

WISKUNDE I

voor Bachelor in
Biochemie & Biotechnologie,
Biologie, Chemie, Geografie,
Geologie en Informatica
en voor Schakelprogramma
Master in Biochemie,
Master in Chemie en
Master in Toegepaste Informatica

Academiejaar 2023/2024

Arno KUIJLAARS

Departement Wiskunde, KU Leuven,
Celestijnenlaan 200 B bus 2400, 3001 Leuven

Inhoudsopgave

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Getallen | 1 |
| 1.1 | Functies en veranderlijken | 1 |
| 1.2 | Reële getallen | 2 |
| 1.2.1 | Natuurlijke getallen | 2 |
| 1.2.2 | Gehele getallen | 3 |
| 1.2.3 | Rationale getallen | 3 |
| 1.2.4 | Reële getallen | 4 |
| 1.2.5 | Decimale ontwikkeling | 4 |
| 1.2.6 | Bewerkingen op reële getallen | 5 |
| 1.3 | Begrippen rond ordening | 7 |
| 1.3.1 | Absolute waarde | 7 |
| 1.3.2 | Afstand en intervallen | 8 |
| 1.3.3 | Oneindig en min-oneindig | 8 |
| 1.4 | Complexe getallen (inleiding) | 9 |
| 1.5 | Telproblemen | 11 |
| 1.5.1 | Faculteiten en binomiaalcoëfficiënten | 11 |
| 1.5.2 | Het binomium van Newton | 13 |
| 1.5.3 | Somteken en productteken | 14 |
| 1.5.4 | Principe van volledige inductie | 15 |
| 1.6 | Oefeningen | 17 |
| 2 | Functies | 21 |
| 2.1 | Definities | 21 |
| 2.1.1 | Inleiding | 21 |
| 2.1.2 | Bewerkingen op functies | 22 |
| 2.1.3 | Samenstellen van functies | 23 |
| 2.1.4 | Grafiek van een functie | 24 |
| 2.2 | Veeltermen | 24 |
| 2.2.1 | Eerstegraads veelterm | 25 |
| 2.2.2 | Tweedegraads veelterm | 25 |
| 2.2.3 | Hogeregraads veeltermen | 27 |
| 2.3 | Rationale functies | 27 |
| 2.3.1 | Verticale en horizontale asymptoten | 28 |
| 2.3.2 | Euclidische deling | 28 |
| 2.3.3 | Schuine asymptoot | 30 |
| 2.3.4 | Partieelbreuken | 31 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.4 | Inverse functies | 35 |
| 2.5 | Krommen in het vlak | 39 |
| 2.5.1 | Niveaукrommen | 39 |
| 2.5.2 | Kwadratische functies en kegelsneden | 39 |
| 2.5.3 | Parametervergelijking van een kromme | 42 |
| 2.5.4 | Stelsels vergelijkingen | 43 |
| 2.6 | Oefeningen | 45 |
| 3 | Transcendente functies | 51 |
| 3.1 | Goniometrische functies | 51 |
| 3.1.1 | De functies sin en cos | 51 |
| 3.1.2 | Goniometrische formules | 54 |
| 3.1.3 | De functies tan, cotan, cosec en sec | 55 |
| 3.2 | Poolcoördinaten | 56 |
| 3.3 | Cyclometrische functies | 59 |
| 3.4 | Exponentiële functies | 61 |
| 3.5 | Logaritmische functies | 63 |
| 3.6 | Hyperbolische functies cosh, sinh en tanh | 66 |
| 3.7 | Complexe getallen (vervolg) | 67 |
| 3.7.1 | Grafische voorstelling | 67 |
| 3.7.2 | Complexe functies | 68 |
| 3.8 | De exponentiële functie in het complexe vlak | 69 |
| 3.8.1 | Definitie van e^z | 69 |
| 3.8.2 | Berekeningen in poolcoördinaten | 70 |
| 3.9 | Veeltermen in het complexe vlak | 73 |
| 3.9.1 | Tweede-graadsvergelijkingen | 73 |
| 3.9.2 | Veeltermen met reële coëfficiënten | 74 |
| 3.9.3 | Hoofdstelling van de algebra | 75 |
| 3.10 | Oefeningen | 75 |
| 4 | Afgeleiden | 83 |
| 4.1 | Inleidende begrippen | 83 |
| 4.2 | Definities | 84 |
| 4.3 | Limieten | 86 |
| 4.4 | Afleiden vanuit de definitie | 91 |
| 4.5 | Rekenregels | 93 |
| 4.5.1 | Afgeleide van som, verschil, product en quotiënt | 93 |
| 4.5.2 | Bewijs van de productregel | 94 |
| 4.5.3 | Voorbeelden | 94 |
| 4.6 | Kettingregel | 96 |
| 4.6.1 | Afgeleide van samengestelde functie | 96 |
| 4.6.2 | Afgeleide van een inverse functie | 98 |
| 4.7 | Afgeleiden van transcendente functies | 99 |
| 4.7.1 | De exponentiële functie e^x | 99 |
| 4.7.2 | De logaritmische functie | 100 |
| 4.7.3 | De machtsfunctie x^r | 100 |
| 4.7.4 | De goniometrische functies | 100 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.7.5 | Cyclometrische functies | 102 |
| 4.7.6 | Hyperbolische functies | 103 |
| 4.7.7 | Exponentiële functie in het complexe vlak | 103 |
| 4.8 | Differentialen | 104 |
| 4.9 | Hogere orde afgeleiden | 105 |
| 4.9.1 | Hogere orde afgeleiden van veeltermen | 106 |
| 4.9.2 | Het binomium van Newton | 107 |
| 4.9.3 | De regel van Leibniz | 107 |
| 4.10 | Partiële afgeleiden | 108 |
| 4.11 | Oefeningen | 109 |
| 5 | Toepassingen van afgeleiden | 115 |
| 5.1 | Verloop van functies | 115 |
| 5.1.1 | Stijgend en dalend | 115 |
| 5.2 | Maxima en minima | 117 |
| 5.2.1 | Globale en lokale maxima/minima | 117 |
| 5.2.2 | Stationaire punten | 118 |
| 5.2.3 | Tekenverloop | 118 |
| 5.2.4 | Voorbeelden | 120 |
| 5.2.5 | Tweede afgeleide test | 122 |
| 5.3 | De methode van Newton–Raphson | 124 |
| 5.4 | Taylorveeltermen | 128 |
| 5.4.1 | Veeltermbenaderingen | 128 |
| 5.4.2 | Voorbeelden van Taylorveeltermen | 131 |
| 5.4.3 | Taylorveelterm rond algemeen punt a | 133 |
| 5.4.4 | Bewerkingen met Taylorveeltermen | 134 |
| 5.5 | Berekening van limieten | 137 |
| 5.5.1 | De regels van de l'Hôpital | 138 |
| 5.6 | Oefeningen | 141 |
| 6 | Integralen | 149 |
| 6.1 | Begripsbepaling | 149 |
| 6.1.1 | Primitiveren en onbepaalde integraal | 149 |
| 6.1.2 | Oppervlakteberekening en bepaalde integraal | 149 |
| 6.2 | De onbepaalde integraal | 150 |
| 6.2.1 | Definitie | 150 |
| 6.2.2 | Rekenregels | 152 |
| 6.3 | De bepaalde integraal | 153 |
| 6.3.1 | Oppervlakte onder de grafiek | 153 |
| 6.3.2 | Oppervlakte onder de x -as | 155 |
| 6.3.3 | Rekenregels | 157 |
| 6.4 | Hoofdstelling van de integraalrekening | 160 |
| 6.4.1 | Eerste vorm van de hoofdstelling | 160 |
| 6.4.2 | Tweede vorm van de hoofdstelling | 162 |
| 6.4.3 | Veranderlijke grenzen | 163 |
| 6.4.4 | Gemiddelde waarde van een functie | 164 |
| 6.5 | Oneigenlijke integralen | 164 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.5.1 | Oneindige functie | 164 |
| 6.5.2 | Oneindige intervallen | 166 |
| 6.6 | De Riemann-integraal | 168 |
| 6.6.1 | Integraal als limiet van Riemann-sommen | 168 |
| 6.6.2 | Equidistante punten | 170 |
| 6.6.3 | Trapeziumregel | 172 |
| 6.7 | Oefeningen | 175 |
| 7 | Toepassingen van integralen | 179 |
| 7.1 | Oppervlakte | 179 |
| 7.2 | Lengte van een kromme | 181 |
| 7.2.1 | Kromme $y = f(x)$ | 181 |
| 7.2.2 | Kromme gegeven door parametervergelijking | 183 |
| 7.2.3 | Lengte van kromme in poolcoördinaten | 184 |
| 7.3 | Oppervlakte in poolcoördinaten | 185 |
| 7.4 | Volume van een omwentelingslichaam | 186 |
| 7.5 | Massaverdelingen | 188 |
| 7.5.1 | Discrete massaverdeling | 188 |
| 7.5.2 | Continue massaverdeling | 189 |
| 7.6 | Kansrekening | 190 |
| 7.6.1 | Discrete kansverdeling | 190 |
| 7.6.2 | Continue kansverdeling | 191 |
| 7.7 | Krachtenvelden | 193 |
| 7.7.1 | Kracht en arbeid | 193 |
| 7.7.2 | Kracht, arbeid en energie | 194 |
| 7.8 | Oefeningen | 196 |
| 8 | Integratietechnieken | 201 |
| 8.1 | Inleiding | 201 |
| 8.2 | Goniometrische identiteiten | 201 |
| 8.3 | Substitutiemethode | 202 |
| 8.3.1 | Algemene formulering | 203 |
| 8.3.2 | Meer voorbeelden | 204 |
| 8.3.3 | Bepaalde integralen | 206 |
| 8.3.4 | Goniometrische substituties | 207 |
| 8.4 | Partiële integratie | 208 |
| 8.4.1 | Algemene beschrijving | 208 |
| 8.4.2 | Voorbeelden | 210 |
| 8.5 | Reductieformules | 212 |
| 8.6 | Rationale functies en partieelbreuken | 214 |
| 8.6.1 | Type (i) | 214 |
| 8.6.2 | Type (ii) | 215 |
| 8.6.3 | Type (iii) | 215 |
| 8.6.4 | Type (iv) | 216 |
| 8.6.5 | Voorbeeld | 216 |
| 8.6.6 | Rationale goniometrische integralen | 217 |
| 8.7 | Integralen met een parameter | 219 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 8.8 | Oefeningen | 220 |
| 9 | Functies van twee of meer veranderlijken | 227 |
| 9.1 | Grafische voorstelling | 227 |
| 9.1.1 | Inleiding | 227 |
| 9.1.2 | Grafiek | 228 |
| 9.1.3 | Niveaukrommen | 229 |
| 9.2 | Partiële afgeleiden | 229 |
| 9.2.1 | Eerste orde partiële afgeleiden | 229 |
| 9.2.2 | Meetkundige betekenis | 230 |
| 9.2.3 | Hogere orde partiële afgeleiden | 231 |
| 9.2.4 | Afleiden onder het integraalteken | 232 |
| 9.2.5 | Meer dan twee veranderlijken | 233 |
| 9.2.6 | Andere notatie | 235 |
| 9.3 | De totale differentiaal | 236 |
| 9.3.1 | Inleiding | 236 |
| 9.3.2 | Totale differentiaal dz | 236 |
| 9.3.3 | Raakvlak aan de grafiek | 239 |
| 9.4 | Totale afgeleide | 240 |
| 9.4.1 | Kettingregel | 240 |
| 9.4.2 | Niveaukrommen | 242 |
| 9.4.3 | Verandering van onafhankelijke veranderlijken | 245 |
| 9.4.4 | Exacte differentiaal | 246 |
| 9.4.5 | Richtingsafgeleide | 248 |
| 9.5 | Oefeningen | 249 |
| 10 | Eerste orde differentiaalvergelijkingen | 253 |
| 10.1 | Inleiding | 253 |
| 10.2 | Oplossingen van een differentiaalvergelijking | 254 |
| 10.3 | Eerste orde DV | 256 |
| 10.3.1 | Existentiestelling | 256 |
| 10.3.2 | Lijnelementenveld van $x' = f(t, x)$ | 257 |
| 10.4 | Scheidbare veranderlijken | 258 |
| 10.5 | Logistiek model | 261 |
| 10.6 | Lineaire DV van eerste orde | 262 |
| 10.6.1 | Homogene DV | 262 |
| 10.6.2 | Variatie van constanten | 263 |
| 10.6.3 | Voorbeeld | 264 |
| 10.7 | Oefeningen | 264 |
| 11 | Lineaire DV van tweede orde | 269 |
| 11.1 | Inleiding | 269 |
| 11.2 | Homogene lineaire DV | 269 |
| 11.3 | Constante coëfficiënten | 272 |
| 11.4 | Niet-homogene lineaire DV | 277 |
| 11.4.1 | Particuliere oplossing | 277 |
| 11.4.2 | Methode van onbepaalde coëfficiënten | 279 |

| | |
|--|------------|
| 11.5 Toepassing: gedwongen trillingen en resonantie | 282 |
| 11.5.1 Harmonische oscillator met damping en uitwendige kracht | 282 |
| 11.5.2 Het geval zonder damping | 283 |
| 11.5.3 Resonantie | 283 |
| 11.6 Oefeningen | 285 |
| 12 Extrema van functies van meerdere veranderlijken | 291 |
| 12.1 Stationaire punten | 291 |
| 12.2 Extrema | 293 |
| 12.3 Zadelpunten | 295 |
| 12.4 Tweede afgeleide test | 296 |
| 12.4.1 Formulering en voorbeelden | 296 |
| 12.4.2 Bewijs van de tweede afgeleide test | 299 |
| 12.5 Kleinste-kwadratenmethode | 300 |
| 12.6 Optimalisatie met nevenvoorwaarden | 304 |
| 12.6.1 Eliminatiemethode | 304 |
| 12.6.2 Lagrange techniek | 305 |
| 12.6.3 Meetkundige interpretatie | 307 |
| 12.6.4 De Lagrange techniek in meer veranderlijken | 309 |
| 12.7 Oefeningen | 310 |
| 13 Vectoren | 317 |
| 13.1 Inleidende begrippen | 317 |
| 13.2 Bewerkingen | 319 |
| 13.3 Het scalair product | 323 |
| 13.4 Raakvectoren | 325 |
| 13.5 Functies van twee veranderlijken en vectoren | 327 |
| 13.5.1 Gradiënt als vectorveld | 327 |
| 13.5.2 Niveaukrommen | 327 |
| 13.5.3 Richtingsafgeleide | 329 |
| 13.5.4 Lagrange techniek | 330 |
| 13.6 Oefeningen | 330 |
| Index | 335 |

Hoofdstuk 1

Getallen

1.1 Functies en veranderlijken

De natuurwetenschappen houden zich bezig met

- experimenten: waarnemen van fysische fenomenen en het meten van fysische grootheden, en
- theorievorming: interpretatie van waarnemingen, verbanden vinden tussen verschillende grootheden, methoden vinden om deze verbanden te analyseren.

Bij het tweede aspect van de natuurwetenschappen is de wiskunde een onmisbaar hulpmiddel.

Voorbeelden van bekende verbanden tussen fysische grootheden, die zo belangrijk zijn dat ze “wetten” genoemd worden, zijn

- (a) de tweede wet van Newton

$$F = ma$$

- (b) de ideale gaswet

$$pV = nRT$$

- (c) de wet van Darcy voor grondwaterstroming

$$q = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{d}{dx} p$$

- (d) de massa-energierelatie van Einstein

$$E = mc^2$$

De ideale gaswet drukt uit dat bij gegeven waarden van de druk p , de temperatuur T en de hoeveelheid gas n het overeenkomstige volume V berekend kan worden. We zeggen dat V een **functie** is van de **veranderlijken** p , T en n . De wiskundige manier om dit uit te drukken is door

$$V = f(p, T, n) \tag{1.1.1}$$

met $f(p, T, n) = \frac{nRT}{p}$. Een andere schrijfwijze, die gebruikelijk is in de wetenschappen, is om te schrijven

$$V = V(p, T, n) \quad (1.1.2)$$

waarmee uitgedrukt wordt dat V een functie is van p , T en n . De functie kan al dan niet bekend zijn.

In (1.1.1)–(1.1.2) zijn p , T en n de **onafhankelijke veranderlijken** en V de **afhankelijk veranderlijke** waarvan de waarde afhangt van de onafhankelijke veranderlijken. We hadden ook een andere veranderlijke kunnen nemen als afhankelijke veranderlijke, bv. de temperatuur T . In dat geval is T een functie van p , V en n volgens

$$T = \frac{pV}{nR}.$$

In de ideale gaswet komt ook de gasconstante R voor die geen veranderlijke is maar een **constante**. De waarde is

$$R = 8,314472 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

Deze fysische constante bevat een **getal** en een **eenheid**. Wiskundige constanten zoals $\pi = 3,14159 \dots$ en $e = 2,71828 \dots$ zijn getallen zonder eenheid.

Fysische grootheden worden ook uitgedrukt door een getal en een eenheid, zoals

$$T = 298,15 \text{ K}, \quad p = 1005 \text{ hPa}.$$

De getallen hebben alleen betekenis als de eenheden waarin de grootheden uitgedrukt worden bekend zijn.

1.2 Reële getallen

1.2.1 Natuurlijke getallen

De eenvoudigste getallen zijn de **natuurlijke getallen** die gebruikt worden om te tellen. De verzameling van natuurlijke getallen wordt met \mathbb{N} genoteerd:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Met de notatie \mathbb{N}_0 bedoelt men de natuurlijke getallen zonder 0 .¹ De verzameling \mathbb{N} is oneindig groot. De natuurlijke getallen zijn op de gebruikelijke manier geordend. 0 is het kleinste element, dan komt 1 , vervolgens 2 , 3 , enzovoorts.

Binnen \mathbb{N} kunnen we twee getallen optellen en vermenigvuldigen. Het resultaat is weer een natuurlijk getal. We kunnen echter niet altijd aftrekken of delen. Zo zijn $2 - 5$ en $5/4$ niet gedefinieerd binnen \mathbb{N} .

¹In de internationale literatuur wordt vaak \mathbb{N} gebruikt voor de natuurlijke getallen zonder 0 en \mathbb{N}_0 voor de natuurlijke getallen met 0 .

1.2.2 Gehele getallen

De verzameling \mathbb{Z} van de **gehele getallen** is de uitbreiding van \mathbb{N} met de negatieve gehele getallen:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Binnen de gehele getallen kunnen we optellen en aftrekken en het resultaat is weer een geheel getal. Er geldt

$$m + (-n) = m - n, \quad m - (-n) = m + n.$$

Gehele getallen kunnen ook met elkaar vermenigvuldigd worden en het resultaat is weer een geheel getal. Er geldt

$$(-m) \times (-n) = +(m \times n), \quad (-m) \times n = m \times (-n) = -(m \times n).$$

Het product van twee negatieve getallen is dus positief. Het product van een negatief getal met een positief getal is negatief. Merk op

$$(-1) \times m = -m, \quad 0 \times m = 0, \quad 1 \times m = m.$$

In plaats van $m \times n$ wordt vaak $m \cdot n$ of kortweg mn geschreven.

Het delen van een geheel getal door een ander geheel getal levert niet altijd een geheel getal op. Zo is bijvoorbeeld $6/3$ geheel, maar $7/3$ niet.

1.2.3 Rationale getallen

De verzameling van de **rationale getallen** \mathbb{Q} is een uitbreiding van \mathbb{Z} . Rationale getallen zijn “breuken” van de vorm

$$\frac{m}{n} \quad \text{met } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ en } n \neq 0.$$

Deling door 0 is niet toegestaan. De rationale getallen vormen een uitbreiding van de gehele getallen, want

$$\frac{m}{1} = m.$$

De voorstelling m/n voor een rationaal getal is niet uniek. Er geldt bijvoorbeeld $1/3 = 2/6 = (-3)/(-9)$, enzovoorts. Algemeen geldt

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \quad \text{als en slechts als} \quad mq = np.$$

Rekenregels voor rationale getallen zijn

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} + \frac{p}{q} &= \frac{mq + np}{nq}, \\ \frac{m}{n} - \frac{p}{q} &= \frac{mq - np}{nq}, \\ \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} &= \frac{mp}{nq}. \end{aligned}$$

Het delen van rationale getallen gaat via het “vermenigvuldigen met het omgekeerde”

$$\frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}.$$

1.2.4 Reële getallen

Elke rationaal getal is de oplossing van een lineaire vergelijking

$$nx = m$$

waarin m en n gehele getallen zijn. De kwadratische vergelijking

$$x^2 = 2$$

heeft geen rationale oplossingen. De oplossingen zijn $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ (de positieve en negatieve vierkantswortel van 2) en deze getallen kunnen niet geschreven worden in de vorm m/n met m en n gehele getallen. Het zijn **irrationale getallen**. Andere irrationale getallen kunnen we krijgen als oplossingen van de algemene kwadratische vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

waarin a , b en c willekeurige gehele getallen zijn, en van hogere orde vergelijkingen, zoals de derdegraads vergelijking

$$x^3 = 2$$

met als oplossing $x = \sqrt[3]{2}$, de derdemachtswortel van 2.

Rationale en irrationale getallen die voldoen aan een **algebraïsche vergelijking** van het type

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{met } a_n \neq 0,$$

waarin de coëfficiënten a_0, a_1, \dots, a_n gehele getallen zijn, heten **algebraïsche getallen**. Er bestaan ook getallen die niet de oplossing van een algebraïsche vergelijking met gehele coëfficiënten zijn. Zulke irrationale getallen worden **transcendente getallen** genoemd. De bekendste voorbeelden zijn $\pi = 3,14159\dots$ en de constante van Euler $e = 2,71828\dots$.

De rationale en irrationale getallen vormen samen de **reële getallen**. De reële getallen worden als continuüm beschouwd; er zitten geen gaten in. De verzameling van reële getallen \mathbb{R} wordt voorgesteld worden door middel van een rechte, de **reële rechte**, waarin de reële getallen op geordende wijze voorkomen.

1.2.5 Decimale ontwikkeling

Elk reëel getal heeft een voorstelling door middel van een **decimale ontwikkeling** (ofwel “kommagetal”).

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad - \quad \frac{315}{100} = -3,15$$

zijn voorbeelden van getallen met een eindige of afbrekende decimale ontwikkeling, en

$$\frac{2}{3} = 0,6666\dots \quad \frac{8}{7} = 1,142857142857\dots$$

zijn voorbeelden van getallen met een **repeterende decimale ontwikkeling**. Voor $8/7$ geldt dat het patroon 142857 zich blijft herhalen in de decimale schrijfwijze. Een reëel getal is rationaal als en slechts als de decimale ontwikkeling eindig of repeterend is. Een irrationaal getal heeft een decimale ontwikkeling waarin in de getallen na de komma geen oneindig voortdurende herhaling optreedt, zoals bv.

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872 \dots$$

Het getal π

Het getal π wordt gedefinieerd als de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de diameter. Het wordt ook wel het getal van Archimedes genoemd. π is irrationaal (zelfs transcendent). De waarde is tot 30 cijfers na de komma gelijk aan

$$\pi = 3,141592653589793238462643383280 \dots$$

Archimedes (287–212 v Chr.) vond benaderingen voor π door een cirkel met diameter 1 te benaderen door ingeschreven en omgeschreven regelmatige veelhoeken. De omtrek van een ingeschreven veelhoek is een ondergrens voor π en de omtrek van een omgeschreven veelhoek is een bovengrens. Zo vond Archimedes de ongelijkheden

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Het getal e

Het getal e is het grondtal van de natuurlijke logaritme. Meer hierover vindt u in Hoofdstuk 3. Het getal e kan gedefinieerd worden als som van een oneindige reeks

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 2,718281828459045235360287471353 \dots \end{aligned}$$

Door de oneindige reeks na een zeker aantal termen af te breken kan de waarde van e bepaald worden tot op elke gewenste nauwkeurigheid.

1.2.6 Bewerkingen op reële getallen

De rekenkundige bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen kunnen toegepast worden op reële getallen.

Neem aan dat a , b en c reële getallen zijn. Dan gelden de volgende basis-eigenschappen.

- (a) $a + b = b + a$ (commutatieve eigenschap van de optelling)
- (b) $ab = ba$ (commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging)
- (c) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associatieve eigenschap van de optelling)

(d) $a(bc) = (ab)c$ (associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging)

(e) $a(b + c) = ab + ac$ (distributieve eigenschap)

Bijzondere eigenschappen van de getallen 0 en 1 zijn

(f) $a + 0 = 0 + a = a$ (0 is neutraal element voor optelling)

(g) $a \times 0 = 0 \times a = 0$

(h) $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 is neutraal element voor vermenigvuldiging)

Machtsverheffen

Als a een reëel getal is en $m \in \mathbb{N}$ dan noteren we met a^m de m -de macht van a . Hierin noemen we a het **grondtal** en m de **exponent**. Er geldt

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \times a, \quad a^3 = a \times a \times a,$$

enzovoorts.

We breiden de definitie van a^m uit tot negatieve exponenten door

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3},$$

enzovoorts. Dan gelden de rekenregels

$$(i) \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(j) \quad a^m / a^n = a^{m-n}$$

$$(k) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(l) \quad (ab)^m = a^m b^m$$

Een uitbreiding van a^m naar a^x voor algemene reële exponenten x is mogelijk als het grondtal strikt positief is, waarbij de rekenregels (i)–(l) geldig blijven. Uit eigenschap (k) volgt dan dat

$$(a^{1/2})^2 = a^1 = a$$

zodat $a^{1/2}$ de (positieve) vierkantswortel van a is:

$$a^{1/2} = \sqrt{a}.$$

Algemeen is $a^{1/m}$ de m -de wortel van a . Een andere notatie is

$$a^{1/m} = \sqrt[m]{a}.$$

Gebruik makend van de natuurlijke logaritme en de exponentiële functie (zie hiervoor Hoofdstuk 3) kunnen we a^x herschrijven tot

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Deze schrijfwijze is vaak handig bij berekening.

1.3 Begrippen rond ordening

1.3.1 Absolute waarde

De **absolute waarde** of **modulus** van een reëel getal a noteren we met $|a|$. Ze is gedefinieerd door

$$|a| = \begin{cases} a & \text{indien } a \geq 0, \\ -a & \text{indien } a < 0. \end{cases}$$

Bijvoorbeeld $|5| = 5$ en $|-5| = 5$. Het is eenvoudig in te zien dat

$$|a| = \max(a, -a) \quad \text{en} \quad |a| = \sqrt{a^2}.$$

Uiteraard geldt $|a| \geq 0$ en $|a| = 0$ als en slechts als $a = 0$.

Neem aan dat a en b reële getallen zijn. Dan geldt

$$(a) \quad |a| \leq r \text{ als en slechts als } -r \leq a \leq r,$$

$$(b) \quad |-a| = |a|,$$

$$(c) \quad -|a| \leq a \leq |a|,$$

$$(d) \quad |ab| = |a| |b|,$$

$$(e) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ als } b \neq 0.$$

De **driehoeksongelijkheid** geeft een verband tussen $|a \pm b|$ en de absolute waarde van a en b . Er geldt

$$(f) \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$(g) \quad |a - b| \leq |a| + |b|$$

Een andere vorm van de driehoeksongelijkheid staat bekend als de **omgekeerde driehoeksongelijkheid**:

$$(h) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Dit volgt uit het volgende. Uit $a = a - b + b$ en de driehoeksongelijkheid volgt $|a| \leq |a - b| + |b|$ en dus $|a| - |b| \leq |a - b|$. Door a en b van rol te laten wisselen vinden we ook $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$ en dus

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Vanwege eigenschap (a) volgt dan dat de ongelijkheid van eigenschap (h) geldt.

1.3.2 Afstand en intervallen

Met de **afstand** $d(a, b)$ tussen twee reële getallen bedoelen we

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Hiervoor geldt ook een variant van de driehoeksongelijkheid

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

Intervallen zijn speciale deelverzameling van de verzameling van reële getallen. Een **open interval** $]a, b[$ wordt gegeven door

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Het bestaat uit alle reële getallen tussen a en b waarbij de eindpunten er zelf niet bijhoren. Net zo kennen we het **gesloten interval**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

waarbij de eindpunten er wel bijhoren, en de half-open, half-gesloten intervallen

$$\begin{aligned} [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

1.3.3 Oneindig en min-oneindig

Oneindig (notatie: ∞) en min-oneindig (notatie: $-\infty$) zijn geen reële getallen. Het zijn symbolen die gebruikt worden om “iets” aan te geven dat groter is dan elk reëel getal (voor ∞) of kleiner dan elk reëel getal (voor $-\infty$). In plaats van ∞ schrijven we ook wel $+\infty$.

Deze symbolen gebruiken we om onbegrensde intervallen

$$\begin{aligned} [a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\]a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{aligned}$$

mee aan te duiden. We spreken ook van **oneindige intervallen**. De notatie $] - \infty, \infty[$ is een andere notatie voor \mathbb{R} , de verzameling van alle reële getallen.

Sommige rekenkundige bewerkingen kunnen we uitbreiden tot oneindig en min-oneindig. Zo geldt bijvoorbeeld, als $a \in \mathbb{R}$,

$$(a) \quad a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$

$$(b) \quad a - \infty = -\infty, \quad \infty - a = \infty, \quad a - (-\infty) = \infty, \quad -\infty - a = -\infty.$$

$$(c) \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty.$$

Niet gedefinieerd zijn $\infty - \infty$ en $-\infty + \infty$. We spreken ook wel van **onbepaalde vormen**

Bij vermenigvuldiging en deling moeten we opletten met het teken van a .

(d) Als $a > 0$ dan geldt $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$.

(e) Als $a < 0$ dan geldt $a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$.

De bewerkingen $0 \cdot \infty$ en $0 \cdot (-\infty)$ zijn niet gedefinieerd.

1.4 Complexe getallen (inleiding)

Algebraïsche vergelijkingen hebben niet altijd reële oplossingen. De vergelijking $x^2 + 1 = 0$ is een voorbeeld hiervan. De complexe getallen vormen een uitbreiding van de reële getallen waarin algebraïsche vergelijkingen wel altijd een oplossing hebben.

Aan de reële getallen voegt men een nieuw getal i toe met de eigenschap dat

$$i^2 = -1.$$

Dit getal is de **imaginaire eenheid**. Verder vormt men combinaties

$$z = x + iy, \quad \text{met } x, y \in \mathbb{R}.$$

De getallen die men zo verkrijgt vormen de verzameling \mathbb{C} van **complexe getallen**. Als $y = 0$ dan is $z = x + i0 = x$ een reëel getal. De complexe getallen vormen dus een uitbreiding van de reële getallen.

Als $z = x + iy$ dan noemt men x het **reële deel** van z en y het **imaginaire deel**. We noteren

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Als $y = 0$ dan is z reëel en als $x = 0$ dan is $z = iy$ **zuiver imaginair**.

Met complexe getallen kunnen we rekenen zoals met reële getallen. De enige nieuwe regel waarmee we rekening moeten houden is dat $i^2 = -1$.

Als $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$ dan geldt

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Dus

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad \operatorname{Im}(z_1 z_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

De **complex toegevoegde** van het complexe getal $z = x + iy$ is

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Er geldt dat

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

en dit is een positief reëel getal.

De complex toegevoegde kan handig gebruikt worden bij deling van complexe getallen. Als $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$ met $z_2 \neq 0$, dan is

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

Dus

$$\operatorname{Re} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Voorbeeld 1.4.1. Bereken de som, het product en het quotiënt van de complexe getallen $z_1 = 2 + 3i$ en $z_2 = 4 - 2i$.

Er geldt

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (4 - 2i) = (2 + 4) + (3i - 2i) = 6 + i \\ z_1 z_2 &= (2 + 3i)(4 - 2i) = 2(4 - 2i) + 3i(4 - 2i) = 8 - 4i + 12i - 6i^2 \\ &= 8 + 8i + 6 = 14 + 8i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 + 3i}{4 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{8 + 4i + 12i + 6i^2}{16 + 4} \\ &= \frac{8 + 16i - 6}{20} = \frac{2 + 16i}{20} = \frac{1}{10} + \frac{4}{5}i.\end{aligned}$$

We kunnen nu ook **gehele machten** van een complex getal z nemen door z herhaald met zichzelf te vermenigvuldigen:

$$z^2 = z \cdot z, \quad z^3 = z \cdot z \cdot z, \quad z^4 = z \cdot z \cdot z \cdot z,$$

enzovoorts. We stellen ook

$$z^0 = 1, \quad \text{en} \quad z^1 = z.$$

Als $z \neq 0$, dan is $z^{-1} = \frac{1}{z}$ en

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \frac{1}{z^n}.$$

Voorbeeld 1.4.2. Elke gehele macht van i is gelijk aan één van de getallen i , $-i$, 1 of -1 . Bijvoorbeeld

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = 1, \quad i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i.$$

In het algemeen geldt als $n \in \mathbb{Z}$,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

1.5 Telproblemen

1.5.1 Faculteiten en binomiaalcoëfficiënten

De natuurlijke getallen worden gebruikt om te tellen. We kunnen bijvoorbeeld tellen op hoeveel manieren we drie personen op een rij kunnen zetten. Als we de personen met A , B en C aangeven, dan zijn er de volgende mogelijkheden ABC , ACB , BAC , BCA , CAB en CBA . Er zijn dus zes mogelijkheden.

Om het aantal mogelijkheden om n personen op een rij te zetten te bepalen redeneren we als volgt. Voor de eerste positie hebben we n mogelijkheden, daarna hebben we nog $n - 1$ mogelijkheden voor de tweede positie, dan $n - 2$ mogelijkheden voor de derde positie, enzovoorts. In totaal zijn er

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

mogelijkheden.

We noteren het product van de natuurlijke getallen van 1 tot en met n met $n!$ en we spreken het uit als **n -faculteit** (in het Engels n factorial). Dus

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n - 1) \times n.$$

We spreken af dat per definitie

$$0! = 1.$$

Voorbeeld 1.5.1. Hoeveel mogelijke rangschikkingen zijn er na de reguliere competitie van de Jupiler Pro League?

Vanaf het seizoen 2009–2010 bestaat de Jupiler Pro League uit 16 voetbalteams. Het aantal mogelijke rangschikkingen is

$$16! = 20922789888000.$$

Tot aan het seizoen 2008–2009 waren er 18 teams. Toen was het aantal rangschikkingen

$$18! = 6402373705728000.$$

Dit is een getal met 16 cijfers.

Een tweede telprobleem is om te tellen op hoeveel manieren we een groep van k personen kunnen vormen uit een totaal van n personen. (De volgorde binnen de groep maakt niet uit.) Zo'n groep heet een k -combinatie of kortweg **combinatie** en het aantal manieren heet een **binomiaalcoëfficiënt** of **combinatiegetal** en wordt genoteerd met

$$\binom{n}{k} \quad \text{of} \quad {}_nC_k \quad \text{of} \quad C_n^k.$$

Neem als voorbeeld $n = 4$ en $k = 2$. Als we de personen aanduiden met A , B , C en D , dan zijn er de volgende combinaties AB , AC , AD , BC , BD en CD . Dit zijn er 6 en dus is

$$\binom{4}{2} = 6.$$

Merk op dat bij een combinatie de volgorde in een groepje niet uitmaakt. De combinaties AB en BA zijn dezelfde.

Om een groep van k personen uit een totaal van n personen te maken, kunnen we beginnen met 1 persoon te kiezen. Dit kan op n manieren. Vervolgens nemen we een tweede persoon en dit kan op $n - 1$ manieren, enzovoorts. De k -de persoon kunnen we nog op $n - k + 1$ manieren kiezen. In totaal geeft dit

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) \quad (1.5.1)$$

mogelijkheden. Maar nu moeten we ons realiseren dat we teveel geteld hebben. We hebben namelijk een groep van k personen met daarin een volgorde. We hebben immers een eerste persoon aangeduid, een tweede persoon, enzovoorts.

Bij een combinatie doet deze volgorde niet terzake. De vraag is nu hoeveel keer we een bepaalde combinatie hebben geteld. De combinatie ABD bijvoorbeeld, kunnen we krijgen als ABD (d.w.z. we kiezen eerst persoon A , dan B en dan D), maar ook als ADB , BAD , BDA , DAB en DBA . In totaal is dat 6 keer. Voor een combinatie van grootte k is dit aantal $k!$.

Om het juiste aantal combinaties te vinden moeten we bijgevolg (1.5.1) delen door $k!$. Er geldt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1)}{k!}.$$

Dit kunnen we eenvoudiger schrijven door teller en noemer te vermenigvuldigen met $(n - k)!$. De teller wordt dan $n!$ en dus

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}. \quad (1.5.2)$$

Voorbeeld 1.5.2. Er geldt

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n - 1)!} = n \\ \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!(n - 2)!} = \frac{n(n - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Vanwege onze afspraak dat $0! = 1$, geldt ook

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Uit de formule (1.5.2) is het duidelijk dat

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}.$$

Dan volgt ook

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n - 1} = n, \quad \binom{n}{n - 2} = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Eigenschappen van binomiaalcoëfficiënten kunnen met de formule (1.5.2) worden aangetoond, maar vaak ook door terug te grijpen naar de interpretatie in termen van het aantal combinaties.

Voorbeeld 1.5.3. We laten op twee manieren zien dat, als $k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad (1.5.3)$$

De eerste manier is door een berekening. De rechterkant van (1.5.3) is

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

We brengen dit op gelijke noemer door teller en noemer in de eerste term met $n-k$ te vermenigvuldigen en in de tweede term met k . Er volgt

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

De tweede manier om (1.5.3) te bewijzen is door de k -combinaties van n objecten op te delen in twee groepen, afhankelijk van het feit of een gegeven object A al dan niet tot de combinatie behoort. Als A niet tot de combinatie behoort dan worden alle k elementen genomen uit $n-1$ objecten (namelijk alle objecten behalve A). Dit kan op $\binom{n-1}{k}$ manieren.

Als A wel tot de combinatie behoort, dan moeten de overige $k-1$ elementen uit $n-1$ objecten genomen worden en dit kan op $\binom{n-1}{k-1}$ manieren. Het totaal aantal k -combinaties is de som $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

1.5.2 Het binomium van Newton

De binomiaalstelling of binomium van Newton is een formule voor de macht van de som van twee getallen. Voorbeelden zijn

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

De coëfficiënten die hierin voorkomen zijn precies de binomiaalcoëfficiënten. Bijvoorbeeld voor 4 geldt

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1$$

en dus is

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

De algemene vorm hiervan staat bekend als het **binomium van Newton**:

Stelling 1.5.4. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \quad (1.5.4)$$

Bewijs. Om (1.5.4) aan te tonen merken we op dat $(a+b)^n$ gelijk is aan een product van n factoren $a+b$:

$$\underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)}_{n \text{ factoren}}$$

Bij het volledig uitwerken van het product krijgen we termen van de vorm $a^j b^k$ met $j+k=n$. Deze termen ontstaan door bij elke factor $a+b$ een keuze te maken tussen a of b . De term $a^{n-k}b^k$ ontstaat door k keer voor b te kiezen en $n-k$ keer voor a . Er zijn $\binom{n}{k}$ mogelijkheden om uit de n factoren precies k keer voor b te kiezen. De term $a^{n-k}b^k$ krijgen we bijgevolg $\binom{n}{k}$ keer. Door ten slotte over k te sommeren vinden we (1.5.4). \square

1.5.3 Somteken en productteken

Een compactere manier om de rechterkant van (1.5.4) op te schrijven is met behulp van het **somteken** Σ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (1.5.5)$$

Deze schrijfwijze vermijdt ook het gebruik van de puntjes $+\cdots+$, waarvan de betekenis aan de goede verstaander wordt overgelaten.

Voor de som van getallen a_1, a_2, \dots, a_n noteren we

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \quad (1.5.6)$$

De veranderlijke k die in deze notatie gebruikt wordt is de **sommatie-index**. Ze heeft zelf geen betekenis en kan door een andere letter vervangen worden op voorwaarde dat die letter ook zelf geen betekenis heeft. Zo is (1.5.6) gelijk aan $\sum_{j=1}^n a_j$ waarbij we j als sommatie-index gebruiken. Het is echter niet mogelijk om n als sommatie-index te gebruiken omdat n al gebruikt wordt als bovengrens in de sommatie.

Het is niet noodzakelijk dat de sommatie-index begint bij 1. We kunnen (1.5.6) ook bijvoorbeeld schrijven als $\sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$.

Op analoge wijze voeren we het **productteken** \prod in voor het product van de getallen a_1, a_2, \dots, a_n ,

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n. \quad (1.5.7)$$

Het speciale geval dat $a_k = k$ leidt tot de faculteit

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

1.5.4 Principe van volledige inductie

Nauw verwant met de natuurlijke getallen is het principe van volledige inductie. Dit is een bewijsvorm die vaak voorkomt in de wiskunde. In deze cursus wiskunde voor wetenschappen wordt geen nadruk gelegd op bewijsvoering. Bewijzen zijn evenwel een belangrijk onderdeel van de wiskunde en vormen in zekere zin de kracht van de wiskunde. Door middel van een bewijs kan de waarheid van een wiskundige bewering onomstotelijk en voor altijd worden aangetoond.

Het principe van volledige inductie gaat over wiskundige beweringen die afhangen van een natuurlijk getal n . Voorbeeld van zulke beweringen zijn

1. n is groter dan 4,
2. $n^2 + n + 2$ is een veelvoud van vier,
3. $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$.

Een bewering kan waar of niet waar zijn. Als de bewering afhangt van n , zoals in de voorbeelden, zal in het algemeen het waar zijn van de bewering afhangen van n . Met andere woorden, voor sommige waarden van n is de bewering waar, voor andere is ze niet waar.

De eerste bewering “ n is groter dan 4” is niet waar voor $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ en $n = 4$. Voor alle andere natuurlijke getallen is ze wel waar.

De tweede bewering “ $n^2 + n + 2$ is een veelvoud van vier” is duidelijk niet waar voor $n = 0$. Door in te vullen zien we dat het wel waar is voor $n = 1$ en $n = 2$, en niet waar voor $n = 3$. Door nog wat meer waarden in te vullen zie je wellicht een patroon ontstaan.

Bij de derde bewering “ $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ ” staat in het linkerlid van de gelijkheid de som van de natuurlijke getallen van 1 tot en met n . Voor $n = 0$ is het niet meteen duidelijk wat dit betekent en we laten $n = 0$ hier verder buiten beschouwing.

Voor $n = 1$, $n = 2$, enzovoorts kunnen we de som van de natuurlijke getallen van 1 tot en met n uitrekenen, en we zullen steeds zien dat het gelijk is aan $n(n+1)/2$. Dit leidt tot het vermoeden dat de gelijkheid wel eens waar zou kunnen zijn voor elk natuurlijk getal (behalve $n = 0$). Een bewijs hiervan kan inderdaad gegeven worden met volledige inductie.

Stelling 1.5.5. (*principe van volledige inductie*)

Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van een natuurlijk getal n . Zij n_0 een natuurlijk getal en veronderstel dat het volgende geldt:

- (a) De bewering $P(n_0)$ is waar.
- (b) Indien de bewering $P(k)$ waar is voor een zeker natuurlijk getal $k \geq n_0$, dan is de bewering $P(k+1)$ eveneens waar.

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$.

De eerste voorwaarde bij volledige inductie is dat $P(n_0)$ waar is. Dit wordt de **basisstap** genoemd. De tweede voorwaarde is dat uit het waar zijn van $P(k)$ volgt dat $P(k+1)$ ook waar is. Symbolisch is dit

$$P(k) \implies P(k+1).$$

Deze tweede voorwaarde noemt men de **inductiestap**. In een bewijs dat gebaseerd is op het principe van volledige inductie zal men in de inductiestap aannemen dat $P(k)$ juist is voor zekere k om daaruit $P(k+1)$ te bewijzen. De aanname dat $P(k)$ juist is noemt men de **inductiehypothese**.

De juistheid van het principe van volledige inductie kan als volgt worden ingezien. Vanwege de basisstap is $P(n)$ waar voor $n = n_0$. Neem nu $k = n_0$ in de inductiestap. De inductiestap zegt het volgende: “Als $P(n_0)$ waar is, dan is $P(n_0+1)$ ook waar”. We weten dat $P(n_0)$ waar is uit de beginstap, zodat uit de inductiestap volgt dat $P(n)$ waar is voor $n = n_0 + 1$.

Neem vervolgens $k = n_0 + 1$ in de inductiestap. Dan zal op dezelfde manier volgen dat $P(n)$ waar is voor $n = n_0 + 2$. Enzovoorts. Door zo verder te gaan zullen we vinden dat $P(n)$ waar is voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$.

In veel toepassingen van volledige inductie zal $n_0 = 0$ of $n_0 = 1$.

Voorbeeld 1.5.6. Als voorbeeld van het gebruik van het principe van volledige inductie bewijzen we dat voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.5.8)$$

De bewering (1.5.8) noemen we $P(n)$. We hebben hier $n_0 = 1$.

Basisstap: $P(1)$ is de bewering dat $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ en dit is duidelijk waar. Bijgevolg is de bewering $P(1)$ waar. De basisstap is bewezen.

Inductiestap: In de inductiestap nemen we een willekeurig natuurlijk getal $k \geq 1$ en we veronderstellen dat $P(k)$ waar is. Dat wil zeggen dat

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (1.5.9)$$

We willen aantonen dat

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad (1.5.10)$$

want dat is de bewering $P(k+1)$.

Om dit aan te tonen vertrekken we van het linkerlid van (1.5.10)

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$$

Uit de inductiehypothese (1.5.9) volgt dat dit gelijk is aan

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Dus

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

en dit is precies de uitspraak (1.5.10) die we moesten aantonen. Dus $P(k + 1)$ is waar en dit bewijst de inductiestap.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt de bewering $P(n)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$, vanwege het principe van volledige inductie.

We zien in dit voorbeeld de structuur van een bewijs met volledige inductie. Er zijn altijd drie stappen: de basisstap, de inductiestap en de conclusie. De conclusie is steeds dezelfde, maar ze is wel nodig om het bewijs af te maken. In de meeste gevallen is de basisstap eenvoudig en is de inductiestap het belangrijkste deel van het bewijs.

