Chaos II: Differentialgleichungen

Michael Hartmann

Kaffeeseminar

6. November 2015

1. Lineare Differentialgleichungen
    - Lösung
    - Beispiele in 2D
    - Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

2. autonome, nicht-lineare Differentialgleichungen
    - Stationäre Punkte und Stabilität
    - Beispiel: Fadenpendel
    - komplexeres Beispiel

3. nicht-autonome, nicht-lineare Differentialgleichungen
    - Motivation
    - Beispiel
    - Bifurkationsdiagramm
    - Seltsamer Attraktor

Differentialgleichungen

Wir betrachten lineare, homogene Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = \mathcal{L}\vec{x},$$

wobei $\mathcal{L}$ (nicht singuläre) $n \times n$ Matrix mit konstanten Koeffizienten.

Lösung:

$$\vec{x}(t) = e^{\mathcal{L}(t-t_0)}\vec{x}(t_0)$$

Verhalten der Lösung wird durch die Eigenwerte von $\mathcal{L}$ bestimmt!

Differentialgleichungen

Wir betrachten lineare, homogene Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = \mathcal{L}\vec{x},$$

wobei $\mathcal{L}$ (nicht singuläre) $n \times n$ Matrix mit konstanten Koeffizienten.

Lösung:

$$\vec{x}(t) = e^{\mathcal{L}(t-t_0)}\vec{x}(t_0)$$

Verhalten der Lösung wird durch die Eigenwerte von $\mathcal{L}$ bestimmt!

Differentialgleichungen

Wir betrachten lineare, homogene Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = \mathcal{L}\vec{x},$$

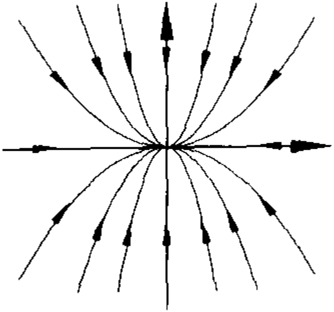
wobei $\mathcal{L}$ (nicht singuläre) $n \times n$ Matrix mit konstanten Koeffizienten.

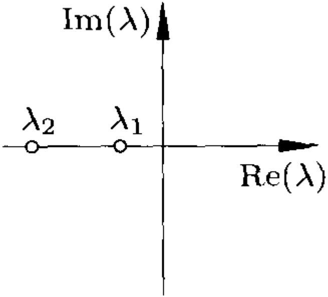
Lösung:

$$\vec{x}(t) = e^{\mathcal{L}(t-t_0)}\vec{x}(t_0)$$

Verhalten der Lösung wird durch die Eigenwerte von $\mathcal{L}$ bestimmt!

