

מטלה שבוע 4-

שאלה 1:

הגדרה: חלוקה של חפצים נקראת "ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע" (בקיזור EFX) אם לכל שני שחקנים א, ב, ולכל חפץ שנוריד מהסל של ב, שחקן א לא יקנא בשחקן ב.

א. הראו שהתנאי EFX הוא ממש חזק יותר מהתנאי EF1.

פתרון: מהגדרת השאלה קצת לא היה מובן בהתחלה מה הכוונה ב-EFx, אבל לאחר חיטוט קל באינטרנט מצאנו את ההגדרה הבאה:

$$\text{EF1: } \forall i, j \in N, \exists g \in A_j : V_i(A_i) \geq V_i(A_j \setminus \{g\})$$

$$\text{EFx: } \forall i, j \in N, \forall g \in A_j : V_i(A_i) \geq V_i(A_j \setminus \{g\})$$

נראה דוגמא שעבורה מתקיים מקרה EF1 אל לא מתקיים EFX:

עירפון	עט	מחק	
5	10	1	א'
0	10	1	ב'

אם ניתן ל- א' את העירפון, ול-ב' את העט והמחק נקבל שא' יקנא ב-ב' רק בדבר אחד (בעט). כלומר, יתקיים כאן EF1 אבל לא יתקיים EFX. כי א' עדיין יקנא ב-ב' אם ניקח לו את המחק, כלומר קיים איזשהו g שעבורו לא מתקיים התנאי: $V_x(A_x) \geq V_x(A_b \setminus \{g\})$.

ב. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות (לכל שחקן, ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל), וזהות (לשני השחקנים יש אותם ערכים לכל החפצים). תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX פתרון אפשרי: היות ולשני הסוכנים יש את אותם ערכים לאותם המוצרים בסל, ומשום שב EFX מספיק שנוציא אפילו את המוצר הזול ביותר מ-ב' בכדי ש-א' לא יקנא בו, נשקול את האלגוריתם הבא:

ניתן את כל המוצרים ל-ב', ובכל סיבוב נעביר את המוצר הזול ביותר מבניהם ל-א' (במילים אחרות שהיחס שלו הכי קטן) עד שנגיע למצב שכל מוצר שנעביר ל-א' הוא כבר לא יקנא ב-ב'. הערה: יתכן כי קיים מוצר אחד ששווה בפער מכל המוצרים, ואז ב' יישאר רק איתו בזמן של-א' יהיה עם כל שאר המוצרים, ואז ודאי שמתקיים EFX. כי ל-ב' יש רק מוצר אחד, ובאמת מתקיים עבורו לכל g (כי יש לו רק g אחד כזה) כמו ההגדרה.

ג. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות, אבל לא בהכרח זהות. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

פתרון אפשרי (אבל בהחלט לא מוכח כי יעבוד): נחלק את הסלים בשיטת Round Robin: נפרוס את כל המוצרים ונגריל מי לוקח ראשון מבין השניים.

בה"כ נניח ש-א' לוקח ראשון. הוא צריך לקחת את הפריט שבעניו הכי שווה מבין קבוצת הפריטים. אח"כ ב' בוחר מבין הפריטים שנשארו את האחד שבעניו הכי שווה וכו', עד שכל הפריטים נלקחים. זה מבטיח לנו שנגיע למצב של EF1.

אח"כ משום שהחלוקה עדיין לא לגמרי מסודרת ברמה של EFX, אם יש באמת הפסד לאחד הצדדים, ניקח את זה שמרגיש הכי מורווח (בד"כ מי שהתחיל), ונבקש ממנו לותר על הפריט שנראה בעיניו

פחות שווה ונעביר אותו לשני עד שנגיע למצב שלא משנה על מה הוא יותר, השני כבר לא ירגיש מופסד.
השיטה לא נבדקה עד הסוף, ולא הצלחנו להוכיח אותה.

ד. [שאלת מחקר] יש שלושה שחקנים עם העדפות אדיטיביות לא זהות. הוכיחו או הפריכו: תמיד קיימת חלוקה EFX

נראה שלא. נניח יש לנו כמה פריטים ושלושה סוכנים, והסוכנים מעריכים פריט אחד בפער מכל השאר. ברור שלא משנה איך נחלק את הפריטים בין האנשים, הם תמיד יקנאו ב-EF1 במי שקיבל את אותו פריט יקר ערך, גם אם הוא יותר על פריט פחות שווה שיש לו, למשל:

	א	ב	ג	ד	ה	ו
x	100	0	0	0	0	0
y	80	4	4	4	4	4
z	99	0	0	0	0	1

כל חלוקה שלא נעשה שאר הסוכנים יקנאו במי שקיבל את פריט-א' ולכן תהיה כאן רק קנאה EF1 אבל לא EFX כי אכפת להם רק מהיקר ערך.