Gebruik makend van het somteken luidt de bewering (1.5.8) dat

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.6 Oefeningen

Oefening 1.1. Bereken (zonder rekenmachine!) en schrijf elk resultaat in de eenvoudigste vorm:

(a) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \div \frac{10}{3}$

(d) $\frac{m+n}{p} + \left(-\frac{p}{q} \right)$

(b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{4} \right)$

(e) $\left(\frac{r}{s} - \frac{t}{u} \right) \cdot \frac{v}{w}$

(c) $\frac{3}{17} \div \frac{14}{51} - \frac{7}{6}$

(f) $\frac{1}{m+n} \div \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$

Oefening 1.2. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen. Je mag veronderstellen dat $a > 0$ en $b > 0$.

(a) $\frac{(a^3 b^2)^{-1/4}}{a^{-1/8}}$

(c) $\sqrt[2]{a^4 \sqrt[4]{a^8 \sqrt[8]{a^4 \sqrt[4]{a^2}}}}$

(b) $\sqrt{(\sqrt[3]{a^3})^2}$

(d) $\sqrt{\frac{\sqrt[5]{a^{2/3} b^4} a^{-3} b}{a^{-2/3} b^3 \sqrt[4]{a}}}$

Oefening 1.3. Neem aan dat x en y allebei behoren tot het interval $]a, b[$. Laat zien dat $|x - y| < b - a$.

Oefening 1.4. Schrijf de verzameling van alle reële getallen x die aan onderstaande ongelijkheden voldoen als een interval

- (a) $|x| < 3$ (d) $|x + 4| < 3$
 (b) $|x - 2| \leq 2$ (e) $|x + 3| \leq |x + 1|$
 (c) $|x - 3| \leq 5$ (f) $|x - 2| > |x|$

Oefening 1.5. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ die voldoen aan

- (a) $|x^2 - 1| \leq 3$ (d) $|x^2 - 1| \leq 2x + 2$
 (b) $|x - 1| > |x + 1|$ (e) $|x + 2| \geq 5$
 (c) $|x| + |x - 1| < 2$ (f) $|9 - x^2| > 9$

Oefening 1.6. Zij $z_1 = 3 - i$ en $z_2 = 1 + 2i$. Bereken dan:

- (a) $z_1 + z_2$ (c) $\frac{z_1}{z_2}$
 (b) $z_1 z_2$ (d) $\frac{z_1}{z_2^2}$

Oefening 1.7. Zij $z_1 = 2 + 3i$ en $z_2 = -2 + i$. Bereken de volgende complex toegevoegden:

- (a) $\overline{z_1 + z_2}$ (c) $\overline{z_1/z_2}$
 (b) $\overline{z_1 z_2}$ (d) $\overline{\overline{z_1}/\overline{z_2}}$

Oefening 1.8. Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $z = x + iy$:

- (a) $(5 + 3i)(3 - i)$ (f) $\frac{1}{5} - \frac{3 - 4i}{3 + 4i}$
 (b) $(1 - 3i)^2 - (1 + 3i)^2$ (g) $(2 + i)(3 + i)$
 (c) $\frac{1 - i}{1 + i}$ (h) $\overline{(5 + i)(2 + 3i)}$
 (d) $(-1 - 3i)(-1 + 3i)$ (i) $\frac{1}{2 + i}$
 (e) $(1 + 2i)^5$ (j) $\frac{1 + 5i}{1 - 3i}$

Oefening 1.9. Bereken $\binom{6}{4}$ en $\binom{8}{7}$.

Oefening 1.10. Bij het Lotto-spel moet je 6 getallen kiezen uit 1 t.e.m. 45. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Oefening 1.11. Op hoeveel verschillende manieren kunnen 15 studenten worden ingedeeld in twee groepen van 7 en 8 studenten?

Oefening 1.12. Voor de interfacultaire roeicompetitie moet elke faculteit een ploeg van 4 roeiers en een kapitein afvaardigen. De faculteit Wetenschappen heeft 10 geschikte kandidaten waarvan er 3 in aanmerking komen om kapitein te zijn. Op hoeveel verschillende manieren kan men een ploeg samenstellen, rekening houdend met het feit dat de 3 kandidaat-kapiteins ook roeier kunnen zijn?

Oefening 1.13. Drie prijzen worden verdeeld over 10 personen. Hoeveel verschillende verdelingen zijn er mogelijk in de volgende gevallen?

- (a) De prijzen zijn alle drie hetzelfde en elke persoon kan ten hoogste één prijs krijgen.
- (b) De prijzen zijn alle drie verschillend en elke persoon kan ten hoogste één prijs krijgen.
- (c) De prijzen zijn alle drie verschillend en er mag slechts één prijs uitgereikt worden.

Oefening 1.14. Bereken:

- (a) de coëfficiënt van x^4 in $(2x + 5)^{10}$.
- (b) de coëfficiënt van x^3 in $(2x^2 + \frac{1}{3x})^5$.

Oefening 1.15. Laat zien dat:

$$(a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \qquad (b) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \text{als } n \geq 1.$$

Oefening 1.16. Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Oefening 1.17. Laat zien dat voor $k, n \in \mathbb{N}$ met $k \leq n$ geldt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{en} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Oefening 1.18. Schrijf alle termen van de volgende sommen op:

$$\begin{array}{lll} (a) \sum_{j=2}^5 2^j & (c) \sum_{k=1}^3 kx^k & (e) \sum_{x=1}^3 kx^k \\ (b) \sum_{n=0}^4 \frac{1}{1+n^2} & (d) \sum_{n=1}^3 kx^k & (f) \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{array}$$

Oefening 1.19. Schrijf met het somteken:

$$\begin{array}{ll} (a) 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots & \\ (b) x + x^5 + x^9 + \dots + x^{4k+1} + \dots + x^{41} & \\ (c) \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6} + \frac{4}{24} + \frac{5}{120} + \frac{6}{720} & \end{array}$$

Oefening 1.20. Schrijf voluit:

$$\begin{array}{ll} (a) \prod_{n=0}^4 6^n & (c) \prod_{k=1}^n (\pi - a_k) \\ (b) \prod_{i=3}^7 \frac{i+1}{i^2} & (d) \prod_{j=1}^6 (x^2 + x) \end{array}$$

Oefening 1.21. Schrijf met het productteken:

$$(a) \quad k^2 k^4 k^6 k^8 k^{10} \qquad (b) \quad (x-1)(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{1}{3})^3 \cdots (x-\frac{1}{10})^{10}$$

Oefening 1.22. Bewijs met het principe van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Oefening 1.23. Bewijs met het principe van volledige inductie dat de volgende uitspraken gelden voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

$$(a) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (c) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \qquad (d) \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ voor } x \neq 1$$

Oefening 1.24. Bewijs met volledige inductie dat $2^n \leq (n+1)!$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Oefening 1.25. Bewijs met volledige inductie dat voor elke $x > -1$ en voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Oefening 1.26. Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ het getal $n(n^2+5)$ deelbaar is door 6.

Oefening 1.27. Laat zien dat $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Oefening 1.28. (Examenvraag) We vragen ons af of de gelijkheid

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{an}{bn+1} \tag{1.6.1}$$

geldt voor $n \in \mathbb{N}_0$ en zekere getallen a en b .

- (a) Bepaal waarden voor a en b zodanig dat (1.6.1) geldt voor zowel $n = 1$ als $n = 2$.
- (b) Bewijs met het principe van volledige inductie dat de gelijkheid (1.6.1) geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Neem hierbij de waarden van a en b die u in onderdeel (a) gevonden hebt.

Hoofdstuk 2

Functies

2.1 Definities

2.1.1 Inleiding

Als we de ideale gaswet schrijven in de vorm

$$V = \frac{nRT}{p}$$

dan zien we het volume V als afhankelijke veranderlijke waarvan de waarde afhangt van de waarde van de onafhankelijke veranderlijken p , T en n . In dit voorbeeld is V een reële functie van drie reële veranderlijken p , T en n . In dit hoofdstuk gaan we ons bezighouden met reële functies van één reële veranderlijke.

We noteren de onafhankelijke veranderlijke met x en de afhankelijke veranderlijke met y . De waarde van y wordt bepaald door de waarde van x volgens een **functie** f :

$$y = f(x).$$

De functie f kan expliciet gegeven zijn door een formule zoals

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad (2.1.1)$$

maar dat hoeft niet. In veel toepassingen is de functie niet precies bekend. Door middel van experimenten probeert men dan zoveel mogelijk te weten te komen over f . In deze cursus zullen functies echter meestal expliciet door een formule gegeven worden.

Het **domein** van een functie f is de verzameling van alle x waarden waarvoor $y = f(x)$ bestaat. Voor de functie in (2.1.1) is het domein gelijk aan de reële getallen \mathbb{R} . Het domein kan ook een deelverzameling van \mathbb{R} zijn, zoals voor de functie

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \quad (2.1.2)$$

waarvoor geldt dat het domein gelijk is aan het interval $[1, \infty[$. Het **bereik** van een functie is de verzameling waartoe de functiewaarden behoren. De meeste

functies in dit hoofdstuk zijn **reële functies**, d.w.z. functies met \mathbb{R} als bereik. We komen echter ook **complexe functies** tegen met \mathbb{C} als bereik.

Soms is het van belang om precies aan te geven wat het domein en bereik van een functie is. Als X het domein en Y het bereik van f is, dan gebruikt men in zo'n geval de uitgebreide notatie

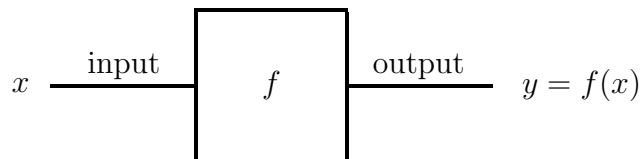
$$f : X \rightarrow Y : x \mapsto f(x)$$

om de functie aan te duiden. De functie (2.1.2) wordt met deze notatie

$$f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x-1}.$$

We zullen deze uitgebreide notatie in deze cursus verder niet gebruiken.

Een functie wordt soms voorgesteld als een “input-output machine”:



die x als “input” krijgt en er een “output”, $y = f(x)$, van maakt.

2.1.2 Bewerkingen op functies

Door eenvoudige functies te combineren kunnen we tot nieuwe ingewikkeldere functies komen. Als f een functie en c een constante is dan is cf de functie gegeven door

$$(cf)(x) = cf(x).$$

De **som** $f + g$ en het **verschil** $f - g$ van twee functies f en g zijn de functies die gegeven worden door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

Het domein van deze functies bestaat uit alle x waarden die zowel tot het domein van f als tot het domein van g behoren.

Een **lineaire combinatie** van de functies f en g is van de vorm

$$(c_1f + c_2g)(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$$

met constanten c_1 en c_2 .

Het **product** fg en het **quotiënt** f/g zijn de functies die gegeven worden door

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Het domein van fg bestaat ook uit alle x waarden die zowel tot het domein van f als tot het domein van g behoren. Omdat we niet door 0 kunnen delen, is er voor het domein van f/g de bijkomende voorwaarde dat $g(x) \neq 0$.

Voorbeeld 2.1.1. Als $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $g(x) = (2-x)/x$ dan is

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{2-x}{x}.$$

Het domein van f bestaat uit alle reële getallen groter dan of gelijk aan -1 , het domein van g bestaat uit alle reële getallen behalve 0 , en het domein van $f+g$ bestaat uit alle reële getallen die groter dan of gelijk zijn aan -1 met uitzondering van 0 .

Verder geldt

$$(fg)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \frac{2-x}{x},$$

en

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x+1} \cdot \frac{x}{2-x}.$$

Omdat $g(2) = 0$ behoort $x = 2$ niet tot het domein van f/g .

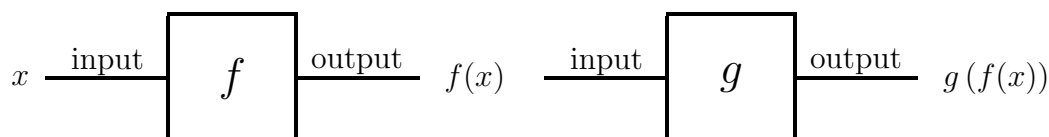
2.1.3 Samenstellen van functies

De **samengestelde functie** $g \circ f$ (spreek uit “ g na f ”) van twee functies f en g wordt gegeven

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Om $(g \circ f)(x)$ te vinden, berekenen we eerst $y = f(x)$ en vervolgens $g(y)$. Het domein van $g \circ f$ bestaat uit alle x waarden uit het domein van f waarvoor $y = f(x)$ tot het domein van g behoort.

Als “input-output machine” ziet de samengestelde functie er als volgt uit:



Voorbeeld 2.1.2. Neem $f(x) = \sqrt{x} - 1$ en $g(x) = \frac{1}{x}$. Dan is

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x} - 1) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

en

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} - 1.$$

Uit dit voorbeeld blijkt dat het samenstellen van functies niet commutatief is, dat wil zeggen dat in het algemeen

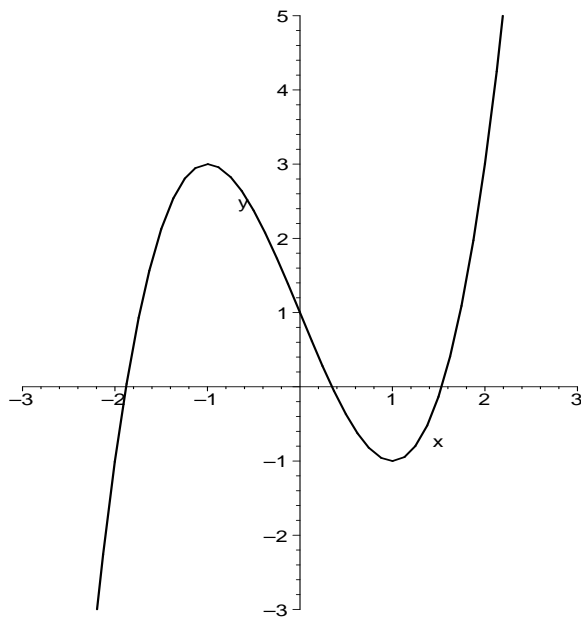
$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Ga zelf na wat het domein van $g \circ f$ en $f \circ g$ in het voorbeeld 2.1.2 is.

2.1.4 Grafiek van een functie

Een reële functie kunnen we ons voorstellen door middel van de grafiek. De **grafiek** van de functie f is de deelverzameling punten van het geijkte vlak bestaande uit alle koppels (x, y) met $y = f(x)$. De grafiek van de functie f bevat alle informatie over de functie en laat ons toe de functie f te visualiseren.

De grafiek van een functie kan getekend worden door een groot aantal punten van de grafiek uit te rekenen en deze vervolgens met elkaar te verbinden. In Figuur 2.1 is de grafiek van $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ getekend voor $-3 < x < 3$ en $-3 < y < 5$.



Figuur 2.1: Grafiek van de functie $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$

Uit de grafiek in Figuur 2.1 krijgen we een aardig beeld van het verloop van de functie. Als we de grafiek van links naar rechts volgen, dan is ze eerst stijgend tot een zekere maximale waarde, dan daalt ze tot een zekere minimale waarde, waarna ze weer stijgend is.

We zien ook dat de grafiek van f de horizontale x -as snijdt in drie waarden. Deze drie waarden zijn de **nulpunten** van de functie. De nulpunten zijn bij benadering $-1.9 \dots$, $0.3 \dots$ en $1.5 \dots$. De functie $f(x) = x^3 - 3x + 1$ is een voorbeeld van een derdegraads veelterm.

2.2 Veeltermen

Indien a_0, a_1, \dots, a_n gegeven reële (of complexe) getallen zijn met $a_n \neq 0$, dan is de functie

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

een **veelterm** of **polynoom**. Het natuurlijke getal n is de **graad** van de veelterm en de getallen a_0, a_1, \dots, a_n zijn de **coëfficiënten**.

2.2.1 Eerstegraads veelterm

Een eerstegraads veelterm (soms ook wel **lineaire functie**) is van de vorm

$$f(x) = ax + b.$$

De grafiek hiervan is een rechte met a als richtingscoëfficiënt en b als snijpunt met de y -as. We kunnen de functie ook schrijven als

$$f(x) = a(x - x_0), \quad x_0 = -\frac{b}{a}$$

waaruit we zien dat x_0 het nulpunt van de functie is.

Voor twee gegeven koppels (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $x_1 \neq x_2$ is er precies één lineaire functie f met

$$f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2.$$

Door invulling in $f(x) = ax + b$ zien we dat a en b moeten voldoen aan

$$ax_1 + b = y_1, \quad ax_2 + b = y_2.$$

Hieruit volgt

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - ax_1 = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2 - x_1}.$$

De richtingscoëfficiënt van de rechte door (x_1, y_1) en (x_2, y_2) is dus gelijk aan $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

2.2.2 Tweedegraads veelterm

Een tweedegraads veelterm (ofwel **kwadratische functie**) heeft de vorm

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

De grafiek hiervan is een **parabool**. Als $a > 0$ dan is de parabool een dalparabool die een minimum aanneemt in $x = -\frac{b}{2a}$. Als $a < 0$ dan is de parabool een bergparabool die in $x = -\frac{b}{2a}$ een maximum aanneemt.

De nulpunten van f vinden we uit de formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.2.1)$$

Gegeven de nulpunten x_1 en x_2 kunnen we de tweedegraads veelterm factoriseren tot

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Omgekeerd volgt uit deze factorisatie dat x_1 en x_2 de nulpunten zijn.

Voorbeeld 2.2.1. (a) $x^2 - 9$: De nulpunten van $x^2 - 9$ voldoen aan $x^2 = 9$. Dit geeft $x_1 = 3$ en $x_2 = -3$. Bijgevolg is

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

de factorisatie van $x^2 - 9$.

(b) $x^2 - 5x - 6$: De nulpunten zijn

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

en dus $x_1 = 6$ en $x_2 = -1$. Bijgevolg is

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1).$$

(c) $x^4 - 5x^2 + 4$: Dit is een veelterm van graad 4. Stellen we $t = x^2$ dan is

$$x^4 - 5x^2 + 4 = t^2 - 5t + 4.$$

De tweedegraadsveelterm in t heeft als nulpunten $t_1 = 1$ en $t_2 = 4$. Bijgevolg is

$$t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$$

en dus

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

De veeltermen $x^2 - 1$ en $x^2 - 4$ factoriseren op hun beurt als

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad \text{en} \quad x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Uiteindelijk vinden we

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

De nulpunten zijn ± 1 en ± 2 .

De uitdrukking

$$D = b^2 - 4ac$$

is de **discriminant** van f . Als $D > 0$ dan zijn er twee verschillende reële nulpunten. Als $D = 0$ dan zijn er twee samenvallende nulpunten. Als $D < 0$ dan zijn er geen reële nulpunten. De nulpunten liggen dan in het complexe vlak. Immers uit (2.2.1) volgt dan dat

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-D}}{2a}$$

en de twee complexe nulpunten zijn elkaars complex toegevoegde.

2.2.3 Hogeregraads veeltermen

Een veelterm van graad n kan altijd gefactoriseerd worden als product van n lineaire factoren

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ &= a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \end{aligned}$$

waarin x_1, \dots, x_n complexe getallen zijn. Dit resultaat staat bekend als de **hoofdstelling van de algebra**.

De waarden x_1, \dots, x_n zijn precies de nulpunten van f . Sommige nulpunten kunnen meer dan eens voorkomen en dan spreken we van samenvallende of meervoudige nulpunten.

Zoals we al gezien hebben bij tweedegraadsveeltermen kan een veelterm met reële coëfficiënten niet-reële nulpunten hebben. Als x_j een niet-reëel nulpunt is van een veelterm met reële coëfficiënten dan is de complex toegevoegde \bar{x}_j ook een niet-reëel nulpunt. De niet-reële nulpunten komen dus voor in tweetallen. Het aantal niet-reële nulpunten is dus altijd een even getal. Hieruit volgt dat een veelterm van oneven graad met reële coëfficiënten altijd minstens één reëel nulpunt heeft.

Voorbeeld 2.2.2. Een veelterm van graad 3 kan drie reële nulpunten hebben of één reëel nulpunt en twee complexe nulpunten.

- (a) De veelterm $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ heeft drie reële nulpunten.
- (b) De veelterm $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)^2(x - 3)$ heeft twee verschillende reële nulpunten, namelijk $x = 1$ en $x = 3$, waarvan $x = 1$ een dubbel nulpunt is.
- (c) De veelterm $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$ heeft één reëel nulpunt. De kwadratische functie $x^2 - 2x + 2$ heeft geen reële nulpunten want de discriminant $4 - 8 = -4$ is negatief. De nulpunten zijn

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

en dit zijn complexe getallen. Samen met $x = 1$ zijn dit ook de nulpunten van de derdegraads veelterm.

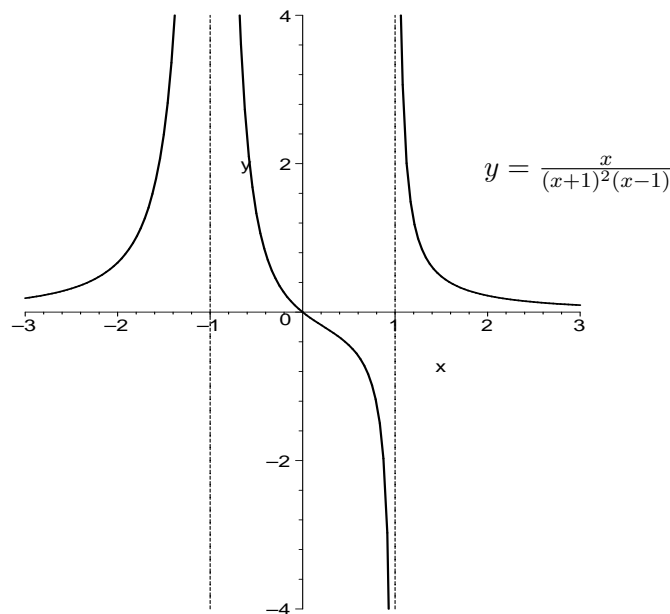
2.3 Rationale functies

Indien P en Q veeltermen zijn, zeg

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

en

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m,$$



Figuur 2.2: Grafiek van de functie $y = \frac{x}{(x+1)^2(x-1)}$ met verticale asymptoten bij $x = -1$ en $x = 1$.

dan is de functie $f = \frac{P}{Q}$ een **rationale functie**

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}.$$

Hierin is P de teller en Q de noemer van f . Het domein van f bestaat uit alle (reële of complexe) getallen x met $Q(x) \neq 0$.

2.3.1 Verticale en horizontale asymptoten

Als x_0 een nulpunt is van de noemer van de rationale functie $f(x) = P(x)/Q(x)$ maar geen nulpunt van de teller, dan geldt $|f(x)| \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow x_0$. De grafiek van f is dan onbegrensd als $x \rightarrow x_0$. We zeggen dat f een **verticale asymptoot** heeft bij $x = x_0$. De grafiek van f nadert de verticale rechte $x = x_0$ als $x \rightarrow x_0$.

Figuur 2.2 bevat de grafiek van een rationale functie met twee verticale asymptoten. De functie verandert van teken bij de verticale asymptoot $x = 1$, maar niet bij de verticale asymptoot $x = -1$, omdat $x = -1$ een dubbel nulpunt is van de noemer. De functie in Figuur 2.2 heeft ook een **horizontale asymptoot**, namelijk de rechte $y = 0$ (de x -as). Dit is de rechte waar de grafiek van f naar nadert als $x \rightarrow \pm\infty$.

2.3.2 Euclidische deling

De rationale functie wordt een echte rationale functie genoemd als de graad van de teller strikt kleiner is dan de graad van de noemer. Elke rationale functie kunnen we schrijven als de som van een veelterm met een echte rationale functie. Dit gaat met behulp van een **Euclidische deling** (ofwel deling met rest).

We geven een voorbeeld.

Voorbeeld 2.3.1. Deel $x^3 - 7x^2 + 16x - 11$ door $x - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 7x^2 + 16x - 11 & x-1 \\
 x^3 - x^2 & \hline
 - 6x^2 + 16x - 11 & x^2 - 6x + 10 \\
 - 6x^2 + 6x & \\
 - & \\
 & 10x - 11 \\
 & 10x - 10 \\
 - & \\
 & - 1
 \end{array}$$

Uit de Euclidische deling volgt dat

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 11}{x - 1} = x^2 - 6x + 10 - \frac{1}{x - 1}.$$

Hierin is $x^2 - 6x + 10$ het veeltermdeel van de rationale functie. Als x groot is, dan zal de rationale functie goed benaderd worden door het veeltermdeel. Immers $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \infty$.

De rest $-\frac{1}{x-1}$ is een echte rationale functie, waarvoor geldt dat de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer.

Deling met rest kan ook gebruikt worden om veeltermen te factoriseren als een nulpunt bekend is.

Voorbeeld 2.3.2. De derdegraads veelterm $x^3 - 5x^2 + 4$ heeft $x = 1$ als nulpunt. Dit kan door gewoon in te vullen eenvoudig geverifieerd worden. Om de andere nulpunten te vinden delen we $x^3 - 5x^2 + 4$ door $x - 1$ met behulp van een Euclidische deling

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 5x^2 + 4 & x-1 \\
 x^3 - x^2 & \hline
 - 4x^2 + 4 & x^2 - 4x - 4 \\
 - 4x^2 + 4x & \\
 - & \\
 & - 4x + 4 \\
 & - 4x + 4 \\
 - & \\
 & 0
 \end{array}$$

De deling gaat precies op, zoals verwacht. Het resultaat is dat

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x - 1} = x^2 - 4x - 4$$

De overblijvende kwadratische functie $x^2 - 4x - 4$ heeft nulpunten

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

We zien dat $x^3 - 5x^2 + 4$ drie nulpunten heeft: $x_1 = 1$, $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$ en $x_3 = 2 - 2\sqrt{2}$ en we hebben de factorisatie

$$x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x - 2 - 2\sqrt{2})(x - 2 + 2\sqrt{2}).$$

Een alternatieve methode om een nulpunt uit te delen is met behulp van een Horner-schema. Het Horner-schema is ook een efficiënte methode om de waarde van een veelterm in een gegeven punt uit te rekenen. We gaan hier verder niet op in, maar we verwijzen de geïnteresseerde lezer naar de Wikipedia pagina nl.wikipedia.org/wiki/Horner-schema. We vermelden alleen dat het Horner-schema behorende bij het vorige voorbeeld luidt

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 0 & 4 \\ & & 1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

2.3.3 Schuine asymptoot

Beschouw een rationale functie

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0,$$

waarin n de graad van de teller en m de graad van de noemer is.

Als $n < m$, dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

en als $n = m$ dan geldt

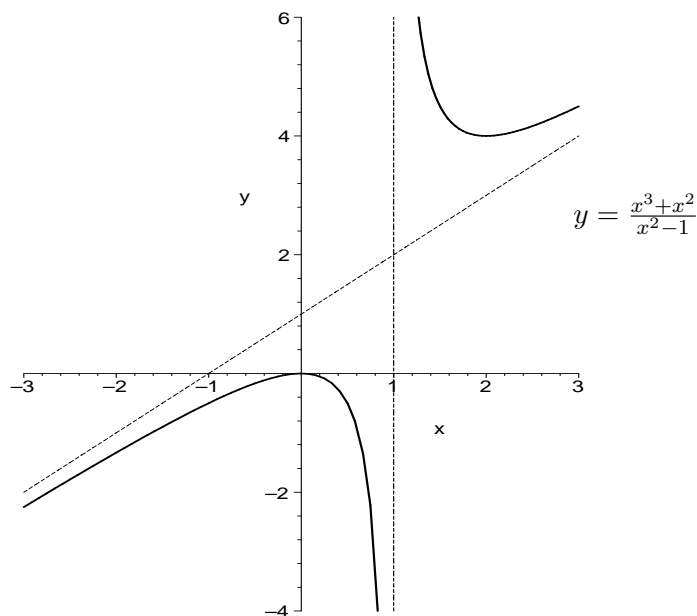
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0.$$

In beide gevallen heeft de grafiek van f een horizontale asymptoot, namelijk $y = 0$ als $n < m$ en $y = \frac{a_n}{b_m}$ als $n = m$.

Als $n = m + 1$, dan volgt na Euclidische deling dat

$$f(x) = c_1x + c_0 + \frac{P_0(x)}{Q(x)}$$

met de graad van P_0 kleiner dan de graad van Q . Het veeltermdeel is de lineaire functies $c_1x + c_0$. Als $x \rightarrow \pm\infty$, dan gaat de echte rationale functie P_0/Q naar 0, zodat $f(x)$ steeds meer lijkt op $c_1x + c_0$. De grafiek van f sluit dan steeds beter aan bij de rechte $y = c_1x + c_0$. Deze rechte noemen we een **schuine asymptoot** van f .



Figuur 2.3: De grafiek van $y = \frac{x^3+x^2}{x^2-1}$ heeft een verticale asymptoot $x = 1$ en een schuine asymptoot $y = x + 1$.

Voorbeeld 2.3.3. Voor de rationale functie

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$$

geldt dat

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + 1}{x^2 - 1}.$$

De rechte $y = x + 1$ is een schuine asymptoot, zie Figuur 2.3. De grafiek van f heeft ook een verticale asymptoot $x = 1$. Hoewel $x = -1$ ook een nulpunt van de noemer is er toch geen verticale asymptoot $x = -1$. Dit komt omdat $x = -1$ ook een nulpunt van de teller is. Als we teller en noemer factoriseren

$$f(x) = \frac{x^2(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

dan zien we dat we de factor $x + 1$ uit teller en noemer kunnen wegdelen zodat

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

2.3.4 Partieelbreuken

In sommige toepassingen is het handig om een rationale functie te schrijven als een som van eenvoudige rationale functies. Dit komt onder andere van pas bij het berekenen van integralen.

Beschouw als voorbeeld

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

De veelterm in de noemer hebben we gefactoriseerd als een product van twee lineaire functies. Vervolgens is de rationale functie geschreven als het verschil van twee eenvoudige rationale functies $\frac{1}{x+1}$ en $\frac{1}{x+2}$. Deze eenvoudige rationale functies zijn voorbeelden van **partieelbreuken**.

Een echte rationale functie $P(x)/Q(x)$ waarvan de noemer gefactoriseerd kan worden, kunnen we altijd schrijven als een lineaire combinatie van partieelbreuken. Dit noemen we **splitsen in partieelbreuken**. Herinner u dat in een echte rationale functie de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer. Als dat niet het geval is, dan voeren we eerst een Euclidische deling uit om het veeltermdeel af te zonderen, waarna we de overblijvende echte rationale functie kunnen splitsen in partieelbreuken.

We geven eerst enkele voorbeelden.

Voorbeeld 2.3.4. Gevraagd is de splitsing in partieelbreuken van de rationale functie

$$\frac{x+2}{x^2+x-12} = \frac{x+2}{(x-3)(x+4)}$$

Deze rationale functie gaan we schrijven als een lineaire combinatie van de partieelbreuken $\frac{1}{x-3}$ en $\frac{1}{x+4}$. Dat wil zeggen dat we constanten A en B zoeken zo dat

$$\frac{x+2}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} \quad \text{voor alle } x.$$

Om A en B te vinden brengen we de rechterkant op gelijke noemer

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4) + B(x-3)}{(x-3)(x+4)}.$$

We willen dus dat

$$A(x+4) + B(x-3) = x+2 \quad \text{voor alle } x. \quad (2.3.1)$$

Er zijn twee methoden om uit (2.3.1) de waarden van A en B te bepalen.

1. De eerste methode is om de nulpunten van de noemer in te vullen in de voorwaarde (2.3.1). Als we $x = 3$ invullen in (2.3.1) dan volgt $7A = 5$ zodat $A = 5/7$. Als we $x = -4$ invullen in (2.3.1) dan volgt $-7B = -2$ zodat $B = 2/7$.
2. Een tweede, meer systematische methode is om de voorwaarde (2.3.1) te herschrijven door alle termen met x bij elkaar te nemen en alle constante termen zonder x ook bij elkaar te nemen:

$$(A+B-1)x + (4A-3B-2) = 0.$$

Dit kan alleen gelden voor alle waarden van x als A en B voldoen aan de twee vergelijkingen

$$A+B-1=0 \quad \text{en} \quad 4A-3B-2=0.$$

Uit de eerste vergelijking volgt $B = 1 - A$. Als we dit invullen in de tweede vergelijking dan volgt $4A - 3 + 3A - 2 = 0$, hetgeen leidt tot

$$A = 5/7.$$

Uit $B = 1 - A$ volgt

$$B = 2/7.$$

Welke methode we ook gebruiken, we vinden $A = 5/7$ en $B = 2/7$. De gevraagde splitsing in partieelbreuken is

$$\frac{x+2}{x^2+x-12} = \frac{5}{7(x-3)} + \frac{2}{7(x+4)}.$$

Het volgende voorbeeld laat zien wat je moet doen als er een herhaalde factor is in de noemer.

Voorbeeld 2.3.5. Vind de splitsing in partieelbreuken van de rationale functie

$$\frac{3x^2+1}{(x+2)^3}$$

Omdat de factor $x+2$ drie maal voorkomt gaan we de rationale functie schrijven als een lineaire combinatie van $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{(x+2)^2}$ en $\frac{1}{(x+2)^3}$. We zoeken dus constanten A , B en C zo dat

$$\frac{3x^2+1}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}.$$

We brengen de rechterkant op gelijke noemer

$$\frac{A(x+2)^2 + B(x+2) + C}{(x+2)^3}.$$

De teller is

$$A(x+2)^2 + B(x+2) + C = Ax^2 + (4A+B)x + (4A+2B+C).$$

Dit moet gelijk zijn aan $3x^2+1$ zodat $A = 3$, $4A+B = 0$ en $4A+2B+C = 1$. Dit leidt tot

$$A = 3, \quad B = -12, \quad C = 13$$

zodat

$$\frac{3x^2+1}{(x+2)^3} = \frac{3}{(x+2)} - \frac{12}{(x+2)^2} + \frac{13}{(x+2)^3}.$$

Uit dit voorbeeld halen we de regel dat we bij het optreden van een factor $(x-x_0)^m$ in de noemer elk van de termen

$$\frac{1}{x-x_0}, \quad \frac{1}{(x-x_0)^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(x-x_0)^m}$$

meenemen in de splitsing in partieelbreuken.

Overzicht. We geven nu een overzicht van alle partieelbreuken. Er zijn vier typen.

Type (i) De eenvoudigste partieelbreuk heeft de vorm $\frac{1}{x-x_0}$ met $x_0 \in \mathbb{R}$.

Een echte rationale functie met reële coëfficiënten waarvan we de noemer kunnen factoriseren tot

$$Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

met reële en onderling verschillende nulpunten x_1, \dots, x_n kunnen we altijd schrijven als

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

voor zekere constanten A_1, A_2, \dots, A_n , zoals in Voorbeeld 2.3.4.

Type (ii) De partieelbreuken van het tweede type hebben de vorm $\frac{1}{(x-x_0)^n}$ met $x_0 \in \mathbb{R}$ en $n \geq 2$.

Deze partieelbreuken treden op als x_0 een meervoudig nulpunt van de noemer is. Als x_0 een nulpunt is met multipliciteit m , dan nemen we in de splitsing alle partieelbreuken

$$\frac{1}{x-x_0}, \quad \frac{1}{(x-x_0)^2} \quad \text{tot en met} \quad \frac{1}{(x-x_0)^m}$$

mee. Zie ook het Voorbeeld 2.3.5 voor het geval $m = 3$.

De partieelbreuken van type (i) en (ii) volstaan voor rationale functies waarvan de noemer enkel reële nulpunten heeft. Als de noemer niet-reële nulpunten heeft, dan kunnen we net zo handelen als we tenminste met complexe getallen willen rekenen. Als we niet met complexe getallen willen werken, dan hebben we nog andere partieelbreuken nodig.

Type (iii) Partieelbreuken van type (iii) hebben de vorm

$$\frac{x}{x^2+px+q} \quad \text{en} \quad \frac{1}{x^2+px+q}$$

waarin de noemer een kwadratische functie zonder reële nulpunten is. Dit betekent dat de discriminant $D = p^2 - 4q$ negatief is, ofwel

$$p^2 < 4q.$$

In berekeningen neemt men de twee partieelbreuken meestal samen tot

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Partieelbreuken van type (iii) hebben we nodig bij het splitsen in partieelbreuken van rationale functies met reële coëfficiënten waarvan de noemer niet-reële complexe nulpunten heeft.

Voorbeeld 2.3.6. Er geldt

$$\frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}$$

De noemer heeft een nulpunt in $x = 1$. De kwadratische functie $x^2 - 2x + 2$ heeft geen reële nulpunten.

We zoeken een splitsing in partieelbreuken van de vorm

$$\frac{1}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \frac{C}{x-1}.$$

Breng de rechterkant op gelijke noemer

$$\frac{(Ax + B)(x-1) + C(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-B+2C)}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}.$$

De teller moet gelijk zijn aan 1. Dit levert de vergelijkingen

$$A + C = 0, \quad -A + B - 2C = 0, \quad -B + 2C = 1$$

met als oplossing

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

Bijgevolg is

$$\frac{1}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{-x+1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{x-1}.$$

Type (iv) Het vierde type partieelbreuken heeft de vorm

$$\frac{x}{(x^2 + px + q)^n} \quad \text{en} \quad \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} \quad \text{met } p^2 < 4q \quad \text{en} \quad n \geq 2.$$

Dit type treedt op als de noemer meervoudige complexe nulpunten heeft. Dit komt zelden voor en we gaan er verder niet op in.

2.4 Inverse functies

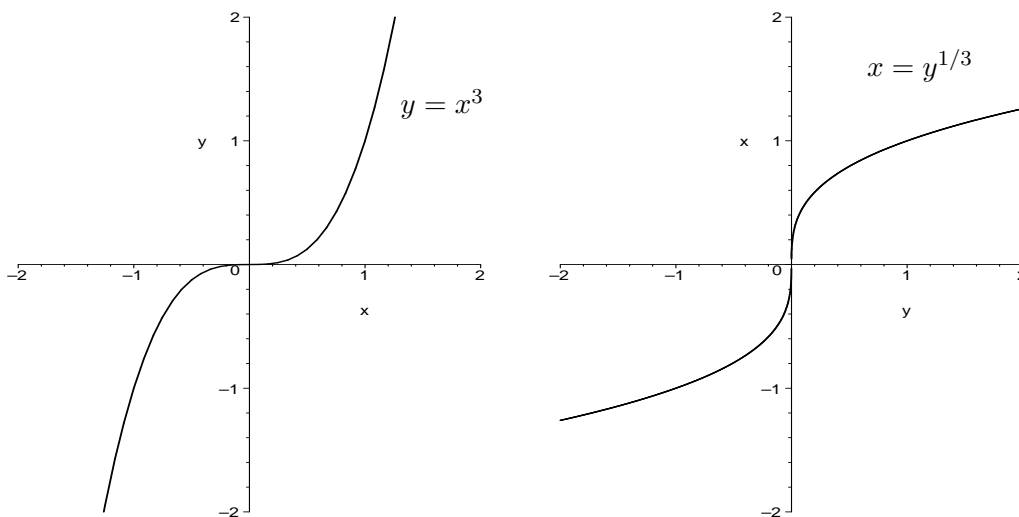
Zij $y = f(x)$ een gegeven functie. We willen vaak de waarde van x vinden bij een gegeven waarde van y . Dit komt neer op het oplossen van een vergelijking. Als bijvoorbeeld

$$y = f(x) = x^3 \quad \text{en} \quad y = 8$$

dan wordt de vergelijking $8 = x^3$ met als unieke oplossing $x = 2$. In dit voorbeeld bestaat er bij elke reële waarde van y precies één reële x zodat $y = x^3$. De waarde van x hangt af van y en daarom is x een functie van y . Als we deze functie met g aangeven, dan geldt er

$$x = g(y) = y^{1/3}$$

en g noemen we de inverse functie van f . De grafieken van f en g staan in Figuur 2.4.



Figuur 2.4: Grafieken van de functie $y = x^3$ en $x = y^{1/3}$.

In het algemeen noemen we een functie f **injectief** als voor x_1, x_2 in het domein van f met $x_1 \neq x_2$ steeds geldt dat $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dus de functie neemt in verschillende punten van haar domein ook verschillende waarden aan. Als f injectief is op I dan heeft de vergelijking $f(x) = y$ nooit meer dan één oplossing. Als er een oplossing is dan behoort y tot het domein van de **inverse functie** g van f en er geldt

$$\text{als } y = f(x) \text{ dan } x = g(y).$$

We schrijven vaak f^{-1} voor de inverse functie. Als de inverse functie bestaat dan geldt

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{en ook} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

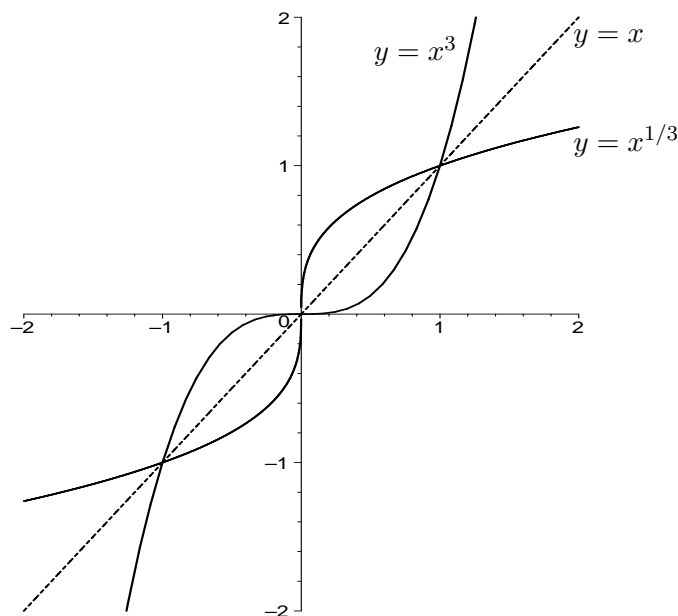
De grafiek van de inverse functie vinden we door de grafiek van f te spiegelen in de rechte $y = x$ zoals geïllustreerd in Figuur 2.5. Als we zoals in Figuur 2.5 de grafieken van f en f^{-1} samen tekenen, hebben we bij de inverse functie de rollen van x en y omgekeerd. We zien dus de grafiek van $y = f^{-1}(x)$ samen met die van $y = f(x)$.

Voorbeeld 2.4.1. De functie $f(x) = x^2$ is niet injectief. Als $y > 0$ dan heeft de vergelijking $x^2 = y$ twee oplossingen, namelijk $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Let op dat we met \sqrt{y} altijd de **positieve vierkantswortel** van een positief getal bedoelen. Als $y > 0$ dan is

$$\sqrt{y} > 0 \quad \text{en} \quad -\sqrt{y} < 0.$$

Omdat de functie niet injectief is, is er geen inverse functie.

We kunnen wel een inverse functie maken door het domein van f te beperken. Als we $f(x) = x^2$ enkel beschouwen voor $x \geq 0$, dan heeft de vergelijking



Figuur 2.5: De grafiek van de inverse functie wordt verkregen door het spiegelen van de grafiek van f in de rechte $y = x$.

$f(x) = y$ wel maar één oplossing als $y \geq 0$, namelijk $x = \sqrt{y}$ en de inverse functie is dan

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \geq 0.$$

Voorbeeld 2.4.2. Zij $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. De inverse functie vinden we door de vergelijking $y = f(x)$ op te lossen naar x . Dit gaat in een aantal stappen. We stellen dus

$$y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

en we vermenigvuldigen beide zijden met $x-1$:

$$(x-1)y = 2x+1.$$

We schrijven het linkerlid als $(x-1)y = xy - y$ en vervolgens brengen we alle termen met x erin naar links, en alle termen zonder x naar rechts (d.w.z. we tellen $y - 2x$ op bij beide zijden)

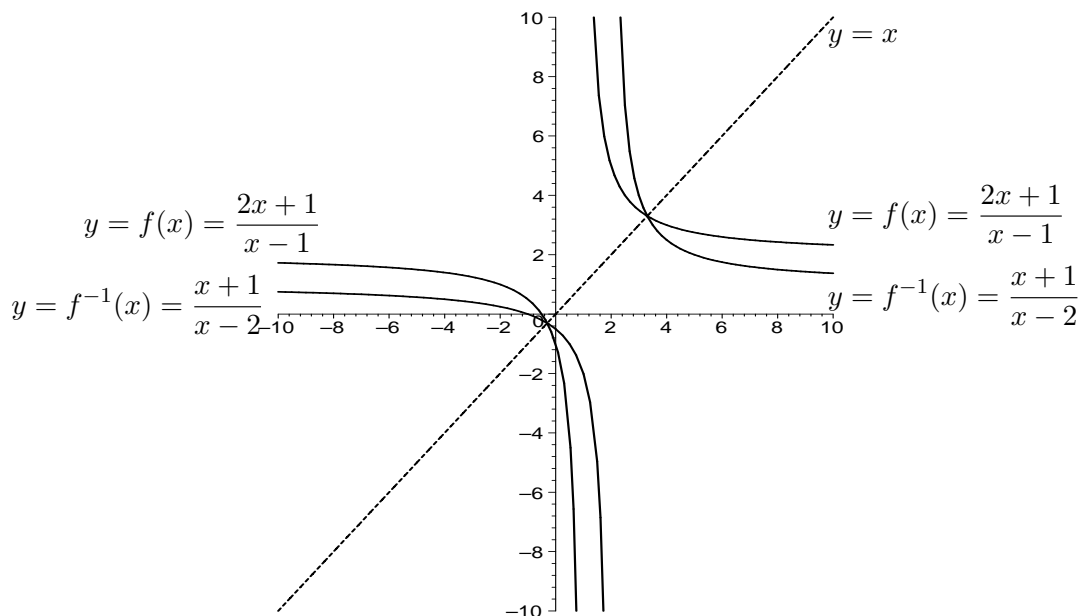
$$xy - 2x = y + 1.$$

In het linkerlid brengen we x buiten:

$$x(y-2) = y+1$$

en we delen beide zijden door $y-2$:

$$x = \frac{y+1}{y-2}.$$



Figuur 2.6: De grafiek van de inverse functie wordt verkregen door het spiegelen van de grafiek van f in de rechte $y = x$.