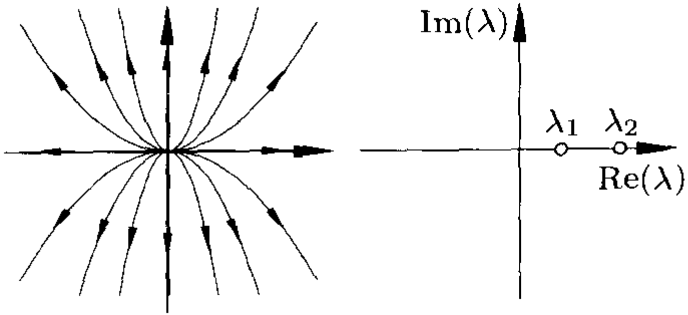
Beispiele in 2D





stable node

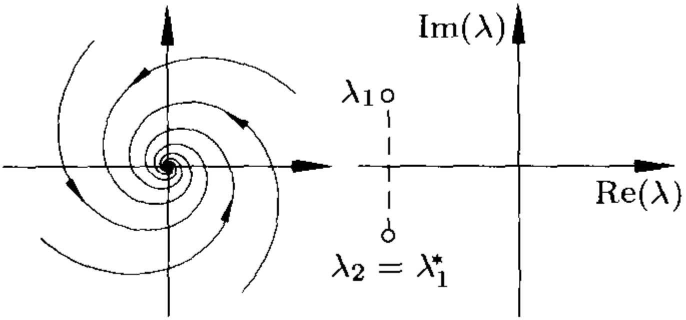
Beispiele in 2D



unstable node

An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

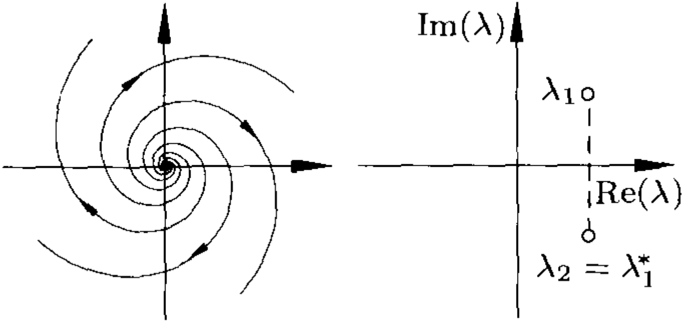
Beispiele in 2D



stable focus

An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

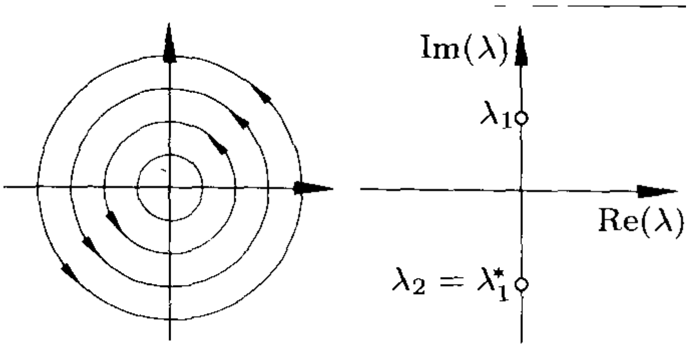
Beispiele in 2D



unstable focus

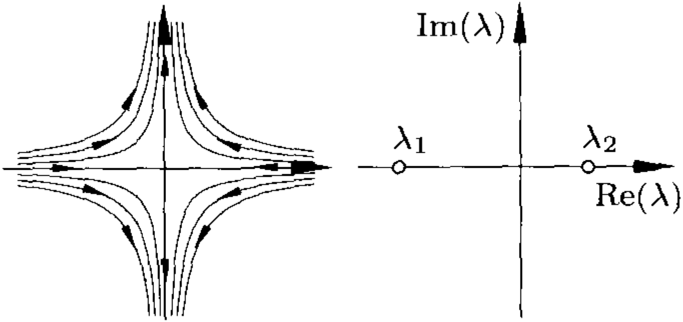
An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

Beispiele in 2D



center point

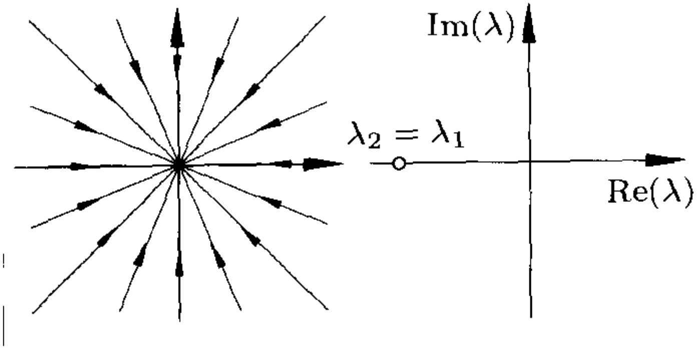
Beispiele in 2D



saddle point

An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

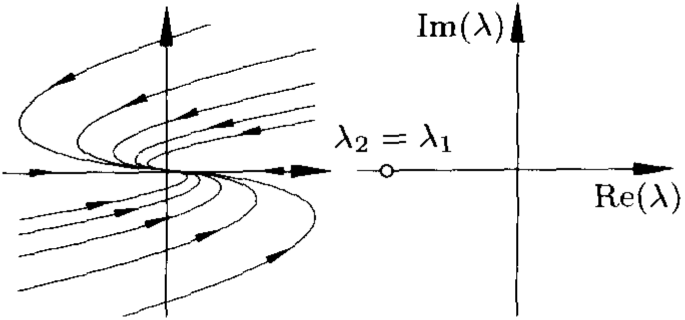
Beispiele in 2D



star ($\mathcal{L}$ diagonalisierbar)

