

אלגוריתמים כלכליים שבוע 11

עשינו שתי שאלות הפעם!

שאלה 2: הסתברות להחלפה מוצלחת

נניח שיש n אנשים ו- n בתים, והעדפות של כל אדם מתפלגות באופן אחיד (ההסתברות שאדם i הכי רוצה את בית j היא $\frac{1}{n}$ חלקי n) מה ההסתברות שאדם מסוים יהיה חלק ממעגל-החלפה בסיבוב הראשון?

ברמת העיקרון קשה לנו למצוא מה ההסתברות שאדם מסוים נמצא במעגל הראשון, והרבה יותר קל למצוא את ההסתברות שהוא לא נמצא במעגל הראשון, והמשלים של ההסתברות הוא הסיכוי שהוא כן במעגל הזה. הסיכוי שאדם לא נמצא במעגל, הוא בעצם הסיכוי שהוא בוחר אחד מהחברי הקבוצה האחרים שהם לא הוא וגם הם לא בוחרים בו, כלומר יש להם $n-1$ אופציות מתוך n לבחור מישהו שהוא לא אותו "אדם מסוים".

תחילה נראה את זה במקרה של שני אנשים:

נניח ואותו אדם מסוים הוא א' והאדם השני הוא ב', כדי ש-א' לא ישתתף בסיבוב הראשון הוא צריך לבחור את ב', ו-ב' צריך לבחור את עצמו, הסיכוי של א' לבחור את ב' הוא 0.5 כפול האופציה ש-ב' בוחר בעצמו, שהיא גם 0.5 סה"כ נקבל: $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ אבל משום שאנחנו מחפשים את המשלים לתופעה נקבל: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

ובאמת קל לנו לבחון את זה כי יש רק ארבעה מקרים אפשריים:

(1) א' בוחר בעצמו ו-ב' בוחר בעצמו \leq א' משתתף.

(2) א' בוחר בעצמו ו-ב' בוחר ב-א' \leq א' משתתף.

(3) א' בוחר ב-ב' ו-ב' בוחר ב-א' \leq א' משתתף.

(4) א' בוחר ב-ב' ו-ב' בוחר בעצמו \leq א' לא משתתף \otimes

הרי שבשלושת רבעי מהמקרים א' משתתף ורק באחד הוא לא.

באופן דומה אם יהיו לנו שלושה סוכנים: $1 - \left(\frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3}\right)$

ה- $\frac{2}{3}$ הראשון הוא של א'- הוא צריך לבחור או את ב' או את ג', כלומר יש לו סיכוי של שניים מתוך השלוש שהוא יבחר בהם. השני הוא של ב' הוא צריך לבחור או את עצמו או את ג', ובאותו האופן ה- $\frac{2}{3}$ השלישי שהוא של ג'.

אם נרצה חישוב כללי לכך נקבל:

$$1 - \left(\frac{(n-1)^n}{n^n}\right) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

שאלה 1: החלפת בתים – יעילות ואדישות

בהרצאה הוכחנו, שאלגוריתם מעגלי המסחר הוא יעיל פארטו כאשר כל יחסי ההעדפה הם חזקים (אין אדישות)

א. הוכיחו (ע"י דוגמה) שאלגוריתם מעגלי המסחר אינו יעיל פארטו כאשר יחסי ההעדפה הם לא חזקים - (יש אדם שהוא אדיש בין שני בתים).

הוכחה: נניח ויש לנו שלושה אנשים עם העדפות הבאות:

א': (ג' או ב', א')

ב: (א', ג', ב')

ג: (ב', א' ג')

כלומר: א' לא בטוח מה הוא רוצה יותר- לעבור לבית של ב' או לשל ג', הוא אומר: "יאללה שיהיה, לא אכפת לי, העיקר לצאת קצת מהבית"

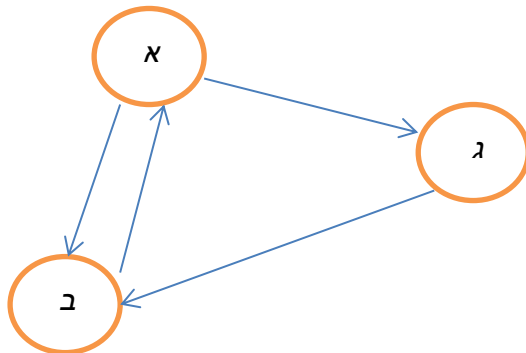
ב' רוצה להחליף עם א', הוא מוכן להתפשר על הבית של ג' ואם אין ברירה נשארים בבית.