De inverse functie is bijgevolg

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}.$$

In Figuur 2.6 zien we de grafieken van f en f^{-1} .

Omdat we niet door nul mogen delen, is de inverse functie niet gedefinieerd voor $y = 2$. De vergelijking $y = f(x)$ heeft een unieke oplossing $x = f^{-1}(y)$ voor elke y , met uitzondering van $y = 2$. Het domein van f^{-1} is bijgevolg \mathbb{R} zonder 2 (of \mathbb{C} zonder 2 als we met complexe getallen werken).

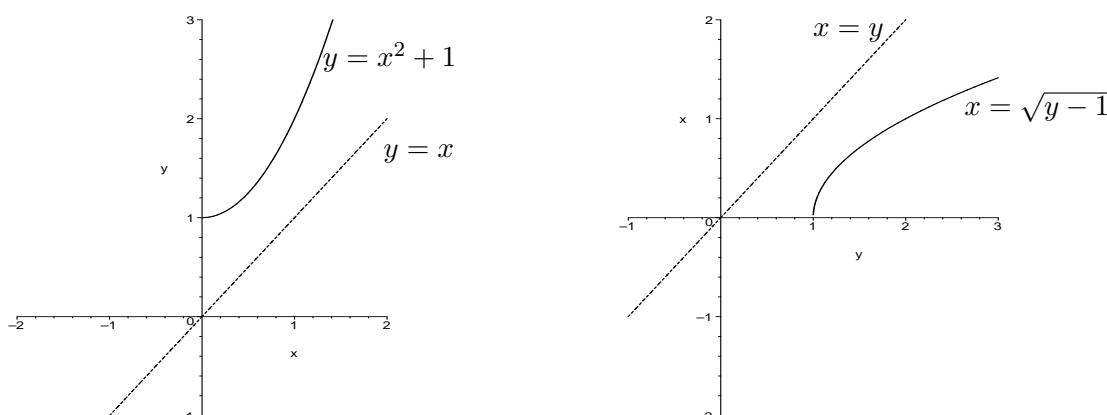
In het voorbeeld bestaat er bij elke y maar hooguit één oplossing van de vergelijking $y = f(x)$. In dat geval is de inverse functie f^{-1} goed gedefinieerd met als domein de verzameling van alle y -waarden waarvoor $y = f(x)$ een oplossing heeft. Als de vergelijking $y = f(x)$ meer dan één oplossing heeft dan is de inverse functie niet eenduidig bepaald, zoals in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2.4.3. Beschouw $y = f(x) = x^2 + 1$. In dit geval is $x^2 = y - 1$ en dus

$$x = \pm\sqrt{y-1}.$$

Voor elke $y > 1$ zijn er twee oplossingen van $y = x^2 + 1$. Om een inverse functie te verkrijgen moeten we een keuze maken welke oplossing we nemen.

De keuze voor een inverse functie kan gedaan worden door het domein van de functie te beperken tot een interval waarop de functie injectief is. Op zo'n interval wordt elke y -waarde maar hoogstens één keer bereikt. Door de functie $y = x^2 + 1$ te beperken tot $x \geq 0$, vinden we een functie met als inverse $x = \sqrt{y-1}$, zie Figuur 2.7.



Figuur 2.7: Grafieken van de functie $y = x^2 + 1$ beperkt tot $x \geq 0$ en $x = \sqrt{y - 1}$.

2.5 Krommen in het vlak

2.5.1 Niveaукrommen

Naast functies van één veranderlijke kennen we ook functies van meerdere veranderlijken. De waarde van een functie van twee veranderlijken $F(x, y)$ hangt af van de waarde van zowel x als y .

Als F een functie van twee veranderlijken is en c een gegeven constante waarde, dan vormen de oplossingen van de vergelijking

$$F(x, y) = c$$

een kromme in het xy -vlak. Deze kromme noemen we de **niveaукromme** van F bij de waarde c .

Een **lineaire functie** van twee veranderlijken is van de vorm

$$F(x, y) = ax + by$$

met a en b gegeven waarden. De niveaукromme

$$F(x, y) = ax + by = c$$

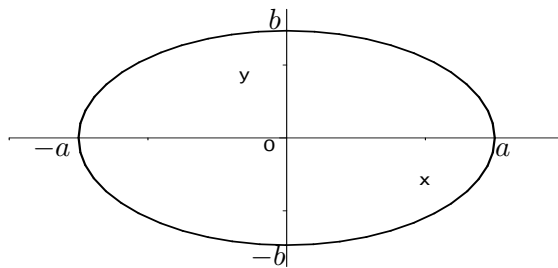
is een rechte in het xy -vlak. Een lineaire functie is een veeltermfunctie in twee veranderlijken van eerste graad.

2.5.2 Kwadratische functies en kegelsneden

Een **kwadratische functie** van twee veranderlijken heeft de vorm

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

met constanten a, \dots, f . Een niveaукromme van een kwadratische functie noemen we een **kegelsnede**, omdat ze steeds verkregen kan worden als doorsnede van een kegel met een vlak. We geven hier geen algemene theorie van kegelsneden, maar we beperken ons tot enkele voorbeelden.



Figuur 2.8: Een ellips $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Cirkel

Een **cirkel** met middelpunt $A : (a, b)$ en straal $r > 0$ bestaat uit alle punten in het geijkte vlak met vaste afstand r tot A . De afstand van het punt $X : (x, y)$ tot $A : (a, b)$ wordt gegeven door (volgens stelling van Pythagoras):

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

De vergelijking van de cirkel is bijgevolg $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, ofwel na kwadratering

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Dit is inderdaad een niveaukromme van een kwadratische functie.

Ellips

Een **ellips** bestaat uit alle punten waarvan de som van de afstanden tot twee gegeven punten (de brandpunten) constant is. Als de brandpunten gelegen zijn in $C : (c, 0)$ en $-C : (-c, 0)$ en de constante som van de afstanden tot C en $-C$ is $2a$ met $a > c$, dan volgt na enig rekenwerk dat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

met $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Dit is de standaardvorm voor een ellips. Merk op dat de ellips de assen snijdt in de punten $(\pm a, 0)$ en $(0, \pm b)$.

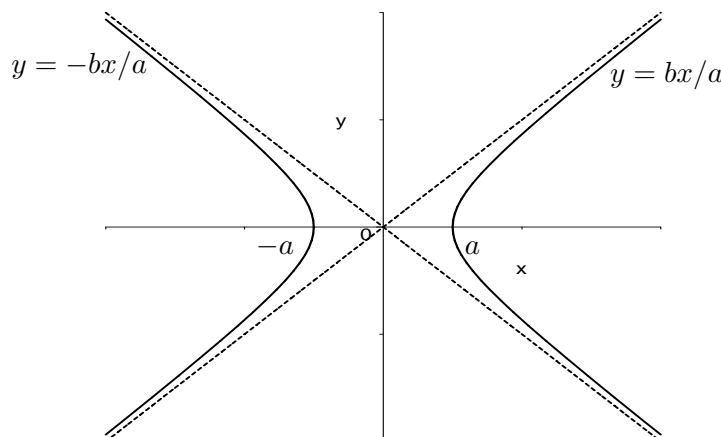
Hyperbool

Een **hyperbool** bestaat uit alle punten waarvan het verschil van de afstanden tot twee vaste punten (de brandpunten) constant is. Als de twee brandpunten weer liggen in $C : (c, 0)$ en $-C : (-c, 0)$ en het verschil tussen de afstanden is $2a$ met $0 < a < c$, dan is de vergelijking van de hyperbool gelijk aan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

met $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Dit is de standaardvorm voor een hyperbool. De hyperbool bestaat uit twee stukken (twee takken) en heeft schuine asymptoten

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$



Figuur 2.9: Een hyperbool $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ met asymptoten $y = \pm bx/a$

Door gepaste keuze van het coördinatenstelsel kan elke hyperbool in de standaardvorm geschreven worden.

Voorbeeld 2.5.1. De vergelijking

$$xy = 1$$

definieert ook een hyperbool. Door middel van $x = u + v$ en $y = u - v$, kunnen we nieuwe coördinaten u en v invoeren. Dan is $xy = u^2 - v^2$ en de vergelijking in uv coördinaten

$$u^2 - v^2 = 1$$

is de standaardvorm van een hyperbool.

Meer algemeen geldt dat de niveaukromme

$$xy = c$$

van de functie $F(x, y) = xy$ een hyperbool is, behalve voor $c = 0$. Voor $c = 0$ bestaat de niveaukromme

$$xy = 0$$

uit de twee rechten $x = 0$ en $y = 0$.

Voorbeeld 2.5.2. We kunnen het vorige voorbeeld nog als volgt veralgemenen. Neem aan dat de kwadratische functie $F(x, y)$ van twee veranderlijken het product is van twee lineaire factoren

$$F(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

Een punt (x, y) behoort tot de niveaukromme

$$F(x, y) = 0$$

als aan één van de twee vergelijkingen

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{of} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

voldaan is. Deze twee lineaire vergelijkingen definiëren twee rechten in het xy -vlak. De niveaukromme $F(x, y) = 0$ bestaat dus uit twee rechten.

Als deze twee rechten niet samenvallen en ook niet evenwijdig zijn, dan is de algemene niveaukromme $F(x, y) = c \neq 0$ een hyperbool.

Parabool

Een **parabool** bestaat uit alle punten waarvoor de afstand tot een vast punt (het brandpunt) en een lijn (de richtlijn) gelijk is. De grafiek van een kwadratische functie van één veranderlijke

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{met } a \neq 0$$

is een parabool.

De standaardvorm voor een parabool is

$$y = x^2.$$

2.5.3 Parametervergelijking van een kromme

In paragraaf 2.5.1 werd een kromme in het vlak voorgesteld door middel van een vergelijking

$$F(x, y) = c. \quad (2.5.1)$$

Een andere gebruikelijke manier om een kromme voor te stellen is door middel van een **parametervergelijking**

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b, \quad (2.5.2)$$

waarbij x en y afhangen van een nieuwe t -veranderlijke. Vaak wordt t gezien als de tijd en geeft $(x(t), y(t))$ de positie van een deeltje op tijdstip t . Wanneer t het interval $[a, b]$ doorloopt, doorloopt het deeltje een kromme in het xy -vlak. We noemen (2.5.2) ook wel een **parametrisatie** van de kromme.

Vaak kunnen we t elimineren uit (2.5.2) en krijgen we een vergelijking van de kromme als in (2.5.1).

Voorbeeld 2.5.3. We maken in dit voorbeeld al gebruik van de goniometrische functies \cos en \sin , die bekend zijn vanuit het middelbaar. Ze worden nader besproken in het volgende hoofdstuk. Beschouw de kromme

$$\begin{cases} x = a + r \cos t, \\ y = b + r \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2.5.3)$$

waarin a , b en r vaste waarden zijn met $r > 0$. Uit (2.5.3) volgt dat

$$x - a = r \cos t \quad \text{en} \quad y - b = r \sin t.$$

Door beide vergelijkingen te kwadrateren en vervolgens bij elkaar op te tellen en gebruik te maken van de basisidentiteit $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ voor goniometrische functies, vinden we

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

en dit is de vergelijking van de cirkel met middelpunt (a, b) en straal r .

De vergelijkingen (2.5.3) vormen de standaard-parametrisatie van een cirkel in het vlak.

Ga zelf na dat

$$\begin{cases} x = a + r_1 \cos t, \\ y = b + r_2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

met $r_1 \neq r_2$ de parametrisatie van een ellips is.

Voorbeeld 2.5.4. Beschouw de kromme met parametrisatie

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.5.4)$$

waarin a en b niet allebei nul zijn.

Als $a \neq 0$ dan halen we uit de eerste vergelijking dat

$$t = \frac{x - x_0}{a}$$

en na invulling in de tweede vergelijking vinden we dat

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$$

hetgeen de vergelijking is van een rechte door het punt (x_0, y_0) met richtingscoëfficiënt b/a .

Als $a = 0$ dan is (2.5.4) een parametrisatie van de verticale rechte $x = x_0$.

2.5.4 Stelsels vergelijkingen

Als F_1 en F_2 twee functies van twee veranderlijken zijn, en c_1 en c_2 zijn twee constanten, dan is

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= c_1 \\ F_2(x, y) &= c_2 \end{aligned}$$

een **stelsel van twee vergelijkingen** voor twee veranderlijken (onbekenden) x en y . Een oplossing van dit stelsel is een koppel (x, y) waarvoor aan beide vergelijkingen gelijktijdig voldaan is.

Lineaire vergelijkingen

Als F_1 en F_2 twee lineaire functies zijn, dan krijgen we een stelsel van twee **lineaire vergelijkingen**, waarvan de algemene vorm gelijk is aan

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Meetkundig stelt elk van de vergelijkingen een rechte voor in het xy -vlak. Twee rechten in het vlak zullen elkaar in het algemeen in één punt snijden. Het stelsel heeft dan precies één oplossing.

Als de twee rechten evenwijdig zijn, dan is er geen oplossing, tenzij de rechten samenvallen. In dat laatste geval zijn er oneindig veel oplossingen.

Voorbeeld 2.5.5. Het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ 2x + 3y &= 4\end{aligned}$$

kan op verschillende manieren opgelost worden. Eén manier is om de eerste vergelijking met 2 te vermenigvuldigen

$$\begin{aligned}2x + 2y &= 6 \\ 2x + 3y &= 4\end{aligned}$$

en door vervolgens de tweede vergelijking af te trekken van de eerste. Dit geeft $-y = 2$, zodat $y = -2$. Door nu $y = -2$ in in één van de vergelijkingen in te vullen, krijgen we een vergelijking waar nog alleen x als onbekende in voorkomt. Die kunnen we eenvoudig oplossen. We vinden $x = 5$. De unieke oplossing is dus $(x, y) = (5, -2)$.

Een tweede manier om het stelsel op te lossen is door y (of x) op te lossen uit één van de vergelijkingen. Uit $x + y = 3$ volgt b.v.

$$y = 3 - x.$$

Vul nu $y = 3 - x$ in in de tweede vergelijking

$$2x + 3(3 - x) = 4$$

hetgeen vereenvoudigd kan worden tot

$$-x + 9 = 4$$

waaruit volgt $x = 5$. Dan is $y = 3 - x = 3 - 5 = -2$ en we vinden de oplossing $(x, y) = (5, -2)$.

Voorbeeld 2.5.6. We lossen

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ 3x + 3y &= 4\end{aligned}$$

op door drie keer de eerste vergelijking af te trekken van de tweede. Dit levert

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ 0 &= 5\end{aligned}$$

Aan de laatste vergelijking kan onmogelijk voldaan worden. Het stelsel heeft geen oplossingen. We noemen het een **strijdig stelsel**.

Voorbeeld 2.5.7. We lossen

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ 3x + 3y &= 9\end{aligned}$$

op door drie keer de eerste vergelijking af te trekken van de tweede. Dit levert

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Aan de laatste vergelijking is altijd voldaan. Er zijn oneindig veel oplossingen. Elk koppel (x, y) met $x + y = 3$ voldoet aan het stelsel.

Stelsels met niet-lineaire vergelijkingen

Er is geen algemene methode om stelsels met niet-lineaire vergelijkingen op te lossen. We beperken ons tot een voorbeeld.

Voorbeeld 2.5.8. De twee vergelijkingen in het stelsel

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 4 \\ 2x^2 + 3xy + 2y^2 &= 16 \end{aligned}$$

stellen meetkundig een rechte en een ellips voor. De oplossingen zijn dus de snijpunten van een ellips met een rechte.

Als we ons de grafiek van een ellips en een rechte meetkundig voorstellen, dan kunnen we 0, 1 of 2 oplossingen verwachten. Er zijn 0 oplossingen als de rechte disjunct is met de ellips, 1 oplossing als de rechte raakt aan de ellips, en 2 oplossingen als de rechte de ellips in twee punten snijdt.

In het voorbeeld kunnen we uit de eerste vergelijking y oplossen in functie van x . Dit levert $y = 1 - \frac{3x}{4}$. Dit vullen we vervolgens in in de tweede vergelijking:

$$2x^2 + 3x(1 - \frac{3x}{4}) + 2(1 - \frac{3x}{4})^2 = 16$$

hetgeen na enig rekenwerk overgaat in

$$\frac{7}{8}x^2 + 2 = 16$$

ofwel

$$x^2 = 16.$$

De oplossingen hiervan zijn $x_1 = 4$ en $x_2 = -4$.

We gebruiken $y = 1 - \frac{3x}{4}$ om de bijbehorende y -waarden te vinden. Voor $x_1 = 4$ vinden we $y_1 = -2$ en voor $x_2 = -4$ vinden we $y_2 = 4$. De twee oplossingen zijn bijgevolg

$$(x_1, y_1) = (4, -2) \quad \text{en} \quad (x_2, y_2) = (-4, 4).$$

In dit voorbeeld snijdt de rechte de ellips in twee punten.

2.6 Oefeningen

Oefening 2.1. Een beginnende goochelaar beweert dat hij iemands gedachten kan lezen. Hij wil dit illustreren met volgende truc. Hij wijst iemand aan en zegt: “Kies om het even welk getal en hou het in gedachten. Tel er 5 bij op. Verdubbel je resultaat. Trek er nu 6 van af. Deel door 2 en tel er nog eens 2 bij. Zeg nu het resultaat en ik zeg je met welk getal je vertrokken bent.” Ga na dat deze truc vrij doorzichtig is door de functie f te vinden die het eindresultaat van vorige procedure is wanneer men vertrekt van het getal x .

Oefening 2.2. Bepaal het domein van de volgende functies. Zijn de functies injectief op hun domein?

(a) $\frac{1}{x^2 - 3}$

(d) $\frac{1}{|x| + 2}$

(b) $\frac{1}{x^3 + 1}$

(e) \sqrt{x}

(c) $x + 2|x|$

(f) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-3}}{x}$

Oefening 2.3. Schets de grafiek van de functies uit onderdelen (c), (d) en (e) van de vorige oefening.

Oefening 2.4. Zij $f(x) = x^2 - x$. Schets de grafieken van de volgende functies in één figuur:

$$f(x), \quad f(x+2), \quad f(x)+2, \quad f(2x), \quad 2f(x).$$

Oefening 2.5. Schets de grafiek van elk van de volgende functies.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0, \\ 1 & \text{als } x > 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 0, \\ 2 & \text{als } x = 0, \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x < 0, \\ x & \text{als } x \geq 0, \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \leq 1, \\ x-1 & \text{als } x > 1, \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{als } x < 0, \\ x - 2 & \text{als } 0 \leq x < 3, \\ 2x - 5 & \text{als } x \geq 3. \end{cases}$

Oefening 2.6. Bepaal (indien mogelijk) de samengestelde functies $g \circ f$ en $f \circ g$ van f en g als

(a) $f(x) = x^2$ en $g(x) = 3x$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-5}}{\sqrt{x-4}}$ en $g(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = 3x$ en $g(x) = \sqrt{-x}$

Oefening 2.7. Vind een voorbeeld van twee functies f en g die niet constant zijn, zodat de samengestelde functie $f \circ g$ wel constant is.

Oefening 2.8. Teken de rechten met de volgende vergelijkingen.

(a) $y = 3x + 6,$

(d) $x + 2y = 7,$

(b) $x = 3y + 2,$

(e) $x - 2y = 1,$

(c) $y = -3,$

(f) $x = -2.$

Oefening 2.9. Bepaal de vergelijking van de volgende rechten.

- (a) De rechte door $(-1, 1)$ en $(2, -7)$,
- (b) De rechte door $(1, 4)$ en $(1, 5)$,
- (c) De rechte door $(2, -1)$ en evenwijdig met $x + y = 3$.
- (d) De rechte door $(1, 2)$ met richtingscoëfficiënt -2 .

Oefening 2.10. Laat zien dat, voor elke α , de vergelijking

$$(x + y + 1) + \alpha(2x - 3y - 2) = 0,$$

een rechte voorstelt door het snijpunt van $x + y + 1 = 0$ en $2x - 3y - 2 = 0$.
Vind de rechte door dit snijpunt en het punt $(1, 1)$.

Oefening 2.11. Ontbind in factoren.

- (a) $x^2 - 3x + 2$
- (b) $x^2 - a^2$
- (c) $4x^2 + 4x + 1$
- (d) $6x^2y^2 - 2xy^3 - 4y^4$
- (e) $x^4 - 13x^2 + 36$
- (f) $x^4 + 5x^2 + 4$

Oefening 2.12. Gegeven is de veelterm $3x^3 - 4x^2 - x + 2$.

- (a) Laat zien dat $x = 1$ een van de nulpunten is.
- (b) Vind de andere nulpunten.
- (c) Schrijf de veelterm als een product van lineaire factoren.

Oefening 2.13. Laat zien dat uit de ontbinding

$$a_0 + a_1x + \cdots + x^n = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

volgt dat het product van de nulpunten gelijk is aan $(-1)^n a_0$. Als de veelterm alleen gehele nulpunten heeft, dan moeten de nulpunten dus delers zijn van a_0 . Gebruik dit om volgende veeltermen te ontbinden in factoren.

- (a) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
- (b) $x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 175x - 300$

Oefening 2.14. Bepaal de asymptoten (horizontaal, verticaal, schuin) van de volgende functies.

- (a) $y = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$
- (b) $y = \frac{x^2 - 7x + 10}{x}$
- (c) $y = \frac{x^2(x - 1)}{x^2 - 4}$
- (d) $y = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x^3 - x^2}$
- (e) $y = \frac{(x - 1)^3}{x^2 - 4x + 3}$
- (f) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Oefening 2.15. Schrijf de volgende rationale functies als som van partieelbreuken.

$$(a) \quad y = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$(e) \quad y = \frac{x}{x^2 + x - 6}$$

$$(b) \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(f) \quad y = \frac{1}{x(x^2 - a^2)}$$

$$(c) \quad y = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

$$(g) \quad y = \frac{x^2(x-1)}{2x^2 - 4}$$

$$(d) \quad y = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

$$(h) \quad y = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$$

Oefening 2.16. Schrijf als som van partieelbreuken.

$$(a) \quad y = \frac{x-a}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(d) \quad y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)(x+2)}$$

$$(b) \quad y = \frac{1}{x^3 + x^2}$$

$$(e) \quad y = \frac{x^3}{(x^2 - a^2)(x+1)}$$

$$(c) \quad y = \frac{x}{(x+1)(x^2 + 2x + 6)}$$

$$(f) \quad y = \frac{1}{x^2(x-a)}$$

Oefening 2.17. Beperk het domein indien nodig, zodat de functie injectief is op het domein, en schrijf x als functie van y .

$$(a) \quad y = 2x + 8$$

$$(d) \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(f) \quad y = |x| - 3x$$

$$(b) \quad y = x^2 + 1$$

$$(e) \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$(g) \quad y = 2x^3 + 5$$

$$(c) \quad y = \frac{x}{1 - x}$$

Oefening 2.18. De constante K_a , die de zuurtegraad van een zwak zuur aangeeft, is gedefinieerd als

$$K_a = \frac{\alpha^2 c}{1 - \alpha},$$

waarbij c de concentratie is en α de ionisatiegraad. Druk α uit in termen van K_a en c . (Denk eraan dat α , K_a en c positieve hoeveelheden zijn.)

Oefening 2.19. De viriale toestandsvergelijking voor een gas wordt bij lage druk benaderd door

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} \right)$$

waarin p de druk is, V_m het molaire volume, T de temperatuur, R de gasconstante en B de tweede viriale coëfficiënt.

(a) Schrijf B in functie van de andere veranderlijken.

(b) Schrijf V_m in functie van de andere veranderlijken.

Oefening 2.20. Van der Waals stelde de volgende aanpassing aan de ideale gaswet voor (de Van der Waals vergelijking)

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

waarin alle betrokken grootheden p , R , T , a en b strikt positief zijn.

- (a) Laat zien dat V_m aan een derdegraads vergelijking voldoet.
- (b) Laat zien dat deze vergelijking geen oplossing kan hebben met $V_m \leq b$.
- (c) Laat zien dat er altijd een oplossing is met $V_m > b$.

Oefening 2.21. Schets enkele niveaukrommen van de volgende reële functies van twee veranderlijken.

- (a) $F(x, y) = x^2 + y^2$
- (b) $F(x, y) = x^2 + 2y^2$
- (c) $F(x, y) = y^2 - x^2$
- (d) $F(x, y) = y - 3x^2$
- (e) $F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- (f) $F(x, y) = xy$
- (g) $F(x, y) = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$

Oefening 2.22. Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

- (a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$
- (d) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x - y - 2z = 8 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$
- (e) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$
- (f) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases}$
- (g) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 0 \end{cases}$

Oefening 2.23. (a) Ga na dat

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2$$

- (b) Gebruik (a) om in te zien dat

$$x^2 - xy + y^2 = 2$$

een ellips voorstelt en schets de ellips.

- (c) Los onderdeel (f) van de vorige oefening grafisch op.

Oefening 2.24. Zoek de oplossingen van de volgende stelsels vergelijkingen.

$$(a) \begin{cases} x + xy = 0 \\ 2x - xy = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 2xy + xy^2 = 0 \\ y + xy = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x(a - cy) = 0 \\ y(-k + lx) = 0 \end{cases}$$

Oefening 2.25. (Deel van examenvraag) Splits $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$ in partieelbreuken.

Hoofdstuk 3

Transcendente functies

Naast de elementaire algebraïsche functies (veeltermen, rationale functies, machtsfuncties) zijn er een aantal belangrijke functies die veelvuldig in allerlei toepassingen voorkomen. De belangrijkste **transcendente functies** zijn:

- de goniometrische functies: $\sin x$, $\cos x$ en verwante functies,
- de cyclometrische functies: $\operatorname{bgsin} x$, $\operatorname{bgcos} x$ en $\operatorname{bgtan} x$,
- de exponentiële functie: e^x ,
- de logaritmische functie: $\ln x$,

3.1 Goniometrische functies

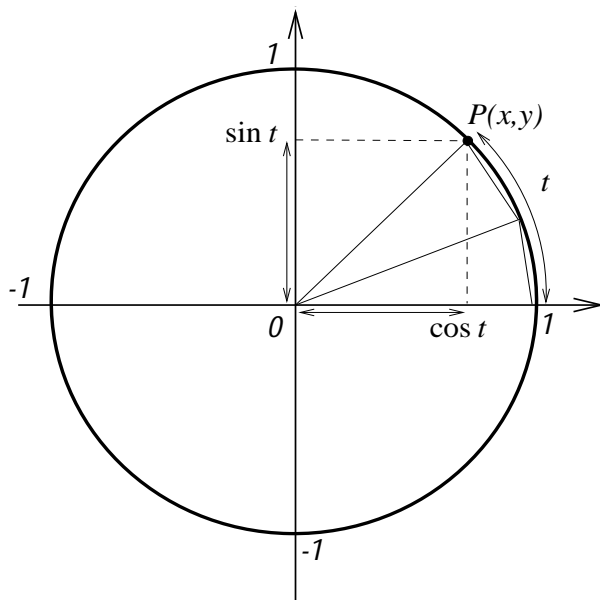
De goniometrische functies zijn periodieke functies die gebruikt worden bij het beschrijven van periodieke verschijnselen zoals mechanische en electromagnetische trillingen (veer, snaar, electromagnetische kringen), (gekoppelde) trillingen in machines, voortplanting van golven, enzovoorts.

3.1.1 De functies \sin en \cos

In deze cursus nemen we aan dat u bekend bent met de sinus, cosinus, en tangens, zoals behandeld in het secundair onderwijs. We herhalen hier slechts enkele begrippen.

De goniometrische functies \cos en \sin worden ingevoerd aan de hand van de **goniometrische cirkel**. Dit is de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1. Met elke t verbinden we een punt P_t op de cirkel als volgt:

- Als $t \geq 0$, dan is P_t het punt op de cirkel verkregen door vanaf het punt $A(1,0)$ in tegenwijzerzin langs de cirkel te gaan tot een afstand t is afgelegd.
- Als $t < 0$, dan is P_t het punt op de cirkel verkregen door vanaf het punt $A(1,0)$ in wijzerzin langs de cirkel te gaan tot een afstand $-t$ is afgelegd.



Figuur 3.1: De functies $\sin t$ en $\cos t$ en de goniometrische cirkel.

Het aldus verkregen punt P_t heeft zekere coördinaten (x, y) ten opzichte van een standaard assenstelsel en per definitie geldt:

$$(\cos t, \sin t) \quad \text{zijn de coördinaten van } P_t,$$

zie hiervoor Figuur 3.1. Dit definieert de **cosinusfunctie** $\cos t$ en de **sinusfunctie** $\sin t$ voor elke t .

Men noemt t het **maatgetal** van de hoek AOP_t gemeten in **radialen**. Omdat de omtrek van de cirkel gelijk aan 2π is, zal voor alle t gelden

$$P_t = P_{t+2\pi}. \quad (3.1.1)$$

Vanwege (3.1.1) geldt voor alle t dat

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \quad \text{en} \quad \sin(t + 2\pi) = \sin t.$$

Dat wil zeggen dat \cos en \sin **periodieke functies** zijn met **periode** 2π . We noemen 2π ook de **golflengte** en $1/(2\pi)$ de **frequentie**.

Uit de definitie volgen de volgende speciale waarden. Voor $t = 0$ is P_t gelijk aan $(1, 0)$ en dus is

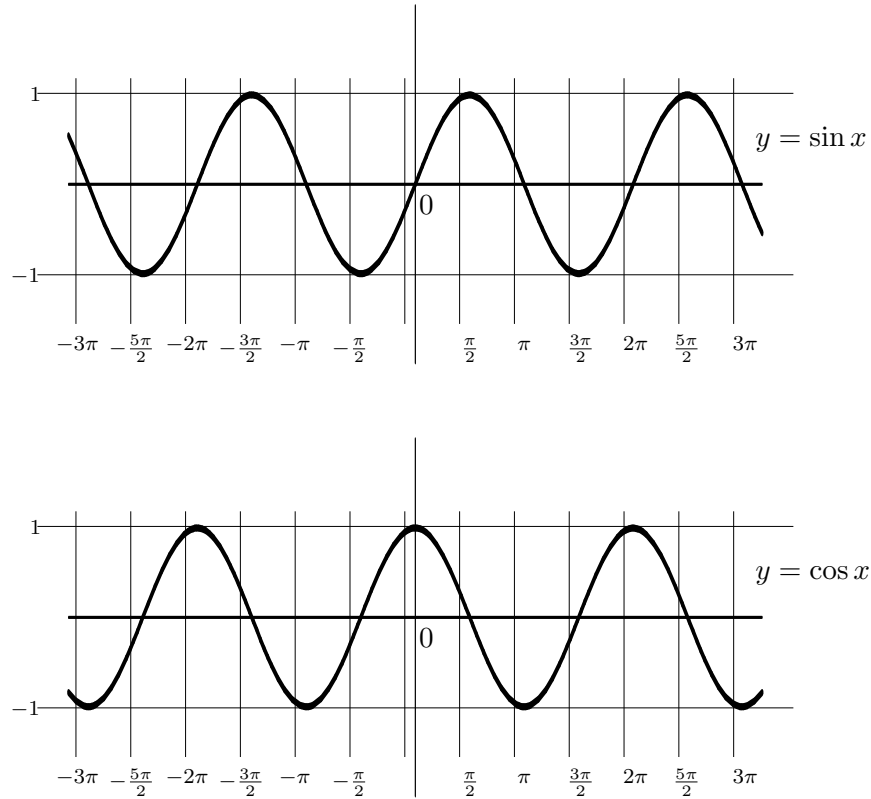
$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0.$$

Vanwege de periodiciteit geldt ook

$$\cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0.$$

Voor $t = \pi$ is P_t het punt $(-1, 0)$. Bijgevolg is

$$\cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0.$$



Figuur 3.2: Grafieken van de functies $y = \sin x$ (boven) en $y = \cos x$ (onder).

Net zo is

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

De grafieken van \cos en \sin vinden we door de projecties van het punt P_x op de x -as (voor $\cos x$) en op de y -as (voor $\sin x$) uit te zetten ten opzichte van x . We vinden dan de grafieken van Figuur 3.2, waarbij we nu x in plaats van t gebruiken voor de onafhankelijk veranderlijke.

De grafieken van $\sin x$ en $\cos x$ gaan op en neer tussen -1 en 1 . De cosinus is een **even functie**

$$\cos(-x) = \cos x$$

en de sinus is een **oneven functie**

$$\sin(-x) = -\sin x$$

voor elke x .

Uit de definitie van \sin en \cos kan men onmiddellijk vermoeden dat deze functies bijzonder relevant zijn om allerlei problemen in verband met hoeken op te lossen. De functies \sin en \cos hebben echter nog een andere belangrijke toepassing in de beschrijving van periodieke fenomenen. We weten dat de functies $\sin x$ en $\cos x$ periodiek zijn met periode 2π . Als $T > 0$, dan hebben de functies $\sin \frac{2\pi x}{T}$ en $\cos \frac{2\pi x}{T}$ periode T . Voor elk natuurlijk getal n zijn de functies

$$\sin \frac{2\pi n x}{T} \quad \text{en} \quad \cos \frac{2\pi n x}{T}$$

periodiek met periode T/n en bijgevolg ook met periode T .

Deze functies kunnen genomen worden als bouwstenen om algemene periodieke functies van periode T te beschrijven door middel van een lineaire combinatie

$$a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos \frac{4\pi x}{T} + b_2 \sin \frac{4\pi x}{T} + \dots \quad (3.1.2)$$

met zekere coëfficiënten $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$. We gaan hier nader op in bij Wiskunde 2 (hoofdstuk over Fourierreeksen).

3.1.2 Goniometrische formules

Uit de definitie van sinus en cosinus en uit de stelling van Pythagoras volgt onmiddellijk dat voor alle x :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dit is de grondformule van de goniometrische functies. Men kan nu een hele reeks identiteiten aantonen. We geven er enkele waaruit nog heel wat andere volgen.

(a) Spiegelingsregels

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

(b) Som en verschilregels

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}$$

(c) Product-naar-som-identiteiten (omgekeerde formules van Simpson)

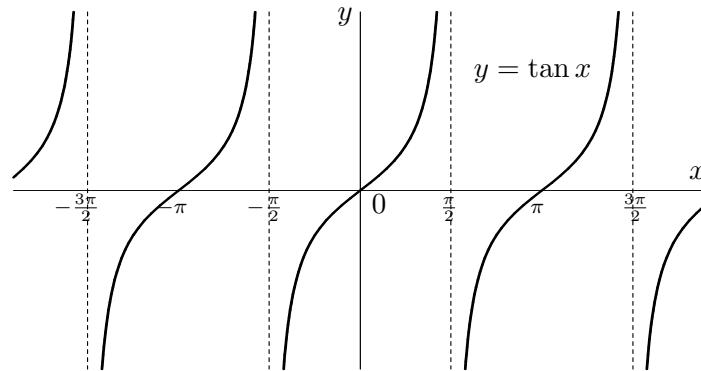
$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned}$$

(d) Som-naar-product-identiteiten (formules van Simpson)

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

(e) Dubbele-hoek-regels :

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$



Figuur 3.3: De grafiek van de functie $y = \tan(x)$

- (f) Cosinusregel: In een driehoek met zijden a , b en c en overstaande hoeken α , β en γ geldt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- (g) Sinusregel: In een driehoek met zijden a , b en c en overstaande hoeken α , β en γ geldt

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

3.1.3 De functies tan, cotan, cosec en sec

Met behulp van de sinus- en de cosinusfunctie definieert men de overblijvende goniometrische functies **tangens**, **cotangens**, **cosecans** en **secans**.

Er geldt

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & \cotan x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\sin x}, & \sec x &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

De grafiek van $y = \tan x$ staat in Figuur 3.3.

Voor de nulpunten van de sinus en de cosinus geldt

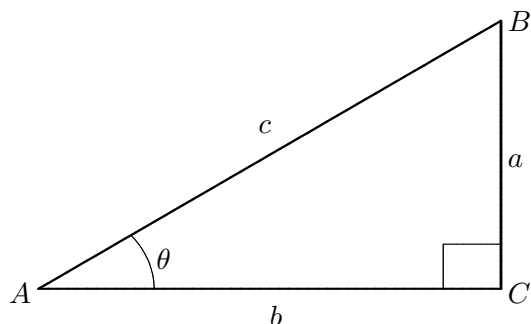
$$\begin{aligned} \sin x &= 0 & \text{als en slechts als} & & x &= k\pi \text{ met } k \text{ een geheel getal,} \\ \cos x &= 0 & \text{als en slechts als} & & x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ met } k \text{ een geheel getal.} \end{aligned}$$

Omdat de functies $\tan x$ en $\sec x$ alleen gedefinieerd zijn als $\cos x \neq 0$, volgt hieruit dat het domein van deze functies bestaat uit alle x met

$$x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{met } k \text{ een geheel getal.}$$

Bij de waarden $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ hebben de tangens en de secans functie **verticale asymptoten**. De functies $\cotan x$ en $\operatorname{cosec} x$ zijn gedefinieerd als $\sin x \neq 0$, dus voor alle x met

$$x \neq k\pi \quad \text{met } k \text{ een geheel getal.}$$



Figuur 3.4: Een rechthoekige driehoek ABC met zijden a (de overstaande zijde), b (de aanliggende zijde) en c (de schuine zijde of hypotenusa).

Bij $x = k\pi$ hebben de cotangens en de cosecans functie verticale asymptoten.

Andere bijzondere waarden van de goniometrische functies staan in de volgende tabel.

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — |

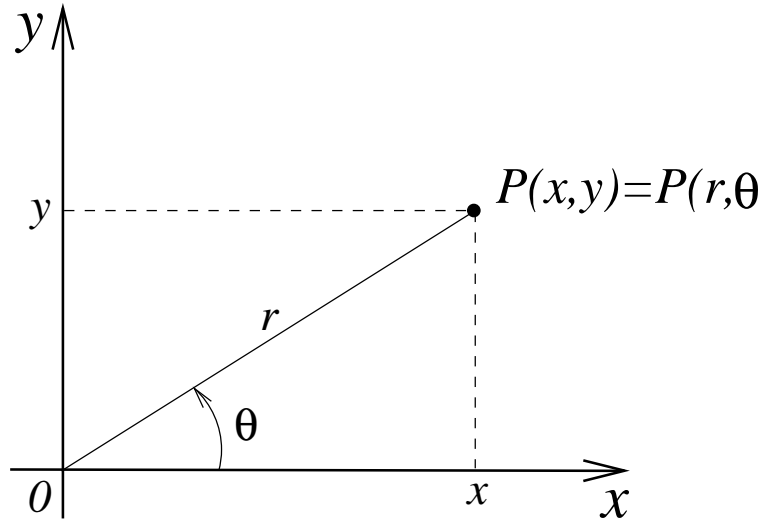
De goniometrische functies treden op bij berekeningen rond hoeken. Beschouw een rechthoekige driehoek zoals in Figuur 3.4 waarin de hoek bij hoekpunt A gelijk is aan θ . Dan geldt

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{a}{c} && \left(= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}} \right) \\ \cos \theta &= \frac{b}{c} && \left(= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}} \right) \\ \tan \theta &= \frac{a}{b} && \left(= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} \right)\end{aligned}$$

3.2 Poolcoördinaten

Punten van het vlak worden standaard beschreven met behulp van cartesische coördinaten die bepaald zijn ten opzichte van twee onderling loodrechte assen. We kunnen de punten van het vlak eveneens beschrijven met poolcoördinaten. Een punt P van het vlak wordt volledig vastgelegd door de afstand van P tot de oorsprong $d(O, P) = r \geq 0$ en de hoek θ die het lijnstuk OP maakt met de positieve x -as zoals aangegeven in Figuur 3.5.

De coördinaten (r, θ) worden de **poolcoördinaten** van het punt P genoemd. Poolcoördinaten staan in een eenvoudig verband tot de rechthoekige

Figuur 3.5: Poolcoördinaten r en θ .

cartesische coördinaten. Er geldt namelijk

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \text{en} \quad \cos \theta = \frac{x}{r},$$

zodat

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (3.2.1)$$

waaruit men de cartesische coördinaten terugvindt uit de poolcoördinaten.

Omgekeerd heeft men

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

waaruit volgt (zie paragraaf 3.3 voor bgtan)

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan } \frac{y}{x} & \text{als } x > 0, \\ \pi + \text{bgtan } \frac{y}{x} & \text{als } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } x = 0 \text{ en } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{als } x = 0 \text{ en } y < 0. \end{cases}$$

De hoek θ is steeds op een constante 2π na bepaald. Zoals cartesische coördinaten kunnen poolcoördinaten gebruikt worden voor de bepaling van grafieken van functies en vergelijkingen, zoals we in volgende voorbeelden zullen tonen.

Voorbeeld 3.2.1. De coördinatenlijnen

$$r = C_1, \quad \text{en} \quad \theta = C_2,$$

corresponderen met cirkels met O als middelpunt en C_1 als straal en met halve rechten door de oorsprong die een hoek C_2 maken met de positieve x -as.

Voorbeeld 3.2.2. De standaardvorm van een ellips is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

met $a, b > 0$.

In poolcoördinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, wordt dit

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1.$$

Met behulp van goniometrische identiteiten kunnen we $\cos^2 \theta$ en $\sin^2 \theta$ uitdrukken in $\cos(2\theta)$. Als we daarvan gebruik maken volgt

$$r^2 \left[\frac{1 + \cos 2\theta}{2a^2} + \frac{1 - \cos 2\theta}{2b^2} \right] = 1,$$

hetgeen we herschrijven (door beide breuken op dezelfde noemer te zetten) tot

$$r = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cos 2\theta}}. \quad (3.2.2)$$

De vergelijking (3.2.2) beschrijft de ellips in poolcoördinaten, waarbij r , de afstand tot de oorsprong, gegeven wordt als functie van θ , de hoek met de positieve x -as. De algemene vorm hiervan is

$$r = f(\theta)$$

met f een zekere gegeven functie.

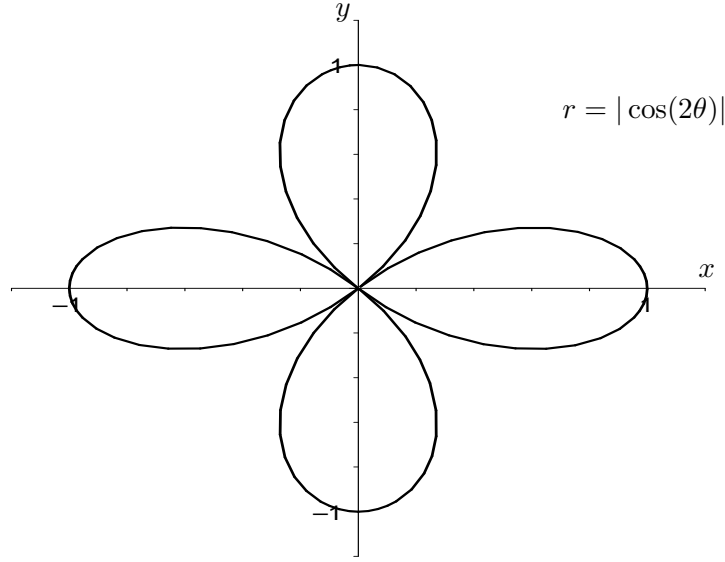
Voorbeeld 3.2.3. We schetsen de grafiek van

$$r = |\cos 2\theta| \quad \text{met } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

We gebruiken de waarden uit onderstaande tabel om een aantal punten op de grafiek te bepalen.

| θ | 2θ | r | $x = r \cos \theta$ | $y = r \sin \theta$ |
|----------------|---------------|-------|---------------------|---------------------|
| 0 | 0 | 1,000 | 1,000 | 0,000 |
| $\pm\pi/12$ | $\pm\pi/6$ | 0,866 | 0,837 | $\pm 0,224$ |
| $\pm\pi/6$ | $\pm\pi/3$ | 0,500 | 0,433 | $\pm 0,250$ |
| $\pm\pi/4$ | $\pm\pi/2$ | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| $\pm\pi/3$ | $\pm 2\pi/3$ | 0,500 | 0,250 | $\pm 0,433$ |
| $\pm 5\pi/12$ | $\pm 5\pi/6$ | 0,866 | 0,224 | $\pm 0,837$ |
| $\pm\pi/2$ | $\pm\pi$ | 1,000 | 0,000 | $\pm 1,000$ |
| $\pm 7\pi/12$ | $\pm 7\pi/6$ | 0,866 | -0,224 | $\pm 0,837$ |
| $\pm 2\pi/3$ | $\pm 4\pi/3$ | 0,500 | -0,250 | $\pm 0,433$ |
| $\pm 3\pi/4$ | $\pm 3\pi/2$ | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| $\pm 5\pi/6$ | $\pm 5\pi/3$ | 0,500 | -0,433 | $\pm 0,250$ |
| $\pm 11\pi/12$ | $\pm 11\pi/6$ | 0,866 | -0,837 | $\pm 0,224$ |
| $\pm\pi$ | $\pm 2\pi$ | 1,000 | -1,000 | 0,000 |

Door deze punten te verbinden krijgen we de kromme zoals geschetst in Figuur 3.6.



Figuur 3.6: Kromme in poolcoördinaten $r = |\cos(2\theta)|$.

3.3 Cyclometrische functies

Boogsinus

De sinusfunctie $\sin x$ heeft géén inverse functie, daar met elke waarde van $y \in [-1, 1]$ oneindig veel waarden van x overeenstemmen waarvoor $y = \sin x$. Om een inverse functie te kunnen definiëren voor $\sin x$, moeten we het domein van $\sin x$ beperken zo dat $\sin x$ strikt stijgend of strikt dalend is in het domein.