An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

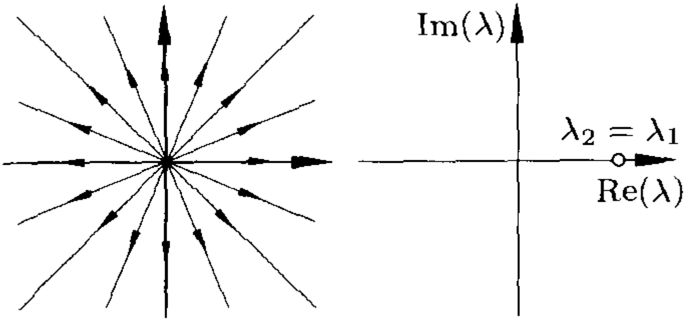
Beispiele in 2D



stable node ($\mathcal{L}$ nicht diagonalisierbar)

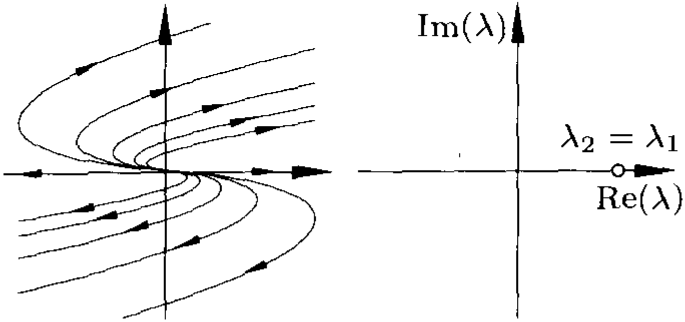
An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

Beispiele in 2D



unstable star ($\mathcal{L}$ diagonalisierbar)

Beispiele in 2D



unstable node ($\mathcal{L}$ nicht diagonalisierbar)

An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

Harmonischer Oszillator mit linearer Dämpfung:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Als System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

Harmonischer Oszillator mit linearer Dämpfung:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Als System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

Harmonischer Oszillator mit linearer Dämpfung:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Als System 1. Ordnung:

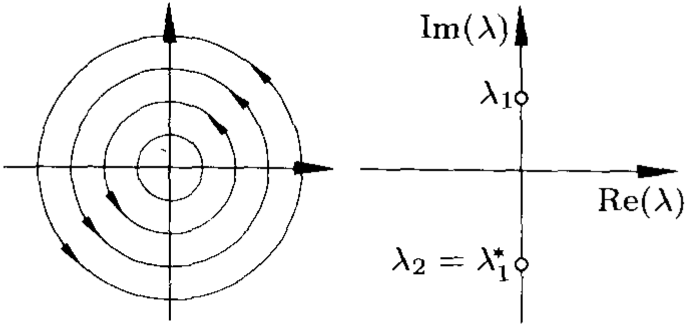
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

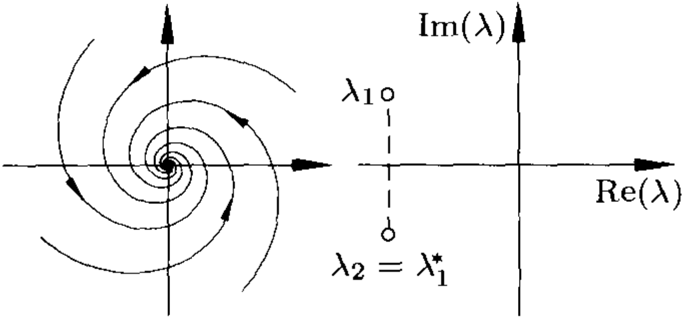
$\gamma = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$



