Quanten – Spieltheorie

Spieltheorie: Untersuchung von strategischer Entscheidungsfindung

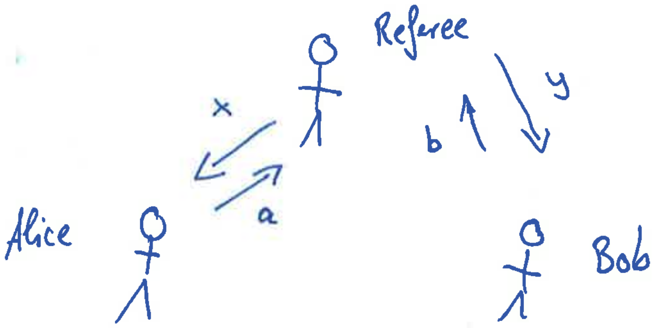
Lassen sich unter Ausnutzung der Quantenmechanik bessere Strategien finden?

Wir betrachten folgendes Spiel:

1. Der Schiedsrichter wählt zufällig zwei Bits, x und y.
2. Er schickt x zu Alice und y zu Bob.
3. Alice schickt dem Schiedsrichter ein Bit a, Bob ein Bit b zurück.
4. Der Schiedsrichter bestimmt, ob Alice und Bob gewonnen haben, und zwar gdw

$$x \wedge y = a \oplus b$$

Alice und Bob dürfen während des Spiels nicht miteinander kommunizieren.



Gewinn- / Verlusttabelle

x	y	a	b	x∧y	a⊕b	gewonnen?
0	0	0	0	0	0	✓
0	0	0	1	0	1	x
0	0	1	0	0	1	x
0	0	1	1	0	0	✓
0	1	0	0	0	0	✓
0	1	0	1	0	1	x
0	1	1	0	0	1	x
0	1	1	1	0	0	✓
1	0	0	0	0	0	✓
1	0	0	1	0	1	x
1	0	1	0	0	1	x
1	0	1	1	0	0	✓
1	1	0	0	1	0	x
1	1	0	1	1	1	✓
1	1	1	0	1	1	✓
1	1	1	1	1	0	x

Eine mögliche Strategie: Alice wählt immer $a = 0$, Bob $b = 0$.

$$\Rightarrow p_{win} = 3/4$$

Ist das die beste (klassische) Strategie? Gibt es andere Strategien mit gleicher/besserer Gewinnwahrscheinlichkeit?

Alice und Bob dürfen nicht miteinander kommunizieren, also:

$$a = a(x), \quad b = b(y)$$

x	y	$x \wedge y$	$a(x) \oplus b(y)$
0	0	0	$a(0) \oplus b(0)$
0	1	0	$a(0) \oplus b(1)$
1	0	0	$a(1) \oplus b(0)$
1	1	1	$a(1) \oplus b(1)$

Das ergibt 4 Gleichungen:

(1) $a(0) \oplus b(0) = 0$

(2) $a(0) \oplus b(1) = 0$

(3) $a(1) \oplus b(0) = 0$

(4) $a(1) \oplus b(1) = 1$

Allerdings lassen sich nur jeweils 3 der 4 Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Die 4 optimalen Strategien mit Gewinnwahrscheinlichkeit $p_{win} = 3/4$ sind:

1. Gln. 1,2,3 erfüllen: $a(0) = b(0) = b(1) = a(1)$
2. Gln. 1,2,4 erfüllen: $a(0) = b(0) = b(1) = !\, a(1)$
3. Gln. 1,3,4 erfüllen: $a(0) = b(0) = a(1) = !\, b(1)$
4. Gln. 2,3,4 erfüllen: $!\, a(1) = b(1) = a(0) = !\, b(0)$

Wie sieht es quantenmechanisch aus?

Angenommen Alice und Bob besitzen zwei verschränkte Qubits im Bell-Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

Qubit von Alice   Qubit von Bob

Alice und Bob einigen sich auf folgende Strategie:

1. Falls Alice $x=0$ erhält, lässt sie ihr Qubit unverändert.
   Falls Alice $x=1$ erhält, führt sie eine Drehung um $\pi/4$ durch.
2. Falls Bob $x=0$ erhält, führt er eine Drehung um $\pi/8$ durch.
   Falls Bob $x=1$ erhält, führt er eine Drehung um $-\pi/8$ durch.
3. Alice und Bob messen ihr Qubit und wählen a, b nach dem Ergebnis der Messung.

Was ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

i) $x=0,\ y=0,\quad x\wedge y = 0$

$$\left[\mathbb{1} \otimes R\left(\tfrac{\pi}{8}\right)\right]|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\pi/8 \\ -\sin\pi/8 \\ \sin\pi/8 \\ \cos\pi/8 \end{pmatrix} \equiv |\psi_{00}\rangle$$

$$p_{00}^{win} = \left(\langle 00|\psi_{00}\rangle\right)^2 + \langle 11|\psi_{00}\rangle^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

ii) $x = \overset{1}{\cancel{0}},\ y = \overset{0}{\cancel{1}},\quad x\wedge y = 0$

$$\left[R\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \otimes R\left(-\tfrac{\pi}{8}\right)\right]|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8} \\ \cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} \\ \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} \\ \sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} \equiv |\psi_{10}\rangle$$

$$p_{10}^{win} = \langle 00|\psi_{10}\rangle^2 + \langle 11|\psi_{10}\rangle^2 = \frac{1}{4}\cdot 2\left(\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

iii) $x=0,\ y=1,\quad x\wedge y=0$

$$[\mathbb{1}\otimes R(-\tfrac{\pi}{8})]\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\pi/8\\ \sin\pi/8\\ -\sin\pi/8\\ \cos\pi/8\end{pmatrix} \equiv |\psi_{01}\rangle$$

$$p_{01}^{win} = \langle 00|\psi_{01}\rangle^2 + \langle 11|\psi_{01}\rangle^2 = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

iv) $x=1,\ y=1,\quad x\wedge y=1$

$$[R(\tfrac{\pi}{4})\otimes R(-\tfrac{\pi}{8})]\,|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\pi/8-\sin\pi/8\\ \sin\pi/8+\cos\pi/8\\ -\sin\pi/8-\cos\pi/8\\ \cos\pi/8-\sin\pi/8\end{pmatrix}$$

$$p_{11}^{win} = \langle 01|\psi_{11}\rangle^2 + \langle 10|\psi_{11}\rangle^2 = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

Gewinnwahrscheinlichkeit: $p^{win} = \frac{1}{4}\left(p_{00}^{win} + p_{01}^{win} + p_{10}^{win} + p_{11}^{win}\right) = \cos^2\frac{\pi}{8} \approx 0{,}85 > \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Es existiert eine „Quanten-Strategie", die besser ist als die optimale klassische Strategie.