Nu is $\sin x$ strikt stijgend op het interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De beperking van de sinusfunctie tot dit interval is inverteerbaar en de inverse functie wordt **boogsinus** of arcsinus genoemd en men noteert bgsin of arcsin. Dan is bgsin een functie met domein $[-1, 1]$ en er geldt voor $y \in [-1, 1]$ dat

$$\text{bgsin } y = x$$

als en slechts als

$$\sin x = y \quad \text{en} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Meestal draaien we de rollen van x en y hierin om, zodat

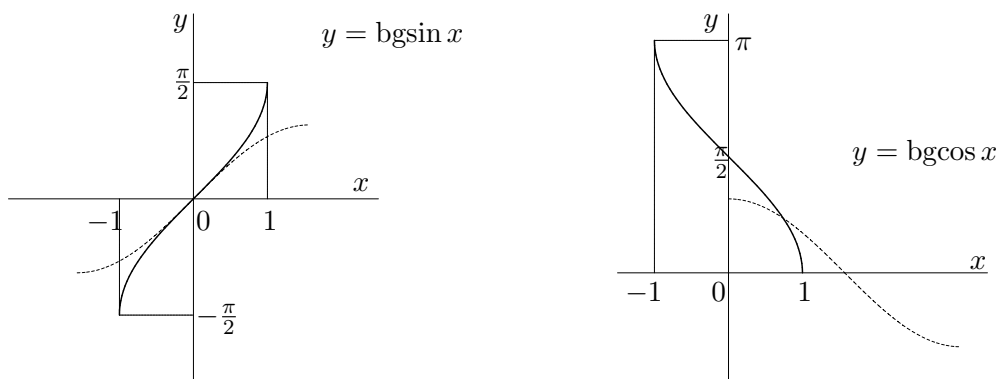
$$\text{bgsin } x = y$$

als en slechts als

$$\sin y = x \quad \text{en} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

De grafiek van $y = \text{bgsin } x$ krijgen we door de grafiek van $y = \sin x$ te spiegelen ten opzichte van de eerste bissectrice zoals aangegeven in Figuur 3.7.

Op dezelfde wijze als voor $\sin x$, definiëren we nu een inverse functie voor $\cos x$ en $\tan x$.



Figuur 3.7: Links: de grafiek van de functie $y = \text{bgsin } x$ (volle lijn). De stip-pellijn is de grafiek van $y = \sin(x)$ beperkt tot $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Rechts: de grafiek van de functie $y = \text{bgcos } x$ (volle lijn). De stip-pellijn is de grafiek van $y = \cos x$ beperkt tot $0 \leq x \leq \pi$.

Boogcosinus

De beperking van $\cos x$ tot het interval $[0, \pi]$ is strikt dalend en bijgevolg inverteerbaar. De inverse functie is **boogcosinus** en we noteren bgcos of \arccos . De functie bgcos heeft domein $[-1, 1]$ en voor $x \in [-1, 1]$ geldt dat

$$\text{bgcos } x = y$$

als en slechts als

$$\cos y = x \quad \text{en} \quad y \in [0, \pi].$$

De grafiek van $y = \text{bgcos } x$ is aangegeven in Figuur 3.7; hij wordt bekomen door de grafiek van de functie $y = \cos x$ te spiegelen ten opzichte van de eerste bissectrice.

Boogtangens

De beperking van $\tan x$ tot het open interval $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ is strikt stijgend, en is dus inverteerbaar. De inverse functie is **boogtangens** of arctangens, die we noteren met bgtan of \arctan . Het domein van bgtan is \mathbb{R} en voor $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\text{bgtan } x = y$$

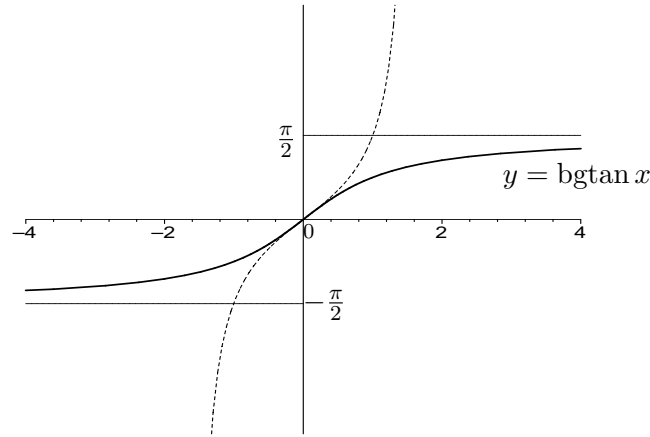
als en slechts als

$$\tan y = x \quad \text{en} \quad y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

De grafiek van $y = \text{bgtan } x$ staat aangegeven in Figuur 3.8. Er geldt dat

$$\begin{aligned} \text{bgtan } x &\rightarrow \frac{\pi}{2} & \text{als } x &\rightarrow +\infty, \\ \text{bgtan } x &\rightarrow -\frac{\pi}{2} & \text{als } x &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

en dus zijn $y = \frac{\pi}{2}$ en $y = -\frac{\pi}{2}$ **horizontale asymptoten** van de grafiek.



Figuur 3.8: De grafiek van de functie $y = \text{bgtan } x$ (volle lijn). De stippellijn is de grafiek van de functie $y = \tan x$ beperkt tot het interval $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

3.4 Exponentiële functies

Een **exponentiële functie** heeft de vorm

$$f(x) = a^x$$

met $a > 0$ het **grondtal** van de functie. De veranderlijke x komt voor in de exponent. De exponentiële functie die het meest gebruikt wordt in wiskunde, statistiek en natuurwetenschappen heeft het getal $e = 2,71828 \dots$ als grondtal. Naast e^x schrijven we ook $\exp(x)$, dus

$$\exp(x) = e^x.$$

Als we spreken over de exponentiële functie dan wordt standaard de exponentiële functie met grondtal e bedoeld.

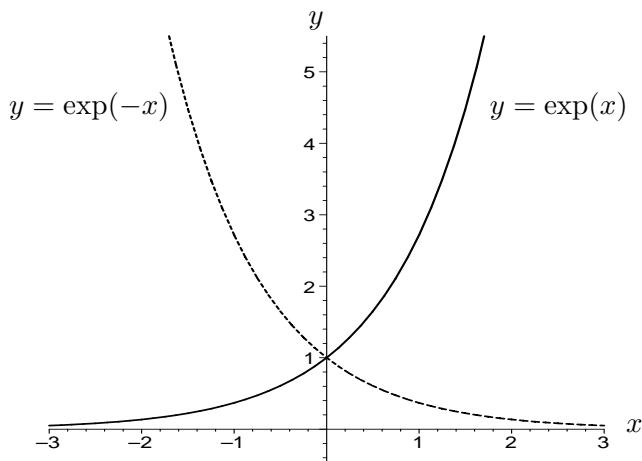
De exponentiële functie kan gedefinieerd worden door de oneindige reeks

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

De waarde van e^x kan tot op elke gewenste nauwkeurigheid berekend worden door in de reeks een voldoende aantal termen samen te nemen. Er geldt ook dat

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (3.4.1)$$

Dat gaan we later in Voorbeeld 5.5.7 tonen.



Figuur 3.9: Grafieken van de functies $y = \exp(x)$ (volle lijn) en $y = \exp(-x)$ (stippellijn).

We zullen later zien dat de functie e^x de karakteristieke eigenschap heeft dat ze gelijk is aan haar afgeleide functie

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Dit betekent dat de helling van de grafiek van de exponentiële functie in elk punt gelijk is aan de waarde van de exponentiële functie in dat punt. Zie Figuur 3.9 voor de grafiek van de functies $y = \exp(x)$ en $y = \exp(-x)$.

De exponentiële functies a^x hebben de volgende eigenschappen. Zij $a > 0$. Dan geldt voor elke $x, y \in \mathbb{R}$,

(a) $a^0 = 1$ en $a^x > 0$,

(b) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(c) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$,

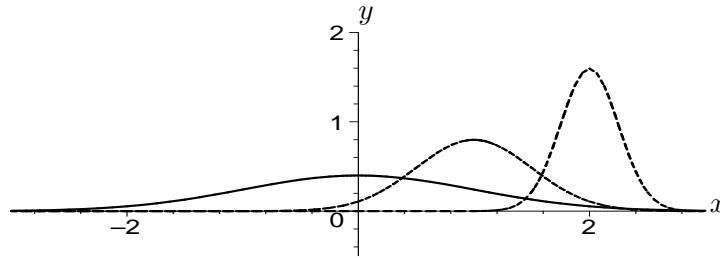
(e) Als $a > 1$ dan is a^x een strikt stijgende functie met

$$a^x \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow -\infty \quad \text{en} \quad a^x \rightarrow +\infty \quad \text{als } x \rightarrow +\infty,$$

(f) Als $0 < a < 1$ dan is a^x een strikt dalende functie met

$$a^x \rightarrow +\infty \quad \text{als } x \rightarrow -\infty \quad \text{en} \quad a^x \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow +\infty,$$

De exponentiële functie komt voor in andere belangrijke functies, zoals bijvoorbeeld de Gaussische functie.



Figuur 3.10: Grafieken van de Gaussische functie (3.4.2). De waarden voor μ en σ zijn achtereenvolgens $\mu = 0$, $\sigma = 1$ (volle lijn), $\mu = 1$, $\sigma = 1/2$ (stippellijn) en $\mu = 2$, $\sigma = 1/4$ (streepjeslijn). Hoe kleiner σ is hoe meer de grafiek gepiekt is rond de waarde μ .

Voorbeeld 3.4.1. De normale of Gaussische verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ is gelijk aan

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (3.4.2)$$

Deze kansverdeling wordt veel gebruikt in de statistiek en de kansrekening.

De grafiek van (3.4.2) voor enkele waarden van μ en σ staat in Figuur 3.10.

De Gaussische functie bereikt een maximum bij $x = \mu$. Er geldt dat $f(x)$ snel naar 0 gaat als $x \rightarrow \pm\infty$.

3.5 Logaritmische functies

De logaritmische functies zijn de inverse functies van de exponentiële functies. Als $a > 1$ dan is a^x strikt stijgend met

$$a^x \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow -\infty \quad \text{en} \quad a^x \rightarrow +\infty \quad \text{als } x \rightarrow +\infty,$$

Elke waarde $y > 0$ komt precies één keer voor als $y = a^x$ met $x \in \mathbb{R}$. We stellen dus:

$$\text{als } y = a^x \quad \text{dan} \quad x = \log_a y.$$

Draaien we hierin de rollen van x en y om dan vinden we de **logaritmische functie** $y = f(x) = \log_a x$ met grondtal a waarvoor geldt

$$y = \log_a x \quad \text{als en slechts als } x = a^y.$$

De belangrijkste logaritmische functies zijn de logaritme van grondtal 10

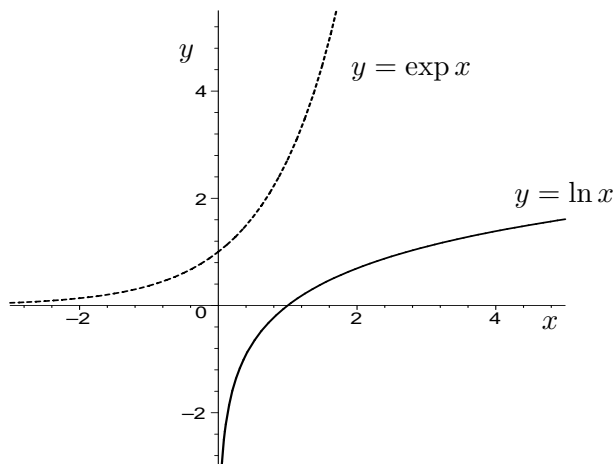
$$y = 10^x, \quad x = \log_{10} y$$

en de **natuurlijke logaritme** met grondtal e die we noteren met $\ln x$

$$y = e^x, \quad x = \log_e y = \ln y$$

zie de grafiek in Figuur 3.11.

De grafieken van alle logaritmische functies lijken op elkaar met eigenschappen (we veronderstellen steeds $a > 1$)



Figuur 3.11: De grafiek van de natuurlijke logaritme $y = \ln x$ (volle lijn) wordt verkregen door de grafiek van de exponentiële functie $y = \exp x$ te spiegelen in de rechte $y = x$.

(a) $\log_a 1 = 0$

(b) $\log_a x$ is een strikt stijgende functie met

$$\log_a x \rightarrow -\infty \text{ als } x \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad \log_a x \rightarrow +\infty \text{ als } x \rightarrow +\infty.$$

Merk op dat $\log_a x$ enkel gedefinieerd is voor $x > 0$.

Verdere eigenschappen zijn (voor $a > 1$ en $x, y > 0$):

(c) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$

(d) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$

(e) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x,$

(f) $\log_a(x^s) = s \log_a x$ voor elke $s \in \mathbb{R}$.

Met hulp van het natuurlijke logaritme kunnen we de functie a^x herschrijven, voor elk $a > 0$, tot

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logaritmische schaal

De logaritme met grondtal 10 wordt gebruikt in de definitie van de pH-schaal voor de zuurgraad van een waterige oplossing. De definitie is

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+]$$

met $[\text{H}^+]$ de concentratie van waterstofionen gemeten in $\text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$ (mol per liter). Dus

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} \quad \text{mol} \cdot \text{l}^{-1}.$$

Een pH waarde van 7 (neutrale oplossing) komt overeen met een waterstofionen concentratie van $[\text{H}^+] = 10^{-7}$ mol per liter.

Als de pH waarde toeneemt bij 1 dan neemt de H^+ concentratie af met een factor 10. Dit is een voorbeeld van een **logaritmische schaal**. Andere voorbeelden van logaritmische schalen zijn

- de schaal van Richter voor de sterkte van aardbevingen
- de schaal van Beaufort voor de windkracht

Voor deze schalen geldt dat als de waarde met 1 toeneemt de kracht (van de aarbeving of van de wind) met een zekere factor toeneemt.

Overgangen

Er zijn eenvoudige overgangen tussen logaritmen met verschillend grondtal. Als $a, b > 1$ dan geldt

$$\log_b x = c \log_a x \quad \text{met } c = \log_b a$$

Deze relatie toont aan dat twee logaritmische functies met verschillende grondtallen inderdaad sterk verwant zijn. Op een constante c na zijn ze aan elkaar gelijk.

Groei van exponentiële en logaritmische functies

Zowel de exponentiële functie $\exp x$ als de logaritme $\ln x$ stijgt als $x \rightarrow +\infty$. Dit zien we bijvoorbeeld in Figuur 3.11. Er is echter een duidelijk verschil in de snelheid waarmee dat gebeurt.

- (a) De logaritmische functie $\ln x$ stijgt heel traag als $x \rightarrow +\infty$. De **logaritmische groei** verloopt trager dan de groei van een positieve macht x^p van x , hoe klein $p > 0$ ook is. Dit wordt uitgedrukt door

$$\frac{\ln x}{x^p} \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow +\infty$$

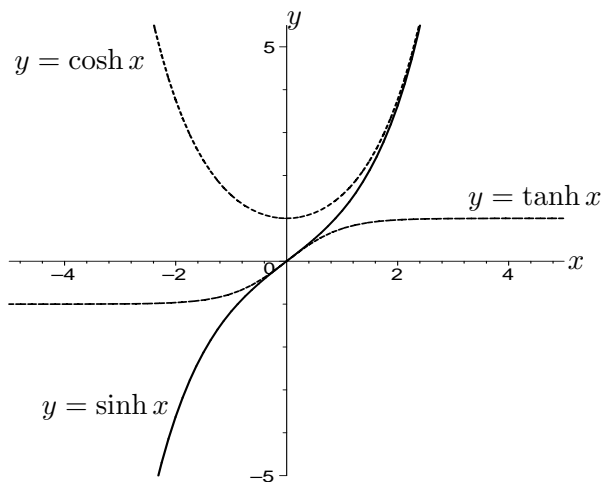
voor elke $p > 0$.

- (b) De exponentiële functie $\exp x$ stijgt heel snel als $x \rightarrow +\infty$. De **exponentiële groei** verloopt sneller dan de groei van een positieve macht x^p van x , hoe groot $p > 0$ ook is. Dit wordt uitgedrukt door

$$\frac{\exp x}{x^p} \rightarrow +\infty \quad \text{als } x \rightarrow +\infty$$

voor elke $p > 0$, of ook

$$x^p \exp(-x) \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow +\infty.$$



Figuur 3.12: Grafieken van de hyperbolische functies: $y = \cosh x$ (stippellijn), $y = \sinh x$ (volle lijn) en $y = \tanh x$ (streepjeslijn).

3.6 Hyperbolische functies cosh, sinh en tanh

Met behulp van de exponentiële functie e^x worden de **hyperbolische functies** gedefinieerd die we zo nu en dan tegenkomen in toepassingen. Er geldt

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3.6.1)$$

en

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (3.6.2)$$

We spreken ze uit als ‘cosinus hyperbolicus’, ‘sinus hyperbolicus’ en ‘tangens hyperbolicus’. Deze functies zijn gedefinieerd voor elke x .

De grafieken van deze hyperbolische functies zijn weergegeven in Figuur 3.12.

De hyperbolische functies hebben eigenschappen die gelijkaardig zijn met de eigenschappen van goniometrische functies. Er geldt bv.

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.6.1. Beschouw de kromme

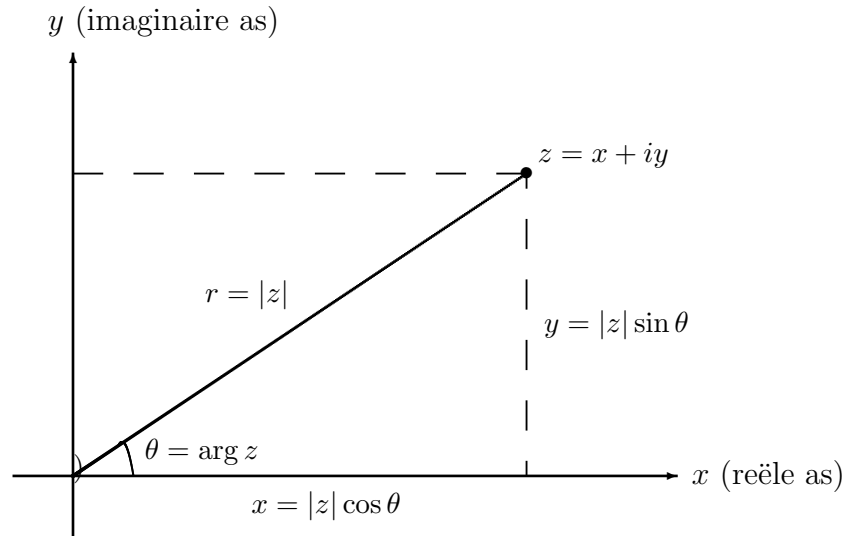
$$\begin{cases} x = a \cosh t, \\ y = b \sinh t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.6.3)$$

met $a \neq 0$ en $b \neq 0$. Gebruik makend van de eigenschap

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

kunnen we t elimineren uit (3.6.3). Er geldt namelijk

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Figuur 3.13: Grafische voorstelling van het reëel en imaginair deel en van de modulus en het argument van een complex getal.

en dit is de vergelijking van een hyperbool. De kromme (3.6.3) is de parametrisatie van (een deel van) de hyperbool. Dit is de reden dat de functies ‘hyperbolisch’ worden genoemd.

3.7 Complexe getallen (vervolg)

3.7.1 Grafische voorstelling

Het complexe getal $z = x + iy$ identificeren we met het punt in het vlak met coördinaten (x, y) , zoals getoond in Figuur 3.13. We spreken van het **complexe vlak**. De horizontale as wordt de **reële as** en de verticale as de **imaginaire as** genoemd. De voorstelling $x + iy$ van een complex getal is de Cartesiaanse voorstelling ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel.

Zoals we gezien hebben in paragraaf 3.2 kan een punt (x, y) in het vlak ook met **poolcoördinaten** (r, θ) beschreven worden waarin

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Hierin is r de afstand van (x, y) tot de oorsprong en θ is de hoek die het lijnstuk van de oorsprong naar (x, y) maakt met de positieve x -as. Deze beschrijving gebruiken we ook voor complexe getallen. We schrijven dus

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

en we noemen r de **modulus** (of de **absolute waarde**) en θ het **argument** van het complexe getal z . We schrijven

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.7.1)$$

Het argument is bepaald op een veelvoud van 2π na. Als θ een argument van z is, dan is

$$\arg z = \theta + 2k\pi \quad \text{met } k \in \mathbb{Z} \quad (3.7.2)$$

ook een argument van z . Om (3.7.2) uit te drukken schrijven we

$$\arg z = \theta \pmod{2\pi}. \quad (3.7.3)$$

Met behulp van de modulus wordt de **afstand** tussen twee complexe getallen $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$ gedefinieerd als

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

De afstand tussen complexe getallen voldoet aan dezelfde eigenschappen als de afstand tussen reële getallen, namelijk

- De afstand is **positief definitief**, dit wil zeggen

$$|z_1 - z_2| \geq 0, \quad \text{en} \quad |z_1 - z_2| = 0 \text{ als en slechts als } z_1 = z_2.$$

- De afstand is **symmetrisch**:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|.$$

- De afstand voldoet aan de **driehoeksongelijkheid**

$$|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|.$$

3.7.2 Complexe functies

Een functie met als domein en bereik (een deel van) het complexe vlak noemen we een complexe functie. Bij complexe functies gebruiken we z graag als onafhankelijk veranderlijke.

Een veelterm kan op natuurlijke wijze als een complexe functie beschouwd worden

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

De coëfficiënten a_j zijn reële of complexe getallen.

Een rationale functie is het quotiënt van twee veeltermen en kan ook op natuurlijke wijze als complexe functie gezien worden:

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

waarbij p en q veeltermen zijn. Omdat we niet kunnen delen door 0 (ook niet binnen de complexe getallen!) behoren de nulpunten van q niet tot het domein van r .

3.8 De exponentiële functie in het complexe vlak

3.8.1 Definitie van e^z

We willen de exponentiële functie uitbreiden tot complexe waarden en dus $\exp z = e^z$ definiëren voor $z \in \mathbb{C}$. Daarbij willen we uiteraard dat e^z de al bekende exponentiële functie is als $z \in \mathbb{R}$. Verder willen we dat de eigenschap $e^{x+y} = e^x e^y$ die we kennen voor $x, y \in \mathbb{R}$ behouden blijft voor complexe getallen. We willen dus dat

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (3.8.1)$$

geldt voor elk tweetal $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Deze eigenschap blijkt te gelden als we e^z voor algemene $z = x + iy$ als volgt definiëren.

Definitie 3.8.1. Als $z = x + iy$ dan is e^z het complexe getal gegeven door

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (3.8.2)$$

Met andere woorden

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y \quad \text{en} \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y.$$

Uit de definitie volgt meteen

$$|e^z| = e^x \quad \text{en} \quad \arg e^z = y \pmod{2\pi}.$$

Een speciaal geval van (3.8.2) is dat

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad \text{voor } y \in \mathbb{R} \quad (3.8.3)$$

met $|e^{iy}| = 1$ en $\arg e^{iy} = y \pmod{2\pi}$. Bijgevolg is e^{iy} het punt op de eenheids-cirkel in het complexe vlak dat een hoek y maakt met de reële as.

Voor de bijzondere waarde $y = \pi$ krijgen we

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i0 = -1$$

oftewel

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (3.8.4)$$

Dit is misschien wel de mooiste formule uit de hele wiskunde. Het geeft een verband tussen vijf fundamentele constanten 0 , 1 , π , e en i , en maakt gebruik van de drie fundamentele bewerkingen: optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen.

Het is nu door directe berekening na te gaan dat de complexe functie (3.8.2) inderdaad aan de gewenste eigenschap (3.8.1) voldoet. We formuleren dit als een eigenschap.

Eigenschap 3.8.2. Voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Bewijs. Zij $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$. Dan is vanwege (3.8.2)

$$e^{z_1} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \quad (3.8.5)$$

$$e^{z_2} = e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \quad (3.8.6)$$

en

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)). \quad (3.8.7)$$

We moeten inzien dat het product van (3.8.5) en (3.8.6) gelijk is aan (3.8.7). Vanwege de eigenschappen van de reële e -macht weten we dat

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}.$$

Het volstaat dus om te bewijzen dat

$$(\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) = \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) \quad (3.8.8)$$

en dit volgt inderdaad eenvoudig uit de somformules van de cosinus en sinus

$$\begin{aligned} \cos(y_1 + y_2) &= \cos(y_1) \cos(y_2) - \sin(y_1) \sin(y_2), \\ \sin(y_1 + y_2) &= \cos(y_1) \sin(y_2) + \sin(y_1) \cos(y_2). \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 3.8.3. Geef alle oplossingen van $e^z = -2$.

We schrijven $z = x + iy$. Dan is $|e^z| = e^x$ en $\arg e^z = y \pmod{2\pi}$. Omdat geldt $|-2| = 2$ en $\arg(-2) = \pi + 2k\pi$ zien we dat aan $e^z = -2$ voldaan is, als en slechts als

$$e^x = 2 \quad \text{en} \quad y = \pi + 2k\pi \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus

$$x = \ln 2 \quad \text{en} \quad y = \pi + 2k\pi \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}.$$

Er zijn dus oneindig veel oplossingen.

3.8.2 Berekeningen in poolcoördinaten

Vermenigvuldigen en delen

De voorstelling

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

van het complexe getal z in poolcoördinaten kunnen we vanwege (3.8.3) ook schrijven als

$$z = re^{i\theta}. \quad (3.8.9)$$

Vanwege de eenvoudige eigenschappen van de e -macht is deze vorm handig te gebruiken bij het vermenigvuldigen en delen van complexe getallen.

Als namelijk

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{en} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

dan

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

Met andere woorden: bij het vermenigvuldigen van complexe getallen moeten we de moduli met elkaar vermenigvuldigen en de argumenten bij elkaar optellen:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi, \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Voor de deling geldt (als $z_2 \neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

Bij het delen van complexe getallen moeten we dus de moduli door elkaar delen en de argumenten van elkaar aftrekken:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi, \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Gehele machten

Ook het nemen van gehele machten van complexe getallen wordt eenvoudiger met poolcoördinaten. Als

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

en als $n \in \mathbb{Z}$, dan

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n (e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \quad (3.8.12)$$

Voor $r = |z| = 1$ krijgen we de volgende mooie formule die bekend staat als de **formule van de Moivre**:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (3.8.13)$$

Vierkantswortels

In deze cursus zullen we niet-gehele machten van complexe getallen niet invoeren. De vierkantswortel van een complex getal z zullen we dus ook niet op een nauwkeurige manier definiëren.

In plaats daarvan zullen we voor een gegeven complex getal z de vergelijking

$$w^2 = z$$

voor $w \in \mathbb{C}$ beschouwen. De oplossingen hiervan kunnen we zien als vierkantswortels van z . Het zal blijken dat $w^2 = z$ precies twee oplossingen heeft, behalve voor $z = 0$, in welk geval alleen $w = 0$ een oplossing is.

Om de oplossingen te berekenen schrijven we zowel w als z in poolcoördinaten. Zeg

$$w = re^{i\theta}, \quad z = r_0 e^{i\theta_0}$$

waarbij we aannemen dat r_0 en θ_0 bekend zijn en dat we r en θ zoeken. Dan is

$$w^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

en uit $w^2 = z$ volgen dus de twee gelijkheden

$$r^2 = r_0 \quad \text{en} \quad 2\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}.$$

Hier is het echt belangrijk dat je $+2k\pi$ bij het argument niet vergeet!

We vinden

$$r = \sqrt{r_0} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{1}{2}\theta_0 + k\pi \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dit geeft twee oplossingen met poolcoördinaten $(\sqrt{r_0}, \frac{1}{2}\theta_0)$ en $(\sqrt{r_0}, \frac{1}{2}\theta_0 + \pi)$.

Dus

$$w_1 = \sqrt{r_0} e^{\frac{1}{2}i\theta_0} \quad \text{en} \quad w_2 = \sqrt{r_0} e^{\frac{1}{2}i\theta_0 + \pi i}.$$

Omdat $e^{\pi i} = -1$ volgt ook

$$w_2 = -\sqrt{r_0} e^{\frac{1}{2}i\theta_0} = -w_1.$$

Voorbeeld 3.8.4. Bereken alle oplossingen van $w^2 = 1 - i$.

We schrijven $1 - i$ in poolcoördinaten. Er geldt

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4},$$

zodat

$$1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Als $w = re^{i\theta}$ dan volgt uit $w^2 = 1 - i$ dat

$$r^2 = \sqrt{2} \quad \text{en} \quad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Dus $r = 2^{1/4}$ en $\theta = -\frac{\pi}{8}$ of $\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$. De twee oplossingen zijn

$$w_1 = 2^{1/4} e^{-\frac{\pi}{8}i} \quad \text{en} \quad w_2 = 2^{1/4} e^{\frac{7\pi}{8}i} = -w_1.$$

Voorbeeld 3.8.5. De twee oplossingen van

$$w^2 = -4$$

zijn $w_1 = 2i$ en $w_2 = -2i$. Dit is eenvoudig na te gaan omdat $i^2 = -1$.

Ga zelf na dat de bovenstaande methode tot dezelfde twee oplossingen leidt.

3.9 Veeltermen in het complexe vlak

3.9.1 Tweede-graadsvergelijkingen

De vergelijking $z^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossing in \mathbb{R} , maar wél in \mathbb{C} . De imaginaire eenheid $z = i$ is namelijk een oplossing, want $i^2 = -1$. Ook $z = -i$ is een oplossing. De vergelijking $z^2 + 1 = 0$ heeft twee oplossingen in \mathbb{C} en we kunnen de veelterm $z^2 + 1$ factoriseren tot

$$z^2 + 1 = (z - i)(z + i).$$

Dit resultaat kan veralgemeend worden tot veeltermen van de tweede graad met reële of complexe coëfficiënten:

$$p(z) = az^2 + bz + c, \quad \text{met } a \neq 0.$$

Omdat

$$\begin{aligned} p(z) = az^2 + bz + c &= \frac{1}{4a} (4a^2 z^2 + 4abz + 4ac) \\ &= \frac{1}{4a} ((2az + b)^2 - b^2 + 4ac) \end{aligned}$$

komt de vergelijking $p(z) = 0$ neer op de vergelijking

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Om z hieruit te bepalen lossen we eerst op

$$w^2 = b^2 - 4ac$$

met de methode zoals in paragraaf 3.8.2 beschreven. Dit levert twee oplossingen die we kunnen schrijven als $w = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$. Vervolgens vinden we z uit $2az + b = w$ zodat

$$z = \frac{-b + w}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.9.1)$$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$ heet de **discriminant** van p . De formule (3.9.1) is bekend voor reële nulpunten van tweedegraadsveeltermen met reële coëfficiënten. Ze blijft dus ook geldig voor complexe nulpunten van algemene tweedegraadsveeltermen.

De tweedegraadsveelterm $p(z) = az^2 + bz + c$ heeft dus twee nulpunten z_1 en z_2 . Er geldt

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Als $D = 0$ dan is $z_1 = z_2$ en dan geldt de factorisatie

$$p(z) = a(z - z_1)^2.$$

3.9.2 Veeltermen met reële coëfficiënten

Als de tweedegraadsveelterm

$$p(z) = az^2 + bz + c$$

reële coëfficiënten heeft, dan is de discriminant

$$D = b^2 - 4ac$$

ook reëel. Als $D \geq 0$ dan is (3.9.1) de bekende formule voor de reële nulpunten van een tweedegraadsveelterm.

Als $D < 0$ dan zijn de oplossingen van $w^2 = D$ zuiver imaginair, namelijk $w = \pm i\sqrt{-D}$ met $\sqrt{-D}$ de positieve vierkantswortel van het positieve getal $-D$. Volgens (3.9.1) zijn de nulpunten van p dan gelijk aan

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{-D}}{2a}.$$

Als $x = \frac{-b}{2a}$ en $y = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$, dan zijn x en y reëel en

$$z_1 = x + iy, \quad \text{en} \quad z_2 = x - iy.$$

De twee niet-reële nulpunten zijn bijgevolg elkaars **complex toegevoegden**.

Dit resultaat blijft geldig voor veeltermen van hogere graad.

Eigenschap 3.9.1. *Neem aan dat*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

*een veelterm van graad n is met **reële coëfficiënten**. Als $z = x + iy$ een nulpunt is van p dan is $\bar{z} = x - iy$ ook een nulpunt van p . Bijgevolg komen niet-reële nulpunten van p altijd voor in complex toegevoegde paren.*

Bewijs. Het bewijs steunt op de volgende eigenschappen van de complex toegevoegde. Voor complexe getallen z_1 en z_2 geldt

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z^k} = \overline{z}^k. \quad (3.9.2)$$

Daaruit volgt

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n} \overline{z}^n + \overline{a_{n-1}} \overline{z}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0}. \end{aligned}$$

Neem aan dat de coëfficiënten reëel zijn. Dan geldt $\overline{a_k} = a_k$ voor elke $k = 0, \dots, n$, zodat in dat geval geldt

$$\overline{p(z)} = a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = p(\overline{z}).$$

Als z een nulpunt van p is, dan is $p(z) = 0$ en bijgevolg is dan ook

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.$$

Dus de complex toegevoegde \overline{z} is dan ook een nulpunt van p . □

3.9.3 Hoofdstelling van de algebra

De hoofdstelling van de algebra zegt dat elke veelterm van de n -de graad met complexe coëfficiënten kan ontbonden worden in n factoren van de eerste graad. Dit wordt precies geformuleerd in de volgende stelling.

Stelling 3.9.2. *Zij*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

een veelterm met coëfficiënten $a_k \in \mathbb{C}$ en $a_n \neq 0$. Dan bestaan er $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ met de eigenschap dat

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

De getallen z_1, \dots, z_n zijn de nulpunten van $p(z)$ in het complexe vlak. Het aantal keer dat een nulpunt voorkomt heet de **multipliciteit** van het nulpunt. Het is mogelijk dat alle nulpunten onderling verschillend zijn (met multipliciteit 1), maar het is ook mogelijk dat er nulpunten zijn van hogere multipliciteit. In dat geval spreekt men ook wel van samenvallende nulpunten.

De hoofdstelling van de algebra wordt ook wel als volgt uitgedrukt:

- Een veelterm van graad n heeft n nulpunten in het complexe vlak, waarbij samenvallende nulpunten geteld worden naar gelang hun multipliciteit.

Het bewijs van de hoofdstelling van de algebra valt buiten het bereik van deze cursus.

3.10 Oefeningen

Oefening 3.1. Zet de volgende hoeken om in radialen:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| (a) $A = 5^\circ$ | (c) $C = 120^\circ$ |
| (b) $B = 87^\circ$ | (d) $D = 260^\circ$ |

Oefening 3.2. Zet de volgende hoeken om in graden:

- | | |
|------------------|-------------------|
| (a) $A = \pi/10$ | (c) $C = 7\pi/8$ |
| (b) $B = 3\pi/8$ | (d) $D = 9\pi/80$ |

Oefening 3.3. Gebruik de eigenschappen van een gelijkbenige rechthoekige driehoek om aan te tonen dat $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Oefening 3.4. Gebruik de goniometrische cirkel om te laten zien dat voor elke θ geldt dat $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ en $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$.

Oefening 3.5. Neem aan dat in een rechthoekige driehoek (als in Figuur 3.4 in de cursus) de twee rechthoekszijden lengtes $a = 12$ en $b = 5$ hebben. Bereken:

- De lengte van de hypotenusa.
- De sinus, cosinus en tangens van elk van de hoeken.

Oefening 3.6. Laat zien dat

$$(a) \cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)$$

$$(b) \sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$$

Oefening 3.7. Druk uit in termen van $\sin x$ en $\cos x$:

$$(a) \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$(c) \sin(x - \frac{\pi}{2})$$

$$(e) \sin(x \pm \pi)$$

$$(b) \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$(d) \cos(x \pm \pi)$$

Oefening 3.8. Bepaal de waarde van volgende uitdrukkingen:

$$(a) \sin 135^\circ$$

$$(e) \sin \frac{5\pi}{4}$$

$$(i) \operatorname{bgsin} 1$$

$$(b) \sin(-225^\circ)$$

$$(f) \tan \frac{2\pi}{3}$$

$$(j) \operatorname{bgsin} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(c) \tan(-\frac{5\pi}{4})$$

$$(g) \sec(-\frac{\pi}{3})$$

$$(k) \operatorname{bgtan} 1$$

$$(d) \sin(-\frac{5\pi}{6})$$

$$(h) \cos(-\frac{\pi}{4})$$

$$(l) \operatorname{bgcos}(-1)$$

Oefening 3.9. Geef alle waarden van x die voldoen aan:

$$(a) \cos 3x = 0$$

$$(c) \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$(b) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$(d) \tan x = 1$$

Oefening 3.10. (Bron nl.wikipedia.org/wiki/Wet_van_Bragg) De wet van Bragg is een natuurkundige wet die beschrijft hoe met röntgendiffractie afstanden in een kristalrooster berekend kunnen worden. Invallende röntgenstralen worden grotendeels doorgelaten, maar het reflecterende deel vertoont interferentiepatronen waar afstanden in het kristalrooster uit kunnen worden afgeleid. De wet van Bragg luidt

$$n\lambda = 2d \cdot \sin \theta$$

waarin n een strikt positief geheel getal is, λ de golflengte van de röntgenstraling, d de afstand tussen de vlakken in het kristalrooster en θ de hoek tussen de inkomende stralen en de vlakken.

(a) Onder welke hoeken θ wordt röntgenstraling van golflengte $1,5 \times 10^{-10}$ m gereflecteerd door vlakken op onderlinge afstand $3,0 \times 10^{-10}$ m?

(b) Als röntgenstraling van golflengte $5,0 \times 10^{-10}$ m gereflecteerd worden onder een hoek $\theta = \pi/6$, wat zijn dan de mogelijke afstanden tussen de vlakken in het kristalrooster?

Oefening 3.11. Schets de grafiek van de harmonische golf functie

$$\phi(x, t) = \sin(2\pi(x - t))$$

als functie van x met $-1 \leq x \leq 2$, voor $t = 0$, $t = 1/4$ en $t = 1/2$.

Oefening 3.12. De functie

$$\psi(x, t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$$

stelt een staande golf voor.

- (a) Voor welke waarde van de tijd t is de amplitude van de golf maximaal en voor welke t is de amplitude gelijk aan 0?
- (b) Schets de golf voor x tussen 0 en 3 voor $t = 0$ en voor $t = 1/8$.

Oefening 3.13. Bewijs de volgende identiteiten:

- (a) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ (c) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan x$
- (b) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ (d) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x$

Oefening 3.14. Geef de Cartesische coördinaten van de volgende punten die in poolcoördinaten gegeven worden door

- (a) $r = 3, \theta = \pi/3,$ (c) $r = 1, \theta = \pi,$
- (b) $r = 2, \theta = 3\pi/4,$ (d) $r = 3, \theta = 4\pi/3.$

Oefening 3.15. Geef de poolcoördinaten van de punten die in Cartesische coördinaten gegeven worden door:

- (a) $(3, 2),$ (c) $(3, -2),$
- (b) $(-3, 2),$ (d) $(-3, -2).$

Oefening 3.16. Schets de grafiek van de volgende krommen die in poolcoördinaten gegeven worden door:

- (a) $r = 1 + \sin \theta$
- (b) $r = a(1 + \cos \theta), \quad (a > 1), \quad (\text{cardioïde})$
- (c) $r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$
- (d) $r = \frac{4}{1 + 2 \cos \theta}$
- (e) $r = \frac{1}{\sin \theta}$
- (f) $r = A e^{a\theta}, \quad (A, a \in \mathbb{R}_0^+), \quad (\text{logaritmische spiraal})$
- (g) $r = A\theta, \quad (A \in \mathbb{R}_0^+), \quad (\text{spiraal van Archimedes})$
- (h) $r = a \cos n\theta, \quad (a > 0), \quad (\text{n-bladig rozet})$
- (i) $r = a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad (a > 0), \quad (\text{lemniscaat})$
- (j) $r = \frac{a}{\theta}, \quad (a > 0), \quad (\text{hyperbolische spiraal})$

Oefening 3.17. Herschrijf elk van de volgende vergelijkingen in Cartesische coördinaten en schets de grafiek:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\theta = 2$ | (d) $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$ |
| (b) $r = 2 \sin \theta$ | (e) $\theta = \frac{\pi}{4}$ |
| (c) $r = \frac{1}{\cos \theta}$ | |

Oefening 3.18. Bepaal het domein en schets de grafiek van de functies:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\text{bgsin}(\sin x)$ | (c) $\text{bgcos}(\sin x)$ |
| (b) $\sin(\text{bgsin } x)$ | (d) $\sin(\text{bgcos } x)$ |

Oefening 3.19. Schets de grafieken van de functies e^{nx} voor $n = -1, 0, 1, 2$ in één figuur.

Oefening 3.20. De Maxwell-Boltzmannverdeling

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

geeft de verdeling van de snelheden v in een verdund gas. Hierin is m de massa van een gasdeeltje, k is de Boltzmannconstante en T is de temperatuur.

Schets de grafiek van de Maxwell-Boltzmannverdeling als eenheden zodanig gekozen zijn dat $m = 1$, $k = 1$ en $T = 1$. U mag uw grafisch rekentoestel hierbij gebruiken.

Oefening 3.21. Vereenvoudig:

- | | | |
|--------------------------|--|-----------------------------|
| (a) $\log_2 16$ | (e) $\log_2 \sqrt{2}$ | (i) $\ln e^{x^2}$ |
| (b) $\log_4 64$ | (f) $\log_{10} \frac{1}{100}$ | (j) $2^x \log_2 3$ |
| (c) $\log_2 \frac{1}{4}$ | (g) $\log_{10} 0.001$ | (k) $\ln e^{-ax^2+bx+c}$ |
| (d) $\ln \sqrt{e}$ | (h) $\ln \frac{e^3 \sqrt{e}}{e^{1/3}}$ | (l) $e^{3 \ln 2 - 2 \ln 5}$ |

Oefening 3.22. Schrijf als één enkele logaritme:

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| (a) $\ln 2 + \ln 3$ | (c) $5 \ln 2$ |
| (b) $\ln 2 - \ln 3$ | (d) $\ln(x+1) - 2 \ln x$ |

Oefening 3.23. In een eerste orde chemische reactie $A \rightarrow \dots$ voldoet de concentratie $a(t)$ van stof A aan

$$a(t) = a(0)e^{-kt}$$

waarin $a(0)$ de beginconcentratie is, en k de reactieconstante. De halfwaardetijd $\tau_{1/2}$ is de tijd die het duurt om tot de helft van de beginconcentratie terug te vallen.

Druk $\tau_{1/2}$ uit in de reactieconstante k .

Oefening 3.24. De barometrische formule

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

geeft de druk van een gas met molaire massa M op een hoogte h . Hierin is p_0 de druk op zeeniveau. Druk h uit in functie van de andere veranderlijken.

Oefening 3.25. Ga de volgende eigenschappen na:

- (a) $\cosh x + \sinh x = e^x$, $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$,
- (b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
- (c) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,
- (d) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

Oefening 3.26. Schrijf

$$\ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

als combinatie van $\ln(k - 1)$, $\ln k$ en $\ln(k + 1)$.

Oefening 3.27. Los op naar x :

- (a) $\ln x = \frac{1}{3}(\ln 16 + 2 \ln 2)$
- (b) $\ln x = 2(\ln 3 - \ln 5)$
- (c) $\log_a x + \log_a(x + 1) = \log_a 2$
- (d) $\log_3(x - 3) = \frac{1}{2 \log_2 3} + \log_{81}(3x - 13)^2$

Oefening 3.28. Los op naar x :

- (a) $3^x = e^2$
- (b) $x^{\ln x} = e$
- (c) $2^{3x-5} = 5^x$
- (d) $15 \cdot 3^{x+1} - 243 \cdot 5^{x-2} = 0$
- (e) $3^{2x-3} - 10 \cdot 3^{x-2} + 3 = 0$

Oefening 3.29. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ die voldoen aan:

- (a) $\ln(x + 5) > 7$
- (b) $\log_a(x^2 - 3) > 2$
- (c) $\log_2(x - 1) < 1$

Oefening 3.30. Een geluid, geproduceerd met een intensiteit van I Watt/m² levert het volgend geluidsniveau:

$$\text{dB-niveau} = 10 \log_{10}(10^{12} I) \text{ dB.}$$

- (a) Toon aan dat als je de intensiteit van je stereo verdubbelt, het geluidsniveau slechts met ongeveer 3 dB verhoogt.
- (b) Met welke factor moet je de intensiteit vermenigvuldigen opdat het geluidsniveau met 10 dB vermeerdt?

Oefening 3.31. Jodium 131 heeft een halveringstijd van 8 dagen, d.w.z. dat de hoeveelheid radioactieve massa jodium 131 na 8 dagen slechts de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid bedraagt. Wanneer is de hoeveelheid jodium 131 gedaald tot 1/20 van de oorspronkelijke hoeveelheid?

Oefening 3.32. De atmosferische druk (uitgedrukt in millimeter kwik) daalt exponentieel snel met stijgende hoogte x (uitgedrukt in meter). De druk op zeeniveau is 760 mm kwik en op een hoogte van 1000 m is de druk 672.71 mm kwik. Vind de waarde van de druk op 3000 m hoogte.

Oefening 3.33. Een epidemie verspreidt zich zo dat na t weken het aantal besmette mensen gegeven wordt door een functie van de vorm

$$f(t) = \frac{B}{1 + Ce^{-kt}}$$

waarbij B het aantal mensen is dat vatbaar is voor de ziekte en C en k strikt positieve, nader te bepalen parameters.

- (a) Bepaal C en k als je weet dat $1/5$ van de vatbare personen besmet waren op tijdstip $t = 0$ en dat $B/2$ personen besmet waren na 4 weken.
- (b) Wanneer zal $4/5$ van de vatbare personen besmet zijn?

Oefening 3.34. Laat zien dat

$$\begin{cases} x = a + r_1 \cos t, \\ y = b + r_2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

met $r_1 \neq r_2$ de parametrisatie van een ellips is.