An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

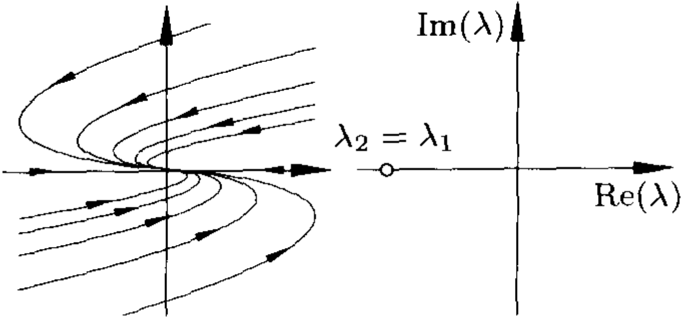
$0 < \gamma < \omega_0$: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$



An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

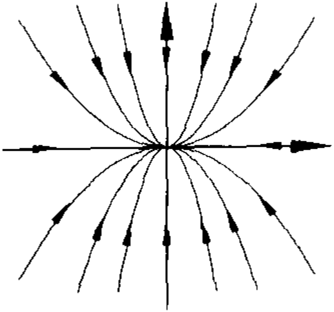
$\gamma = \omega_0$: $\lambda_{1,2} = -\gamma$ (Matrix *nicht* diagonalisierbar)

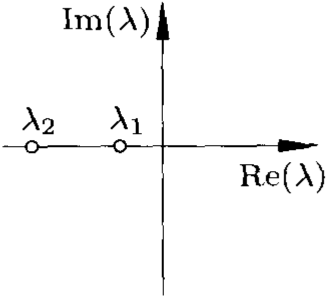


An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

$\gamma > \omega_0$: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$





An Exploration of Chaos, Argyris, Faust, Haase

autonome, nicht-lineare Differentialgleichungen

Wir interessieren uns für allgemeine DGl (autonom):

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

Stationäre Punkte:

$$\vec{f}(\vec{x}_s) = 0$$

Stabilität: um stationären Punkt entwickeln:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{x}_s + \delta\vec{x}\right) \approx J_f\left(\vec{x}_s\right)\delta\vec{x}$$

autonome, nicht-lineare Differentialgleichungen

Wir interessieren uns für allgemeine DGl (autonom):

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

Stationäre Punkte:

$$\vec{f}(\vec{x}_s) = 0$$

Stabilität: um stationären Punkt entwickeln:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{x}_s + \delta\vec{x}\right) \approx J_f\left(\vec{x}_s\right)\delta\vec{x}$$

autonome, nicht-lineare Differentialgleichungen

Wir interessieren uns für allgemeine DGl (autonom):

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

Stationäre Punkte:

$$\vec{f}(\vec{x}_s) = 0$$

Stabilität: um stationären Punkt entwickeln:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{x}_s + \delta\vec{x}\right) \approx J_f\left(\vec{x}_s\right)\delta\vec{x}$$

Beispiel: Fadenpendel

Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Als System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \vec{f}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\omega_0^2 \sin x \end{pmatrix}$$

Stationäre Punkte:

- $(x_1^s, v_1^s) = (0, 0)$
- $(x_2^s, v_2^s) = (\pi, 0)$

Beispiel: Fadenpendel

Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Als System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \vec{f}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\omega_0^2 \sin x \end{pmatrix}$$

Stationäre Punkte:

- $(x_1^s, v_1^s) = (0, 0)$
- $(x_2^s, v_2^s) = (\pi, 0)$

Beispiel: Fadenpendel

Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

Als System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \vec{f}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\omega_0^2 \sin x \end{pmatrix}$$

Stationäre Punkte:

- $(x_1^s, v_1^s) = (0, 0)$
- $(x_2^s, v_2^s) = (\pi, 0)$

Beispiel: Fadenpendel

$(x_1^s, v_1^s) = (0, 0)$:

- Linearisieren:

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x_1^s + \delta x \\ v_1^s + \delta v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0^2$

$\Rightarrow$ stabiler stationärer Punkt, Oszillationen

Beispiel: Fadenpendel

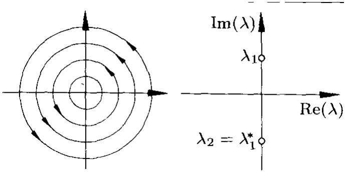
$(x_1^s, v_1^s) = (0, 0)$:

- Linearisieren:

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x_1^s + \delta x \\ v_1^s + \delta v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0^2$

$\Rightarrow$ stabiler stationärer Punkt, Oszillationen



Beispiel: Fadenpendel

$(x_2^s, v_2^s) = (0, \pi)$:

- $$\vec{f}\begin{pmatrix} x_2^s + \delta x \\ v_2^s + \delta v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$
- Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0^2$

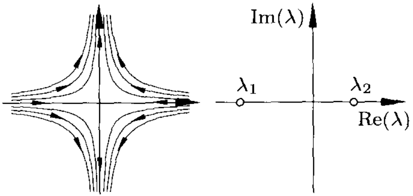
$\Rightarrow$ instabiler stationärer Punkt

Beispiel: Fadenpendel

$(x_2^s, v_2^s) = (0, \pi)$:

- $$\vec{f}\begin{pmatrix} x_2^s + \delta x \\ v_2^s + \delta v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$
- Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0^2$

$\Rightarrow$ instabiler stationärer Punkt



Weiteres Beispiel

Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \vec{f}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} A \sin\varphi + C \cos\varphi \cos\vartheta \\ A \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cos\varphi + B \cos\vartheta - C \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} \end{pmatrix}$$

Stationäre Punkte: $\vec{f} = 0$

- $\dot{\vartheta} = 0$:

$$\cos\vartheta = -\frac{A}{C} \tan\varphi, \quad \sin\vartheta = \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2} \tan^2\varphi}$$

- $\dot{\varphi} = 0$:

$$\sin\varphi \left[\left(\frac{A^2}{C^2} + 1 \right) \cos\varphi + \frac{AB}{C^2} \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2} \tan^2\varphi} \right] = 0$$

Weiteres Beispiel

Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \vec{f}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} A \sin\varphi + C \cos\varphi \cos\vartheta \\ A \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cos\varphi + B \cos\vartheta - C \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} \end{pmatrix}$$

Stationäre Punkte: $\vec{f} = 0$

- $\dot{\vartheta} = 0$:

$$\cos\vartheta = -\frac{A}{C} \tan\varphi, \quad \sin\vartheta = \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2} \tan^2\varphi}$$

- $\dot{\varphi} = 0$:

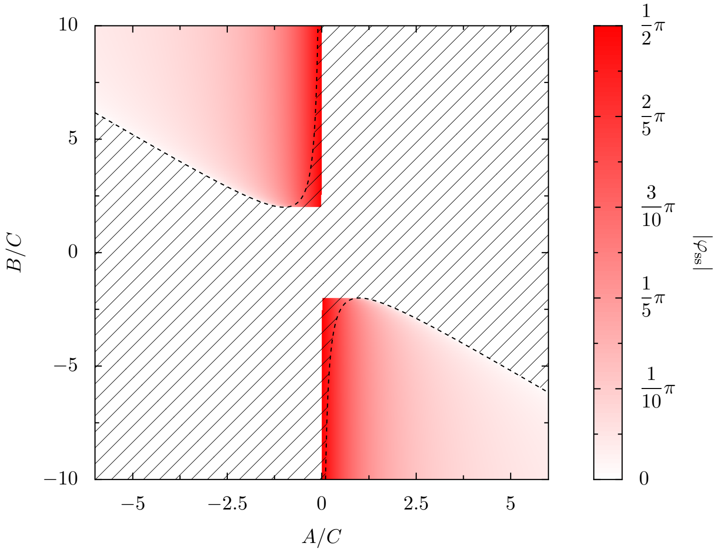
$$\sin\varphi \left[\left(\frac{A^2}{C^2} + 1 \right) \cos\varphi + \frac{AB}{C^2} \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2} \tan^2\varphi} \right] = 0$$

