Eerste bewijsopdracht

Marc Denecker

September 29, 2023

1 Waarom bewijzen opstellen?

Bewijzen geven een **diep declaratief inzicht in de materie** die moeilijk op een andere manier te bereiken valt. Het legt diepe verbanden tussen verschillende eigenschappen en geeft een gedetailleerd beeld hoe een eigenschap volgt uit andere. Vele oefeningen daarentegen zijn gebaseerd op een procedé dat min of meer automatisch uitgevoerd kan worden zonder begrip van waarom de oplossing correct is, en dat niet gebruikt kan worden voor het oplossen van nieuwe opgaves. Bewijzen zijn anders. Omdat een bewijs inzicht geeft in het waarom, leent het zich beter om later nieuwe soorten oefeningen op te lossen.

Men hoort vaak dat het volstaat om een bewijs te "begrijpen". In je beroep later zal het vaak *niet* volstaan om iets te " begrijpen", maar moet je je begrip kunnen **verwoorden en uitleggen aan anderen op een precieze, correcte en begrijpelijke manier**. Het opstellen van een bewijs is niet gemakkelijk maar het traint deze vaardigheden op een manier die met niets te vergelijken is. Het formele, nauwgezette en algemene karakter van een bewijs zorgt ervoor dat de vaardigheden van het "verwoorden en uitleggen aan anderen op een precieze, correcte en begrijpelijke manier" getraind worden.

Bewijsvoering is gedeeltelijk gebaseerd op technieken die kunnen helpen om een probleemstelling op een systematische manier te analyseren. Dat zal blijken met de opgave hieronder.

2 De opgave

Zij S een verzameling. Zij $\sim$ een **binaire relatie** op S, dit is een deelverzameling van $S \times S$, dus een verzameling van tupels $(x, y) \in S \times S$. In plaats van te schrijven $(x, y) \in \sim$ gebruiken we de notatie $x \sim y$.

Hieronder gebruiken we de afkorting "asa" voor "als en slechts als".

Definitie

- $\sim$ is **reflexief** asa voor alle $x \in S : x \sim x$.

- $\sim$ is **symmetrisch** asa $x \sim y$ impliceert $y \sim x$.
- $\sim$ is **transitief** asa $x \sim y$ en $y \sim z$ impliceert dat $x \sim z$.

Definitie De relatie $\sim$ is een **equivalentierelatie** asa $\sim$ reflexief, symmetrisch en transitief is.

Definitie De **equivalentieklasse** $|x|$ van een element $x \in S$ is de verzameling $\{y \in S | x \sim y\}$.

Stelling Voor alle $x, y \in S$: $x \sim y$ als en slechts als $|x| = |y|$.

Opgave deel 1) Bewijs deze stelling

Opgave deel 2) Veronderstel dat deze stelling onwaar zou zijn. a) Wat is dan wel waar? b) Hoe zou je dat bewijzen?

Als je moeilijkheden ondervindt, dan kan het nuttig zijn om eerst het bewijs te bedenken voor 1 van de concrete voorbeelden uit de volgende sectie. Maar het is de bedoeling het bewijs te leveren voor alle equivalentierelaties. Een bewijs voor 1 geval levert geen bonuspunt op.

3 Uitleg over equivalentierelaties

De definitie van equivalentie relatie zegt: het is een reflexieve, symmetrische en transitieve relatie over S. Dit zijn 3 eenvoudige maar abstracte wiskundige eigenschappen.

Het is niet eenvoudig om op basis van deze definitie uit te maken wat dit concept precies voorstelt. Het probleem van de studenten lijkt eerder te liggen bij de vraag wat het nut is van equivalentierelaties.

Equivalentierelaties dienen om gelijkaardigheids- of gelijkwaardigheids-relaties voor te stellen. Een voorbeeld is de relatie tussen mensen:

$$\ldots \text{is op dezelfde dag geboren als} \ldots$$

Deze relatie is reflexief, symmetrisch en transitief. Wat is het nut ervan? Dat er veel gelijkaardigheid is tussen x en y als $x \sim y$. Bv. x en y zijn even oud, vieren op dezelfde dag hun verjaardag, gaan voor het eerst naar school op dezelfde dag, enz. De equivalentieklasse van x is de verzameling van alle mensen die op dezelfde dag geboren zijn.

Een andere relatie is:

$$\ldots \text{heeft hetzelfde inkomen als} \ldots$$

Ook deze is reflexief, symmetrisch en transitief. Equivalente mensen in deze relatie zouden evenveel belastingen moeten betalen.

De gelijkheidsrelatie $=$ is een andere, triviale equivalentierelatie. Wat is de equivalentieklasse $|x|$ van $x \in S$?

Maar, het niet echt nodig om inzicht te hebben in het nut van equivalentierelaties. Het bewijs kan bekomen worden door abstract te redeneren over de definitie met behulp van eenvoudige bewijstechnieken. Dus is deze oefening ook een oefening in abstract redeneren en analyseren, en in die bewijstechnieken.

4 Indienen

- **De deadline: zondag 22/10. Dien electronisch in als een pdf file op Ultra.** Een scan van een handgeschreven bewijs is ok.
- Probeer het bewijs helder en correct te formuleren. Het volstaat niet dat je zelf de redenering in uw bewijs kunt begrijpen, iemand anders moet het ook kunnen lezen en begrijpen.
- Werk samen te werken met een collega-student, om elkaar feedback te geven.
- Geef een kort verslag ($\pm$ 1/4de pagina?) : (a) met wie heb je samengewerkt? (b) was het nuttig om fouten te ontdekken in elkaars redenering, of om de formulering te verbeteren? Of was het niet nuttig? (Ook wij hebben nood aan feedback).
- **Nadien krijgt iedereen persoonlijke feedback. Punten tellen niet mee voor het examen. Er is een half bonus punt mee te verdienen.**