

## אלגוריתמים כלכליים שבוע 10:

שאלה 4: כמה שידוכים יציבים יש?

כשיש 3 סטודנטים ו-3 מחלקות, יש 6 שידוכים אפשריים (3 עצרת). כמה מהם יציבים?  
א. הראו דוגמה שבה יש רק שידוך יציב אחד.

פתרון נניח והבנים שלנו מוגדרים באותיות א', ב' ו-ג', והבנות באותיות 1, 2 ו-3  
כל בחירה מוגדרת להיות קבוצה מימין לשמאל:

א{...,1}	1{...,א}
ב{...,2}	2{...,ב}
ג{...,3}	3{...,ג}

כתבתי שלוש נקודות לאחר הבחירה הראשונה משום שזה בכלל לא משנה מה הם יבחרו אח"כ, כי המחלקות והסטודנטים מתואמים, כל שינוי מהבחירה שלהם יפרום את השידוך ויוליד שידוך לא יציב.

👉	א → 1	👉
👉	ב → 2	👉
👉	ג → 3	👉

ב. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 2 שידוכים יציבים.

א{3,1,2}	1 {א, ב, ג}
ב{3,2,1}	2 {ג, א, ב}
ג {...,3}	3 {...,ג}

א' רוצה רק 2 אח"כ 1 ואח"כ 3, ב' רוצה את אחד קודם ואז שתיים (ובסוף שלוש)  
ומבחינת הבנות: 1 רוצה את א' ואז את ב' ולבסוף ג', ו-2 רוצה כמו 1 רק ש-א' ו-ב' מתחלפים.  
מבחינת הזוג השלישי(שלוש ו-ג') זה לא משנה כי הם רוצים רק אחד את השנייה, אז אם נפריד  
בניהם הם יפרמו את השידוך.  
לכן היחידים שיכולים להשפיע במקרה זה הם רק הארבעה העליונים:

שידוך יציב 2:	שידוך יציב 1:
👉	👉
👉	👉
👉	👉

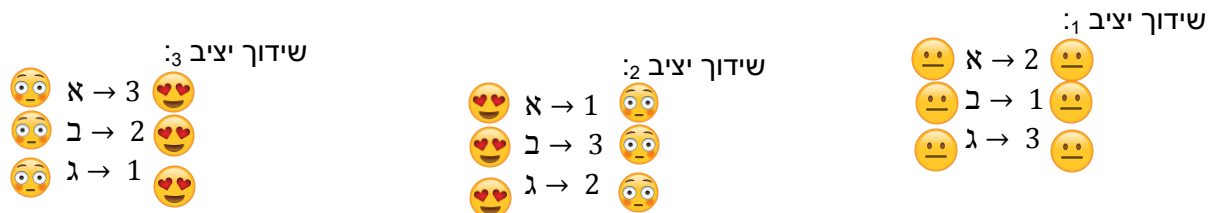
ג. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 3 שידוכים יציבים.

א {3,2,1}	1 {א, ב, ג}
ב {2,1,3}	2 {ג, א, ב}
ג {1,3,2}	3 {א, ג, ב}

הסדר הוא מימין לשמאל: בבנות: 1 מעדיפה את ג' הכי הרבה, אח"כ את ב' ולבסוף את א',

ובבנים סדר הבחירה הוא בדיוק הפוך : א' מעדיף הכי הרבה את זאת שהכי פחות רוצה אותו-1, אח"כ הוא אמביוולנטי לגבי 2 (לא כל כך אכפת לו ממנה) ולבסוף הוא הכי פחות מעוניין ב-3 שדווקא הכי רוצה אותו. וככה כל שאר המשתתפים(רוצים את מי שהכי פחות רוצה אותם, והכי פחות רוצים את מי שהכי רוצה אותם).