Stationäre Punkte

- stationäre Punkte hängen nur von A/C und B/C ab
- $\sin\varphi = 0$:
  - $(\vartheta, \varphi) = (\pi/2, 0)$: stabil falls $C^2 > -A(A+B)$
  - $(\vartheta, \varphi) = (\pi/2, \pi)$: instabil
- falls φ stabiler (instabiler) stationärer Punkt, dann auch $-\varphi$
- weitere stationäre Punkte für Lösungen von:

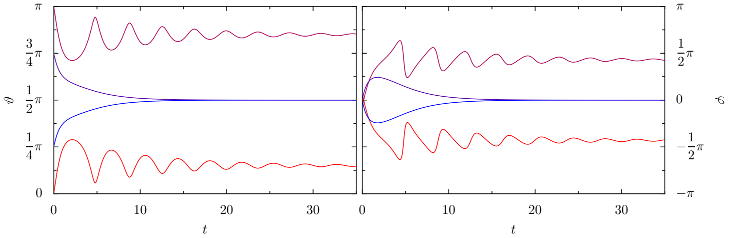
$$\left(\frac{A^2}{C^2} + 1\right)\cos\varphi + \frac{AB}{C}\sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2}\tan^2\varphi}, \qquad |\varphi| \leq \arctan\left|\frac{C}{A}\right|$$

Stationäre Punkte



Beispiel

$A/C = 0.2,\ B/C = -2.5$:



Kurze Zusammenfassung

1. Umschreiben der DGL als System 1. Ordnung
2. Suchen von stationären Punkten
3. Untersuchen der Stabilität der stationären Punkte

Kurze Zusammenfassung

1. Umschreiben der DGL als System 1. Ordnung
2. Suchen von stationären Punkten
3. Untersuchen der Stabilität der stationären Punkte

Was bei nicht-autonomen Systemen?

Nicht-autonome Systeme

Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin\varphi + C \cos\varphi \cos\vartheta \\ A \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cos\varphi + B \cos\vartheta - C \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} - \mu_0 + \mu_1 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Untersuchung:

- stroboskop-artige Popagation:

$$\begin{pmatrix} \vartheta(nT) \\ \varphi(nT) \end{pmatrix}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Bifurkationsdiagramm
- Attraktor

Nicht-autonome Systeme

Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin\varphi + C\cos\varphi\cos\vartheta \\ A\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi + B\cos\vartheta - C\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} - \mu_0 + \mu_1 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

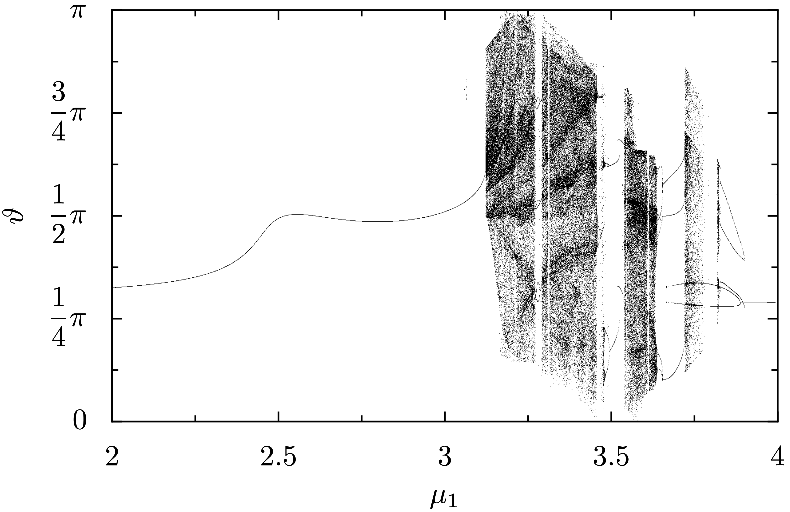
Untersuchung:

- stroboskop-artige Popagation:

$$\begin{pmatrix} \vartheta(nT) \\ \varphi(nT) \end{pmatrix}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{N}$$

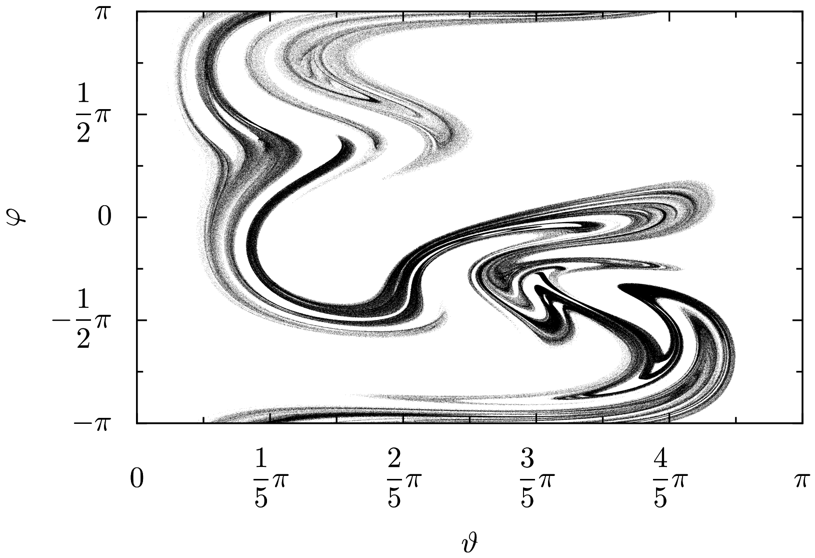
- Bifurkationsdiagramm
- Attraktor

Bifurkationsdiagramm



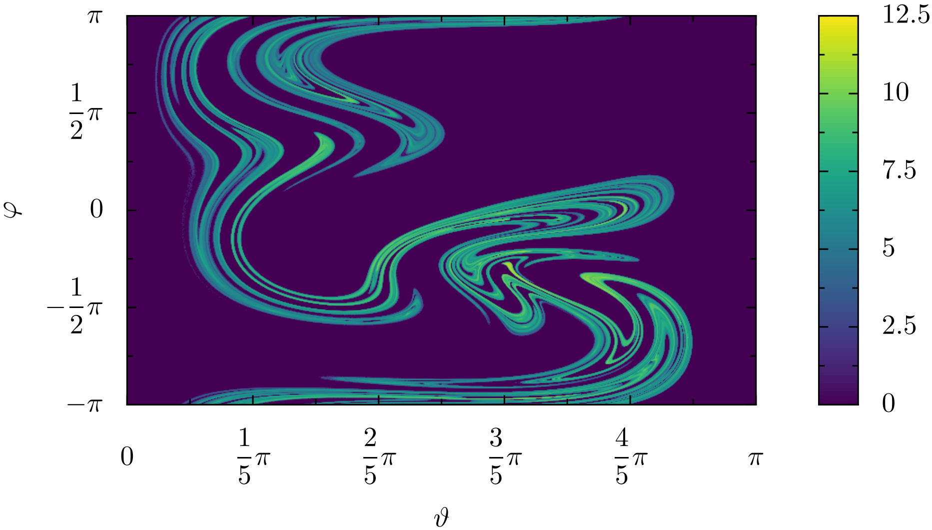
Parameter: $A = 2$, $B = 1$, $C = 0.4$, $\mu_0 = 1$, $\omega = 1$

Seltsamer Attraktor



Parameter: $A = 2$, $B = 1$, $C = 0.4$, $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 3.4$, $\omega = 1$

Seltsamer Attraktor



Parameter: $A = 2,\ B = 1,\ C = 0.4,\ \mu_0 = 1,\ \mu_1 = 3.4,\ \omega = 1$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!