אלגוריתמים כלכליים שבוע 8:

שאלה 4: ערך שאפלי-שיוויוני:
בסקרי דעת-קהל שנעשו לאחרונה, התברר שאנשים רבים נוטים לתמוך בכלל-התשלום הבא, שנקרא "שאפלי-שוויוני" (egalitarian-Shapley):

- חשב את ערך שאפלי של כל שחקן;
- חשב את העלות הממוצעת לכל שחקן)העלות הכוללת / מספר השחקנים;)
- גבה מכל שחקן את הממוצע בין א לבין ב (לדוגמה, אם העלות הכוללת 66, יש שלושה שחקנים, וערך שאפלי שלך הוא 32, אז התשלום שלך יהיה הממוצע בין 3/66 לבין 32, כלומר 27.)

הוכיחו שכלל-התשלום הזה מקיים בדיוק שני עקרונות מתוך שלושת העקרונות של שאפלי. מדוע לדעתכם לא מתקיים העקרון השלישי?

למעשה קיימים ארבעה עקרונות שאפלי:

- כיסוי מלא- התשלום של כלל השחקנים משלים את התשלום עבור הנסיעה
- סימטריה-התשלום שכל שחקן מוסיף צריך להיות תלוי רק בעלות השולית של השחקן
- עקרון האפס(קשור לסימטריה)- שחקן שלא מוסיף כלום לתשלום לא משלם כלום
- עקרון הלינאריות- אם מכפילים את כל הערכים פי קבוע ומפעילים את אותו כלל תשלומים מקבילים תשלומים הגדולים פי אותו קבוע.
  באותו אופן אם מחלקים את הערכים לשתי טבלאות ובסוף מחברים את התוצאה, התוצאה אמורה להיות זהה לו היינו מבצעים את החישובים על טבלה אחת.

***טענה1:* "שאפלי-שוויוני" מקיים כיסוי מלא ואת עקרון הלינאריות.**
הוכחה: ראשית לפני שנוכיח פורמלית את הטענה נראה דוגמא לפישוט "שאפלי-שוויוני" (ההוכחה הפורמלית מתחילה מעמ' 3) ניקח את הדוגמא מהטקסט:

קבוצות	ϕ	א	ב	ג	א"ב	א"ג	ב"ג	אב"ג
עלות	0	10	15	25	20	25	30	37

ערך שאפלי עבור כל שחקן הוא:

סדר:	א-ב-ג	א-ג-ב	ב-א-ג	ב-ג-א	ג-א-ב	ג-ב-א	ממוצע
א:	10	10	5	7	0	7	6.5
ב:	10	12	15	15	12	5	11.5
ג:	17	15	17	15	25	25	19
סכום:	37	37	37	37	37	37	37

ממוצע העלות עבור כל שחקן = $\frac{37}{3}$
לכן כל שחקן אמור לשלם:

שחקן א'	$\frac{\frac{37}{3}+6.5}{2}=\frac{113}{12}$

שחקן ב'	$\frac{\frac{37}{3}+11.5}{2}=\frac{143}{12}$
שחקן ג'	$\frac{\frac{37}{3}+19}{2}=\frac{47}{3}$
סה"כ	$\frac{47}{3}+\frac{113}{12}+\frac{143}{12}=37$

ניתן לראות מכאן שמתקיים עקרון הכיסוי מלא.
ואם נכפיל את כל הערכים באיזשהו קבוע נניח 2 נקבל:

קבוצה:	**0**	**א**	**ב**	**ג**	**א,ב**	**א,ג**	**ב,ג**	**א,ב,ג**
עלות:	0	20	30	50	40	50	60	74

סדר:	**א-ב-ג**	**א-ג-ב**	**ב-א-ג**	**ב-ג-א**	**ג-א-ב**	**ג-ב-א**	**ממוצע**
א:	20	20	10	14	0	14	13
ב:	20	24	30	30	24	10	23
ג:	34	30	34	30	50	50	38
סכום:	74	74	74	74	74	74	74

