

אלגוריתמים כלכליים שבוע 9:

שאלה 3: תכונות של אלגוריתם עזיז-לי-טלמון:

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם לתקצוב פרופורציונלי שלמדנו בשיעור.
א. האם האלגוריתם יעיל פארטו? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

תשובה: האלגוריתם לא יעיל פארטו.

הוכחה: נשקול את המקרה הבא:

נניח יש לנו שלושה פריטים: $\{a, b, c\}$

והמחירים: $a=5, b=3, c=3$, התקציב שלנו (Limit) הוא 10.

יש לנו ארבעה מצביעים שבחירותיהם: $\{a\}=a'$, $\{a\}=b'$, $\{a, b\}=g'$, $\{b\}=d'$

$$\frac{L}{n} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ של תקציב}$$

אם נריץ את האלגוריתם נקבל:

-abc מחיר 11, לא נתמך ע"י אף אחד אז לא רלוונטי (לא מקיים $k * \frac{L}{n} > 11_{price\ of\ abc}$ כי $k * \frac{10}{4} = 0$)
($0 < 11$)

-ab עולה 8, נתמך ע"י ג', ניכנס בתקציב, אבל $k * \frac{L}{n} > 8_{price\ of\ ab}$ כי $k * \frac{10}{4} = 2.5 < 8$
-ac מחיר 8, אבל לא נתמך ע"י אף אחד.

-a מחיר 5, נתמך ע"י ארבעה אנשים (א', ב', ג') נכנס בתקציב, ומקיים: $k * \frac{L}{n} > 5$ כי $k * \frac{10}{4} = 7.5 > 5$
לכן נוריד את א', ב', ג' מרשימת המצביעים, ונוריד את המחיר של a מהתקציב.
-b מחיר 3, רק אדם נשאר שרוצה את זה-ד' (כי הורדנו את ג' מהרשימה), נכנס במה שנשאר
מהתקציב (5), אבל לא מקיים $k * \frac{L}{n} > 3_{price\ of\ b}$ כי $k * \frac{10}{4} = 2.5 < 3$, לכן הוא לא יכנס לתקציב.
-c אף אחד לא רוצה ולכן לא ישתתף.

נשים לב שאם היינו מכניסים את b, שהוא נכנס במסגרת התקציב ביחד עם a, המצביעים א' ב' ו-ג' לא מפסידים מזה כלום (כי ניתן לתקצב אותו, הוא לא חורג ממסגרת התקציב), אפילו יותר מזה ג' יכול להרוויח כפול (גם את פריט a וגם את פריט b). וגם מצביע ד' יוכל להנות.
זה נהנה ולא לה לא חסר.

ב. האם האלגוריתם מגלה-אמת? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

תשובה: האלגוריתם לא מגלה אמת.

כדי להראות שהאלגוריתם לא מגלה אמת צריך להראות שאם אחד הבוחרים מסתיר מידע או מצביע למשהו אחר הוא מרוויח מזה יותר מלהגיד אמת.

ניקח את הדוגמא למעלה, אם מצביע ג' יגיד במקום $\{a, b\}$ רק $\{b\}$

$$2 * \frac{10}{4} = 5 = 5_{price\ of\ a} \text{ : יצא שפריט a עדיין יבחר כי יש שני אנשים שרוצים אותו}$$

ולכן נבחר. ישאר לנו בתקציב 5.

ול-b גם כן נקבל שיש שני אנשים שרוצים אותו: ג' ו-ד' כלומר יתקיים $2 * \frac{10}{4} = 5 > 3_{price\ of\ b}$ ומשום שנשאר לנו בתקציב 5 נוכל להכניס גם את b.
לכן האלגוריתם הוא לא מגלה אמת.

ג. נניח שכל אזרח צריך לשלם $\frac{L}{n}$ תמורת הזכות להשתתף באלגוריתם. האם האלגוריתם מעודד השתתפות? הוכיחו או

האלגוריתם לא מעודד השתתפות:

מהדוגמא למעלה קל לראות שאם מצביע ד' היה בוחר להשתתף הוא היה צריך לשלם 2.5 מהמחיר ולא להרוויח מזה כלום. אם בדיעבד הוא היה יודע שהוא יפסיד מזה הוא לא היה בוחר להשתתף מלכתחילה.