Oefening 3.35. (Bron nl.wikipedia.org/wiki/Schaal_van_Richter)

De schaal van Richter wordt gebruikt om de waargenomen kracht van een aardbeving uit te drukken. Het verband tussen de energie E in Joule en de magnitude n wordt gegeven door de formule:

$$n = \frac{2}{3} \log_{10} \frac{E}{2} - 3.$$

- (a) Welke magnitude komt overeen met energie $E = 10^{15}$?
- (b) Welke energie komt overeen met een magnitude $n = 5$?
- (c) Met hoeveel neemt de magnitude toe als de energie verdubbelt ?

Oefening 3.36. Maak een figuur van het complexe vlak. Duid hierin een willekeurig punt z aan. Duid ook de ligging aan van $-z, 2z, \bar{z}, iz, z + \bar{z}$ en z^2 .

Oefening 3.37. Vind alle z waarvoor

$$z\bar{z} + 4(z - \bar{z}) = 5 + 16i$$

Oefening 3.38. Geef alle oplossingen van de vergelijkingen

- (a) $z^2 - 2z + 4 = 0$
- (b) $z^2 + 2z + 5 = 0$
- (c) $z^2 - z + 1 = 0$
- (d) $z^2 = 1 + i$
- (e) $z^3 = 8$
- (f) $z^4 = 1$
- (g) $z^4 = -1$
- (h) $z^{12} = 1$

Oefening 3.39. Teken de volgende getallen in het complexe vlak. Geef hun absolute waarde en argument.

- | | | |
|-------------|--------------------|-----------------|
| (a) $2i$ | (d) $\sqrt{3} + i$ | (g) $(1 + i)^2$ |
| (b) -3 | (e) $-6 + 6i$ | (h) $(1 + i)^3$ |
| (c) $1 - i$ | (f) $1/i$ | (i) $(1 + i)^4$ |

Oefening 3.40. Laat zien dat:

- | | |
|--|---|
| (a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ | (c) $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ |
| (b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ | (d) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ |

Oefening 3.41. Laat zien dat

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{en} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Oefening 3.42. Schrijf de complexe getallen in de cartesische vorm $x + iy$:

- | | |
|---------------------|--------------------------------|
| (a) $e^{i\pi/4}$ | (c) $e^{-(\pi/4)i + \ln 2}$ |
| (b) $6e^{2\pi i/3}$ | (d) $e^{-2\pi i} + e^{4\pi i}$ |

Oefening 3.43. Maak een schets van de gebieden in het complexe vlak beschreven door de volgende ongelijkheden:

- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) $ z \geq 2$ | (e) $ e^z < 1$ |
| (b) $ z - 1 + i < 1$ | (f) $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$ |
| (c) $1 < z + i \leq 3$ | (g) $\operatorname{Re}(z + i) \geq 2$ |
| (d) $\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2$ | (h) $0 < \arg e^z < \pi/2$ |

Oefening 3.44. Voor gegeven z_1 en z_2 bereken $z_1 z_2$, z_1/z_2 en z_2/z_1 :

- | |
|--|
| (a) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ en $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ |
| (b) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ en $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ |

Oefening 3.45. Vanuit elektriciteitsleer is bekend dat de totale weerstand van twee weerstanden R_1 en R_2 gelijk is aan $R_1 + R_2$ als ze in serie geschakeld zijn en $(R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$ als ze parallel geschakeld zijn. Dezelfde formules gelden voor de complexe impedantie.

Bereken voor de volgende waarden van complexe impedanties Z_1 en Z_2 de totale complexe impedantie zowel voor het geval dat ze in serie geschakeld zijn, als voor het geval dat ze parallel geschakeld zijn.

- | |
|---|
| (a) $Z_1 = 2 + 3i$ en $Z_2 = 1 - 5i$ |
| (b) $Z_1 = \sqrt{3}e^{\pi i/6}$ en $Z_2 = e^{2\pi i/3}$ |

Oefening 3.46. Geef alle oplossingen van:

- | | |
|---------------|------------------|
| (a) $e^z = 0$ | (b) $e^{iz} = 1$ |
|---------------|------------------|

Oefening 3.47. Bereken

(a) $(1 + i)^{20}$

(b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

Oefening 3.48. Gebruik de formule van de Moivre om aan te tonen dat

(a) $\cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta$

(b) $\sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$

Oefening 3.49. Gebruik de formule van de Moivre om $\cos 4x$ te schrijven als een veelterm in $\cos x$.

Oefening 3.50. Geef alle oplossingen van $w^2 = -i$ en geef ze aan in het complexe vlak.

Oefening 3.51. Geef alle oplossingen van de volgende vergelijkingen in het complexe vlak.

(a) $z^2 + 2iz - 1 = 0$

(b) $3z^2 + (1 + 2i)z + 2(i - 1) = 0$

(c) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$

Oefening 3.52. Als $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, wat is dan $z = \frac{a}{b}$?

Oefening 3.53. Vereenvoudig

$$\left| \frac{(a+ib)^2 e^{ia+b} - (a-ib)^2 e^{ia-b}}{4abi} \right|^2$$

waarin a en b reëel zijn. Druk het antwoord uit in een hyperbolische functie.

Oefening 3.54. (Deel van examenvraag) De kromme K_c is gegeven in poolcoördinaten door

$$K_c : r = \frac{4}{c + \cos \theta}, \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

Schets de kromme voor $c = 1$. Wat voor soort kromme is K_c voor $c = 1$?

Hoofdstuk 4

Afgeleiden

4.1 Inleidende begrippen

In de wetenschappen zijn we geïnteresseerd in de waarde van een fysische grootte en hoe deze samenhangt met de waarde van andere fysische grootheden. Daarnaast zijn we ook geïnteresseerd in hoe een verandering van de ene grootte de waarde van een andere grootte beïnvloedt.

Beschouw de ideale gaswet

$$pV = nRT.$$

Hierin kan elk van de vier veranderlijken p , V , T en n uitgedrukt worden als een functie van de drie anderen.

Als de temperatuur T verandert met een hoeveelheid ΔT waarbij p en n gelijkblijven, dan zal V veranderen van

$$V = \frac{nRT}{p}$$

naar

$$V + \Delta V = \frac{nR(T + \Delta T)}{p}$$

en de verandering in het volume is

$$\Delta V = \frac{nR}{p} \Delta T.$$

We zien hieruit dat de relatieve verandering

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{nR}{p}$$

constant is (d.w.z. onafhankelijk van T).

Als de druk p van het gas verandert met een hoeveel Δp bij constante T en n , dan verandert het volume van

$$V = \frac{nRT}{p}$$

naar

$$V + \Delta V = \frac{nRT}{p + \Delta p}$$

zodat

$$\Delta V = \frac{nRT}{p + \Delta p} - \frac{nRT}{p} = -nRT \frac{\Delta p}{p(p + \Delta p)}.$$

De relatieve verandering

$$\frac{\Delta V}{\Delta p} = -nRT \frac{1}{p(p + \Delta p)}$$

is nu niet constant, maar hangt af van de druk p en ook van de verandering Δp .

Als de verandering Δp verwaarloosbaar klein is ten opzichte van p zelf, dan kunnen we $p + \Delta p$ vervangen door p , en we vinden

$$\frac{\Delta V}{\Delta p} \approx -nRT \frac{1}{p^2}$$

hetgeen een goede benadering is voor de relatieve verandering bij kleine Δp .

Het deel van de wiskunde dat zich bezig houdt met het bestuderen van veranderingen van functies en in het bijzonder kleine relatieve veranderingen, is de **differentiaalrekening**.

4.2 Definities

We beschouwen een reële functie f van één reële veranderlijke x . Neem aan dat x verandert van een waarde x_0 tot $x_1 = x_0 + \Delta x$. De waarde

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

is de verandering of de toename in x . Merk op dat $\Delta x > 0$ als $x_1 > x_0$ en $\Delta x < 0$ als $x_1 < x_0$.

De functiewaarde $y = f(x)$ verandert van $y_0 = f(x_0)$ naar $y_1 = f(x_1)$ als x verandert van x_0 naar x_1 . De verandering in y is dus

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0).$$

De relatieve verandering

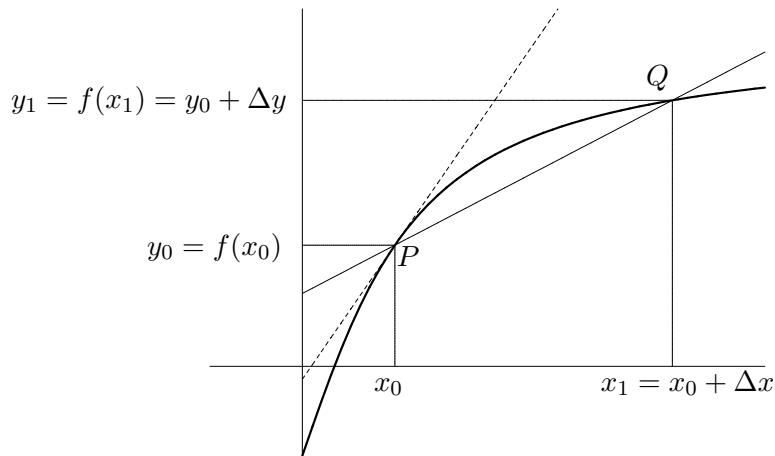
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heet het **differentiequotiënt** van de functie f . Het is de gemiddelde verandering van de afhankelijke veranderlijke $y = f(x)$ wanneer de onafhankelijke veranderlijke verandert van x_0 tot $x_0 + \Delta x$.

Meetkundig stelt het differentiequotiënt de richtingscoëfficiënt voor van de rechte door de twee punten P en Q van de grafiek van f met coördinaten $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ en $(x_1, y_1) = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, zie Figuur 4.1. De rechte door deze twee punten heeft namelijk de vergelijking

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} (x - x_0)$$

zoals eenvoudig nagegaan kan worden.



Figuur 4.1: Het differentiequotient is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de rechte door twee punten van de grafiek.

Voorbeeld 4.2.1. Voor een kwadratische functie $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ geldt

$$\text{Voor } x = x_0: \quad y_0 = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$\text{Voor } x = x_1 = x_0 + \Delta x: \quad y_1 = f(x_0 + \Delta x) = a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c$$

De verandering in y is

$$\begin{aligned} \Delta y = y_1 - y_0 &= (a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c) - (ax_0^2 + bx_0 + c) \\ &= (2ax_0 + b)\Delta x + a(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

en het differentiequotient is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax_0 + b + a\Delta x.$$

Als Δx kleiner wordt, dan beweegt het punt Q in Figuur 4.1 over de grafiek van f naar het punt P toe. Wanneer $\Delta x \rightarrow 0$ dan wentelt de rechte PQ om P en heeft als limietstand de **raaklijn** in P aan de grafiek van f , zodat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{rico van raaklijn in } P, \quad (4.2.1)$$

waarbij we aannemen dat de grafiek van f voldoende glad is in P zodat de raaklijn inderdaad bestaat. Als de grafiek bv. een knik maakt in P dan is er geen raaklijn en dan bestaat de limiet (4.2.1) niet.

Het proces waarbij we de limiet nemen in (4.2.1) noemen we **differentiëren** en het resultaat van de limiet noemen we de **afgeleide** van f in x_0 . We zullen iets meer zeggen over limieten in de volgende paragraaf.

Omdat de afgeleide een heel belangrijk begrip is geven we de formele definitie.

Definitie 4.2.2. Zij $y = f(x)$ een reële functie van één reële veranderlijke x en x_0 een element van het domein van f . Indien de limiet

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bestaat dan is f **afleidbaar** (of **differentieerbaar**) in x_0 . De waarde van deze limiet is de **afgeleide** van f in x_0 en wordt genoteerd als $f'(x_0)$ of $\frac{df}{dx}(x_0)$ of kortweg $\frac{dy}{dx}$.

De afgeleide is dus de **richtingscoëfficiënt** van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $P : (x_0, f(x_0))$. De vergelijking van de raaklijn is bijgevolg

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad (4.2.2)$$

ofwel $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Wanneer $f'(x_0) = 0$ dan is de raaklijn evenwijdig met de x -as.

Voorbeeld 4.2.3. Voor de kwadratische functie $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ hebben we in het vorige voorbeeld gezien dat het differentiequotient in x_0 gelijk is aan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax_0 + b + a\Delta x.$$

Hieruit volgt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax_0 + b.$$

De functie is bijgevolg afleidbaar in x_0 met

$$f'(x_0) = 2ax_0 + b.$$

Meestal schrijven we x in plaats van x_0 , en we zeggen dat de afgeleide van $f(x) = ax^2 + bx + c$ gelijk is aan

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Als de afgeleide $f'(x)$ bestaat voor elke waarde van x , dan definieert dit ook weer een functie, die we de **afgeleide functie** f' noemen. Andere notatie is

$$\frac{df}{dx} \quad \text{of} \quad Df$$

Hierbij zien we $D = \frac{d}{dx}$ als een **differentiaaloperator** die van een functie f de afgeleide functie $f' = Df$ maakt.

4.3 Limieten

De afgeleide is ingevoerd als limiet van het differentiequotient. Om afgeleiden te berekenen moeten we dus weten hoe we limieten uitrekenen. De limiet

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

betekent dat de functiewaarde $f(x)$ dichter bij de waarde L komt naarmate x dichter bij a komt. Het verschil tussen $f(x)$ en L is kleiner dan elk willekeurig te kiezen positief getal, als we x maar dicht genoeg bij a kiezen.

We kunnen het limietbegrip ook uitbreiden tot $a = \infty$ of $a = -\infty$. In deze paragraaf geven we daarvan enkele voorbeelden.

Voorbeelden van limieten

Voorbeeld 4.3.1. Beschouw $y = f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

De functie is niet gedefinieerd voor $x = 2$. Immers voor $x = 2$ zijn zowel de teller $x^2 - 4$ als de noemer $x - 2$ gelijk aan nul. We krijgen de **onbepaalde vorm** $\frac{0}{0}$ waarvan de waarde niet gedefinieerd is.

In dit geval kunnen we de teller factoriseren als $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Voor $x \neq 2$ geldt dan

$$y = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

en hierin kunnen we zonder probleem $x = 2$ nemen.

Bijgevolg geldt

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 2 + 2 = 4.$$

Voorbeeld 4.3.2. Beschouw $y = f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+2x}$ voor $x \rightarrow \infty$.

Zowel de teller als de noemer gaat naar oneindig als $x \rightarrow \infty$. Hier is sprake van de onbepaalde vorm $\frac{\infty}{\infty}$. We vinden de limiet door teller en noemer door x^2 te delen

$$\frac{2x^2 + 5}{x^2 + 2x} = \frac{2 + 5/x^2}{1 + 2/x}.$$

Nu gaat de teller naar 2 en de noemer naar 1 als $x \rightarrow \infty$, zodat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 2x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Voorbeeld 4.3.3. Beschouw $y = \ln(2x+3) - \ln(x+2)$ voor $x \rightarrow +\infty$.

Beide logaritmen gaan naar oneindig en er is sprake van de onbepaalde vorm $\infty - \infty$.

Vanwege de rekenregels voor logaritmen kunnen we de logaritmen samen nemen

$$\ln(2x+3) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{2x+3}{x+2}\right) \rightarrow \ln 2 \quad \text{als } x \rightarrow +\infty.$$

Voorbeeld 4.3.4. Beschouw $y = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$ voor $x \rightarrow +\infty$.

Wederom hebben we een onbepaalde vorm $\infty - \infty$. We gebruiken hier de ‘worteltruc’: We vermenigvuldigen het verschil van twee vierkantswortels met de som ervan. Dit gaat als volgt

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1} &= \left[\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1} \right] \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{(x^2+x) - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Voor $x \rightarrow +\infty$ hebben we nog steeds een onbepaalde vorm $\frac{\infty}{\infty}$.

We delen echter teller en noemer door x , waarbij we moeten bedenken dat we voor $x > 0$ onder het wortelteken door x^2 delen:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x^2}} \rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{als } x \rightarrow +\infty.$$

Voorbeeld 4.3.5. We nemen net als in het vorige voorbeeld $y = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$, maar we laten nu $x \rightarrow -\infty$.

De worteltruc leidt weer tot

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}.$$

Omdat $x \rightarrow -\infty$, mogen we veronderstellen dat $x < 0$. We delen teller en noemer nu door $|x| = -x$. Dan delen we onder het wortelteken door $|x|^2 = x^2$, zodat

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1-1/x}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x^2}} \rightarrow \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

als $x \rightarrow -\infty$.

Onbepaalde vormen

Met limieten kunnen we preciezer aangeven wat we bedoelen met een onbepaalde vorm.

We noemen de vorm $\frac{0}{0}$ onbepaald omdat we uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ niets kunnen concluderen omtrent de limiet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De limiet kan bestaan of niet bestaan en als de limiet bestaat dan kan ze eender welke waarde aannemen, afhankelijk van de precieze functies. De lezer wordt aangeraden hiervan voorbeelden te geven.

Om dezelfde reden zijn vormen als $0 \cdot \infty$ en 1^∞ onbepaald.

Voorbeeld 4.3.6. We laten zien dat de vorm $0 \cdot \infty$ onbepaald is.

Dit betekent dat we moeten laten zien dat uit het feit dat

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \tag{4.3.1}$$

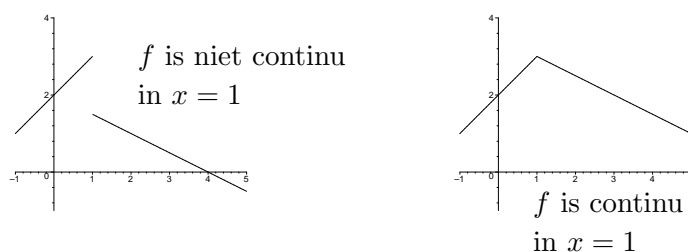
we niets kunnen besluiten omtrent $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$. Hierin is a een reëel getal of $\pm\infty$.

Neem $f(x) = c(x-a)$ en $g(x) = \frac{1}{x-a}$ met c een zekere constante. Dan geldt inderdaad (4.3.1) en

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} c(x-a) \cdot \frac{1}{x-a} = c.$$

Elke waarde c kan dus als limiet van het product $f(x)g(x)$ optreden.

Het kan ook zijn dat de limiet van het product niet bestaat, maar divergeert naar oneindig, zoals blijkt uit het voorbeeld $f(x) = x-a$ en $g(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$.



Figuur 4.2: De grafiek van de functie $y = f(x)$ uit Voorbeeld 4.3.7 voor de waarde $c = 2$ (links) en $c = 7/2$ (rechts).

Continuïteit

Een functie $y = f(x)$ is continu in het punt $x = a$ als

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ofwel: als $x \rightarrow a$ dan $y \rightarrow f(a)$. Intuïtief betekent continuïteit dat er geen sprongen in de grafiek van $y = f(x)$ zitten. We kunnen dan de grafiek zien als een ononderbroken kromme.

Voorbeeld 4.3.7. Beschouw de functie $y = f(x)$ met

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{als } x \leq 1, \\ -\frac{1}{2}x + c & \text{als } x > 1, \end{cases}$$

waarin c een constante is.

De functie heeft een verschillend voorschrift voor $x \leq 1$ en voor $x > 1$. Als $x \rightarrow 1$ met $x \leq 1$, dan zal

$$y = f(x) = x + 2 \rightarrow 3 \quad (x \leq 1).$$

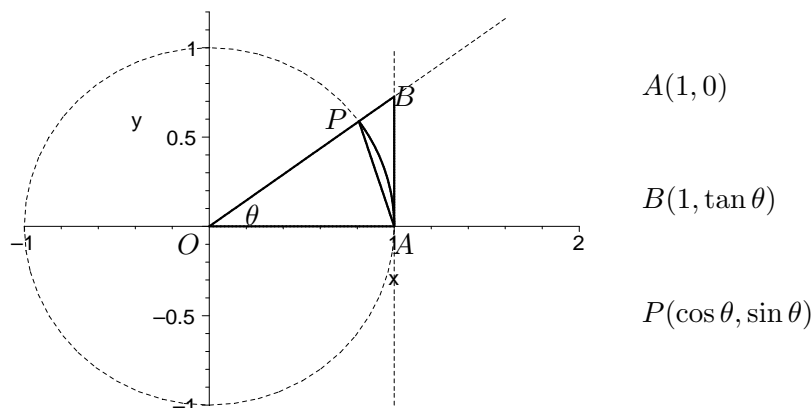
We spreken hier wel van een **linkerlimiet** en we schrijven

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3.$$

Andere notatie die soms gebruikt voor de linkerlimiet wordt is $\lim_{x \nearrow a}$ of $\lim_{x \nearrow a}$.

Als echter $x \rightarrow 1$ met $x > 1$, dan geldt

$$y = f(x) = -\frac{1}{2}x + c \rightarrow -\frac{1}{2} + c \quad (x > 1).$$



Figuur 4.3: Illustratie bij de limiet $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$.

Dit is de **rechterlimiet** die we noteren met

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\frac{1}{2} + c.$$

Andere notatie voor de rechterlimiet is $\lim_{x \searrow a}$ of $\lim_{x \downarrow a}$.

Als de linker- en de rechterlimiet verschillen van elkaar dan is de functie niet continu in $x = 1$. Dat is het geval als $c \neq 7/2$. Alleen als $c = 7/2$ is de functie continu. Zie ook Figuur 4.2.

Een belangrijke limiet

Een belangrijke limiet wordt berekend in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 4.3.8. We laten zien dat

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1. \quad (4.3.2)$$

Om (4.3.2) te bewijzen maken we gebruik van Figuur 4.3. We nemen aan dat $0 < \theta < \pi/2$. Vanuit de figuur is het duidelijk dat

$$\text{Oppervlakte van driehoek } OAP \leq \text{Oppervlakte van cirkelsector } OAP \leq \text{Oppervlakte van driehoek } OAB.$$

Nu is

$$\text{Oppervlakte van driehoek } OAP = \frac{1}{2} \sin \theta.$$

De oppervlakte van de volledige cirkel is π ; de omtrek van die cirkel bedraagt 2π . De cirkelsector OAP snijdt een booglengte θ af op de cirkelomtrek. Met de regel van drie vinden we dan

$$\text{Oppervlakte van cirkelsector } OAP = \frac{\theta}{2}.$$

Tenslotte is

$$\text{Oppervlakte van driehoek } OAB = \frac{1}{2} \tan \theta.$$

We vinden dus de volgende ongelijkheden

$$\frac{1}{2} \sin \theta \leq \frac{1}{2} \theta \leq \frac{1}{2} \tan \theta = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Wanneer we dit vermenigvuldigen met 2 en delen door θ (merk op $\theta > 0$), vinden we

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1 \leq \frac{1}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

Deze ongelijkheden kunnen we ook schrijven als

$$\cos \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1. \quad (4.3.3)$$

De ongelijkheid (4.3.3) is bewezen voor $0 < \theta < \pi/2$. Omdat zowel $\cos \theta$ als $\frac{\sin \theta}{\theta}$ even functies zijn (ze veranderen niet als we θ vervangen door $-\theta$), geldt (4.3.3) ook voor $-\pi/2 < \theta < 0$.

Als nu $\theta \rightarrow 0$ dan zal $\cos \theta \rightarrow \cos 0 = 1$. Omdat $\frac{\sin \theta}{\theta}$ zich steeds bevindt tussen $\cos \theta$ en 1, volgt de gevraagde limiet (4.3.2).

4.4 Afleiden vanuit de definitie

De afgeleide is gedefinieerd als

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

De limiet is een onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$. Immers, als de functie f continu is in x geldt voor de teller dat $f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow f(x) - f(x) = 0$ als $\Delta x \rightarrow 0$, en uiteraard geldt ook voor de noemer dat $\Delta x \rightarrow 0$.

Voorbeeld 4.4.1. Bereken de afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x}$ vanuit de definitie.

Er geldt hier dat

$$y = f(x) = \frac{1}{x}, \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

en

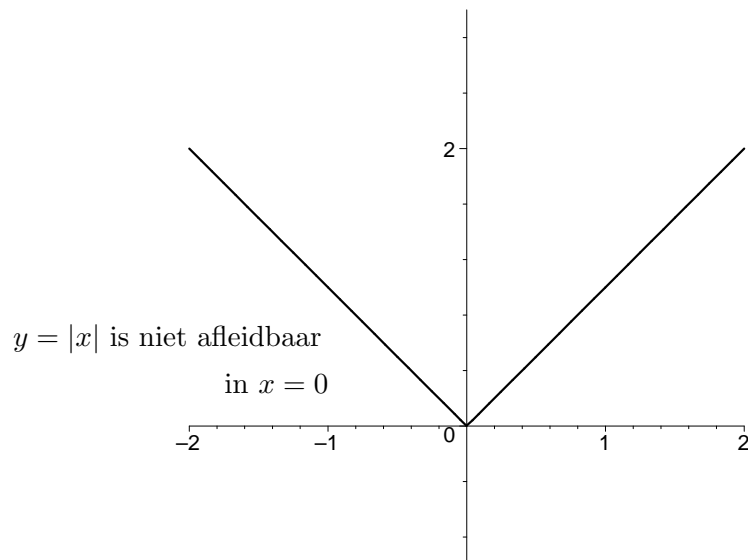
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Daarom is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

en voor $\Delta x \rightarrow 0$ gaat dit naar $-\frac{1}{x^2}$. Dus

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$



Figuur 4.4: De functie $y = |x|$ is continu maar niet afleidbaar in $x = 0$.

Voorbeeld 4.4.2. Differentieer \sqrt{x} .

We stellen $y = \sqrt{x}$, $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$, zodat

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

en we passen de worteltruc toe:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \left[\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \right] \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(x + \Delta x) - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Dan volgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{als } \Delta x \rightarrow 0.$$

Bijgevolg is

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Voorbeeld 4.4.3. Beschouw de functie $y = |x|$.

We onderzoeken de afleidbaarheid in $x = 0$. Er geldt

$$\Delta y = |\Delta x| - |0| = |\Delta x|,$$

zodat

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

De waarde van het differentiequotient hangt af van het teken van Δx . Als $\Delta x > 0$ dan is $|\Delta x| = \Delta x$, zodat

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{als } \Delta x > 0.$$

Als $\Delta x < 0$ dan is $|\Delta x| = -\Delta x$, zodat

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \quad \text{als } \Delta x < 0.$$

Bijgevolg bestaat de limiet

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

niet. De functie is niet afleidbaar in $x = 0$.

De grafiek van de functie $y = |x|$ staat in Figuur 4.4. De grafiek maakt een knik bij $x = 0$. In de oorsprong bestaat de raaklijn aan de grafiek niet.

4.5 Rekenregels

De afgeleide van een functie kan in principe steeds berekend worden met behulp van de definitie. In de praktijk is dit echter een omslachtige werkwijze. In deze paragraaf worden de voornaamste rekenregels aangegeven die een eenvoudige bepaling van de afgeleide toelaten.

4.5.1 Afgeleide van som, verschil, product en quotiënt

We geven een overzicht van de belangrijkste rekenregels. Neem aan dat de functies f en g afleidbaar zijn in x_0 . Dan geldt:

- (a) Voor elke $c \in \mathbb{R}$ is de functie cf afleidbaar in x_0 , met afgeleide

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

- (b) De som $f + g$ en het verschil $f - g$ zijn afleidbaar in x_0 , met als afgeleiden

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

en

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

- (c) **De productregel:** Het product fg is afleidbaar in x_0 , met als afgeleide

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

- (d) **De quotiëntregel:** Indien $g(x_0) \neq 0$, dan is het quotiënt f/g afleidbaar in x_0 , met als afgeleide

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Gebruik makend van de notatie $\frac{df}{dx}$ kunnen we de rekenregels samenvatten in een tabel:

| Type combinatie | Rekenregel |
|--------------------------|--|
| Veelvoud van een functie | $\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx}$ |
| Som van functies | $\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$ |
| Product van functies | $\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f \frac{dg}{dx}$ |
| Quotiënt van functies | $\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$ |

4.5.2 Bewijs van de productregel

Ter illustratie zullen we de productregel aantonen.

Het bewijs maakt gebruik van een techniek die vaker voorkomt in bewijzen. Trek een geschikte uitdrukking ergens van af, en tel het er daarna weer meteen bij, om tot een factorisatie te komen. Dit passen we toe op het differentie-quotiënt van het product fg voor de punten x_0 en $x = x_0 + \Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Van de teller trekken we $f(x_0)g(x)$ af, en we tellen het er daarna meteen weer bij. Dan krijgen we

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Deze uitdrukking kunnen we splitsen en er volgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

Als we hierin nu de limiet nemen voor $\Delta x \rightarrow 0$, dan zal $x \rightarrow x_0$, zodat $g(x) \rightarrow g(x_0)$. Omdat f en g afleidbaar zijn in x_0 geldt verder

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0), \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{\Delta x} \rightarrow g'(x_0).$$

Bijgevolg

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

en dit is inderdaad de productregel.

4.5.3 Voorbeelden

n -de machtsfuncties

De afgeleide van een constante functie is 0 en de afgeleide van de functie x is 1:

$$\frac{d}{dx}c = 0, \quad \frac{d}{dx}x = 1.$$

Met de productregel kunnen we nu $x^2 = x \cdot x$ afleiden

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{dx}{dx}x + x\frac{dx}{dx} = x + x = 2x.$$

Vervolgens kunnen we $x^3 = x \cdot x^2$ afleiden

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}(x \cdot x^2) = \frac{dx}{dx}x^2 + x\frac{d}{dx}(x^2) = x^2 + x(2x) = 3x^2.$$

Als we zo doorgaan zullen we vinden dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad (4.5.1)$$

Dit is eenvoudig te bewijzen met behulp van volledige inductie.

Een negatieve macht x^{-n} schrijven we als $\frac{1}{x^n}$ en we kunnen de quotiëntregel gebruiken om de afgeleide te berekenen:

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{\frac{d}{dx}1 \cdot x^n - 1 \cdot \frac{d}{dx}x^n}{x^{2n}}.$$

Omdat $\frac{d}{dx}1 = 0$ en $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ zoals we in (4.5.1) gezien hebben, volgt

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Later zullen we zien dat

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1} \quad (4.5.2)$$

geldt voor elk reëel getal r .

Lineariteit

Uit de onderdelen (a) en (b) van de bovenstaande rekenregels volgt dat het differentiëren een **lineaire operatie** is, dat wil zeggen: als a en b reële constanten zijn, dan geldt

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Deze lineariteit kan uitgebreid worden tot een willekeurige eindige som. Als de functies f_j afleidbaar zijn in x voor $j = 0, \dots, n$, en c_j zijn constanten, dan geldt

$$\left(\sum_{j=0}^n c_j f_j \right)'(x) = \sum_{j=0}^n c_j f'_j(x).$$

Veeltermen

Een veelterm is een lineaire combinatie van de n -de machtsfuncties x^n . Van de n -de machtsfuncties kennen we de afgeleide, zie (4.5.1). Door dit te combineren met de lineariteit van de afgeleide, kunnen we een willekeurige veelterm afleiden. Indien

$$P(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$$

dan

$$P'(x) = \sum_{j=1}^n j c_j x^{j-1}.$$

Merk op dat we in deze som de term met $j = 0$ niet hoeven mee te nemen, omdat deze gelijk aan 0 is. We kunnen de afgeleide ook schrijven als

$$P'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) c_{j+1} x^j.$$

Hieruit zien we dat de afgeleide van een veelterm van graad n een veelterm van graad $n - 1$ is.

Rationale functies

Een rationale functie is het quotiënt van twee veeltermen. Omdat veeltermen afleidbaar zijn, volgt uit de quotiëntregel dat een rationale functie afleidbaar is in elk punt waar de noemer niet nul wordt. Bijvoorbeeld

$$f(x) = \frac{3x^5 - x^3 + 2x}{x^2 + 7}$$

kan met de quotiëntregel afgeleid worden. Het resultaat is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 7)(15x^4 - 3x^2 + 2) - (3x^5 - x^3 + 2x)(2x)}{(x^2 + 7)^2} \\ &= \frac{9x^6 + 104x^4 - 23x^2 + 14}{(x^2 + 7)^2}. \end{aligned}$$

Het kan soms handig zijn om de rationale functie eerst te schrijven als een som van een veelterm en partieelbreuken.

Voorbeeld 4.5.1. Er geldt

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} = x + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

en de afgeleide is

$$f'(x) = 1 + \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{x - 1} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x + 1} \right) = 1 - \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

4.6 Kettingregel

4.6.1 Afgeleide van samengestelde functie

De **kettingregel** geeft de afgeleide van een samengestelde functie. Neem aan dat y een functie van u is, zeg $y = y(u)$ en u is een functie van x , zeg $u = u(x)$. Dan is

$$y = y(u(x))$$

de samengestelde functie die y geeft in termen van x .

Als bv. $y = u^4$ en $u = 2x + 1$ dan is de samengestelde functie

$$y = (2x + 1)^4.$$

Stelling 4.6.1. *Als $y = y(u)$ en $u = u(x)$ afleidbare functies zijn dan is de samengestelde functie*

$$y = y(u(x))$$

ook afleidbaar, met als afgeleide

$$\frac{d}{dx}y(u(x)) = \frac{d}{du}y(u) \cdot \frac{d}{dx}u(x). \quad (4.6.1)$$

Bewijs. De geldigheid van de kettingregel is als volgt in te zien. Neem aan dat x verandert met hoeveelheid Δx , dan geeft dat een verandering Δu in u en een verandering Δy in y . Uiteraard geldt (als $\Delta u \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Als $\Delta x \rightarrow 0$ dan zal ook $\Delta u \rightarrow 0$ en er geldt vanwege de definitie van afgeleide dat

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow \frac{du}{dx}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} \rightarrow \frac{dy}{du}.$$

Bijgevolg is

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

zodat $y = y(u(x))$ inderdaad afleidbaar is, met afgeleide

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (4.6.2)$$

en dit is hetzelfde als (4.6.1). \square

De vorm (4.6.2) voor de kettingregel is eenvoudig te onthouden doordat we in het rechterlid de factoren du in de teller en de noemer tegen elkaar kunnen laten wegvallen.

In het bovenstaande is aangenomen dat $\Delta u \neq 0$ voor veranderingen Δx die klein genoeg zijn. Dat is zeker het geval als $\frac{du}{dx} \neq 0$. Als $\frac{du}{dx} = 0$, dan moet het bovenstaande bewijs aangepast worden, maar we gaan hier niet op in.

Voorbeeld 4.6.2. De functie $y = (2x^2 - 1)^3$ is een veelterm waarvan we de afgeleide kunnen vinden door eerst de derde macht uit te werken

$$y = (2x^2 - 1)^3 = 8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1$$

en vervolgens term voor term af te leiden

$$\frac{dy}{dx} = 48x^5 - 48x^3 + 12x.$$

Het is eenvoudiger om met de kettingregel te werken. Stel $u = 2x^2 - 1$, dan $y = u^3$, zodat

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = 4x.$$

Vanwege de kettingregel geldt

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot 4x = 12xu^2 = 12x(2x^2 - 1)^2$$

waarbij we in de laatste stap $u = 2x^2 - 1$ hebben ingevuld.

Ga na dat inderdaad geldt

$$48x^5 - 48x^3 + 12x = 12x(2x^2 - 1)^2$$

zodat de twee methoden hetzelfde resultaat voor de afgeleide opleveren.

Voorbeeld 4.6.3. De functie $y = \sqrt{x^2 + 1}$ is de samenstelling van $u = x^2 + 1$ met $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$. Vanwege de kettingregel geldt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2}u^{-1/2}\right) \cdot (2x) = u^{-1/2}x$$

We substitueren hierin $u = x^2 + 1$ en we vinden de uiteindelijke afgeleide

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^{-1/2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

4.6.2 Afgeleide van een inverse functie

Als $x = f(y)$ een functie van y is met een inverse $y = f^{-1}(x)$, dan is er een eenvoudig verband tussen de afgeleide van f en de afgeleide van f^{-1} .

Stelling 4.6.4. *Neem aan dat f afleidbaar is in y met $f'(y) \neq 0$. Dan is f^{-1} afleidbaar in $x = f(y)$ met*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}, \quad \text{met } y = f^{-1}(x). \quad (4.6.3)$$

Men kan dit resultaat schrijven als

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy},$$

hetgeen eenvoudig te onthouden is.

Bewijs. Omdat $y = f^{-1}(f(y))$ geldt vanwege de kettingregel

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{dy}y = \frac{d}{dy}f^{-1}(f(y)) \\ &= \frac{d}{dx}f^{-1}(x) \cdot \frac{d}{dy}f(y) \end{aligned}$$

Dan is

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \left[\frac{d}{dy}f(y) \right]^{-1}$$

hetgeen overeenkomt met (4.6.3). □

Voorbeeld 4.6.5. De n -de machtswortel $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ is de inverse functie van $x = y^n$.

We weten dat $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$. Vanwege de regel voor de afgeleide van de inverse functie is dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1-n}.$$

We stellen hierin $y = x^{1/n}$ en er volgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \left(x^{1/n} \right)^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

4.7 Afgeleiden van transcendente functies

4.7.1 De exponentiële functie e^x

Beschouw de exponentiële functie $y = a^x$ met algemeen grondtal a . Bij verandering Δx geldt

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x.$$

Vanwege de eigenschap $a^{x+y} = a^x a^y$ van de exponentiële functie volgt hieruit

$$\Delta y = a^x a^{\Delta x} - a^x = (a^{\Delta x} - 1) a^x.$$

Het differentiequotient is bijgevolg

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot a^x.$$

De berekening van de afgeleide komt dus neer op het bepalen van de limiet

$$c(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

want dan is

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c(a) a^x.$$

Het getal $c(a)$ is de afgeleide van $y = a^x$ voor $x = 0$, m.a.w. het is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = a^x$ in het punt $P : (0, 1)$.

Het grondtal e van de natuurlijke logaritme is zodanig gekozen dat deze richtingscoëfficiënt gelijk aan 1 is. Deze eigenschap kan genomen worden als definitie van het getal e . Dus $c(e) = 1$, en bijgevolg geldt

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Voor algemene a geldt dat

$$a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \ln a)$$

hetgeen een samenstelling is van $y = e^u$ met $u = x \ln a$. Met de kettingregel volgt dat

$$\frac{d}{dx} a^x = e^u \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x.$$

Merk op dat $c(a) = \ln a$.

4.7.2 De logaritmische functie

De logaritmische functie $y = \ln x$ is de inverse functie van de exponentiële functie $x = e^y$.

Omdat $\frac{dx}{dy} = e^y$ volgt uit de regel voor de afgeleide van de inverse functie dat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{e^y}.$$

Omdat $x = e^y$ vinden we zo het belangrijke resultaat

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Voor algemeen grondtal a geldt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

zodat

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}.$$

4.7.3 De machtsfunctie x^r

We hebben al gezien dat de regel

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$$

geldt als $r = n$ een geheel getal is, en ook als $r = 1/n$ de reciproke is van een natuurlijk getal.

De regel geldt voor alle reële getallen r , zoals we hier zullen zien. Schrijf

$$x^r = \exp(\ln(x^r)) = \exp(r \ln x)$$

en bereken de afgeleide met de kettingregel

$$\frac{d}{dx} x^r = \exp(r \ln x) \frac{d}{dx} (r \ln x) = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r x^{r-1}.$$

4.7.4 De goniometrische functies

De goniometrische functies zijn afleidbaar. Om de afgeleide van sinus en cosinus uit te rekenen maken we gebruik van de limiet

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad (4.7.1)$$

die we al eerder berekend hebben, zie (4.3.2).

Voorbereiding

We laten eerst zien dat uit (4.7.1) volgt dat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0. \quad (4.7.2)$$

We gebruiken daartoe de goniometrische formule

$$\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t$$

waaruit volgt (met $t = \Delta x/2$) dat

$$\cos \Delta x - 1 = -2 \sin^2(\Delta x/2).$$

Dus

$$\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \sin(\Delta x/2).$$

Als $\Delta x \rightarrow 0$ dan ook $\Delta x/2 \rightarrow 0$, zodat uit (4.7.1) volgt dat

$$\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \rightarrow 1.$$

Ook

$$\sin(\Delta x/2) \rightarrow \sin 0 = 0,$$

zodat we vinden dat

$$\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \rightarrow -1 \cdot 0 = 0.$$

Dit is inderdaad (4.7.2).

Afgeleide van $\sin x$

Na deze voorbereiding berekenen we de afgeleide van $y = \sin x$. Vanwege goniometrische formules geldt

$$\sin(x + \Delta x) = \cos x \sin \Delta x + \sin x \cos \Delta x.$$

Bijgevolg is

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \cos x \sin \Delta x + \sin x (\cos \Delta x - 1)$$

en dus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} + \sin x \cdot \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

We nemen hierin $\Delta x \rightarrow 0$ en we maken gebruik van de limieten (4.3.2) en (4.7.2). Dan volgt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x.$$

We vinden

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

Afgeleide van $\cos x$

De berekening om de afgeleide van $y = \cos x$ te vinden verloopt analoog. We gebruiken de goniometrische formule

$$\cos(x + \Delta x) = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x.$$

Daaruit volgt

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = \cos x (\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x$$

en

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - \sin x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \rightarrow \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

als $\Delta x \rightarrow 0$. De afgeleide van $y = \cos x$ is dus

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Overige goniometrische functies

Ook de overige goniometrische functies zijn afleidbaar. De afgeleiden kunnen eenvoudig met behulp van de rekenregels voor afgeleiden gevonden worden. We vermelden zonder bewijs

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \\ \frac{d}{dx} \cotan x &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \\ \frac{d}{dx} \sec x &= \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

4.7.5 Cyclometrische functies

De cyclometrische functies bgsin , bgcos en bgtan zijn de inversen van de goniometrische functies \sin , \cos en \tan , waarbij steeds het domein op gepaste wijze gekozen is.

De afgeleiden van de cyclometrische functies kunnen we berekenen met de regel voor de afgeleide van de inverse functie. Dit levert de volgende resultaten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{bgsin} x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{bgcos} x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{bgtan} x &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.7.1. We bewijzen ter illustratie de regel voor de afgeleide van $y = \text{bgtan } x$.

Er geldt $x = \tan y$ met afgeleide

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y.$$

Dan is vanwege de regel voor de afgeleide van de inverse functie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}.$$

Omdat $x = \tan y$, volgt uiteindelijk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.7.6 Hyperbolische functies

Voor de hyperbolische functies $\cosh x$ en $\sinh x$ gelden de eenvoudige afgeleiden

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x, \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x.\end{aligned}$$

4.7.7 Exponentiële functie in het complexe vlak

In het complexe vlak is de exponentiële functie gedefinieerd in Definitie 3.8.1. We laten zien dat deze definitie zich goed gedraagt ten opzichte van het nemen van afgeleiden.

Eigenschap 4.7.2. Voor elke $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}. \quad (4.7.3)$$

Bewijs. Zij $\lambda = \mu + i\omega$ met $\mu, \omega \in \mathbb{R}$. Dan geldt voor reële waarden van x ,

$$e^{\lambda x} = e^{\mu x} e^{i\omega x} = e^{\mu x} \cos(\omega x) + i e^{\mu x} \sin(\omega x).$$

De afgeleiden van het reëel en imaginair deel van $e^{\lambda x}$ zijn

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [e^{\mu x} \cos(\omega x)] &= e^{\mu x} [\mu \cos(\omega x) - \omega \sin(\omega x)] \\ \frac{d}{dx} [e^{\mu x} \sin(\omega x)] &= e^{\mu x} [\mu \sin(\omega x) + \omega \cos(\omega x)].\end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^{\lambda x} &= e^{\mu x} [\mu \cos(\omega x) - \omega \sin(\omega x)] + i e^{\mu x} [\mu \sin(\omega x) + \omega \cos(\omega x)] \\ &= e^{\mu x} [\mu \cos(\omega x) - \omega \sin(\omega x) + i\mu \sin(\omega x) + i\omega \cos(\omega x)].\end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Anderzijds is

$$\lambda e^{\lambda x} = (\mu + i\omega) e^{\mu x} [\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)]$$

en als we het product uitwerken zien we dat dit inderdaad gelijk is aan (4.7.4).

Hiermee is (4.7.3) bewezen. \square

4.8 Differentialen

In de notatie

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4.8.1)$$

voor de afgeleide is dy/dx niet gelijk aan het quotiënt van twee waarden dy en dx . Het is enkel te interpreteren als de limiet van het differentiequotiënt.

Toch is het soms handig om te rekenen met dx en dy , zodat we bv. schrijven $dy = f'(x)dx$. Het symbool dx is hierin de **differentiaal** van x en het stelt een oneindig kleine verandering in x voor. Net zo is dy de differentiaal van y en het stelt een oneindig kleine verandering in y voor. Men spreekt ook van **infinitesimale** veranderingen. Dit in tegenstelling tot Δx en Δy die echte veranderingen in x en y aangeven.

Vanwege de definitie (4.8.1) van $f'(x)$ geldt dat voor kleine veranderingen Δx geldt dat

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(\approx betekent ‘ongeveer gelijk’) ofwel

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (4.8.2)$$

De verandering Δy is dus bij benadering gelijk aan $f'(x)$ maal de verandering Δx in x . Bij oneindig kleine (infinitesimale) veranderingen wordt dit een gelijkheid

$$dy = f'(x)dx. \quad (4.8.3)$$

Vanwege (4.8.2) en (4.8.3) kunnen we de afgeleide $f'(x)$ ook zien als een **evenredigheidsconstante** tussen veranderingen in y en veranderingen in x . Bij echte veranderingen Δx en Δy drukt (4.8.2) uit dat de evenredigheid van Δy met Δx bij benadering geldt. De benadering wordt beter naarmate Δx en Δy kleiner worden. Bij infinitesimale veranderingen gaat de benadering over in gelijkheid, zoals uitgedrukt in (4.8.3).

Het gebruik van differentialen zullen we later nog tegenkomen.

Voorbeeld 4.8.1. De productregel kunnen we als volgt met differentialen illustreren.