ג' בדומה ל-ב' רוצה לצאת קצת מהבית. הוא רוצה להחליף עם ב' אם לא אז עם א', במקרה הגרוע נשארים בבית, גם ככה עוד מעט תקופת מבחנים.

אם נפעיל את האלגוריתם נקבל שעלול להתרחש המקרה הבא:

א ⇔ ב ו- ג יישאר בבית.

כי בעיקרון יש מעגל בין א' ל- ב':



אבל קיים לזה שיפור פארטו:

ב' יחליף עם א' כי זה מה שהוא הכי רוצה, ג' יחליף עם ב' כי זה מה שהוא הכי רוצה, וא' יחליף עם ג' כי בעיקרון לא אכפת לו מבין השניים:

א' = ג' <= ב' <= א'.

ב [מחקרי] הציעו שיפור לאלגוריתם, כך שיהיה יעיל פארטו גם כשיש אנשים שהם אדישים בין שני בתים (האלגוריתם עדיין צריך לעודד השתתפות). הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם.

הצעת אלגוריתם אפשרי(לא מחייב):

האלגוריתם יעבוד באותו תקן רק עם שינוי, במקרה של אנשים עם אדישויות ניקח מבין שתי האפשרויות את האפשרות הפחות "מבוקשת" באותו סיבוב, ונמקם אותה קודם בסדר העדיפויות של הבחור האדיש, כלומר נהפוך את האדם האדיש לאדם שסגור על עצמו המוטיבציה: אם ניתן ערך גבוה יותר לאפשרות הפחות מבוקשת מבין השתיים נגדיל את המעגל והסיכוי של הבחור האדיש לפגוע קטן.

הדגמה (מתוך הדוגמא של ויקיפדיה):

סוכן	1	2	3	4	5	6
בחירה ראשונה	3	3	3	2 או 5	1	2 או 4
בחירה שנייה	2	5	1	6	3	5
בחירה שלישית	4	6	...	4	2	6
בחירה רביעית	1
...

לפי האלגוריתם הטבלה תראה כך:

סוכן	1	2	3	4	5	6
בחירה ראשונה	3	3	3	5	1	4
בחירה שנייה	2	5	1	2	3	2
בחירה שלישית	4	6	...	6	2	5
בחירה רביעית	1	4	...	6
...

נשים לב שבסיבוב הראשון יהיה לנו רק חילוף אחד של שלוש עם עצמו, ולכן נוריד אותו מהרשימה ונשאר עם:

סוכן	1	2	4	5	6
בחירה ראשונה	2	5	5	1	4
שנייה	4	6	2	2	2
שלישית	1		6		5

רביעית			4		6

בסיבוב הזה יש לנו מעגל בין 1 שרוצה את בית 2, 2 שרוצה את 5 ו-5 שרוצה את 1.

נשאר לאחר הסיבוב עם:

4 ו-6: משום שארבע מעדיף בית 6 לפני שהוא מעדיף את הבית שלו , וגם 6 מעדיף את בית ארבע לפני שהוא מעדיף להישאר בביתו נקבל שהם מחליפים.

הערה: לא הוכנס באלגוריתם יותר מידי מחשבה מתמטית. פשוט מחשבה אתית- אם הבחור האדיש אומר שהוא מוכן לקחת את הפחות טוב, הוא כאילו "מתפשר" למען הכלל למרות שהוא בכלל לא מפסיד מזה משהו.