

אלגוריתמים כלכליים שיעור 7:

שאלה 5: ערך וירטואלי בהתפלגות אחידה
נניח שהערך של קונה מסוים מתפלג אחיד בין a ל- b (שני הערכים חיוביים).
א. כתבו ביטוי לפונקציית הערך הווירטואלי של הקונה, $r(v)$, כפונקציה של a, b :

כאשר הקונה מתפלג אחיד: $U(a, b)$

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}$$
$$F'(x) = \frac{1}{b - a}$$
$$r(x) = x - \frac{1 - F(x)}{F'(x)} = x - \frac{\frac{(b - a) - x + a}{b - a}}{\frac{1}{b - a}} = 2x - b$$

ב. כתבו ביטוי למחיר האופטימלי למכירת חפץ כלשהו לקונה זה

במחיר אופטימלי נצטרך למצוא מתי הפונקציה הווירטואלית שווה לאפס (זה מביא לנו את הסף שממנו תוחלת הרווח היא הגבוה ביותר):

$$r(x) = 2x - b = 0 \rightarrow x = \frac{b}{2}$$

המחיר האופטימלי לרווח עבור בעל העסק הוא:

$$\max(v, \frac{b}{2})$$

כלומר תמכור את החפץ אמ"מ הערך של הקונה גדול מ- $\frac{b}{2}$: $v > \frac{b}{2}$

אבל בכדי שהמכירה תהיה עם סיכוי גבוה גם לקרות מראש מגדירים את המחיר לפי ערך הסף ($\frac{b}{2}$).

אם יש כמה קונים וחפץ אחד (במכירה אמיתית), נדרוש את המחיר השני הגבוה או ערך הסף עבור התשלום.

ג. כתבו ביטוי לתוחלת הרווח של המוכר כאשר הוא משתמש במחיר האופטימלי.

למעשה לפי משפט מאירסון תוחלת הרווח שווה לתוחלת הערך הווירטואלי, לכן ניתן להסתכל על הבעיה בשתי דרכים:

$$E(x) = x * p_{rob}[v < x] = x * \frac{b - x}{b - a} \xrightarrow{\text{הצבה}} r(x) * \frac{b - r(x)}{b - a}$$

דרך נוספת היא ע"י חישוב תוחלת הערך הווירטואלי:

$$\frac{1}{b - a} * \int_{r(x)}^b (2x - b) dx = \frac{1}{b - a} \int_{r(x)}^b (2x - b) dx = \left|_{r(x)}^b \frac{x^2 - bx}{b - a} \right| = \left|_{r(x)}^b (-) x * \frac{b - x}{b - a} \right| = r(x) * \frac{b - r(x)}{b - a}$$

כאשר המשוואה האחרונה קורת כי הצבנו b שאיפס לנו את החלק הראשון במשוואה ו- $r(x)$ במינוס אז הסימונים התהפכו.
ואם נציב את ה- $r(x)$ האופטימלי שקיבלנו מהסעיף הקודם נקבל:

$$\frac{b}{2} * \frac{b - \frac{b}{2}}{b - a} = \frac{\frac{2b^2 - b^2}{4}}{b - a} = \frac{b^2}{4(b - a)}$$