Stel $y = uv$ en er is een verandering Δu in u en een verandering Δv in v . Dan

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + (\Delta u)(\Delta v).$$

We gaan nu over naar infinitesimale veranderingen du en dv . Met andere woorden, de veranderingen Δu en Δv worden heel klein. Dan is het product $(\Delta u)(\Delta v)$ nog veel kleiner:

$$(\Delta u)(\Delta v) \ll \Delta u \quad \text{en} \quad (\Delta u)(\Delta v) \ll \Delta v.$$

Bij overgang naar differentialen mogen we $(\Delta u)(\Delta v)$ verwaarlozen ten opzichte van Δu en Δv . Er volgt dus

$$dy = u dv + v du$$

en dit is de productregel voor afgeleiden in differentiaalvorm.

Als we aannemen dat u en v afhangen van x , dan krijgen we na deling door dx

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

hetgeen de bekende vorm is voor de productregel.

Voorbeeld 4.8.2. We bekijken hoe de quotiëntregel er uit ziet met differentiatoren.

Stel $y = \frac{u}{v}$ en neem aan dat we veranderingen Δu en Δv in u en v hebben. Dan

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Bij overgang naar differentiaalvorm gaat $v + \Delta v$ in de noemer over in v zodat

$$dy = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Dit is de quotiëntregel in differentiaalvorm.

4.9 Hogere orde afgeleiden

Wanneer $y = f(x)$ een afleidbare functie is, dan kan het zijn dat de afgeleide functie $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ook weer afleidbaar is. In dat geval zeggen we dat $y = f(x)$ twee keer afleidbaar is, en de afgeleide van $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ noemen we de **tweede orde afgeleide** van f (of kortweg de tweede afgeleide van f). We schrijven

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \text{of} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

voor de tweede orde afgeleide. Net zo, als de tweede orde afgeleide van f afleidbaar is, dan is $y = f(x)$ drie keer afleidbaar en we schrijven $f'''(x)$ of $d^3 y / dx^3$ voor de derde orde afgeleide (of derde afgeleide).

In het algemeen spreken we van de **n -de orde afgeleide** (of n -de afgeleide) van f , die we noteren met

$$f^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \text{of} \quad \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Voorbeeld 4.9.1. Als $f(x) = \sin ax$, dan is

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \cos ax, \\ f''(x) &= -a^2 \sin ax, \\ f'''(x) &= -a^3 \cos ax \end{aligned}$$

en in het algemeen, voor de n -de afgeleide,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} a^n \cos ax, & \text{als } n \text{ oneven is,} \\ (-1)^{n/2} a^n \sin ax, & \text{als } n \text{ even is.} \end{cases}$$

4.9.1 Hogere orde afgeleiden van veeltermen

Als j en k gehele getallen zijn, dan is

$$\frac{d^k}{dx^k} x^j = j(j-1) \cdots (j-k+1) x^{j-k}$$

Voor $k > j$ is één van de factoren gelijk aan nul en er geldt

$$\frac{d^k}{dx^k} x^j = 0 \quad \text{als } k > j.$$

Als $k \leq j$, dan kunnen we de k -de afgeleide ook schrijven als

$$\frac{d^k}{dx^k} x^j = \frac{j!}{(j-k)!} x^{j-k}. \quad (4.9.1)$$

Voor een algemene veelterm

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

volgt vanwege de lineariteit (voor $k \leq n$)

$$P^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} P(x) = \sum_{j=0}^n a_j \frac{d^k}{dx^k} x^j = \sum_{j=k}^n a_j \frac{d^k}{dx^k} x^j$$

Voor $j \geq k$ gebruiken we (4.9.1) en we vinden

$$\begin{aligned} P^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^n a_j \frac{j!}{(j-k)!} x^{j-k} \\ &= a_k \frac{k!}{0!} + a_{k+1} \frac{(k+1)!}{1!} x + a_{k+2} \frac{(k+2)!}{2!} x^2 + \cdots + a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= a_k k! + a_{k+1} (k+1)! x + a_{k+2} \frac{(k+2)!}{2} x^2 + \cdots + a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}. \end{aligned}$$

Door hierin $x = 0$ te nemen vinden we

$$P^{(k)}(0) = a_k k!$$

ofwel

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}. \quad (4.9.2)$$

We kunnen met andere woorden de coëfficiënten van een veeltermen uitdrukken in de hogere orde afgeleiden van f uitgerekend in $x = 0$. Voor $k = 0$ hanteren we de afspraken dat

$$P^{(0)}(x) = P(x), \quad 0! = 1$$

zodat (4.9.2) ook geldt voor $k = 0$. Voor elke veelterm van graad n geldt dan

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k. \quad (4.9.3)$$

4.9.2 Het binomium van Newton

De veelterm $P(x) = (x+1)^n$ heeft graad n . Vanwege (4.9.3) kunnen we dus schrijven

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{met} \quad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Het is eenvoudig uit te rekenen dat

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^n, & P(0) &= 1 \\ P'(x) &= n(x+1)^{n-1}, & P'(0) &= n \\ P''(x) &= n(n-1)(x+1)^{n-2}, & P''(0) &= n(n-1) \end{aligned}$$

en in het algemeen

$$\begin{aligned} P^{(k)}(x) &= n(n-1) \cdots (n-k+1)(x+1)^{n-k}, \\ P^{(k)}(0) &= n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

met $\binom{n}{k}$ de binomiaalcoëfficiënt, zie paragraaf 1.5.1 en

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \quad (4.9.4)$$

Voor algemene a en b kunnen we schrijven

$$(a+b)^n = b^n \left(\frac{a}{b} + 1 \right)^n.$$

Hierop kunnen we (4.9.4) toepassen met $x = \frac{a}{b}$. Hieruit volgt het binomium van Newton dat we al tegengekomen zijn in (1.5.4):

$$(a+b)^n = b^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b} \right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

4.9.3 De regel van Leibniz

De regel van Leibniz is een formule voor de hogere orde afgeleide van een product. Voor de eerste orde afgeleide kennen we de productregel

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Als we dit nogmaals afleiden dan volgt

$$\begin{aligned} (fg)''(x) &= (f(x)g'(x))' + (f'(x)g(x))' \\ &= f(x)g''(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f''(x)g(x) \\ &= f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x). \end{aligned}$$

Dit is de formule voor de tweede afgeleide van een product.

Voor de derde afgeleide vinden we na wat rekenwerk

$$(fg)'''(x) = f(x)g'''(x) + 3f'(x)g''(x) + 3f''(x)g'(x) + f'''(x)g(x).$$

De coëfficiënten die optreden zijn precies de binomiaalcoëfficiënten.

Voor de algemene n de orde afgeleide geldt het volgende resultaat waarvan het bewijs aan de lezer overgelaten wordt.

Stelling 4.9.2. *Als f en g (minstens) n keer afleidbaar zijn, dan is ook fg minstens n keer afleidbaar en er geldt*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad (4.9.5)$$

De formule (4.9.5) staat bekend als de **regel van Leibniz**. Merk op dat de structuur van de regel van Leibniz heel analoog is aan die van het binomium van Newton.

4.10 Partiële afgeleiden

Voor een functie van één veranderlijke geeft de afgeleide de mate van verandering van de functie t.o.v. een verandering in de veranderlijke. Meetkundig is de afgeleide gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek. Bij een functie van twee of meer veranderlijken kunnen we de mate van verandering beschouwen t.o.v. een verandering in één van de veranderlijken waarbij we de andere veranderlijken vast laten.

Neem bijvoorbeeld

$$z = f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$$

waarbij we y vast nemen. Dan is z alleen afhankelijk van x , en de afgeleide van f naar x is gelijk aan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y.$$

Dit is de **partiële afgeleide** van f naar x , waarbij we y vast houden. Net zo is de afgeleide van f naar y , waarbij we x vast houden, gelijk aan

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 2y$$

en dit is de partiële afgeleide van f naar y . Deze partiële afgeleiden hangen af van de waarden van x en y waar ze uitgerekend worden. Als we dit willen benadrukken schrijven we

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

We schrijven naast $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ ook

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

voor de partiële afgeleiden van een functie $z = f(x, y)$.

De gebruikelijke rekenregels voor afgeleiden (zoals productregel, kettingregel) kunnen gebruikt worden om partiële afgeleiden uit te rekenen.

Voorbeeld 4.10.1. Als $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)^{1/2}$ dan is $f = u^{1/2}$ met $u = x^2 + 2y^2$. Vanwege de kettingregel geldt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot 2x = x(x^2 + 2y^2)^{-1/2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot 4y = 2y(x^2 + 2y^2)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Voorbeeld 4.10.2. Als $f(x, y) = e^{xy} \sin(x^2 - y^2)$ dan is $f = uv$ met $u = e^{xy}$ en $v = \sin(x^2 - y^2)$. Vanwege de productregel geldt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= e^{xy} \cos(x^2 - y^2) \cdot (2x) + \sin(x^2 - y^2) e^{xy} y \\ &= 2xe^{xy} \cos(x^2 - y^2) + ye^{xy} \sin(x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Voorbeeld 4.10.3. Als $f(x, y) = 2xy + 3y^2$, dan $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y$.

Vanaf hoofdstuk 9 gaan we verder in op functies van meerdere veranderlijken.

4.11 Oefeningen

Oefening 4.1. Bereken de verandering Δy in y die hoort bij een verandering Δx in x en bepaal hiermee de limiet

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

voor de volgende functies:

- | | |
|---------------------|-----------------------------|
| (a) $y = \sqrt{x}$ | (d) $y = \frac{2x-3}{3x-4}$ |
| (b) $y = x^2 + a$ | (e) $y = ax^3 + bx^2$ |
| (c) $y = 2x^2 - 3x$ | (f) $y = (c + 2x)^2$ |

Oefening 4.2. Bereken de vergelijking van de raaklijn aan de gegeven kromme in het gegeven punt P .

- | | | | |
|----------------------|---------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| (a) $y = 2x^2$, | $P : (1, 2)$ | (d) $y = \frac{1}{x}$, | $P : (2, \frac{1}{2})$ |
| (b) $y = x^2 + a$, | $P : (-1, 1 + a)$ | (e) $y = x^3$, | $P : (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ |
| (c) $y = x^2 + 2x$, | $P : (a, a^2 + 2a)$ | (f) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$, | $P : (1, \frac{1}{2})$ |

Oefening 4.3. Bepaal de punten $P : (x_0, y_0)$ op de kromme $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ waarvoor de raaklijn aan de kromme evenwijdig is met de rechte $16x - y + 5 = 0$.

Oefening 4.4. Bereken de volgende limieten:

- | | |
|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+3}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x - 7}{2x^3 + 1}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) - \ln(3x - 2) \right]$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^3 + 6}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x \right)$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ | (j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x \right)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 1}{x^3 + 1}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{xe^{-2x}}{1 + x^2}$ |
| (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[4x^2 - \frac{1}{x^2} + \left(2x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$ | |

Oefening 4.5. Gebruik volledige inductie om aan te tonen dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

Oefening 4.6. Bereken de volgende limieten:

- | | |
|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$, waarbij $a \neq 0$. | (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{x^2 - 4x + 3}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 5x^2 + 1}{x^4 - x^6}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ | (j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{x^2}$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9x^2 + 1} - 3x$ |

Oefening 4.7. Bereken de volgende limieten:

- | | |
|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x}$ |
| (b) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}$ | (e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^3 h}{h^2 \sin h \cos h}$ |
| (c) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ |

Oefening 4.8. In Voorbeeld 4.3.6 is aangetoond dat $0 \cdot \infty$ een onbepaalde vorm is. Geef zelf voorbeelden waaruit blijkt dat

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty \quad \text{en} \quad 1^\infty$$

onbepaalde vormen zijn.

Oefening 4.9. Bepaal de afgeleide van:

- | | | |
|-----------------------|---|---------------------------------------|
| (a) $\frac{1}{2x+3}$ | (e) $\frac{1}{(x^2+3x-1)^2}$ | (i) $x^2 e^{2x^2+1}$ |
| (b) $\frac{3-x}{x}$ | (f) $\sqrt[3]{x}$ | (j) $\log_a(a^x - 1)$ |
| (c) $\frac{x+1}{x+5}$ | (g) $\frac{e^x}{x}$ | (k) $\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$ |
| (d) $x \ln x - x$ | (h) $\frac{1}{x} - \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}$ | (l) $\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^3$ |

Oefening 4.10. Bepaal de afgeleide van:

- | | | |
|-----------------------|------------------------------------|------------------------------|
| (a) e^{-x^2} | (d) $\frac{\sqrt{x} \ln x}{1+x^3}$ | (g) $\frac{1}{x^4+1}$ |
| (b) $\frac{1}{1+x^2}$ | (e) $2x^5 - 4x^3 + 7$ | (h) $(x+2)^3 \sqrt{x^2+1}$ |
| (c) $x^2 \sin x$ | (f) $(1-2x)^7$ | (i) $\frac{\sqrt{x}}{e^x+1}$ |

Oefening 4.11. Voor welke combinaties van a en b is de functie gegeven door

$$y = f(x) = \begin{cases} x - a & \text{voor } x < 0 \\ bx^2 - x + 1 & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

continu in $x = 0$? Wanneer is de functie afleidbaar in $x = 0$?

Oefening 4.12. De viriale toestandsvergelijking voor een gas bij lage druk is

$$pV = nRT \left(1 - \frac{nB}{V} \right).$$

Bereken $\frac{dp}{dV}$ bij constante T en n (beschouw B ook als een constante).

Oefening 4.13. Bereken de afgeleide van:

- | | | |
|------------------------|---|--------------------------|
| (a) $\sin(2x+1)$ | (e) $\sin^4 \left(\frac{\cos x}{1+\cos^2 x} \right)$ | (h) $e^{\sin x}$ |
| (b) $(x^2+4x+1)^6$ | (f) $\tan \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ | (i) $x \tan \frac{1}{x}$ |
| (c) $x^2 \sin(4x^2-1)$ | (g) $\tan \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)$ | (j) $\cos(\tan x)$ |
| (d) $\ln(\sin 4x)$ | | |

Oefening 4.14. Zij gegeven $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ en $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$. Gebruik dit om te laten zien dat:

$$(a) \quad \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(c) \quad \frac{d}{dx} \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \cotan x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(d) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Oefening 4.15. Bereken $\frac{dy}{dx}$ als

$$(a) \quad x = 2y^2 - 3y + 1$$

$$(b) \quad x = y^3 - 9y$$

Oefening 4.16. Gebruik de regel voor de afgeleide van de inverse functie om aan te tonen dat

$$(a) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{bgsin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{bgcos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(c) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{bgtanh} x = \frac{1}{1-x^2}$$

Oefening 4.17. Bepaal de afgeleide van:

$$(a) \quad \operatorname{bgsin} (x^2 - 1)$$

$$(c) \quad \operatorname{bgcos} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$(b) \quad \operatorname{bgtan} x^2$$

Oefening 4.18. Als $F(x, y) = c$ een impliciet verband geeft tussen x en y , dan kunnen we in veel gevallen y hieruit oplossen en $y = y(x)$ schrijven in functie van x . Dan geldt $\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0$. Gebruik dit om $\frac{dy}{dx}$ te berekenen in functie van x en y als

$$(a) \quad x^2 + y^2 = 5$$

$$(b) \quad x = y \ln(xy)$$

Oefening 4.19. (vervolg op vorige oefening) Geef de raaklijn aan de volgende krommen in het aangegeven punt P :

$$(a) \quad x^2 + y^2 = 5 \quad \text{in } P : (1, -2)$$

$$(b) \quad y^2 - \frac{2}{y} - x^2 y^2 + 3x + 1 = 0 \quad \text{in } P : (0, 1)$$

Oefening 4.20. Neem aan dat $y = x + \frac{1}{x}$. Geef een benadering voor de verandering Δy in y als x toeneemt van 2 naar 2.1.

Oefening 4.21. Het volume V van een bol met straal r is gelijk aan $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

(a) Geef een benadering voor de verandering ΔV als r toeneemt van 1 naar 1.1.

(b) Geef een benadering voor de verandering ΔV als r toeneemt van r_0 naar $r_0 + 10^{-3}$.

Oefening 4.22. Een (denkbeeldig) koord wordt strak langs de evenaar gespannen. Hoeveel langer moet het koord zijn om het overal op een hoogte van 1 meter boven de evenaar te kunnen tillen.

De lengte van de evenaar is ongeveer 40.000 kilometer.

Oefening 4.23. Geef de differentiaal dy :

$$(a) \ y = 3x^2 + 2x + 1 \quad (b) \ y = \sin 2x \quad (c) \ y = e^x$$

Oefening 4.24. Bereken

- (a) tweede afgeleide van $f(x) = (x^3 + 1)^2$
- (b) 1469ste afgeleide van $f(x) = x^{532} - 5x^{37} - 4$
- (c) 2012de afgeleide van $g(\theta) = \cos(2\theta)$

Oefening 4.25. Bereken $y'' - 4y' + 4y$ als $y(x) = (A + Bx)e^{2x}$.

Oefening 4.26. Geef een formule voor de n de orde afgeleide van:

$$(a) \ e^{3x} \quad (b) \ \ln x \quad (c) \ \cos 2x$$

Oefening 4.27. Laat zien dat voor elke keuze van A en B de functie

$$y = A \cos x + B \sin x$$

voldoet aan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y.$$

Oefening 4.28. Een functie f is even als $f(x) = f(-x)$ voor elke x en oneven als $f(x) = -f(-x)$ voor elke x . Neem aan dat f afleidbaar is. Laat dan zien dat:

- (a) Als f een even functie is, dan is f' oneven.
- (b) Als f een oneven functie is, dan is f' even.

Oefening 4.29. Op de schaal van Richter wordt de grootte R van een aardbeving met intensiteit I gegeven door

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10},$$

waarbij I_0 de minimale intensiteit is en gebruikt wordt als referentiewaarde. Veronderstel dat $I_0 = 1$.

- (a) Vind de intensiteit van de aarbeving in San Fransisco in 1906 als je weet dat R de waarde 8.3 had.
- (b) Vind $\frac{dR}{dI}$.

Oefening 4.30. Zij $y = e^{-x^2}$.

- (a) Bewijs met volledige inductie dat

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$$

waarin H_n een veelterm van graad n is.

- (b) Bereken H_0 , H_1 , H_2 en H_3 .

Oefening 4.31. Bewijs de regel van Leibniz (4.9.5) met behulp van volledige inductie naar n .

Oefening 4.32. Gebruik de regel van Leibniz om de volgende afgeleiden uit te rekenen

- (a) De derde orde afgeleide van xe^x .
 (b) De twaalfde orde afgeleide van $x \cos x$.

Oefening 4.33. Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor de volgende functies van twee veranderlijken.

- (a) $f(x, y) = x \ln y$ (d) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$
 (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (e) $f(x, y) = x^y$
 (c) $f(x, y) = (x + y^2 + 2xy)^3$ (f) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

Oefening 4.34. Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial f}{\partial z}$ voor de volgende functies van drie veranderlijken.

- (a) $f(x, y, z) = xyz$ (c) $f(x, y, z) = \ln(y + yz)$
 (b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ (d) $f(x, y, z) = ze^{xy}$

Oefening 4.35. (Examenvraag) Neem $p \in \mathbb{R}$ en beschouw de kromme gegeven door de vergelijking $y^2 = x^3 - px + p$

- (a) Stel de raaklijn op aan de kromme in het punt $P : (1, -1)$.
 (b) Neem $p = 2$. De raaklijn uit onderdeel (a) snijdt de kromme nog in een ander punt Q . Bereken Q .

Hoofdstuk 5

Toepassingen van afgeleiden

5.1 Verloop van functies

5.1.1 Stijgend en dalend

De afgeleide is een belangrijk hulpmiddel bij het onderzoek naar het verloop van een functie. Kortweg gezegd geldt het volgende:

- Als de afgeleide positief is op een bepaald interval, dan is de functie stijgend op dat interval.
- Als de afgeleide negatief is op een bepaald interval, dan is de functie dalend op dat interval.
- Als de afgeleide nul is op een bepaald interval, dan is de functie constant op dat interval.

Hiermee bedoelen we het volgende, in het geval dat de afgeleide positief is:

- (a) Als $f'(x) \geq 0$ voor elke x in het interval $[a, b]$, dan is f **stijgend** op dat interval, hetgeen wil zeggen:

$$\text{als } a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ dan } f(x_1) \leq f(x_2).$$

- (b) Als $f'(x) > 0$ voor elke x in het open interval $]a, b[$ en f is continu op het gesloten interval $[a, b]$, dan is f **strikt stijgend** op het gesloten interval $[a, b]$, waarmee we bedoelen:

$$\text{als } a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ dan } f(x_1) < f(x_2).$$

Voor een negatieve afgeleide geldt analoog, met de analoge betekenis van dalend en strikt dalend op een interval:

- (c) Als $f'(x) \leq 0$ voor elke x in $[a, b]$ dan is f **dalend** op dat interval.
- (d) Als $f'(x) < 0$ voor elke x in $]a, b[$, en f is continu op $[a, b]$, dan is f **strikt dalend** op $[a, b]$.

Voorbeeld 5.1.1. Omdat $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ en $\cos x > 0$ voor $-\pi/2 < x < \pi/2$ is de continue functie $y = \sin x$ strikt stijgend op het gesloten interval $[-\pi/2, \pi/2]$.

Ongelijkheden

Afgeleiden kunnen gebruikt worden om zekere ongelijkheden aan te tonen, zoals blijkt uit de volgende eigenschap.

Eigenschap 5.1.2. *Neem aan dat f en g twee afleidbare functies zijn op een interval $[a, b]$. Als geldt*

$$f(a) \leq g(a)$$

en

$$f'(x) \leq g'(x) \text{ voor alle } x \in [a, b],$$

dan geldt

$$f(x) \leq g(x) \text{ voor alle } x \in [a, b].$$

Bewijs. Kijk voor het bewijs van de eigenschap naar de functie $h = g - f$. Er geldt $h(a) \geq 0$ en

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in [a, b].$$

Uit dit laatste volgt dat h stijgend is op $[a, b]$. Omdat $h(a) \geq 0$ is dan $h(x) \geq h(a) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. \square

Voorbeeld 5.1.3. Omdat $\sin 0 = 0$ en

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \leq 1 = \frac{d}{dx} x$$

volgt uit Eigenschap 5.1.2 dat $\sin x \leq x$ voor alle $x \geq 0$.

Voorbeeld 5.1.4. We weten dat $1 \leq e^x$ voor $x \geq 0$. Neem $f_1(x) = 1 + x$ en $g(x) = e^x$. Dan geldt $f_1(0) = g(0)$ en

$$f_1'(x) = 1 \leq e^x = g'(x) \text{ voor alle } x \geq 0.$$

Bijgevolg geldt vanwege Eigenschap 5.1.2 dat

$$1 + x \leq e^x \text{ voor alle } x \geq 0.$$

Neem vervolgens $f_2(x) = 1 + x + x^2/2$. Dan hebben we zojuist laten zien dat

$$f_2'(x) = 1 + x \leq e^x = g'(x) \text{ voor alle } x \geq 0.$$

Omdat $f_2(0) = g(0)$ volgt dus dat

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \text{ voor alle } x \geq 0.$$

Met volledige inductie kan bewezen worden dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \text{ voor alle } x \geq 0.$$

Constante functies

Als $f'(x) = 0$ voor alle x in een interval $[a, b]$ dan is de functie **constant** op dat interval. Dat wil zeggen dat er een constante C is zo dat

$$f(x) = C \text{ voor alle } x \in [a, b].$$

Een eenvoudig gevolg hiervan is het volgende. Deze eigenschap is belangrijk in de integraalrekening.

Eigenschap 5.1.5. *Neem aan dat f en g twee afleidbare functies zijn in het interval $[a, b]$ met*

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{voor alle } x \in [a, b],$$

dan bestaat er een constante C zodat

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{voor alle } x \in [a, b]$$

Bewijs. Voor de verschilfunctie $h = g - f$ geldt dat

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0 \text{ voor alle } x \in [a, b].$$

Bijgevolg is h een constante functie. □

5.2 Maxima en minima

5.2.1 Globale en lokale maxima/minima

We beginnen met enkele definities.

Definitie 5.2.1. Een reële functie f bereikt een **maximum** in een punt c van het domein indien

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{voor alle } x \text{ in het domein van } f.$$

De functie bereikt een **minimum** in c indien

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{voor alle } x \text{ in het domein van } f.$$

We spreken ook van **absoluut maximum/minimum** of **globaal maximum/minimum** omdat $f(c)$ de allergrootste/allerkleinste waarde is die f kan bereiken.

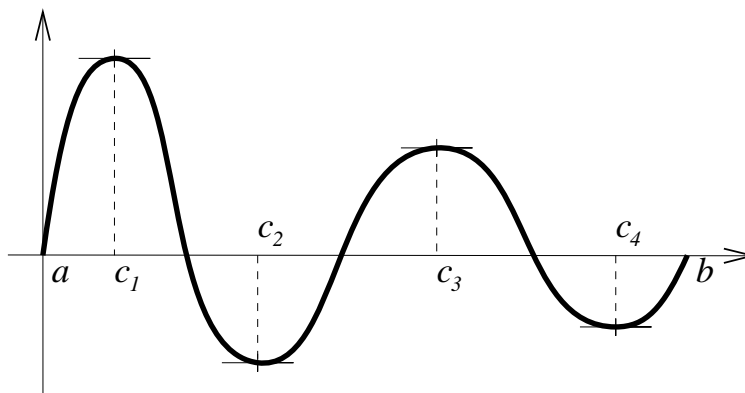
Bij een lokaal maximum of minimum vergelijken we $f(c)$ alleen met functiewaarden $f(x)$ voor x die dicht bij c liggen.

Definitie 5.2.2. De functie f bereikt in c een **lokaal maximum** of **relatief maximum** indien er een interval $[a, b]$ met $a < c < b$ bestaat zo dat

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{voor alle } x \text{ in het domein van } f \text{ met } a < x < b.$$

De functie f bereikt in c een **lokaal minimum** of **relatief minimum** indien er een interval $[a, b]$ bestaat met $a < c < b$ zo dat

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{voor alle } x \text{ in het domein van } f \text{ met } a < x < b.$$



Figuur 5.1: De functie bereikt lokale extrema in a , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 en b . De extrema in a en b zijn randextrema. De extrema in c_1 en c_2 zijn ook globale extrema. De raaklijnen aan de grafiek in de punten $(c_j, f(c_j))$ verlopen horizontaal.

Een lokaal maximum of minimum is niet noodzakelijk een globaal maximum of minimum, zie ook Figuur 5.1.

De globale en lokale maxima en minima van een functie worden de **extrema** of **uiterste waarden** genoemd.

5.2.2 Stationaire punten

De afgeleide levert ons een belangrijk hulpmiddel bij het bepalen van extrema. Een bijzondere rol wordt hierin gespeeld door punten waar de afgeleide gelijk aan nul is. Dit noemen we stationaire of kritieke punten.

Definitie 5.2.3. Als $f'(c) = 0$ dan noemen we c een **stationair punt** of **kritiek punt** van de functie f .

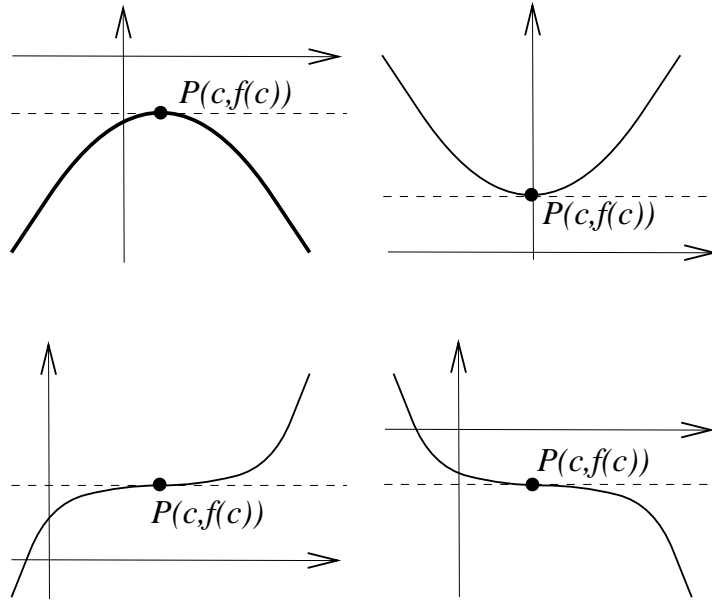
Wegens $f'(c) = 0$ is de raaklijn aan de grafiek van f in $P(c, f(c))$ behorend bij een stationair punt horizontaal. In Figuur 5.2 zijn vier voorbeelden gegeven van stationaire punten. In het eerste geval bereikt de functie in het stationaire punt een maximum, in het tweede geval een minimum. In het derde en vierde geval is er geen maximum en ook geen minimum.

5.2.3 Tekenverloop

Een stationair punt is een kandidaat-extremum. Het is mogelijk dat de functie er een (globaal of lokaal) maximum of minimum bereikt, maar het is niet zeker. We kunnen uit het **tekenverloop** van de afgeleide bepalen of het om een lokaal maximum, een lokaal minimum of om geen van beide gaat. We bekijken daartoe het teken (positief of negatief) van de afgeleide onmiddellijk links en rechts van het stationaire punt.

Zij c een stationair punt, zodat $f'(c) = 0$. Er zijn een aantal mogelijkheden.

- (1) De eerste mogelijkheid is dat $f'(x) > 0$ voor x links van c en $f'(x) < 0$ voor x rechts van c . Schematisch is dat:



Figuur 5.2: Voorbeelden van stationaire punten.

| x | | | |
|---------|----------|---------|--------|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | stijgend | maximum | dalend |

Omdat $f'(x) > 0$ voor x links van c is f strikt stijgend in een interval $[a, c]$ met $a < c$. Omdat $f'(x) < 0$ voor x rechts van c is f strikt dalend in een interval $[c, b]$ voor zekere $b > c$. Er volgt dan dat f in c overgaat van stijgen naar dalen, zodat f in c een lokaal maximum bereikt.

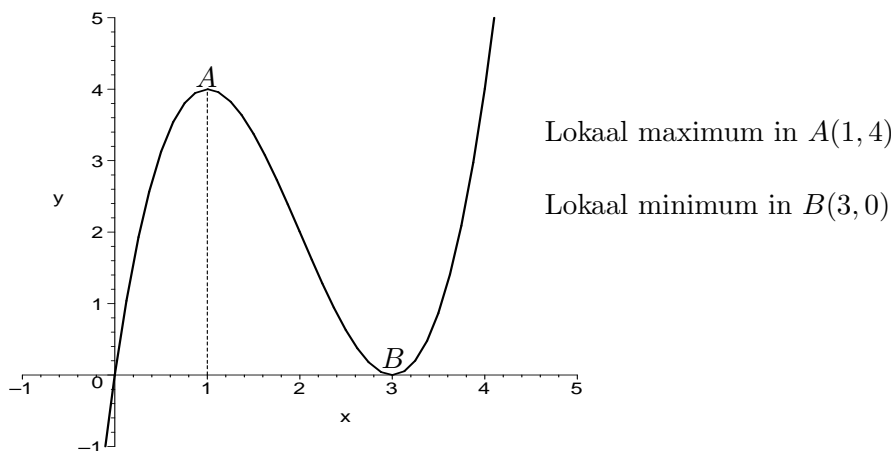
- (2) De tweede mogelijkheid is dat $f'(x) < 0$ voor x links van c en $f'(x) > 0$ voor x rechts van c . Dus

| x | | | |
|---------|--------|---------|----------|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | dalend | minimum | stijgend |

Nu gaat f in c over van dalen naar stijgen en f bereikt in c een lokaal minimum.

- (3) In de bovenstaande twee gevallen verandert f' van teken in c . De afgeleide gaat van positief naar negatief in geval (1), of van negatief naar positief in geval (2). In beide gevallen is er sprake van een lokaal extremum. Als f' geen tekenverandering heeft in c en $f'(x) \neq 0$ voor $x \neq c$, dan bereikt f in c geen lokaal extremum. Zo een c wordt **buigpunt** genoemd. Schematisch:

| x | | | |
|---------|----------|---------------|----------|
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f(x)$ | stijgend | geen extremum | stijgend |



Figuur 5.3: De grafiek van de functie $y = x(x - 3)^2$

| | | | |
|---------|--------|---------------|--------|
| x | | | |
| $f'(x)$ | – | 0 | – |
| $f(x)$ | dalend | geen extremum | dalend |

5.2.4 Voorbeelden

Voorbeeld 5.2.4. We bepalen het verloop van de functie

$$y = f(x) = x(x - 3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

De functie f heeft nulpunten voor $x = 0$ en $x = 3$. De afgeleide functie is

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3).$$

met nulpunten in $x = 1$ en $x = 3$. Dit zijn de stationaire punten van f . We zien ook dat $f'(x) > 0$ voor $x > 3$ en voor $x < 1$, terwijl $f'(x) < 0$ voor $1 < x < 3$.

Het tekenverloop van $f'(x)$ en het verloop van $f(x)$ kunnen als volgt worden samengevat:

| | | | | | |
|---------|----------|---------|--------|---------|----------|
| x | | | | | |
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | stijgend | maximum | dalend | minimum | stijgend |

In het stationaire punt $x = 1$ neemt de functie een lokaal maximum aan en in $x = 3$ een lokaal minimum. De grafiek van f is getekend in Figuur 5.3.

Voorbeeld 5.2.5. We laten zien dat onder alle rechthoeken met een bepaalde oppervlakte A het vierkant de kleinste omtrek heeft.

We beschouwen daartoe een rechthoek met oppervlakte A en we noteren de lengte van de zijden met x en y . De oppervlakte van de rechthoek is dan xy en dus $A = xy$, ofwel

$$y = \frac{A}{x}.$$

De rechthoek heeft twee zijden met lengte x en twee zijden met lengte y . De omtrek is dus $2x + 2y$. Omdat $y = \frac{A}{x}$ wordt de omtrek O als functie van x gegeven door

$$O = 2x + 2\frac{A}{x} = 2\left(x + \frac{A}{x}\right).$$

De afgeleide functie

$$\frac{dO}{dx} = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right)$$

heeft nulpunten voor $x = \sqrt{A}$ en $x = -\sqrt{A}$. De mogelijkheid $x = -\sqrt{A}$ kan worden uitgesloten daar de lengte van de zijden steeds positief moet zijn. Het tekenverloop van $\frac{dO}{dx}$ en het verloop van O kunnen als volgt worden samengevat.

| | | | | |
|-----------------|-----------|--------|------------|----------|
| x | 0 | | \sqrt{A} | |
| $\frac{dO}{dx}$ | | - | 0 | + |
| O | $+\infty$ | dalend | minimum | stijgend |

Bijgevolg bereikt de omtrek O een minimum bij $x = \sqrt{A}$. We zien uit het tekenverloop dat het een globaal minimum is (en niet alleen een lokaal minimum!). Als $x = \sqrt{A}$ dan is ook $y = \sqrt{A}$, en is de rechthoek een vierkant.

Voorbeeld 5.2.6. We tonen aan dat

$$t + \frac{1}{t} \geq 2, \quad \text{voor alle } t > 0.$$

We definiëren de functie $f(t) = t + \frac{1}{t}$ voor $t > 0$. De afgeleide is

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}.$$

De afgeleide is nul voor $t = 1$ en $t = -1$. Het tekenverloop van f' en het verloop van f kunnen schematisch als volgt worden weergegeven.

| | | | | | |
|---------|---|--------|---------|----------|----------|
| t | 0 | | 1 | | ∞ |
| $f'(t)$ | | - | 0 | + | |
| $f(t)$ | | dalend | minimum | stijgend | |

Bijgevolg bereikt f in $t = 1$ een minimum en het minimum is absoluut als we ons beperken tot $t > 0$. Daar $f(1) = 2$ geldt er bijgevolg dat $f(t) \geq 2$ voor elke $t > 0$.

Voorbeeld 5.2.7. We bepalen het punt P op de parabool $y^2 = 4x$ dat het dichtst gelegen is bij het vast punt $Q(2, 3)$. Het punt $P(x, y = 2\sqrt{x})$ van de parabool heeft een positieve y -coördinaat. De afstand is

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (2\sqrt{x}-3)^2}$$

en we zoeken het minimum hiervan voor $x > 0$. We kunnen het werken met vierkantswortels vermijden door in plaats hiervan te zoeken naar het minimum van

$$[d(P, Q)]^2 = (x-2)^2 + (2\sqrt{x}-3)^2 = x^2 - 12\sqrt{x} + 13, \quad x > 0.$$

Als we deze functie f noemen,

$$f(x) = (x - 2)^2 + (2\sqrt{x} - 3)^2 = x^2 - 12\sqrt{x} + 13, \quad x > 0,$$

dan is

$$f'(x) = 2x - \frac{6}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}(x^{\frac{3}{2}} - 3).$$

De afgeleide is nul als $x^{3/2} = 3$ en dit betekent $x = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$. Het tekenverloop van $f'(x)$ en het verloop van $f(x)$ kunnen als volgt schematisch worden aangegeven.

| | | | | | |
|---------|-----|--------|---------------|----------|----------|
| x | 0 | | $\sqrt[3]{9}$ | | ∞ |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | dalend | minimum | stijgend | |

Bijgevolg bereikt $f(x)$ een minimum in $x = \sqrt[3]{9}$, en het gezochte punt P heeft als coördinaten $(\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{3})$.

We merken nog op dat het in het voorgaande steeds het geval was dat f overall afleidbaar is. Bij het bepalen van extrema moeten de punten waar f niet afleidbaar is apart bekeken worden. Het kan zijn dat f in zo'n punt een extremum bereikt zoals blijkt uit de functie

$$f(x) = |x|$$

die een globaal minimum bereikt in $x = 0$, maar niet afleidbaar is in $x = 0$.

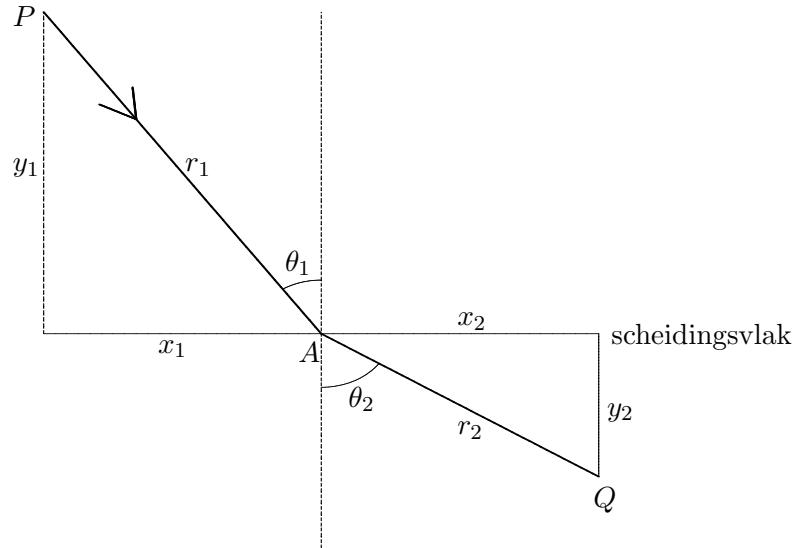
Ook randpunten moeten apart bekeken worden. Als gevraagd wordt naar de extrema van een functie f op het interval $[a, b]$, dan is het mogelijk dat een (lokaal) maximum of minimum bereikt wordt in één van de randpunten $x = a$ of $x = b$, zonder dat daar de afgeleide gelijk aan nul is. Zie bijvoorbeeld de functie waarvan de grafiek getekend is in Figuur 5.1. Deze functie bereikt een lokaal minimum in $x = a$ en een lokaal maximum in $x = b$.

5.2.5 Tweede afgeleide test

We kunnen ook de tweede afgeleide gebruiken om de aard van een stationair punt te onderzoeken. Neem aan dat $f'(c) = 0$, zodat c een stationair punt van de functie f is.

Stel dat $f''(c) > 0$. Als f'' een continue functie is (wat we hier aannemen), dan zal ook $f''(x) > 0$ voor alle x in een omgeving van c , zeg voor alle $x \in [a, b]$ met $a < c < b$. Dan is de afgeleide van f' strikt positief in $[a, b]$ en bijgevolg is f' strikt stijgend in $[a, b]$. Omdat $f'(c) = 0$ is dan $f'(x) < 0$ voor $a \leq x < c$ en $f'(x) > 0$ voor $c < x \leq b$. We hebben dan het volgende tekenverloop

| | | | | | |
|---------|-----|--------|---------|----------|-----|
| x | a | | c | | b |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | dalend | minimum | stijgend | |



Figuur 5.4: De brekingswet van Snellius

Bijgevolg bereikt f in $x = c$ een lokaal minimum.

Op soortgelijke wijze volgt uit het feit dat $f''(c) < 0$ in een stationair punt $x = c$ van f dat f in $x = c$ een lokaal maximum bereikt.

Als $f''(c) = 0$ in het stationaire punt $x = c$ dan kunnen we nog geen conclusie trekken. Het is dan mogelijk dat f in $x = c$ een lokaal maximum bereikt, of een lokaal minimum, maar het is ook mogelijk dat f in $x = c$ geen lokaal extremum heeft.

Samenvattend geldt

- Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) > 0$, dan bereikt f in $x = c$ een lokaal minimum.
- Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) < 0$, dan bereikt f in $x = c$ een lokaal maximum.
- Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) = 0$, dan kunnen we geen conclusie trekken.

Voorbeeld 5.2.8. De **wet van Snellius** is een natuurwet uit de optica die aangeeft hoe lichtstralen gebroken worden bij overgang van het ene medium naar het andere.

Een lichtstraal reist van punt P naar punt Q waarbij het een scheidingsoppervlak doorsnijdt. In het gebied boven het scheidingsvlak is de lichtsnelheid gelijk aan $v_1 = c/\eta_1$ waarin c de lichtsnelheid in vacuüm en η_1 de optische dichtheid van het medium in het bovengebied is. In het gebied onder het scheidingsvlak is de lichtsnelheid gelijk aan $v_2 = c/\eta_2$.

Dan zegt de wet van Snellius dat

$$\eta_1 \sin \theta_1 = \eta_2 \sin \theta_2$$

waarin θ_1 en θ_2 de hoeken zijn van de invallende en uitgaande lichtstraal met de loodrechte richting op het scheidingsvlak, zie Figuur 5.4.

We laten zien dat de wet van Snellius verklaard kan worden vanuit het **principe van Fermat** dat zegt dat het licht de snelste route van P naar Q volgt. Als de twee snelheden niet gelijk zijn is deze route niet gelijk aan de rechte van P naar Q .

Neem aan dat het licht het scheidingsvlak doorsnijdt in het punt A . De tijd om van P naar A te gaan met snelheid v_1 is $t_1 = \frac{r_1}{v_1}$ en de tijd om van A naar Q te gaan met snelheid v_2 is $t_2 = \frac{r_2}{v_2}$. De totale reistijd is

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2}.$$

Het probleem is om het punt A te vinden waarvoor t minimaal is. We nemen x_1 als onafhankelijke veranderlijke om de positie van A te beschrijven, zoals in Figuur 5.4. Dan is

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(X - x_1)^2 + y_2^2}$$

waarin $X = x_1 + x_2$ constant is. Bijgevolg is

$$t = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(X - x_1)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

met x_1 als veranderlijke en X, y_1, y_2, v_1 en v_2 als constante waarden. Dus

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx_1} &= \frac{1}{v_1} \frac{dr_1}{dx_1} + \frac{1}{v_2} \frac{dr_2}{dx_1} \\ &= \frac{1}{v_1} \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{-2(X - x_1)}{2\sqrt{(X - x_1)^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{1}{v_1} \frac{x_1}{r_1} - \frac{1}{v_2} \frac{x_2}{r_2} \\ &= \frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2}. \end{aligned}$$

In het minimum geldt $\frac{dt}{dx_1} = 0$, zodat

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

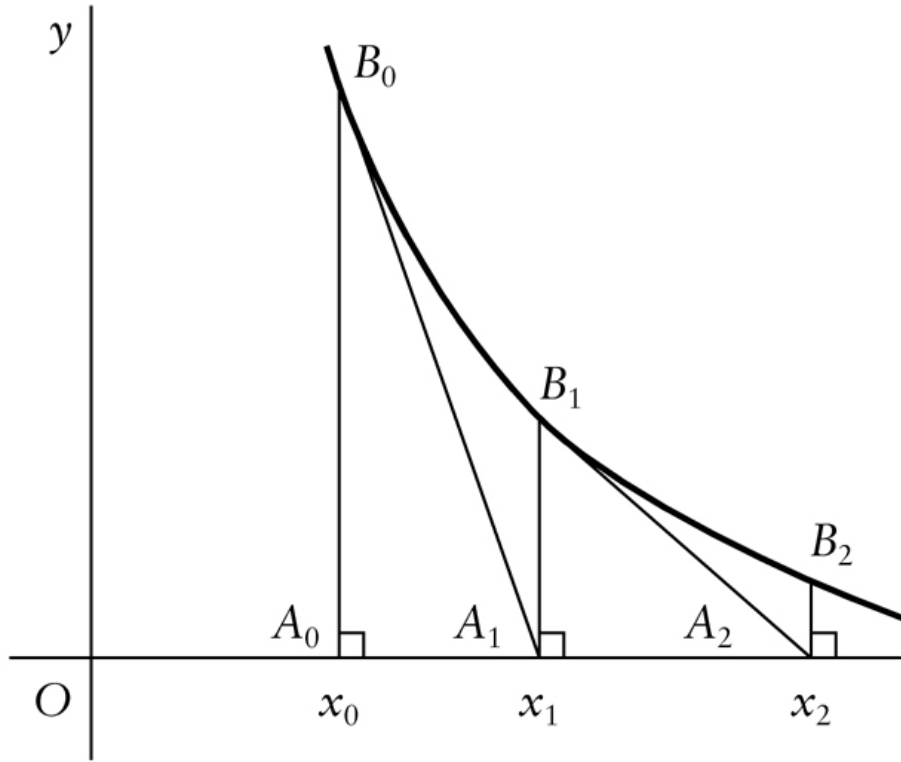
ofwel

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

en dit is de wet van Snellius.