כאן יתכנו שלושה שידוכים יציבים:



נשים לב ששידוך יציב, הוא שידוך אמביוולנטי, כולם לא "מבסוטים" מהשידוך(אבל לא "מבואסים"), אך מצד שני אף אחד לא יכול לשפר את המצב, כי כל שיפור כלשהו יגרום לצד אחד להתפשר שלא לצורך, ולכן לא ניתן לשפר את המצב.

שידוכים יציבים<sup>2,3</sup> זהים ברעיון, יש שלישייה שנהנה והשלישייה השנייה חייבת להתפשר כי אף אחד מהצד השני לא ירצה אותם.

כל שידוך אחר שננסה עשות במצב הזה יגרור שיהיה זוג מבואס ממש מהשידוך ואינו מחובר אחד לשנייה, כך שתמיד יהיה ניתן לחבר אותם ביחד וכך לפרום את השידוכים.

#### ד. האם ייתכן שכל 6 השידוכים הם יציבים? אם כן - הראו דוגמה, אם לא - הוכיחו.

תשובה: ייתכן מצב כזה רק אם נתיר מצבים מיוחדים כמו אדישות, שאז אם כולם אדישים אחד לשנייה, לא משנה מה יסודך כולם תמיד יהיו אמביוולנטיים (לא נשמע כמו התחלה מבטיחה לקשר). אבל, אם לבנים ולבנות יש סדרי עדיפויות חזקים, אז לא ייתכן שידוך כזה שכל שש הפרמוטציות שלו הן שידוך יציב.

**הוכחה:** לצורך הנוחות נמשיך באותם מושגים שהשתמשנו בהם מקודם: אם מישהו "מבואס" מהשידוך זה אומר שהוא שודך למי שהוא הכי פחות רצה, אם מישהו אמביוולנטי זה אומר שהוא שודך לבחירה השנייה שלו, ואם מישהו "מבסוט" זה אומר שהוא קיבל את שחפצה נפשו. נניח בשלילה מצב שבו כל שש הפרמוטציות מניבות שידוך יציב.

נשים לב לדבר הבא, בכל סדר פרמוטציות אפשרי, תמיד תהיה פרמוטציה אחת שבה גם גבר וגם אישה יהיו מבואסים ממה שקיבלו, כלומר הם יקבלו את הבחירה האחרונה שלהם.

אם נגיד שהצמד לא שודך אחד לשנייה, הרי שהם זוג פורם, שכן עדיף להם להתחבר ביחד ואז ליצור זוגיות טובה יותר ממה שהם קיבלו.

לכן נגיד שהם שודכו אחת לשנייה, ולצורך הפשטות נקרא להם "הזוג החלש". הרי ששאר הזוגות חייבים להיות לפחות אמביוולנטיים לשידוך שלהם(שכן אם היה אחד שהוא מבואס גם כן מהשידוך הוא היה יכול להחליף את השידוך שלו עם אחד מ"הזוג החלש" וכך לפרום את השידוכים).

נשחק את המשחק הבא: מבין הזוגות שהם לא "הזוג החלש" נחליף את סדר השידוכים, כלומר הבת תשודך לבן שהיא לא הייתה איתו קודם. אם קיים מישהו שהוא מבואס מהזיווג שהוצע לו, הרי הוא פורם את השידוכים מאותה סיבה שאמרנו מקודם- הוא יכול להחליף את הזיווג שלו עם המקבילה מה-"זוג החלש", היא הוא בטוח ירצו לקבל אותה (או אותו) כי נכון לעכשיו הם משודכים למי שהם הכי פחות רוצים.

אם לא קיים מישהו כזה, כלומר כולם עדיין אמביוולנטיים לפחות לזוגיות שלהם, סימן ש"הזוג החלש" הוא חלש לא רק אחד לשנייה, אלא כולם לא ממש רוצים אותם. אזי קיימת פרמוטציה(אפילו יותר) שעלולה לפרום את השידוכים- פשוט כל פרמוטציה שבה "הזוג החלש" לא ביחד. סתירה לכך שכל הפרמוטציות מניבות שידוך יציב.