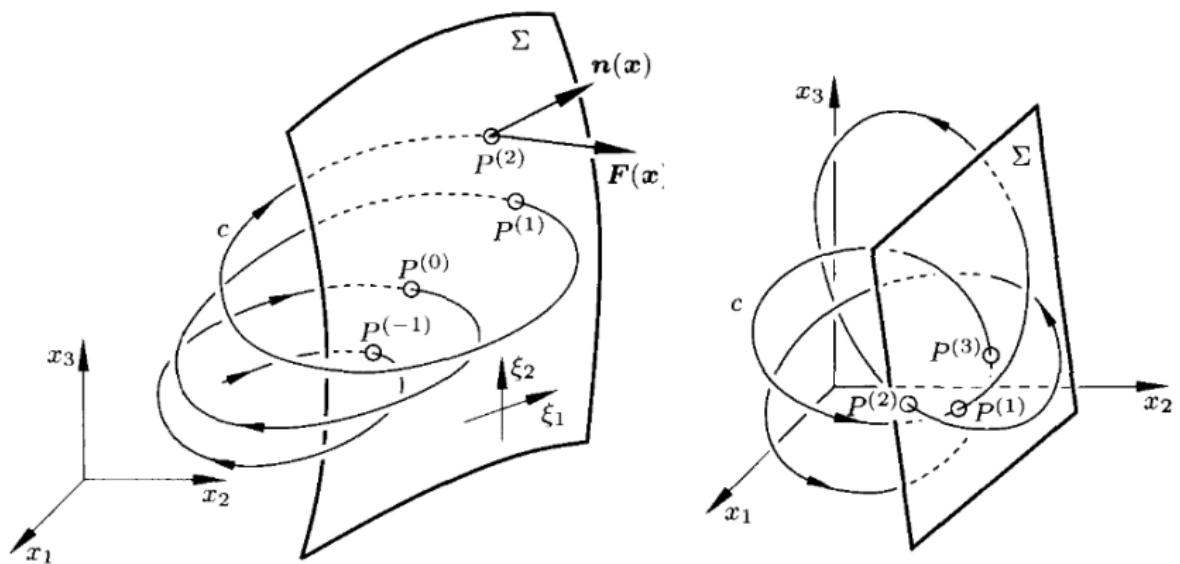


Phasenraum

Für das Doppelpendel:

- 4 Freiheitsgrade:
 - 2 Winkel θ_1, θ_2
 - 2 Geschwindigkeiten $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$
- Energieerhaltung: Trajektorien auf Hyperfläche eingeschränkt
- Poincaré-Schnitt: Reduktion auf zwei Dimensionen ohne Verlust an Information

Poincaré-Schnitte



Bildquelle: An Exploration of Chaos, Argyris, Faus, Haase

Poincaré-Schnitte

Poincaré-Bedingung:

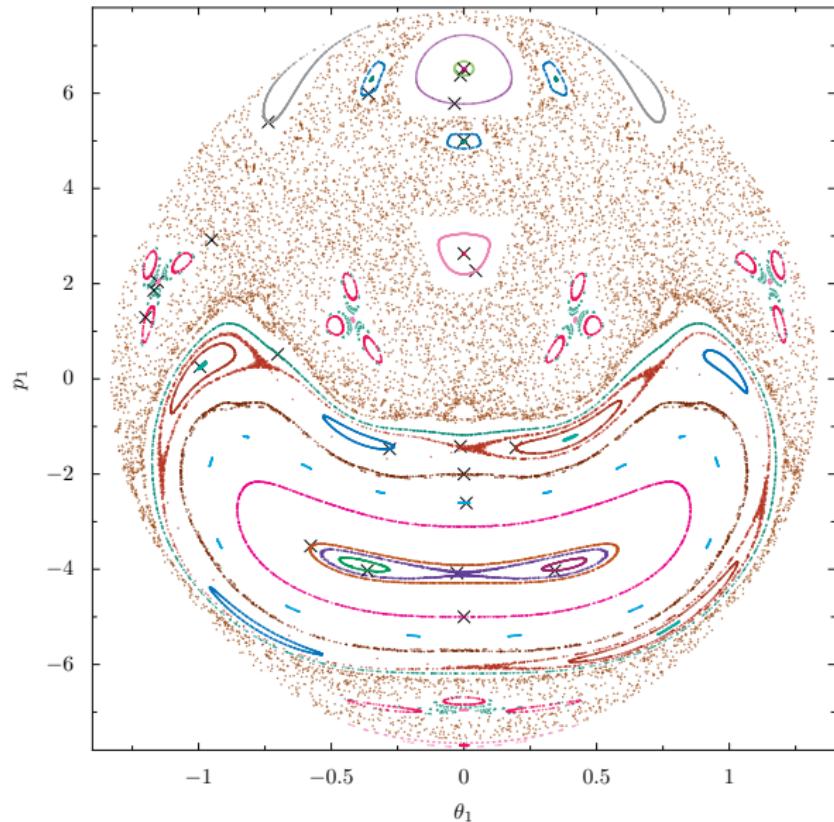
$$\theta_2 = 0, \quad \dot{\theta}_2 > 0$$

Poincaré-Schnitt:

- ① Wähle Parameter l_1, l_2, m, g
- ② Wähle Energie E
- ③ Wähle Anfangsbedingungen $\theta_1(0), \dot{\theta}_1(0)$
- ④ Berechne numerisch $\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_2(t)$ und trage Punkt in Plot ein, wenn $\theta_2(t) = 0$

Poincaré-Schnitte

Poincaré-Schnitt für $E = 15$



Beispiel – periodischer Orbit

$$E = 15, \theta_1 = 0, p_1 = 2.63362868$$

Beispiel – periodischer Orbit

$$E = 15, \theta_1 = 0, p_1 = -2.78854801$$

Beispiel – quasiperiodischer Orbit

$$E = 15, \theta_1 = 0, p_1 = -5$$

Beispiel – Chaos

links: $E = 45, \theta_1 = 3, p_1 = -1$

rechts: $E = 45, \theta_1 = 3, p_1 = -1.01$

Zusammenfassung

Poincaré-Plot:

- Punkte: periodische Lösungen
- Linien: quasiperiodische Lösungen
- wild verstreute Punkte: Chaos

Chaos:

- System zwar deterministisch, aber...
- ...kleine Ursachen, große Wirkungen
- langfristige Vorhersagen nicht möglich
- Chaos ist nicht Zufall!

Fragen?