5.3 De methode van Newton–Raphson

De methode van Newton–Raphson is een veelgebruikte numerieke methode om de nulpunten van een functie te berekenen. Het is een iteratief algoritme, hetgeen betekent dat na elke stap een benadering voor het nulpunt gevonden wordt



Figuur 5.5: De methode van Newton-Raphson.

en de benadering wordt steeds beter naarmate men meer stappen neemt. De methode van Newton–Raphson wordt ook wel de methode van Newton genoemd.

We nemen aan dat f een afleidbare functie is. We hebben reeds gezien in het vorige hoofdstuk dat de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(x_0, f(x_0))$ gegeven wordt door

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

We kunnen de raaklijn beschouwen als een goede benadering van de grafiek van f voor x in de buurt van x_0 . Dit idee gebruiken we om een nulpunt van f te zoeken.

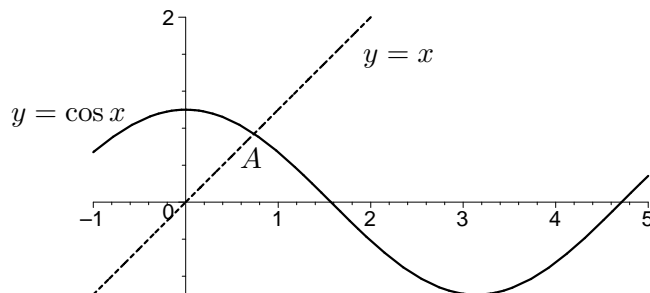
Neem aan dat x^* een nulpunt van f is, en dat x_0 dicht bij x^* ligt. Vermits $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \approx f(x)$ in de buurt van x_0 zal het nulpunt van $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ waarschijnlijk dicht bij x^* , het nulpunt van $f(x)$, liggen. Nu is het nulpunt x_1 van $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ eenvoudig te bepalen. Er moet namelijk gelden dat

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

en dus

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Omdat we mogen veronderstellen dat x_1 een betere benadering is voor x^* dan x_0 , kunnen we vervolgens hetzelfde principe toepassen om x_2 te berekenen als



Figuur 5.6: De grafieken van de functies $y = \cos x$ (volle lijn) en $y = x$ (stippellijn) snijden elkaar in een punt $A : (x^*, y^*)$ met $0 < x^* < \pi/2$.

nulpunt van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(x_1, f(x_1))$. Er zal gelden

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Zo doorgaand genereert men een rij getallen x_0, x_1, x_2, \dots die voldoet aan

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Onder zekere voorwaarden zullen de getallen x_k bij toenemende k dichter en dichter bij x^* komen. Men zegt dan dat de rij (x_k) naar x^* convergeert. Het proces zal men stoppen als men een voldoende goede benadering van x^* denkt te hebben bekomen. Deze methode heet de **methode van Newton–Raphson** voor het vinden van een nulpunt. Als de methode convergeert, blijkt vaak dat de convergentie heel snel is. In veel gevallen is de convergentie kwadratisch, hetgeen betekent dat de fout na de $k + 1$ -ste stap het kwadraat is van de fout na de k -de stap. Dit betekent grofweg dat bij elke stap het aantal juiste cijfers verdubbelt.

Voorbeeld 5.3.1. Zoals te zien is in Figuur 5.6 snijden de de grafieken $y = \cos x$ en $y = x$ elkaar in een punt $A : (x^*, y^*)$ met $0 < x^* < \pi/2$. De x -coördinaat van A voldoet aan $\cos x^* = x^*$ en is met andere woorden een nulpunt van de functie

$$f(x) = x - \cos x.$$

We gaan x^* berekenen met de methode van Newton–Raphson. We nemen als startwaarde $x_0 = 0$ en berekenen de waarden x_k volgens

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

met

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x}.$$

We verkrijgen dan de volgende resultaten.

| k | x_k | $f(x_k)$ |
|-----|--------------------|-----------------------|
| 0 | 0, | -1, |
| 1 | 1, | 0,46 |
| 2 | 0,7503638678402438 | 0,19 $\cdot 10^{-1}$ |
| 3 | 0,7391128909113616 | 0,46 $\cdot 10^{-4}$ |
| 4 | 0,7390851333852840 | 0,28 $\cdot 10^{-9}$ |
| 5 | 0,7390851332151606 | -0,1 $\cdot 10^{-15}$ |
| 6 | 0,7390851332151607 | 0,1 $\cdot 10^{-15}$ |

In het vet zijn steeds de juiste cijfers in de benadering weergegeven. We zien inderdaad dat de convergentie razendsnel verloopt. Na 3 stappen komen de eerste 3 decimalen van de benadering overeen met die van de echte oplossing. Na 4 stappen zijn er dat al 9 en na 5 stappen komen 16 decimalen overeen.

Omdat de berekening is uitgevoerd met 16 beduidende cijfers, kunnen we niet meer dan 16 juiste decimalen bekomen. De zesde benadering is in feite weer iets slechter dan de vijfde. Dit komt doordat de rekenmachine (of de computer) niet helemaal precies kan rekenen, maar kleine rekenfouten maakt.

Voorbeeld 5.3.2. We zullen Newton–Raphson iteratie gebuiken om \sqrt{a} te berekenen.

Uiteraard is \sqrt{a} een nulpunt van de functie

$$f(x) = x^2 - a$$

en de Newton–Raphson iteratie luidt dus

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

met

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Voor $a = 2$ en beginwaarde $x_0 = 1$ krijgen we de rij

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathbf{1}. \\ x_1 &= \mathbf{1,5} \\ x_2 &= \mathbf{1,416666666666667} \\ x_3 &= \mathbf{1,414215686274510} \\ x_4 &= \mathbf{1,414213562374690} \\ x_5 &= \mathbf{1,414213562373095} \\ x_6 &= \mathbf{1,414213562373095} \end{aligned}$$

Na 5 stappen hebben we 16 juiste decimalen van $\sqrt{2}$ gevonden.

Met dezelfde techniek kan men ook hogere machtswortels berekenen. Om $\sqrt[n]{a}$ te berekenen zal men itereren met de formule

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

waarin

$$F(x) = x - \frac{x^n - a}{nx^{n-1}} = \frac{(n-1)x^n + a}{nx^{n-1}}$$

of een hiermee equivalente vorm.

5.4 Taylorveeltermen

5.4.1 Veeltermbenaderingen

Lineaire benadering

Stel we willen een functie $y = f(x)$ benaderen rond $x = 0$. Een hele ruwe benadering krijgen we door gewoon $x = 0$ in de functie te nemen

$$f(x) \approx f(0).$$

Deze benadering zal alleen redelijk goed zijn voor x heel dicht bij $x = 0$.

Een betere benadering krijgen we als we $y = f(x)$ benaderen door de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in $(0, f(0))$. Zoals bekend is de vergelijking van de raaklijn gelijk aan $y = f(0) + f'(0)x$ en de betere benadering is dus

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x. \quad (5.4.1)$$

We noemen het de **lineaire benadering** of **eerste orde benadering** van f rond $x = 0$.

De rechterkant van (5.4.1) is een veelterm in x van graad ≤ 1 (de graad is 0 als $f'(0) = 0$) die we aangeven met $P_1(x)$, zodat

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x.$$

Er geldt (ga zelf na)

$$P_1(0) = f(0), \quad P_1'(0) = f'(0). \quad (5.4.2)$$

Kwadratische benadering

We gaan nu hogere orde benaderingen van $f(x)$ rond $x = 0$ invoeren door f te benaderen met hogere orde veeltermen.

Een veelterm P_2 van graad ≤ 2 is een **kwadratische benadering** of **tweede orde benadering** van f rond $x = 0$ als

$$P_2(0) = f(0), \quad P_2'(0) = f'(0), \quad P_2''(0) = f''(0). \quad (5.4.3)$$

We nemen hier uiteraard aan dat de functie f minstens twee keer afleidbaar is in $x = 0$. Als we schrijven

$$P_2(x) = a + bx + cx^2$$

dan geldt

$$a = P_2(0), \quad b = P_2'(0), \quad 2c = P_2''(0),$$

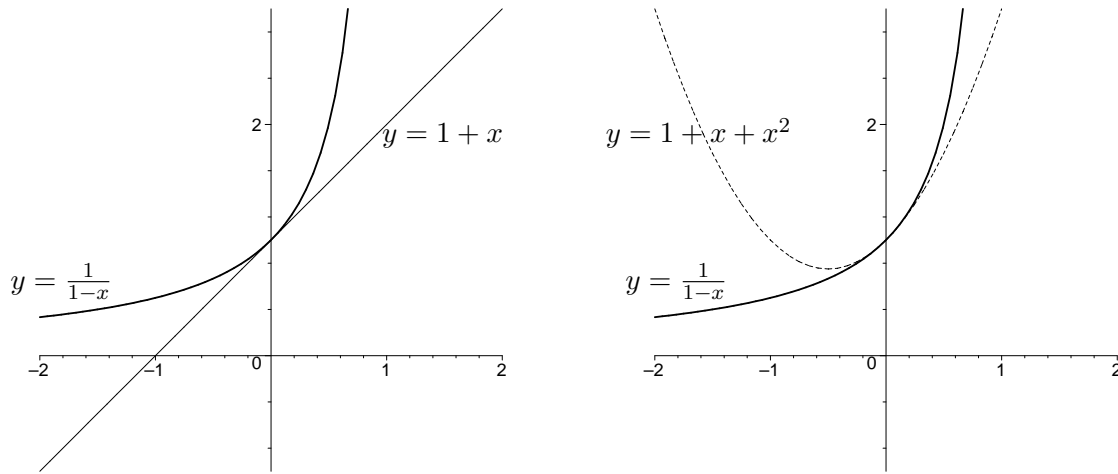
zodat de voorwaarden (5.4.3) betekenen dat we de coëfficiënten a , b en c moeten kiezen als

$$a = f(0), \quad b = f'(0), \quad c = \frac{f''(0)}{2}.$$

De veelterm

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

is de kwadratische benadering van f rond $x = 0$. Merk op dat we $P_2(x)$ uit $P_1(x)$ verkrijgen door toevoeging van een term cx^2 met gepaste c .



Figuur 5.7: De grafiek van de functie $y = f(x) = \frac{1}{1-x}$ met de lineaire benadering $y = P_1(x) = 1 + x$ (links) en de kwadratische benadering $y = P_2(x) = 1 + x + x^2$ (rechts)

Voorbeeld 5.4.1. De functie $f(x) = \frac{1}{1-x}$ voldoet aan

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

zodat

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2.$$

De lineaire en kwadratische benaderingen zijn

$$P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + x^2.$$

Zie Figuur 5.7 voor de grafiek van $y = f(x)$ samen met de lineaire en kwadratische benaderingen.

Hogere orde benadering

Een veelterm P_n van graad $\leq n$ is een **n -de orde benadering** van $f(x)$ rond $x = 0$ als f minstens n keer afleidbaar is in 0 en

$$P_n(0) = f(0), \quad P'_n(0) = f'(0), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0), \quad (5.4.4)$$

waarbij $f^{(n)}$ staat voor de n -de orde afgeleide van f . De functiewaarden van P_n en f in 0 stemmen dus overeen, en tevens de waarde van alle afgeleiden in 0 tot en met die van de n -de orde. De n -de orde benadering van f in $x = 0$ is de veelterm die in de buurt van 0 zo goed mogelijk op f lijkt.

We zullen voor het gemak de nulde orde afgeleide van een functie f gelijkstellen aan de functie zelf:

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

Dan kunnen we (5.4.4) uitdrukken door

$$P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad \text{voor alle } k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.4.5)$$

Vanuit paragraaf 4.9.1 weten we dat voor een veelterm

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

geldt dat

$$P_n^{(k)}(0) = a_k k!$$

zie (4.9.2). Bijgevolg voldoen de coëfficiënten van de n -de orde benadering aan

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

en de n -de orde benadering is gelijk aan

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

De veelterm (5.4.6) heet de **Taylorveelterm** van graad n van f rond $x = 0$. Taylorveeltermen rond $x = 0$ worden ook **Maclaurinveelterm** genoemd.

Voorbeeld 5.4.2. Voor de functie $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ uit Voorbeeld 5.4.1 geldt dat

$$f'(x) = (1-x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3}, \quad f'''(x) = 6(1-x)^{-4}, \dots$$

en algemeen

$$f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}.$$

Bijgevolg is

$$f^{(k)}(0) = k!, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1.$$

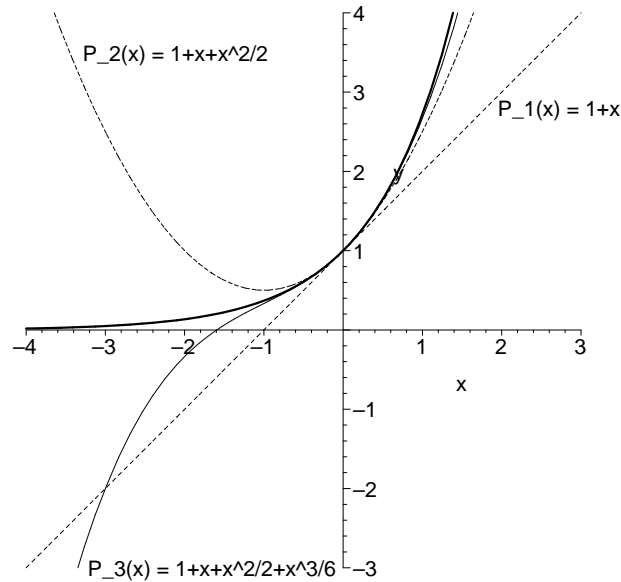
en de Taylorveelterm van graad n is

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

Als alle afgeleiden van f in $x = 0$ bestaan dan kunnen we voor elk natuurlijk getal n de Taylorveelterm P_n opstellen. We zeggen ook dat P_n de **Taylorontwikkeling** van f is tot en met de n -de graad. We kunnen $P_n(x)$ gebruiken om $f(x)$ rond $x = 0$ te benaderen. Vaak wordt dan geschreven

$$f(x) = P_n(x) + \dots \quad (5.4.7)$$

waarbij de puntjes staan voor de verdere termen in de Taylorontwikkeling van f . Voor x dicht bij 0 zijn deze verdere termen allemaal klein vergeleken met de termen in $P_n(x)$.



Figuur 5.8: Grafiek van $y = \exp(x)$ (vet) en haar Taylorveeltermen $y = P_1(x)$ (stippel), $y = P_2(x)$ (streep-stippel) en $y = P_3(x)$ (dun ononderbroken).

5.4.2 Voorbeelden van Taylorveeltermen

We geven de Taylorveeltermen van enkele transcendente functies.

Voorbeeld 5.4.3. Zij $f(x) = \exp(x) = e^x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en bijgevolg geldt ook voor elke k dat

$$f^{(k)}(x) = e^x.$$

Dus $f^{(k)}(0) = 1$ en $a_k = \frac{1}{k!}$. Vanwege (5.4.6) volgt dat

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

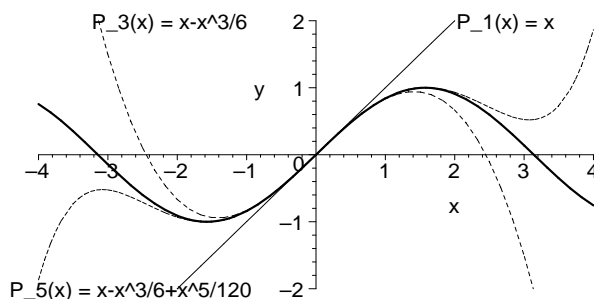
In Figuur 5.8 zijn de grafiek van $\exp(x)$ en de Taylorveeltermen van graad 1, 2 en 3 getekend. Merk op dat bij oplopende graad de veelterm P_n de functie rond 0 steeds beter benadert.

Met behulp van de notatie (5.4.7) kunnen we schrijven dat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{als } x \rightarrow 0.$$

Voorbeeld 5.4.4. Zij $f(x) = \sin x$. Dan geldt

| | | | |
|--------------|-------------|--------------|--------|
| $f(x)$ | $= \sin x$ | $f(0)$ | $= 0$ |
| $f'(x)$ | $= \cos x$ | $f'(0)$ | $= 1$ |
| $f''(x)$ | $= -\sin x$ | $f''(0)$ | $= 0$ |
| $f'''(x)$ | $= -\cos x$ | $f'''(0)$ | $= -1$ |
| $f^{(4)}(x)$ | $= \sin x$ | $f^{(4)}(0)$ | $= 0$ |
| $f^{(5)}(x)$ | $= \cos x$ | $f^{(5)}(0)$ | $= 1$ |



Figuur 5.9: Grafiek van $\sin x$ (vet) en haar Taylorveeltermen P_1 (dun), P_3 (stippel) en P_5 (streep-stippel).

enzovoorts. We zien hieruit het volgende. Als k even is dan is $f^{(k)}(0) = 0$ en als k oneven is, zeg $k = 2j + 1$, dan is $f^{(k)}(0) = f^{(2j+1)}(0) = (-1)^j$. De coëfficiënt a_k in de Taylorveeltermen is dus

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even is,} \\ \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} & \text{als } k = 2j + 1 \text{ oneven is.} \end{cases}$$

In de Taylorveelterm (5.4.6) doen alleen de termen met k oneven mee. We vinden dan bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_2(x) = x, \\ P_3(x) &= P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \\ P_5(x) &= P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \end{aligned}$$

en in het algemeen

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n+2}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}.$$

Met behulp van (5.4.7) kunnen we schrijven dat

$$\sin x = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \dots \quad \text{als } x \rightarrow 0.$$

De grafieken van $\sin x$ en de Taylorveeltermen van graad 1, 3 en 5 staan in Figuur 5.9.

Voorbeeld 5.4.5. Leid zelf af dat voor de Taylorveeltermen van de cosinus-functie geldt

$$\begin{aligned} P_0(x) &= P_1(x) = 1, \\ P_2(x) &= P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

$$P_4(x) = P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!},$$

en algemeen

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Er geldt

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \dots \quad \text{als } x \rightarrow 0.$$

Voorbeeld 5.4.6. Neem $f(x) = \ln(1+x)$. Dan geldt

$$\begin{array}{ll} f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2} & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} & f'''(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -6(1+x)^{-4} & f^{(4)}(0) &= -6 \end{array}$$

We zien een patroon ontstaan. Het is nu niet moeilijk om met volledige inductie aan te tonen dat algemeen geldt

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}, \\ f^{(k)}(0) &= (-1)^{k+1}(k-1)!, \end{aligned}$$

als $k \geq 1$. De Taylorveelterm van graad n van $\ln(1+x)$ is dus

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Er geldt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{als } x \rightarrow 0.$$

5.4.3 Taylorveelterm rond algemeen punt a

In plaats van rond $x = 0$ kan de Taylorveelterm ook rond een andere waarde $x = a$ genomen worden.

De definitie is analoog. De Taylorveelterm van $y = f(x)$ van graad n rond $x = a$ is de veelterm P_n van graad $\leq n$ die voldoet aan

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (5.4.8)$$

Om deze Taylorveelterm te bepalen stellen we

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

met nog nader te bepalen coëfficiënten c_k . Dus in plaats van de gebruikelijke standaardfuncties $1, x, x^2, x^3, \dots$ (de monomen) gebruiken we nu de verschuivingen $1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3, \dots$ als basisfuncties om een lineaire combinatie mee te maken. De schrijfwijze (5.4.9) heeft als voordeel dat de afgeleiden van P_n in $x = a$ eenvoudig uit te drukken zijn in de coëfficiënten c_k . Er geldt namelijk

$$P_n^{(k)}(a) = c_k k!$$

Als we de gelijkheid (5.4.8) willen, dan moeten we bijgevolg

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

kiezen. De Taylorveelterm van f rond a is dus

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Analoog aan (5.4.7) schrijven we (als alle afgeleiden van f in a bestaan)

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + \dots \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \end{aligned}$$

als $x \rightarrow a$.

5.4.4 Bewerkingen met Taylorveeltermen

We geven zonder bewijs een overzicht van enkele bewerkingen die met Taylorveeltermen gedaan kunnen worden.

We beschouwen in het volgende overzicht steeds Maclaurinveeltermen, d.w.z. Taylorveeltermen rond $x = 0$. Analoge eigenschappen gelden voor Taylorveeltermen rond $x = a$.

Eigenschap 5.4.7. *Neem aan dat $f(x)$ en $g(x)$ de volgende Taylorontwikkelingen hebben als $x \rightarrow 0$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots. \end{aligned}$$

Dan geldt voor de som $f(x) + g(x)$ dat

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$$

als $x \rightarrow 0$. Met andere woorden:

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

is de Taylorveelterm van graad n van $f(x) + g(x)$.

Eigenschap 5.4.8. Als $P_n(x)$ de n -de graads Taylorveelterm van f rond $x = 0$ is, en k is een natuurlijk getal, dan is $P_n(x^k)$ de Taylorveelterm van graad nk van de functie $f(x^k)$ rond $x = 0$.

Voorbeeld 5.4.9. We weten dat

$$1 + x + \frac{x^2}{2}$$

de 2-de graads Taylorveelterm van $f(x) = e^x$ is. Als we hierin x vervangen door x^3 , dan krijgen we vanwege Eigenschap 5.4.8 dat

$$1 + x^3 + \frac{x^6}{2}$$

de 6-de graads Taylorveelterm van $f(x^3) = e^{x^3}$ is. Er geldt dus

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

en vervang hierin x door x^3

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \dots$$

Voorbeeld 5.4.10. Bepaal de Taylorveelterm van graad $2n$ van de functie $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

We weten dat de n -de graads Taylorveelterm van $\frac{1}{1-x}$ gelijk is aan

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

ofwel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Vervang hierin eerst x door $-x$. Dan vinden we

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Vervolgens vervangen we x door x^2 .

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

en we zien dat

$$1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} \tag{5.4.11}$$

de gevraagde Taylorveelterm van graad $2n$ is.

Eigenschap 5.4.11. Als P_n de n -de graads Taylorveelterm van f rond $x = 0$ is, dan is P'_n de Taylorveelterm van f' rond $x = 0$ van graad $n - 1$.

Voorbeeld 5.4.12. Bepaal de Taylorveelterm $P_{2n+1}(x)$ van graad $2n + 1$ van de functie $f(x) = \text{bgtan } x$.

Voor de afgeleide $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ hebben we in het vorige voorbeeld de Taylorveelterm bepaald, zie (5.4.11). Vanwege Eigenschap 5.4.11 geldt dus

$$P'_{2n+1}(x) = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$$

We zoeken dus een veelterm van graad $2n + 1$ waarvan we de afgeleide kennen. Tevens geldt $P_{2n+1}(0) = f(0) = 0$. De enige mogelijkheid is dan

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Meer hierover vindt u in het volgende hoofdstuk over integralen.

Eigenschap 5.4.13. *Neem aan dat $f(x)$ en $g(x)$ de volgende Taylorontwikkelingen hebben als $x \rightarrow 0$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots. \end{aligned}$$

Dan geldt voor het product $f(x)g(x)$ dat

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots \quad (5.4.12)$$

als $x \rightarrow 0$, waarin

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}. \quad (5.4.13)$$

We kunnen Eigenschap 5.4.13 als volgt interpreteren. Als we de veeltermen $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ en $b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ met elkaar vermenigvuldigen dan krijgen we een veelterm van graad $2n$ waarvan de coëfficiënten gelijk zijn aan de c_k uit (5.4.13).

De Taylorveelterm van $f(x)g(x)$ van graad n is dus de veelterm die we krijgen door de Taylorveeltermen van $f(x)$ en $g(x)$ met elkaar te vermenigvuldigen en vervolgens alle termen c_kx^k met $k > n$ weg te gooien. Deze zijn opgenomen in de termen aangeduid met \cdots .

Voorbeeld 5.4.14. Bereken de Taylorveelterm van graad 3 van $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

Er geldt dat

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Als we de Taylorveeltermen met elkaar vermenigvuldigen krijgen we

$$\begin{aligned} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)(1 + x + x^2 + x^3) \\ = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{6}x^6. \end{aligned}$$

De Taylorveelterm van $f(x)$ van graad 3 krijgen we door hieruit alle termen van hogere graad weg te laten. Dus

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

als $x \rightarrow 0$.

5.5 Berekening van limieten

Taylorveeltermen kunnen helpen bij het berekenen van limieten, in het bijzonder bij onbepaalde vormen $0/0$.

Dit zal duidelijk worden aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 5.5.1. We berekenen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}$$

Zowel teller als noemer zijn gelijk aan 0 voor $x = 0$. Er is dus inderdaad sprake van een onbepaalde vorm $0/0$.

We zoeken nu de eerste Taylorveelterm van de teller $\sin x - x$ die niet nul is in $x = 0$, en net zo van de noemer $\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$. Omdat

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

als $x \rightarrow 0$, geldt voor de teller

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + \dots$$

Vanwege

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

geldt voor de noemer

$$\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

als $x \rightarrow 0$.

Bijgevolg is

$$\frac{\sin x - x}{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2} = \frac{-\frac{1}{6}x^3 + \dots}{\frac{1}{3}x^3 + \dots} = \frac{-\frac{1}{6} + \dots}{\frac{1}{3} + \dots}$$

waarbij we in de laatste stap teller en noemer door x^3 gedeeld hebben. Als $x \rightarrow 0$, dan gaan de termen die voorgesteld worden door \dots naar 0. De teller gaat dus naar $-1/6$ en de noemer naar $1/3$, zodat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

5.5.1 De regels van de l'Hôpital

Naast het gebruik van Taylorveeltermen kunnen we ook de regels van de l'Hôpital gebruiken voor de berekening van limieten

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (5.5.1)$$

die aanleiding geven tot de onbepaalde vormen $0/0$ of ∞/∞ .

Onbepaalde vorm $0/0$

Als

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

dan leidt de berekening van (5.5.1) tot de onbepaalde vorm $0/0$. We kunnen (5.5.1) alleen uitrekenen onder extra voorwaarden op f en g . Een eerste mogelijke extra voorwaarde is dat f en g afleidbaar zijn in a met $g'(a) \neq 0$. Dan kunnen we schrijven (omdat $f(a) = g(a) = 0$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)}. \quad (5.5.2)$$

Omdat f en g afleidbaar zijn in a geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

en

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a).$$

Omdat $g'(a) \neq 0$ geldt ook

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = \frac{1}{g'(a)},$$

zodat uit (5.5.2) volgt dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \right] \\ &= f'(a) \cdot \frac{1}{g'(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Als de afgeleiden f' en g' bovendien continu zijn in a , dan kunnen we (5.5.3) ook formuleren door

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.5.4)$$

Het blijkt nu dat (5.5.4) algemeen geldig is. Dit resultaat is de **eerste regel van de l'Hôpital**.

Eigenschap 5.5.2. *Neem aan dat f en g afleidbare functies zijn in een omgeving van het punt a met*

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Indien $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq a$ in een omgeving van a en indien de limiet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (5.5.5)$$

bestaat, dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad (5.5.6)$$

Het bewijs van de regel van de l'Hôpital is nogal technisch en leidt niet tot meer inzicht. Daarom laten we het hier achterwege. Let wel op dat we eerst moeten controleren of de limiet (5.5.5) bestaat. Als dat zo is, dan kunnen we concluderen dat (5.5.6) geldt. Als de limiet (5.5.5) niet bestaat, dan kunnen we de regel van de l'Hôpital niet toepassen.

Onbepaalde vorm ∞/∞

De regel van de l'Hôpital kan ook uitgebreid worden tot de onbepaalde vorm ∞/∞ . Dit resultaat staat bekend als de **tweede regel van de l'Hôpital**. We geven het hier zonder bewijs.

Eigenschap 5.5.3. *Neem aan dat f en g afleidbaar zijn in een omgeving van a , maar niet in a zelf, en dat*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Indien $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq a$ in een omgeving van a en indien de limiet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

bestaat, dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

In de regels van de l'Hôpital mag a een reëel getal of $\pm\infty$ zijn.

Voorbeelden

Voorbeeld 5.5.4. We berekenen $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ waarin $a > 0$:

Als x naar a streeft, worden teller en noemer beide nul. De afgeleide van de teller is $2x$; de afgeleide van de noemer is $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Er geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow a} 4x^{\frac{3}{2}} = 4a^{\frac{3}{2}}.$$

Vanwege de eerste regel van de l'Hôpital, is dan ook

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 4a^{\frac{3}{2}}.$$

Het is soms nodig om de regel van de l'Hôpital herhaald toe te passen.

Voorbeeld 5.5.5. We berekenen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos x}$

De teller en noemer gaan inderdaad naar 0 als $x \rightarrow 0$. De afgeleide van de teller is $6 \sin(3x) \cos(3x)$ en de afgeleide van de noemer is $\sin x$. Vanwege de regel van de l'Hôpital zijn we dus geïnteresseerd in de limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(3x) \cos(3x)}{\sin x} \quad (5.5.7)$$

maar deze limiet geeft weer aanleiding tot een onbepaalde vorm $0/0$.

Als we nogmaals de afgeleide van teller en noemer nemen, dan krijgen we de limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18 \cos(3x)^2 - 18 \sin(3x)^2}{\cos x} = 18. \quad (5.5.8)$$

Omdat de limiet (5.5.8) bestaat, geldt volgens de regel van de l'Hôpital dat de limiet (5.5.7) bestaat met

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(3x) \cos(3x)}{\sin x} = 18. \quad (5.5.9)$$

Dan passen we de l'Hôpital nogmaals toe en we vinden dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos x} = 18.$$

De bovenstaande manier van opschrijven is nogal omslachtig, maar het geeft de gedachtengang achter de regel van de l'Hôpital wel goed weer. Vaak wordt de berekening beknopt opgeschreven als

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos x} &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(3x) \cos(3x)}{\sin x} \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18 \cos^2(3x) - 18 \sin^2(3x)}{\cos x} \\ &= 18, \end{aligned}$$

waarbij (H) staat voor het toepassen van de regel van de l'Hôpital.

Voorbeeld 5.5.6. We laten zien dat voor elke $p > 0$ geldt dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0.$$

In dit voorbeeld gaan teller en noemer naar $+\infty$ als $x \rightarrow \infty$. We passen hier de tweede regel van de l'Hôpital toe. Er geldt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{px^p} = 0,$$

want $p > 0$.

Voorbeeld 5.5.7. We bewijzen de limiet

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (5.5.10)$$

die al aangekondigd was in (3.4.1).

Door logaritme te nemen in (5.5.10) zien we dat we moeten bewijzen dat

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right). \quad (5.5.11)$$

Schrijf $h = 1/n$. Als $n \rightarrow \infty$, dan zal $h \rightarrow 0$ en

$$n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\ln(1 + hx)}{h}.$$

Voor $h \rightarrow 0$ gaan teller en noemer hierin naar 0 en we kunnen de regel van de l'Hôpital toepassen. Er volgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + hx)}{h} \stackrel{(H)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x/(1 + hx)}{1} = x.$$

Dus (5.5.11) is bewezen en (5.5.10) volgt hieruit.

5.6 Oefeningen

Oefening 5.1. In Figuur 5.10 staan links de grafieken van vier functies en rechts daaronder de grafieken van de afgeleide functies. Zoek bij elke functie de grafiek van de bijbehorende afgeleide functie.

Oefening 5.2. Laat zien dat voor elke $x > 0$ geldt

$$(a) \ln x \leq x - 1 \quad (b) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Oefening 5.3. Laat zien dat geldt

$$(a) \cos 2x \geq 1 - 2x^2 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R},$$

$$(b) \operatorname{bgtan} x \leq x \text{ voor alle } x \geq 0,$$

$$(c) \tanh x \leq \operatorname{bgtan} x \text{ voor alle } x \geq 0. \quad \text{N.B.: } \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

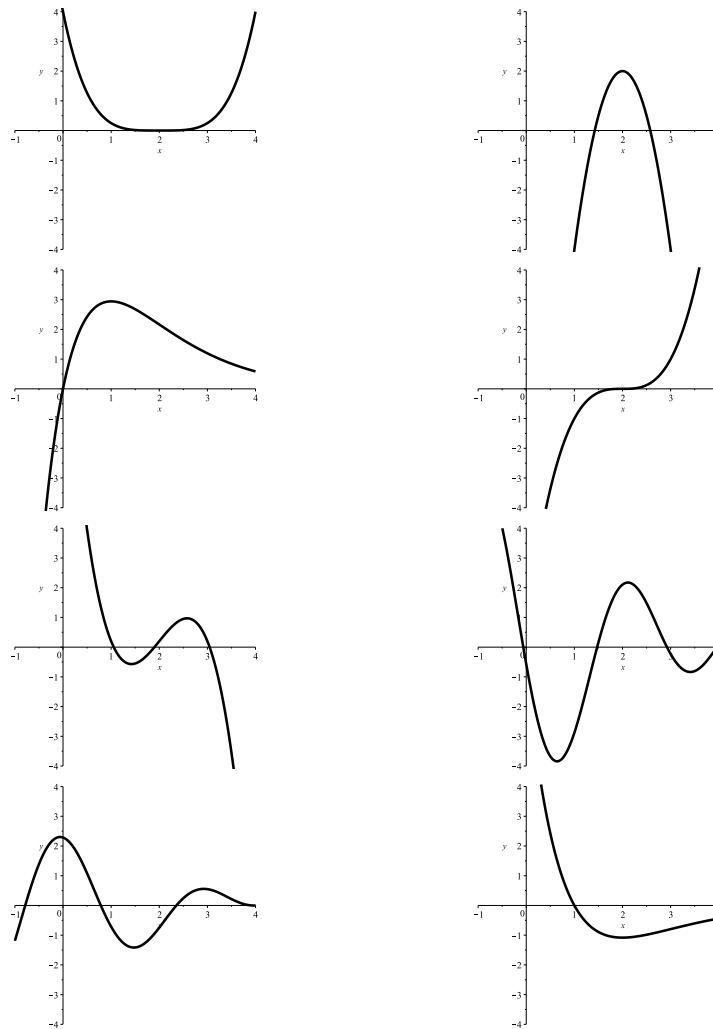
Oefening 5.4. Bereken de stationaire punten van de volgende functies. Bepaal de maxima en minima voor x behorend tot het gegeven interval. Denk aan randextrema! Bepaal ook de intervallen waar de functie stijgend of dalend is.

$$(a) f(x) = x^2 - 2x - 8, \quad [0, 4] \quad (e) f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \quad [-1, 3]$$

$$(b) f(x) = -x^2 + x, \quad [-1, 2] \quad (f) f(x) = \frac{4x}{(x-2)^2}, \quad [-3, 2]$$

$$(c) f(x) = (x-4)^4, \quad [3, 6] \quad (g) f(x) = x \ln x, \quad x > 0,$$

$$(d) f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad [0, \sqrt{8}] \quad (h) xe^{-x}, \quad x \geq 0.$$



Figuur 5.10: Zoek de bijbehorende afgeleide functies, zie Oefening 5.1.

Oefening 5.5. Een meer bevat aanvankelijk 500 vissen. De evolutie van de populatie in de loop van de tijd wordt beschreven door de volgende logistische functie

$$p(t) = \frac{10000}{1 + 19e^{-t/5}}.$$

Hierbij wordt de tijd t gemeten in maanden.

- Schets de grafiek van de functie p (gebruik het grafisch rekentoestel).
- Met welke snelheid groeit de populatie na 1 maand? Hoe snel groeit ze na 5 maanden?
- Na hoeveel maanden groeit de populatie het snelst?

Oefening 5.6. Bepaal de stationaire punten van de volgende functies en classificeer deze aan de hand van de tweede afgeleide test.

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

(b) $f(x) = x \ln x$

Oefening 5.7. Bepaal voor de volgende functies alle minima en maxima in het domein en geef aan of ze lokaal of globaal zijn.

(a) $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$

(b) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$

(c) $f(x) = x^p e^{-x}$ voor $x \geq 0$ met $p > 0$.

(d) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$ met $-1 < a < 1$

(e) $C(t) = \gamma e^{-\lambda t}(1 - e^{-\mu t})$ voor $t \geq 0$ met γ, λ en $\mu > 0$

Oefening 5.8. De Lennard-Jones potentiaal voor de interactie van twee moleculen op afstand r is

$$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}, \quad r > 0,$$

waarin A en B positieve constanten zijn. De evenwichtsafstand R_e is de afstand r waarvoor $U(r)$ minimaal is. De bindingsenergie is $D_e = -U(R_e)$.

(a) Vind R_e en D_e als functies van A en B .

(b) Druk A en B uit in R_e en D_e .

Oefening 5.9. Vertaal naar een optimalisatieprobleem en los dit probleem op:

(a) Bepaal de punten van de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$ die het dichtst gelegen zijn bij het punt $P : (0, r)$.

(b) Bepaal het grootste mogelijke product van twee getallen als je weet dat de som gelijk aan 20 is.

(c) De som van twee getallen is S . Bepaal deze twee getallen zodat de som van hun kwadraten minimaal is.

(d) Het verschil van twee getallen is 10. Bepaal deze getallen zodat hun product minimaal is.

Oefening 5.10. Gegeven zijn n reële getallen x_1, x_2, \dots, x_n . Vind het reëel getal x waarvoor

$$\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

minimaal is.

Oefening 5.11. Een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde $\sqrt{3}$ m lang is wordt gewenteld rond één van zijn benen. Zo wordt een kegel gevormd. Vind de hoogte en het maximale volume V van de kegel, waarbij V gegeven wordt door $V = \frac{\pi}{3}r^2h$.

Oefening 5.12. De reactie van het menselijk lichaam bij het nemen van een bepaalde dosis van een geneesmiddel wordt vaak voorgesteld door de volgende functie:

$$R(M) = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right).$$

Hierbij is C een positieve constante en M de hoeveelheid geneesmiddel die opgenomen wordt in het bloed. Deze reactie van het menselijk lichaam kan bijvoorbeeld een verandering in bloeddruk zijn of een verandering in temperatuur. De afgeleide van de functie R , $\frac{dR}{dM}$, wordt de sensitiveit van het lichaam aan het geneesmiddel genoemd. Bereken deze afgeleide en gebruik ze om de hoeveelheid geneesmiddel te vinden die de grootste reactie teweegbrengt.

Oefening 5.13. Vind de afmetingen van een rechthoek die ingeschreven is in een halve cirkel met straal R en met zo groot mogelijke oppervlakte.

Oefening 5.14. De Maxwell-Boltzmann verdeling

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}$$

beschrijft de kans dat een molecule met massa m in een gas met temperatuur T de snelheid v heeft. Hierin is k de Boltzmann constante. Bepaal de meest waarschijnlijke snelheid v (dat wil zeggen: de snelheid waarvoor $f(v)$ maximaal is).

Oefening 5.15. Bij een chemische reactie $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ voor onomkeerbare reacties met reactieconstanten k_1 en k_2 voldoet de concentratie $b(t)$ van stof B aan

$$b(t) = a(0) \frac{k_1}{k_2 - k_1} \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \right). \quad (5.6.1)$$

Hierin is $a(0) > 0$ de concentratie van stof A op tijdstip $t = 0$ en er is aangenomen dat $b(0) = 0$ en $k_1 \neq k_2$.

- Bereken de tijd t (in functie van k_1 en k_2) waarop de concentratie van B maximaal is.
- Laat zien dat de maximale concentratie van B gelijk is aan

$$b_{\max} = a(0) \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{k_2/(k_2 - k_1)} \quad (5.6.2)$$

Het geval $k_1 = k_2$ kunnen we onderzoeken door de limiet $k_2 \rightarrow k_1$ te nemen in (5.6.1).

- Laat zien dat de limiet van (5.6.1) als $k_2 \rightarrow k_1$ gegeven wordt door

$$b(t) = a(0)k_1 t e^{-k_1 t}. \quad (5.6.3)$$

- (d) Bereken de limiet van (5.6.2) als $k_2 \rightarrow k_1$.
- (e) Komt de waarde van de limiet uit (d) overeen met de maximale waarde van (5.6.3) ?

Oefening 5.16. Gebruik de methode van Newton–Raphson om een oplossing te bepalen van de vergelijking $x = 2 \sin x$. Welke startwaarde kies je? Hoeveel iteraties zijn nodig om het maximale aantal juiste cijfers op je rekenmachine te bekomen?

Oefening 5.17. De gegeven functie heeft een nulpunt in het gegeven interval. Kies een geschikte startwaarde en gebruik de methode van Newton–Raphson om dit nulpunt te benaderen met een fout die kleiner is dan 10^{-5} . (Dat wil zeggen dat de eerste 5 decimalen na de komma niet meer veranderen.)

- (a) $f(x) = x^4 - 2$, $x \in [1, 2]$,
- (b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4$, $x \in [0, 2]$,
- (c) $f(x) = x \sin x - \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$.
- (d) $f(x) = x^2 + 2x - 4$, $x \in [0, 3]$,

Oefening 5.18. De volgende functies hebben precies één nulpunt. Benader dit nulpunt met de methode van Newton–Raphson. Kies zelf een geschikte startwaarde.

- (a) $f(x) = x^3 - x + 3$ (b) $f(x) = x^5 + x^4 - 5$

Oefening 5.19. Gebruik de methode van Newton–Raphson om een benadering te bekomen van de volgende wortels. Geef een benadering met een fout die kleiner is dan 10^{-4}

- (a) $\sqrt{53}$ (b) $\sqrt[3]{5}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt[5]{50}$

Oefening 5.20. Bereken de Taylorveelterm rond $x = 0$ van graad 4 van de volgende functies.

- (a) $\ln(1 + e^x)$ (f) $(1 - x)^{-1/2}$
- (b) $\sqrt{1 + x}$ (g) $\frac{1}{3 + x}$
- (c) $\cos(x^2)$ (h) $\frac{e^{x^2} - 1}{x}$
- (d) $(\cos x)^2$ (i) $e^{-x} \cos x$
- (e) $\operatorname{bgtan} x$

Oefening 5.21. Bereken voor de volgende functies de Taylorveelterm van graad 8 rond het gegeven punt a .

- (a) $1 + x + x^2$, $a = 2$ (c) $e^x + x + \sin x$, $a = 0$
- (b) $\sin x$, $a = \pi/2$ (d) $\exp(x^2)$, $a = 0$

Oefening 5.22. De relativistische energie van een deeltje met rustmassa m_0 en snelheid v is gelijk aan

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

- (a) Bereken de vierdegraads Taylorveelterm van E als functie van v .
- (b) Bereken de limiet van de kinetische energie $T = E - m_0 c^2$ voor $c \rightarrow \infty$.

Oefening 5.23. Gebruik Taylorveeltermen om de volgende limieten te berekenen:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\cos x - 1}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\sin x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{\cos x^2 - \cos^2 x}$

Herinner u dat $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Oefening 5.24. Bereken de volgende limieten:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 4}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x + 1)}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 + 2x^2 + 1}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sqrt{x}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$

Oefening 5.25. Bereken de volgende limieten:

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{2x+4}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ | (l) $\lim_{x \rightarrow 1+} (x^2-1) \tan \frac{\pi x}{2}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x)^{\cos x}$ | (m) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^{1/\ln x}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$ | (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x^2}$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 e^{-x^2}$ | (j) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x}$ | (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

Oefening 5.26. Gebruik de tweede regel van de l'Hôpital en volledige inductie om aan te tonen dat voor elke $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^n = 0$$

Oefening 5.27. Bereken

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^n$ waarin $a, b \in \mathbb{R}$ vast gekozen zijn.

Oefening 5.28. (Deel van examenvraag)

Bereken de Taylorveelterm van de functie

$$f(x) = \frac{1}{ce^x - 1}$$

rond $x = 0$ van graad 2. Hierin is $c > 0$.

Hoofdstuk 6

Integralen

6.1 Begripsbepaling

6.1.1 Primitiveren en onbepaalde integraal

Beschouw een voorwerp dat langs een kromme beweegt van punt A naar punt B . Op tijdstip t bevindt het voorwerp zich in het punt P_t . We noteren de afstand van A tot P_t met $s(t)$. Dit is de afgelegde weg tot aan tijdstip t .

De snelheid van het voorwerp op tijdstip t noemen we $v(t)$. Dan geldt er

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Met andere woorden, als we $s(t)$ kennen dan kunnen we de snelheid $v(t)$ berekenen door de afgeleide te nemen.

Neem nu aan dat we omgekeerd de snelheid $v(t)$ op elk tijdstip t kennen. Als we dan de afgelegde weg $s(t)$ zouden willen weten, dan vragen we naar een functie waarvan de afgeleide gelijk is aan $v(t)$.

De omgekeerde bewerking van differentiëren noemen we **primitiveren**. Het vinden van primitieven leidt tot het begrip van de **onbepaalde integraal**.

6.1.2 Oppervlakteberekening en bepaalde integraal

Neem aan dat het voorwerp op tijdstip t_A in A is en op tijdstip t_B in B .

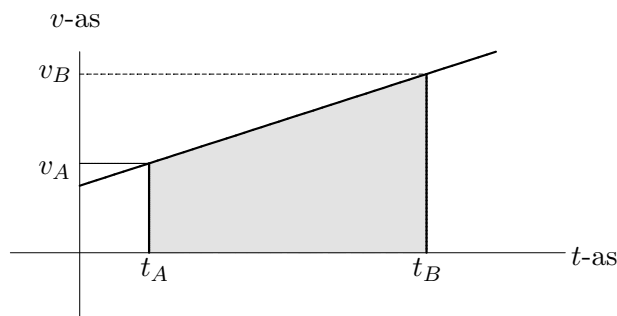
Er geldt dat de afgelegde weg (ofwel de lengte van de doorlopen kromme van A naar B) gelijk is aan

$$s = \bar{v} \cdot (t_B - t_A)$$

met \bar{v} de gemiddelde snelheid van het voorwerp tussen A en B . Bijgevolg heeft het probleem om s te vinden uit $v(t)$ te maken met het probleem om de **gemiddelde waarde** van een functie $v(t)$ te vinden.

Voor sommige functies is het eenvoudig om de gemiddelde waarde uit te rekenen. Als $v(t) = v_0$ constant is, dan geldt $\bar{v} = v_0$ en dan

$$s = v_0 \cdot (t_B - t_A).$$



Figuur 6.1: De afgelegde weg is gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek.