אזי נקבל ממוצע עבור כל שחקן הוא $=\frac{74}{3}$
מכאן שמתקיים:

שחקן א'	$\frac{\frac{74}{3}+13}{2}=\frac{113}{6}$
שחקן ב'	$\frac{\frac{74}{3}+23}{2}=\frac{143}{6}$
שחקן ג'	$\frac{\frac{74}{3}+38}{2}=\frac{94}{3}$
סה"כ	$\frac{94}{3}+\frac{113}{6}+\frac{143}{6}=74$

הרי שגם אם נכפיל בקבוע נקבל את אותו הערך, ושנכסה את סכום הנסיעה.
ובאותו אופן אם הינו צריכים לחלק את הטבלה לשתי טבלאות מאותו הסכום, היינו מקבלים את אותו הדבר, כי אם למשל נפצל את הערכים לשתי טבלאות (שני מסלולים שונים) שבטבלה הראשונה יש שני שליש מהערכים המקוריים ובשנייה שליש, היינו מקבלים שני סכומים בסוף שאם מאחדים אותם מקבלים את הסכום המקורי שהם היו אמורים לשלם אילו הטבלאות היו מחוברות. **וכפי שראינו לעיל** לכן אם הסכום של טבלה אחת מהשניים יניב (בה"כ) שני שליש מהסכום המקורי אז גם לפי "שאפלי-שוויוני" אנו אמורים לקבל שני שליש, וכנ"ל בחיבור ביניהן.

עתה נוכיח את הטענה באופן פורמלי:

"שאפלי-שוויוני" מקיים כיסוי מלא:

לצורך הנוחות נסתכל על מקרה של שלושה:

נגדיר:

p(i)= התשלום של השחקן ה-*i*, לפי ערכי שאפלי.

p(a,b,c) התשלום הכללי של כל השחקנים (אנחנו מניחים רק על שלושה, אבל אותו הדין למקרה של *n* שחקנים) אזי מתקיים:

$$p(a)+p(b)+p(c)=p(a,b,c)$$

למשל במקרה לעיל התשלום של א'+ התשלום של ב' + התשלום של ג' הוא 37.

משום שאנחנו במשוואה נחבר לשני האגפים $p(a,b,c)$ ונקבל:

$$p(a)+p(b)+p(c)+p(a,b,c)=p(a,b,c)+p(a,b,c)=2p(a,b,c)$$

במקום $p(a,b,c)$ נכתוב שלושה $\frac{p(a,b,c)}{3}$ (זה לא משנה את הערך מתמטית):

$$p(a)+p(b)+p(c)+\frac{p(a,b,c)}{3}+\frac{p(a,b,c)}{3}+\frac{p(a,b,c)}{3}=2p(a,b,c)$$

ואם נסדר את המשוואה אחרת נקבל:

$$p(a)+\frac{p(a,b,c)}{3}+p(b)+\frac{p(a,b,c)}{3}+p(c)+\frac{p(a,b,c)}{3}=2p(a,b,c)$$

עכשיו אם נחלק את המשוואה בשניים ונפצל את השבר מצד שמאל לשלושה שברים קטנים נקבל:

$$\frac{p(a)+\frac{p(a,b,c)}{3}}{2}+\frac{p(b)+\frac{p(a,b,c)}{3}}{2}+\frac{p(c)+\frac{p(a,b,c)}{3}}{2}=p(a,b,c)$$

וזה בדיוק הגדרת "שאפלי שוויני"-הממוצע של ממוצע המחירים ועוד המחיר לפי ערך שאפלי.

הערה חשובה: אומנם כתבנו את התשובה רק על n=3 אך הדבר נכון לגבי כל n שהוא, רק לצורך הנוחות כתבנו על גודל 3.

"שאפלי-שוויוני" מקיים את עקרון הלינאריות:

נשתמש באותן הגדרות מההוכחה למעלה.

נשים לב שלפי עקרון הלינאריות של שאפלי מתקיים שאם נכפיל את כל הערכים בקבוע k כלשהו נקבל שהתשלומים עבור שחקן i הם: $k*p(i)$, התשלום של כולם (במקרה של שלושה שחקנים) הוא: $k*p(a,b,c)$ וממוצע התשלומים לכל שחקן יהיה: $\frac{k*p(a,b,c)}{3}$.

ולפי "שאפלי-שוויוני" התשלום של כל שחקן a (בה"כ) אמור להיות:

$$\frac{\frac{k*p(a,b,c)}{3}+k*p(a)}{2}=k*\frac{\left(\frac{p(a,b,c)}{3}+p(a)\right)}{2}$$

מה שאומר שאם נכפיל את ערכי הכל ב-k גם ערך "שאפלי-שוויוני" יוכפל ב-k

גם כאן הוכחנו על n=3 מטעמי נוחות, אבל ההוכחה נכונה לכל n שנציב.

וכמו הסברנו בעמ' 2 אם נחלק את המשחק לשני משחקים שונים נקבל שעדיין מתקיימת הלינאריות.

***טענה2:* "שאפלי שוויוני" שחקן האפס ועקרון הסימטריה(ראה הערה חשובה בסוף המסמך).**
הוכחה: די להראות מקרה שלא מתקיים עבורו העקרונות כדי להוכיח את הטענה:
נשקול את המקרה הבא: אותם נתונים רק שהשחקן ג' לא משפיע בכלל למסלול (לא משלם ולא עולה כלום):

קבוצה:	**0**	**א**	**ב**	**ג**	**א,ב**	**א,ג**	**ב,ג**	**א,ב,ג**
עלות:	0	10	15	0	20	10	15	20

אזי כלל התשלומים לפי שאפלי יהיה:

סדר:	**א-ב-ג**	**א-ג-ב**	**ב-א-ג**	**ב-ג-א**	**ג-א-ב**	**ג-ב-א**	**ממוצע**
א:	10	10	5	5	10	5	7.5
ב:	10	10	15	15	10	15	12.5
ג:	0	0	0	0	0	0	0
סכום:	20	20	20	20	20	20	20

והעלות הכוללת (ממוצע חלקי מספר שחקנים) לכל שחקן הוא: $\frac{20}{3}$
אזי שלפי "שאפלי שוויוני" מתקיים שכל שחקן משלם:

שחקן א'	$\frac{\frac{20}{3}+7.5}{2}=\frac{85}{12}$
שחקן ב'	$\frac{\frac{20}{3}+12.5}{2}=\frac{115}{12}$
שחקן ג'	$\frac{\frac{20}{3}+0}{2}=\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$
סה"כ	$\frac{10}{3}+\frac{115}{12}+\frac{85}{12}=20$

הרי שלפי "שאפלי שוויוני" שחקן ג' צריך לשלם $\frac{10}{3}$ וזאת למרות ששלפי עקרון הסימטריה (או עקרון שחקן אפס) הוא לא אמור לשלם בכלל!
הסיבה לכך היא שבקביעת התשלומים אנחנו לוקחים בחשבון לא רק את העלות השולית של כל שחקן, אלא גם את הממוצע של כלל התשלומים חלקי מספר השחקנים מה שאומר ששחקן עלול לשלם יותר מהעלות השולית שלו.

הערה חשובה: אנחנו הבנו שעיקרון הסימטריה הכוונה שכל שחקן משלם לפי הערך השולי שלו, כמו ששחקן האפס לא משלם כי אין לו ערך שולי, אבל אם הכוונה ששחקנים המשפיעים אותו דבר משלים אותו דבר, אז **עיקרון הסימטרייה כן מתקיים!** הוכחה: נניח שלפי שאפלי $p(a)=p(b)$ אזי מתקיים שהתשלום לפי שאפלי שוויוני של a הוא-

$$ES(p(a))=\frac{\left(\frac{p(a,b,c)}{3}+p(a)\right)}{2}=\frac{\left(\frac{p(a,b,c)}{3}+p(b)\right)}{2}=ES(p(b))$$