Als het voorwerp een constante versnelling ondergaat met een beginsnelheid v_A in A en een eindsnelheid v_B in B dan is de gemiddelde snelheid gelijk aan

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_A + v_B)$$

en de afgelegde weg is gelijk aan

$$s = \frac{1}{2}(v_A + v_B)(t_B - t_A).$$

Deze situatie wordt geïllustreerd in Figuur 6.1. De rechte is de grafiek van $v(t)$ als functie van t . In dit voorbeeld is het eenvoudig na te gaan dat de afgelegde weg s gelijk is aan de **oppervlakte** van het gebied dat aan de bovenkant begrensd wordt door de rechte, aan de onderkant door de t -as, en links en rechts door de verticale rechten $t = t_A$ en $t = t_B$.

Dit is een algemeen geldend resultaat: ook bij een algemener verloop van de snelheid is de afgelegde weg tussen twee tijdstippen t_A en t_B gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek van $v(t)$ tussen t_A en t_B . Dit resultaat staat bekend als de hoofdstelling van de integraalrekening. Het werd als eerste geformuleerd door Leibniz en Newton in de 17e eeuw. Zij legden daarmee de grondslagen van de differentiaal- en integraalrekening, en in feite van een groot deel van de moderne wiskunde.

Het bepalen van de oppervlakte onder de grafiek leidt tot het begrip van de **bepaalde integraal**.

6.2 De onbepaalde integraal

6.2.1 Definitie

Zij $y = f(x)$ een functie van x . Een **primitieve functie** F van f is een functie met de eigenschap dat

$$F'(x) = f(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Een primitieve functie is niet uniek bepaald. Als F een primitieve functie is en C is een constante, dan is $F(x) + C$ ook een primitieve functie.

Dit is in feite de enige vrijheid die we hebben bij het bepalen van een primitieve. Immers, als F en G twee primitieven van f zijn, dan geldt $F' = f$ en $G' = f$. Dan volgt

$$G'(x) = F'(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Vanwege Eigenschap 5.1.5 geldt dan inderdaad dat $G(x) = F(x) + C$ voor zekere constante C .

Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie 6.2.1. We definiëren de **onbepaalde integraal** van f door

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

waarin F een primitieve functie van f is en C een willekeurige constante.

Omdat $F(x) + C$ een willekeurige primitieve van f is, geldt er

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = \frac{d}{dx} [F(x) + C] = F'(x) = f(x).$$

Voorbeeld 6.2.2. (a) Omdat $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$ geldt

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

(b) Omdat $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ geldt

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

(c) Omdat $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ geldt

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

Omdat de logaritme $\ln x$ alleen gedefinieerd is voor $x > 0$ geldt bovenstaande regel voor de onbepaalde integraal alleen voor $x > 0$.

Voor $x < 0$ vinden we met de kettingregel

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \frac{d}{dx} (-x) = \frac{1}{x}.$$

Dus $\ln(-x)$ is een primitieve functie van $1/x$ als $x < 0$ en $\ln x$ is een primitieve functie van $1/x$ als $x > 0$. We kunnen dit samennemen door te zeggen dat $\ln|x|$ een primitieve functie van $1/x$, en dit is geldig voor alle x (behalve voor $x = 0$). Voor de onbepaalde integraal geldt dus

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

Zoals uit de voorbeelden blijkt, geeft elke regel die we kennen voor de afgeleide aanleiding tot een ‘omgekeerde regel’ voor onbepaalde integralen.

Onderstaande tabel bevat een lijst van de meest voorkomende standaardintegralen. Elk van de integralen kan gecontroleerd worden door de functie aan de rechterkant af te leiden.

$$\begin{aligned}\int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C && \text{als } \alpha \neq -1, \\ \int x^{-1} dx &= \ln |x| + C, \\ \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} + C, \\ \int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C, \\ \int \cos ax dx &= \frac{1}{a} \sin ax + C \\ \int \sin ax dx &= -\frac{1}{a} \cos ax + C \\ \int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{bgtan} \left(\frac{x}{a} \right) + C.\end{aligned}$$

In de laatste vijf integralen is steeds aangenomen dat $a \neq 0$.

Het opzoeken van primitieve functies in termen van elementaire functies is niet altijd eenvoudig en soms zelfs onmogelijk daar de primitieve functie van een elementaire functie zelf niet steeds een elementaire functie is. De integralen

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{en} \quad \int e^{-x^2} dx$$

zijn voorbeelden van integralen die niet geschreven kunnen worden met elementaire transcendente functies.

6.2.2 Rekenregels

Twee eenvoudige rekenregels zijn

- (a) Voor een veelvoud cf van een functie geldt

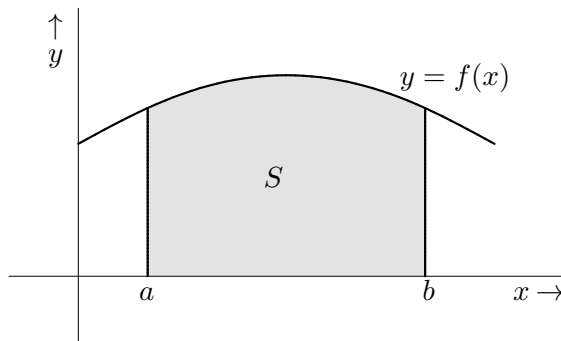
$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

- (b) Voor de som $f + g$ van twee functies geldt

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Uit (a) en (b) volgt dat de onbepaalde integraal van een lineaire combinatie van functies

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \dots$$



Figuur 6.2: Oppervlakte S onder de grafiek van een functie $y = f(x)$.

geschreven kan worden als een lineaire combinaties van onbepaalde integralen

$$\int f(x) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + c_3 \int f_3(x) dx + \dots$$

Voorbeeld 6.2.3.

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 3 \sin x - e^{-x}) dx &= 3 \int x^2 dx - 3 \int \sin x dx - \int e^{-x} dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot (-\cos x) - (-e^{-x}) + C \\ &= x^3 + 3 \cos x + e^{-x} + C. \end{aligned}$$

6.3 De bepaalde integraal

6.3.1 Oppervlakte onder de grafiek

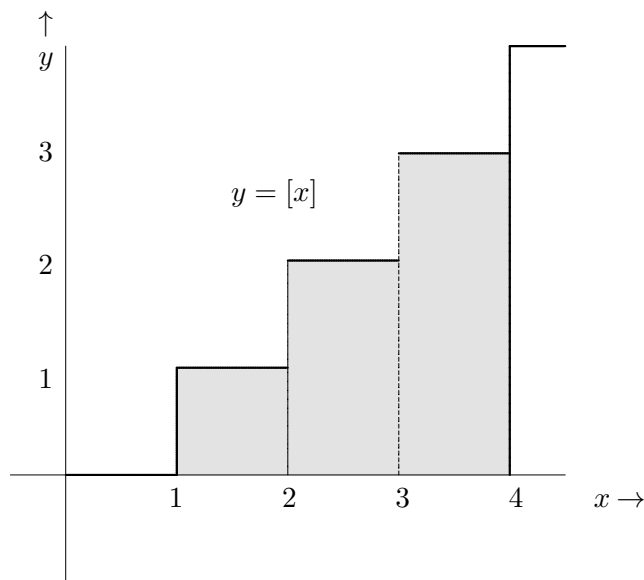
We voeren de bepaalde integraal in als de oppervlakte onder de grafiek van een functie.

Beschouw een functie $y = f(x)$ tussen twee waarden $x = a$ en $x = b$ als in Figuur 6.2. Neem aan dat $f(x) > 0$ voor $x \in [a, b]$ en dat f continu is, zodat de grafiek van f een ononderbroken kromme is. Dan omsluiten de grafiek van f , de verticale rechten $x = a$ en $x = b$ en de x -as samen een twee-dimensionaal gebied. De oppervlakte S van dat gebied is de ‘oppervlakte onder de grafiek van f ’ tussen $x = a$ en $x = b$.

Definitie 6.3.1. Neem aan dat $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$. Dan is de bepaalde integraal van f over $[a, b]$ gelijk aan

$$\int_a^b f(x) dx = S$$

waarin S de oppervlakte is van het gebied omsloten door de grafiek van f , de verticale rechten $x = a$ en $x = b$ en de x -as.



Figuur 6.3: Oppervlakte onder de grafiek van de entierfunctie $y = [x]$.

Bij deze definitie nemen we aan dat we weten wat oppervlakte is. Voor veel gevallen is een intuïtief begrip van het begrip oppervlakte voldoende. In paragraaf 6.6 gaan we er iets nader op in.

In de notatie van de bepaalde integraal is x de integratieveranderlijke. Het is een dummy veranderlijke, die geen eigen betekenis heeft. Ze mag vervangen worden door een ander symbool zonder dat de betekenis verandert. We kunnen dus ook schrijven

$$S = \int_a^b f(t) dt, \quad \text{of} \quad S = \int_a^b f(\xi) d\xi,$$

waarbij we x achtereenvolgens vervangen hebben door t en ξ . We moeten er wel voor zorgen dat de integratieveranderlijke niet al met een andere betekenis voorkomt. We kunnen bv. b niet als integratieveranderlijke gebruiken.

Voorbeeld 6.3.2. De grafiek van de functie $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, is een halve cirkelboog rond de oorsprong met straal r .

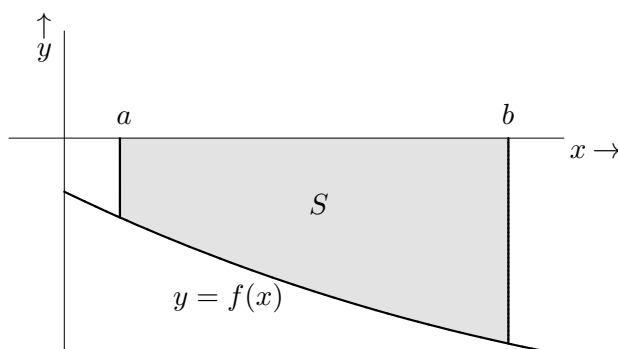
De oppervlakte onder de grafiek is dus de oppervlakte van een halve cirkel met straal r . De oppervlakte van een hele cirkel met straal r is zoals bekend πr^2 . Bijgevolg geldt

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Voorbeeld 6.3.3. De ‘entierfunctie’ $[x]$ is gelijk aan

$$[x] = n \quad \text{als } n \leq x < n + 1 \text{ met } n \in \mathbb{Z}.$$

M.a.w. $[x]$ is het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x .



Figuur 6.4: Oppervlakte S boven de grafiek van een negatieve functie $y = f(x)$.

Het gebied onder de grafiek van $y = [x]$ tussen $x = 1$ en $x = 4$ bestaat uit drie rechthoeken met totale oppervlakte $1 + 2 + 3 = 6$, zie Figuur 6.3. Dus

$$\int_1^4 [x] dx = 6.$$

6.3.2 Oppervlakte onder de x -as

Negatieve functie

In Definitie 6.3.1 is de bepaalde integraal ingevoerd voor positieve functies. Als $f(x) \leq 0$ voor $x \in [a, b]$, dan ligt de grafiek van f onder de x -as. In dat geval ligt het gebied dat omsloten wordt door de grafiek van f , de x -as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$ onder de x -as, zie Figuur 6.4.

Voor een negatieve functie definiëren we de bepaalde integraal als volgt.

Definitie 6.3.4. Neem aan dat $f(x) \leq 0$ voor $a \leq x \leq b$. Dan is de bepaalde integraal van f over $[a, b]$ gelijk aan

$$\int_a^b f(x) dx = -S$$

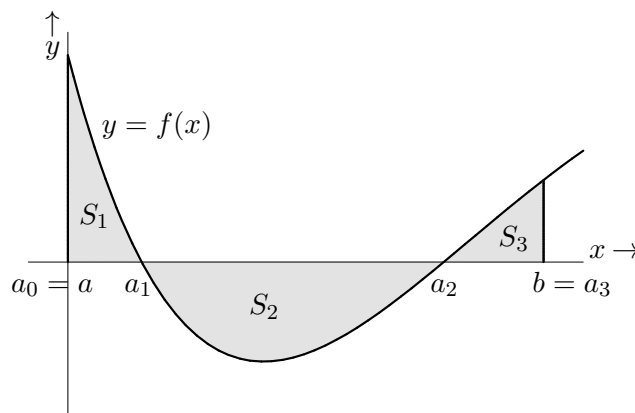
waarin S de oppervlakte is van het gebied omsloten door de grafiek van f , de verticale rechten $x = a$ en $x = b$ en de x -as.

De bepaalde integraal van een negatieve functie is altijd een negatief getal.

Functie die zowel positieve als negatieve waarden heeft

Voor een functie $y = f(x)$ die zowel positieve als negatieve waarden aanneemt in het interval $[a, b]$, delen we het interval op in een aantal deelintervallen waarop f ofwel positief ofwel negatief is. Als er n zulke deelintervallen zijn, dan worden deze intervallen bepaald door de eindpunten a_j met $j = 0, \dots, n$ waarbij

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$



Figuur 6.5: Oppervlakte tussen de grafiek van functie $y = f(x)$ en de x -as bij een functie die zowel positieve als negatieve waarden aanneemt.

Het j -de deelinterval is dan $[a_{j-1}, a_j]$. Omdat het deel van de grafiek van $y = f(x)$ met $x \in [a_{j-1}, a_j]$ ofwel geheel boven, ofwel geheel onder de x -as ligt, weten we wat we bedoelen met de bepaalde integraal

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) dx.$$

Als $f(x) \geq 0$ voor $x \in [a_{j-1}, a_j]$ dan zegt Definitie 6.3.1 dat

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) dx = S_j$$

waarin S_j de oppervlakte is van het gebied tussen de grafiek van f , de verticale rechten $x = a_{j-1}$ en $x = a_j$ en de x -as. Als $f(x) \leq 0$ voor $x \in [a_{j-1}, a_j]$ dan geldt volgens Definitie 6.3.4 dat

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) dx = -S_j.$$

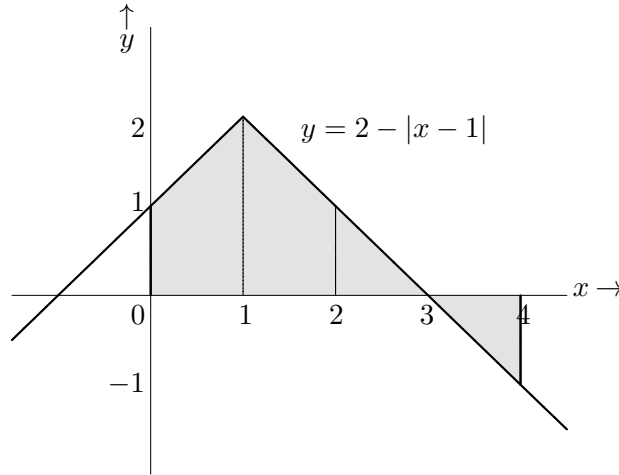
Zie Figuur 6.5 voor een voorbeeld met $n = 3$.

Definitie 6.3.5. Neem aan dat $y = f(x)$ zowel positieve als negatieve waarden aanneemt op het interval $[a, b]$. Als $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ zijn zoals hierboven beschreven dan geldt per definitie dat de bepaalde integraal van f over $[a, b]$ gelijk is aan

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) dx$$

Voor de functie uit Figuur 6.5 geldt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \int_{a_2}^b f(x) dx \\ &= S_1 - S_2 + S_3. \end{aligned}$$



Figuur 6.6: Grafiek van de functie $y = 2 - |x - 1|$.

Voorbeeld 6.3.6. We berekenen de integraal $\int_0^4 (2 - |x - 1|) dx$.

De functie $y = 2 - |x - 1|$ is positief voor $-1 < x < 3$ en negatief voor $x > 3$ en $x < -1$. Het gebied onder de grafiek van f tussen $x = 0$ en $x = 1$ is een vierhoek met oppervlakte $\frac{3}{2}$. Het gebied onder de grafiek tussen $x = 1$ en $x = 3$ is een rechthoekige driehoek met oppervlakte 2. Het gebied boven de grafiek van f tussen $x = 3$ en $x = 4$ is een driehoek met oppervlakte $\frac{1}{2}$. Zie Figuur 6.6.

Deze laatste oppervlakte telt negatief mee bij de berekening van de integraal. Er geldt

$$\int_0^4 (2 - |x - 1|) dx = \frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 3.$$

6.3.3 Rekenregels

Uit de definities volgen enkele eenvoudige eigenschappen en rekenregels die we zonder bewijs vermelden.

Lineariteit van de bepaalde integraal

Er geldt als c een constante is

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

en

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Meer algemeen geldt als

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \dots$$

dat

$$\int_a^b f(x) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + c_3 \int_a^b f_3(x) dx + \dots$$

Splitsen van het integratie-interval

Als $a < c < b$ dan geldt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (6.3.1)$$

Dit is juist omdat de oppervlakte onder de grafiek tussen $x = a$ en $x = b$ de som is van de oppervlakte tussen $x = a$ en $x = c$ met de oppervlakte tussen $x = c$ en $x = b$.

We komen soms onbepaalde integralen $\int_a^b \dots$ tegen waarin $a > b$. Hiermee bedoelen we het volgende:

Definitie 6.3.7. Als $a > b$ dan definiëren we

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

We stellen ook

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Met deze definities is de eigenschap (6.3.1) geldig voor alle a , b en c .

Symmetrische integralen

Een functie f met de eigenschap dat

$$f(-x) = f(x) \quad \text{voor alle } x$$

noemen we een **even** functie. De grafiek van een even functie is symmetrisch ten opzichte van de as $x = 0$ (de y -as). Voorbeelden van even functies zijn $1, x^2, x^4, e^{-|x|}, \cos x, \dots$

Een functie f met de eigenschap dat

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{voor alle } x$$

noemen we een **oneven** functie. De grafiek van een oneven functie is anti-symmetrisch ten opzichte van $x = 0$. Voorbeelden van oneven functies zijn $x, x^3, \sin x, \tan x, \operatorname{bgtan} x, \dots$

Het product van twee even functies of van twee oneven functies is even. Het product van een even functie en een oneven functie is oneven. Zo is bijvoorbeeld $x \cos x$ het product van de oneven functie x en de even functie $\cos x$. Dus $x \cos x$ is een oneven functie. Net zo is $x \sin x$ een even functie.

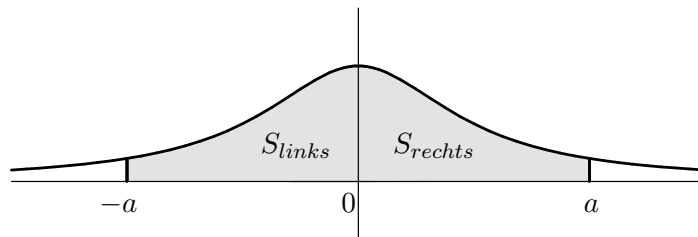
Van belang zijn integralen van even en oneven functies over een symmetrisch interval $[-a, a]$ rond 0, zie Figuren 6.7 en 6.8.

Eigenschap 6.3.8. Als f even is, dan geldt

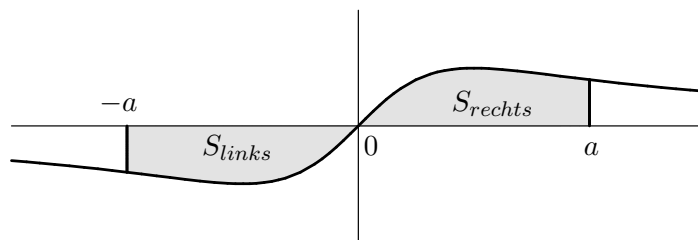
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (6.3.2)$$

Als f oneven is dan geldt

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (6.3.3)$$



Figuur 6.7: Integraal van een even functie over een symmetrisch interval rond 0. Er geldt $S_{links} = S_{rechts}$.



Figuur 6.8: Integraal van een oneven functie over een symmetrisch interval rond 0. Er geldt $S_{links} = -S_{rechts}$.

Bewijs. De oppervlakte die voorgesteld wordt door de integraal

$$S = \int_{-a}^a f(x) dx$$

is de som van de oppervlakten links en rechts van de y -as

$$S = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = S_{links} + S_{rechts}.$$

Als f een even functie is, dan zijn de oppervlakten S_{links} en S_{rechts} even groot en hebben hetzelfde teken. Bijgevolg is $S_{links} = S_{rechts}$ en (6.3.2) volgt als f even is.

Als f een oneven functie is, dan zijn de oppervlakten S_{links} en S_{rechts} even groot maar hebben verschillend teken. Dan is $S_{links} = -S_{rechts}$ en dus geldt (6.3.3) als f oneven is. \square

Een willekeurige functie is in het algemeen niet even en ook niet oneven. Een functie f die gedefinieerd is op een symmetrisch interval rond 0 kunnen we altijd wel schrijven als een som van een even functie f_{even} met een oneven f_{oneven}

$$f(x) = f_{even}(x) + f_{oneven}(x)$$

waarin

$$f_{even}(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$$

$$f_{oneven}(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

Een veelterm $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ kunnen we bijvoorbeeld schrijven als

$$\begin{aligned} f(x) &= [a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots] + [a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots] \\ &= f_{\text{even}}(x) + f_{\text{oneven}}(x) \end{aligned}$$

waarbij f_{even} alleen de termen heeft met een even macht van x en f_{oneven} alleen de termen met een oneven macht van x .

Voor een integraal over een symmetrisch interval geldt nu dat

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a f_{\text{even}}(x) dx + \int_{-a}^a f_{\text{oneven}}(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f_{\text{even}}(x) dx \end{aligned}$$

waarbij dus alleen het even deel van f een bijdrage geeft aan de integraal.

Voorbeeld 6.3.9. Voor $f(x) = e^x$ geldt

$$\begin{aligned} f_{\text{even}}(x) &= \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}] = \cosh x \\ f_{\text{oneven}}(x) &= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}] = \sinh x \end{aligned}$$

en

$$f(x) = \cosh x + \sinh x.$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a e^x dx &= \int_{-a}^a \cosh x dx + \int_{-a}^a \sinh x dx \\ &= 2 \int_0^a \cosh x dx \end{aligned}$$

6.4 Hoofdstelling van de integraalrekening

6.4.1 Eerste vorm van de hoofdstelling

De hoofdstelling van de integraalrekening geeft het verband tussen bepaalde integralen en primitieve functies. De eerste vorm van de hoofdstelling luidt als volgt.

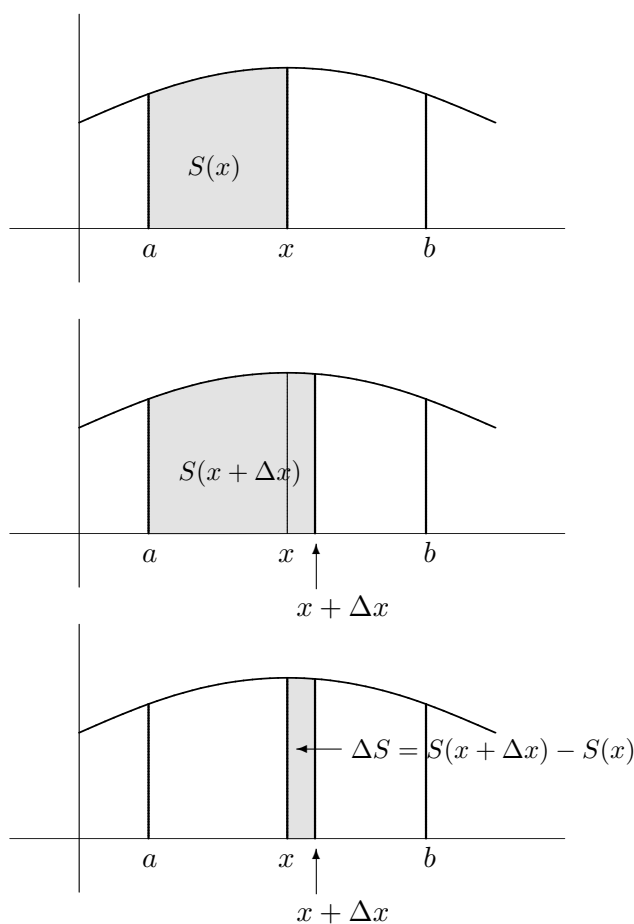
Stelling 6.4.1. *Neem aan dat f een continue functie is op het interval $[a, b]$. Dan is de functie*

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt \quad x \in [a, b]$$

een primitieve functie van f op $[a, b]$.

Dat wil zeggen

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \text{voor alle } x \in [a, b]. \quad (6.4.1)$$



Figuur 6.9: Illustratie bij het bewijs van de hoofdstelling.

Voor het bewijs nemen we aan dat f positief is. We benadrukken echter dat de stelling juist is voor elke continue functie, ook als f negatief is.

Bewijs. Neem x tussen a en b . We nemen aan dat f positief is en we beschouwen de oppervlakte onder de grafiek van f tussen a en x . Deze oppervlakte hangt af van x en we noteren ze met $S(x)$. Vanwege de definitie van bepaalde integraal geldt

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Merk op dat we t als integratieveranderlijke gebruiken. We kunnen x niet gebruiken omdat x al voorkomt in de bovengrens van de integraal.

Stel dat x een klein beetje verandert, zeg met Δx . Dan is

$$S(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt$$

gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek van f tussen a en $x + \Delta x$. Zie ook Figuur 6.9.

Het verschil $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$ is dan gelijk aan de oppervlakte onder

de grafiek van f tussen x en $x + \Delta x$. Dus

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Omdat Δx klein is, is ΔS de oppervlakte van een smal staafje met breedte Δx en met een hoogte die in het algemeen niet constant is. maar niet veel zal variëren als Δx klein is. Er geldt dat

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \text{gemiddelde waarde van } f \text{ over } [x, x + \Delta x].$$

Voor kleine Δx is de gemiddelde waarde van f over $[x, x + \Delta x]$ bij benadering gelijk aan $f(x)$. Dit is een gevolg van de continuïteit van f . Als Δx naar 0 gaat wordt de benadering steeds beter, en er geldt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Dit betekent vanwege de definitie van afgeleide, dat S afleidbaar is met afgeleide

$$\frac{dS}{dx} = f(x).$$

Dit is precies (6.4.1). □

6.4.2 Tweede vorm van de hoofdstelling

De tweede vorm van de hoofdstelling luidt als volgt.

Stelling 6.4.2. *Neem aan dat f continu op $[a, b]$ is en dat F een primitieve functie van f is. Dan geldt*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \tag{6.4.2}$$

Bewijs. We gebruiken de functie

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

waarvan we vanwege Stelling 6.4.1 weten dat het een primitieve functie van f is. Er geldt dus dat $F'(x) = S'(x)$ voor alle $x \in [a, b]$ zodat

$$F(x) = S(x) + C \quad \text{voor alle } x \in [a, b]$$

voor zekere constante C . Dan geldt

$$F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a)$$

Omdat $S(a) = 0$ volgt dan

$$F(b) - F(a) = S(b) = \int_a^b f(t) dt$$

en hiermee is de stelling bewezen. □

Het verschil $F(b) - F(a)$ van twee functiewaarden wordt vaak genoteerd met

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Deze notatie is handig om te gebruiken in concrete berekeningen. Met de hoofdstelling van de integraalrekening kunnen veel bepaalde integralen eenvoudig berekend worden.

Voorbeeld 6.4.3. (a) Omdat $x^2 + 3x$ een primitieve functie van $2x + 3$ is geldt

$$\int_a^b (2x + 3) dx = [x^2 + 3x]_a^b = (b^2 + 3b) - (a^2 + 3a)$$

(b) De oppervlakte onder de parabool $y = x^2$ tussen de waarden $x = 1$ en $x = 4$ is

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

(c) De oppervlakte onder de grafiek van $y = \sin \theta$ tussen de twee nulpunten $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ is

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \theta d\theta &= [-\cos \theta]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos 0) \\ &= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

6.4.3 Veranderlijke grenzen

De eerste vorm van de hoofdstelling van de integraalrekening geeft ons de afgeleide van de functie

$$\int_a^x f(t) dt$$

Hierin is de bovengrens een functie van x . Als de grenzen op meer algemene wijze van x afhangen geldt het volgende resultaat:

Stelling 6.4.4. *Neem aan dat de grenzen $a(x)$ en $b(x)$ afleidbare functies zijn van x . Dan geldt voor een continue functie f dat,*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x)) \frac{db}{dx} - f(a(x)) \frac{da}{dx}.$$

Bewijs. Stel F is een primitieve functie van f . Dan geldt

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = F(b(x)) - F(a(x)).$$

De rechterkant leiden we af met de kettingregel

$$\frac{d}{dx} [F(b(x)) - F(a(x))] = F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x)$$

Omdat $F' = f$ volgt het gestelde. □

Voorbeeld 6.4.5. Bereken de afgeleide van

$$I(x) = \int_{-x}^{3x^2} e^t dt.$$

Hier is $a(x) = -x$ en $b(x) = 3x^2$ zodat

$$\frac{dI}{dx} = e^{3x^2} \cdot 6x - e^{-x} \cdot (-1) = 6xe^{3x^2} + e^{-x}.$$

6.4.4 Gemiddelde waarde van een functie

De gemiddelde waarde van een functie $y = f(x)$ over het interval $[a, b]$ is gelijk aan

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Voorbeeld 6.4.6. De gemiddelde waarde van $\sin \theta$ over het interval $\theta \in [0, \pi]$ is gelijk aan

$$\overline{\sin \theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi}.$$

De gemiddelde waarde van $\sin \theta$ over het interval $\theta \in [0, 2\pi]$ is

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0.$$

6.5 Oneigenlijke integralen

Een bepaalde integraal is **oneigenlijk** als de functie oneindig wordt in een punt van het integratie-interval of als het integratie-interval niet begrensd is. De integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^a \frac{dx}{a-x}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{en} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2},$$

zijn oneigenlijke integralen. In de eerste twee gevallen is de integrand niet begrensd in $x = 0$. In het derde geval is de integrand niet begrensd bij $x = a$. In de laatste twee gevallen is het integratie-interval niet begrensd.

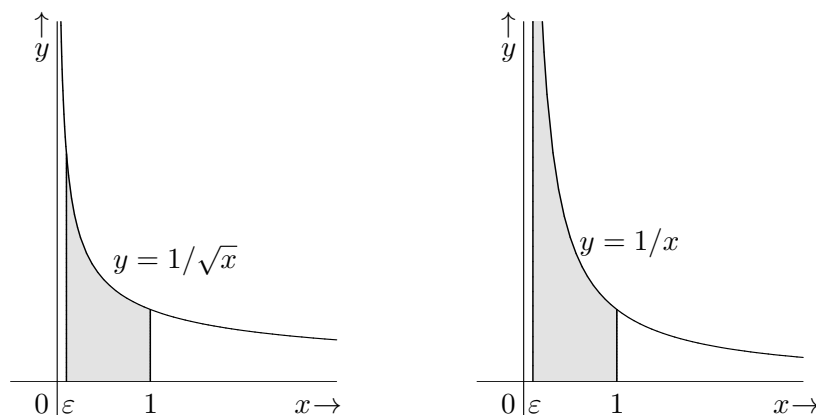
6.5.1 Oneindige functie

Als de functie f oneindig wordt in het punt $x = a$, dan stellen we

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

waarbij we veronderstellen dat de limiet bestaat. Het symbool $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+}$ duidt aan dat we ε naar 0 laten gaan met $\varepsilon > 0$. Zo'n soort limiet heet een **rechterlimiet**.

Als de limiet bestaat (en een eindig getal is) dan zeggen we dat de oneigenlijke integraal **convergent** is. Als de limiet niet bestaat (of oneindig is) dan is de oneigenlijke integraal **divergent**.



Figuur 6.10: Oneigenlijke integraal van de functies $y = 1/\sqrt{x}$ (links) en $y = 1/x$ (rechts). Als $\varepsilon \rightarrow 0+$ dan blijft de oppervlakte onder de grafiek van $1/\sqrt{x}$ begrensd, maar de oppervlakte onder de grafiek van $1/x$ is onbegrensd.

Voorbeeld 6.5.1. De functie $1/\sqrt{x}$ wordt oneindig bij $x = 0$. Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} dx = \left[2x^{1/2} \right]_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\varepsilon^{1/2}.$$

Als $\varepsilon \rightarrow 0$ dan ook $\varepsilon^{1/2} \rightarrow 0$ en er volgt

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

De oneigenlijke integraal is convergent, zie ook de linkergrafiek in Figuur 6.10.

Voorbeeld 6.5.2. De oneigenlijk integraal $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ is divergent. We hebben namelijk voor $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_{\varepsilon}^1 = -\ln \varepsilon,$$

en

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\ln \varepsilon) = +\infty.$$

Zie de rechtergrafiek in Figuur 6.10.

Voorbeeld 6.5.3. Voor algemene a geldt (met $a \neq 1$)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a} \right]_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-a} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (1 - \varepsilon^{1-a}).$$

Voor $a < 1$ is $1 - a > 0$ en er geldt dat $\varepsilon^{1-a} \rightarrow 0$ als $\varepsilon \rightarrow 0+$. Dan is de limiet gelijk aan $1/(1-a)$. De oneigenlijke integraal is convergent in dat geval.

Als echter $a > 1$ dan is $1 - a < 0$ en zal $\varepsilon^{1-a} \rightarrow \infty$ als $\varepsilon \rightarrow 0+$. Dan is de oneigenlijke integraal divergent.

Als f niet begrensd is bij $x = b$, dan definiëren we analoog

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Als f niet begrensd is bij $x = c$ met $a < c < b$, splits dan eerst de integraal

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

en onderzoek de convergentie of divergentie van de twee integralen afzonderlijk.

Voorbeeld 6.5.4. We beschouwen $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$.

Als we zonder nadenken de integraal zouden berekenen door de functie te primitiveren, dan vinden we

$$I = [\ln |x|]_{-1}^1 = 0 - 0 = 0.$$

Dit is echter niet juist omdat de functie $1/x$ oneindig wordt bij $x = 0$ en $x = 0$ behoort tot het integratie-interval.

We moeten de integraal splitsen

$$I = I_1 + I_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

en de twee oneigenlijke integralen I_1 en I_2 afzonderlijk beschouwen. In Voorbeeld 6.5.2 hebben we al gezien dat de oneigenlijke integraal

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

divergent is. Bijgevolg is I ook divergent.

6.5.2 Oneindige intervallen

In veel toepassingen komen integralen voor over oneindige intervallen. Dit zijn integralen waarin minstens één van de integratiegrenzen oneindig is.

Als de bovengrens oneindig is, dan stellen we

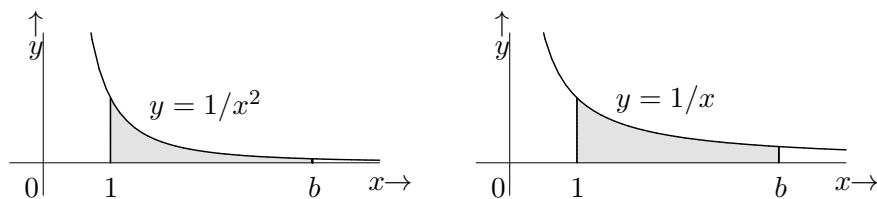
$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

indien de limiet bestaat. In dat geval zeggen we ook dat de oneigenlijke integraal **convergent** is. Als de limiet niet bestaat (of oneindig is) is de oneigenlijke integraal **divergent**.

Voorbeeld 6.5.5. We berekenen $\int_0^\infty e^{-x} dx$.

Voor elke $b > 0$ geldt

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} + 1.$$



Figuur 6.11: De oneigenlijke integraal $\int_1^\infty (1/x^2) dx$ is convergent (figuur links) en de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty (1/x) dx$ is divergent (rechts).

Als $b \rightarrow \infty$, dan $e^{-b} \rightarrow 0$ en dus

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

De oneigenlijke integraal is convergent.

Voorbeeld 6.5.6. We onderzoeken de convergentie van $I_p = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$.

Een primitieve van $1/x^p = x^{-p}$ is $1/(1-p)x^{1-p}$ (als $p \neq 1$) zodat

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^b = \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1).$$

Voor $p < 1$ is $1-p > 0$ en dan geldt dat $b^{1-p} \rightarrow \infty$ als $b \rightarrow \infty$. De oneigenlijk integraal is dan divergent. Voor $p > 1$ geldt dat $b^{1-p} \rightarrow 0$ als $b \rightarrow \infty$. De integraal is dan convergent en

$$I_p = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} \quad \text{als } p > 1.$$

Het geval $p = 1$ moet apart onderzocht worden, omdat de primitieve dan gegeven wordt door de logaritme. Het blijkt dat de oneigenlijke integraal dan divergent is.

Zie Figuur 6.11 voor een illustratie voor de gevallen $p = 2$ en $p = 1$.

Voorbeeld 6.5.7. We berekenen de waarde van de oneigenlijke integraal

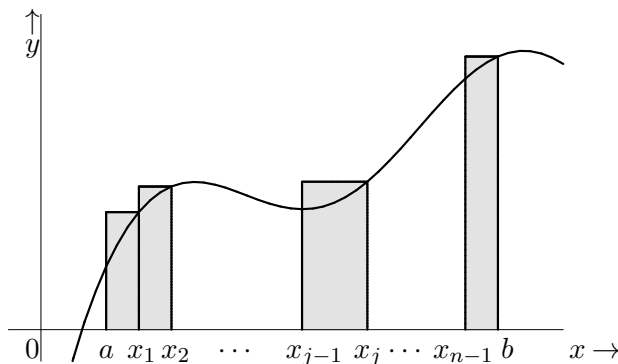
$$I = \int_3^\infty \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$$

Schrijf de integrand eerst als een som van partieelbreuken

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Elke term afzonderlijk kunnen we integreren en voor $b > 3$ vinden we

$$\begin{aligned} \int_3^b \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx &= [\ln|x-2| - \ln|x-1|]_3^b \\ &= \ln(b-2) - \ln(b-1) - \ln 1 + \ln 2. \end{aligned}$$



Figuur 6.12: Riemann-som als oppervlakte van rechthoeken. De bovensom krijgen we als we steeds de grootste waarde van $y = f(x)$ op het deelinterval $[x_{j-1}, x_j]$ als hoogte van de rechthoeken nemen.

Om hierin de limiet $b \rightarrow \infty$ te kunnen nemen, nemen we eerst de logaritmen samen

$$\ln(b-2) - \ln(b-1) = \ln \frac{b-2}{b-1}.$$

Dan zien we

$$\int_3^\infty \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{b-2}{b-1} + \ln 2 = \ln 2.$$

De oneigenlijke integraal is convergent.

6.6 De Riemann-integraal

In deze paragraaf gaan we dieper in op de vraag wat we bedoelen met ‘de oppervlakte onder de grafiek van f ’.

6.6.1 Integraal als limiet van Riemann-sommen

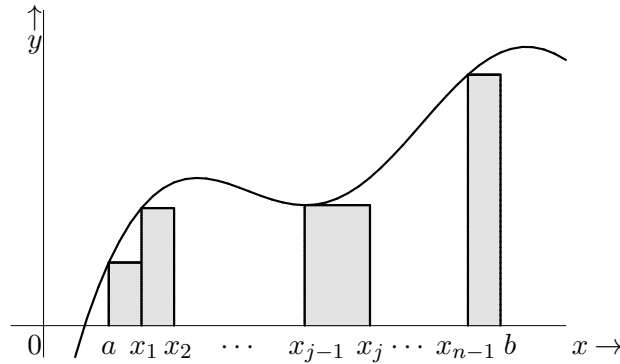
Beschouw een positieve continue functie $y = f(x)$ op het interval $a \leq x \leq b$. Om een benadering voor de oppervlakte te vinden, verdelen we het interval in n deelintervallen. We doen dit door $n+1$ punten x_0, x_1, \dots, x_n te kiezen met

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (6.6.1)$$

Dit levert de n deelintervallen $[x_{j-1}, x_j]$ met $j = 1, \dots, n$. Boven elk deelinterval bevindt zich een verticale strip die van boven begrensd wordt door de grafiek van f .

We benaderen de oppervlakte onder de grafiek door elke verticale strip te vervangen door een rechthoek. De breedte van de j de rechthoek is

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$



Figuur 6.13: Riemann-som als oppervlakte van rechthoeken. De ondersom krijgen we als we steeds de kleinste waarde van $y = f(x)$ op het deelinterval $[x_{j-1}, x_j]$ als hoogte van de rechthoeken nemen.

en voor de hoogte y_j kiezen we een waarde van de functie f in de strip. Dan is de oppervlakte van de j de rechthoek gelijk aan

$$\Delta S_j = y_j \Delta x_j$$

en de totale oppervlakte van alle rechthoeken samen is

$$\sum_{j=1}^n \Delta S_j = \sum_{j=1}^n y_j \Delta x_j. \quad (6.6.2)$$

Deze som noemen we een **Riemann-som**.

Twee bijzondere manieren om de hoogtes van de rechthoeken te bepalen is door steeds de grootste waarde of steeds de kleinste waarde van $y = f(x)$ in het deelinterval te kiezen. Noem de grootste waarde $y_{j,max}$ en de kleinste waarde $y_{j,min}$. De bijbehorende Riemann-sommen noemen we de **bovensom** en de **ondersom** van de functie f behorende bij de gekozen punten (6.6.1). De bovensom is duidelijk een overschatting en de ondersom is een onderschatting van de echte oppervlakte onder de grafiek van f :

$$\sum_{j=1}^n y_{j,min} \Delta x_j \leq S \leq \sum_{j=1}^n y_{j,max} \Delta x_j. \quad (6.6.3)$$

Zie Figuren 6.12 en 6.13.

Als we de maximale breedte $\max_j \Delta x_j$ van de strips kleiner maken door het aantal deelintervallen te laten toenemen, dan zullen de waarden van $y_{j,min}$ en $y_{j,max}$ dichter bij elkaar komen (dit is zo omdat de functie continu is). De twee sommen in (6.6.3) convergeren naar dezelfde limiet en deze limiet is wat we bedoelen met de oppervlakte onder de grafiek. De oppervlakte S is de limiet van de bovensommen en van de ondersommen van de functie.

Voor een willekeurige Riemann-som (6.6.2) geldt

$$y_{j,min} \leq y_j \leq y_{j,max} \quad \text{voor alle } j \quad (6.6.4)$$

en dus ook

$$\sum_{j=1}^n y_{j,\min} \Delta x_j \leq \sum_{j=1}^n y_j \Delta x_j \leq \sum_{j=1}^n y_{j,\max} \Delta x_j.$$

Omdat zowel de bovensommen als de ondersommen naar S gaan als $n \rightarrow \infty$, zal ook gelden dat

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \Delta S_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n y_j \Delta x_j.$$

Met andere woorden, de oppervlakte onder de grafiek is (per definitie) de limiet van de Riemann-sommen. Het enige dat we eisen is dat (6.6.4) geldt en dat

$$\max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty. \quad (6.6.5)$$

Een mogelijke keuze is $y_j = f(x_j)$. In dat geval is de Riemann-som gelijk aan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x_j.$$

De notatie van de bepaalde integraal voor de limiet S is hierop gebaseerd

$$S = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x_j.$$

Onder de limiet (6.6.5) gaan de veranderingen Δx_j over in de infinitesimale verandering dx . Tevens gaat het somteken \sum over in het integraalteken \int dat te zien is als een soort uitgerekte S . De integraal is een som van oneindig veel infinitesimaal kleine grootheden.

Het integraalbegrip dat we hier hebben ingevoerd staat bekend als de **Riemann-integraal**.

6.6.2 Equidistante punten

Een speciaal geval is om de punten x_j in het interval $[a, b]$ op gelijke afstand van elkaar te kiezen. We stellen

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

en

$$x_j = a + j\Delta x \quad \text{voor } j = 0, 1, \dots, n.$$

Dan is inderdaad

$$\Delta x = \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

onafhankelijk van j .

Met deze keuze geldt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{j=1}^n f(a + j\Delta x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right)\end{aligned}$$

Deze limiet kan in sommige gevallen gebruikt worden om de integraal uit te rekenen.

Voorbeeld 6.6.1. We beschouwen $f(x) = x$ tussen $x = 0$ en $x = 1$.
Equidistante punten op het interval $[0, 1]$ zijn

$$x_j = \frac{j}{n}, \quad j = 0, \dots, n$$

met $\Delta x = \frac{1}{n}$. De Riemann-som is

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(j/n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j$$

We weten van Voorbeeld 1.5.6 dat

$$\sum_{j=1}^n j = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

zodat

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(j/n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Voor $n \rightarrow \infty$ convergeert dit naar $\frac{1}{2}$, zodat

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

De integraal is uiteraard veel eenvoudiger met behulp van de primitieve functie te berekenen:

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

We kunnen sommige limieten uitrekenen door ze te interpreteren als limieten van Riemann-sommen.

Voorbeeld 6.6.2. Bereken de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} (1^p + 2^p + \dots + n^p)$$

met $p \geq 0$ een vast getal.

Er wordt gevraagd naar de limiet van

$$\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^p + \left(\frac{2}{n} \right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^p \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \right)^p$$

Dit is een Riemann-som voor de functie $f(x) = x^p$ op het interval $[0, 1]$ met equidistante punten $x_j = j/n$, $j = 1, \dots, n$. De limiet hiervan voor $n \rightarrow \infty$ is gelijk aan de bepaalde integraal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \right)^p = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

6.6.3 Trapeziumregel

De Riemann-som uit de vorige paragraaf

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j), \quad x_j = a + j \frac{b-a}{n}$$

is gebaseerd op de keuze $y_j = f(x_j)$: dit is de waarde van f in het rechter-eindpunt van het interval $[x_{j-1}, x_j]$. Deze methode wordt daarom ook wel de **rechtereindpuntregel** genoemd om de integraal $\int_a^b f(x) dx$ te benaderen.

Net zo hadden we $y_j = f(x_{j-1})$ kunnen nemen. De Riemann-som

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})$$

is de **linkereindpuntregel**.

Een betere benadering voor de integraal krijgen we door

$$y_j = \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}$$

te nemen. De bijbehorende Riemann-som kunnen we herschrijven tot

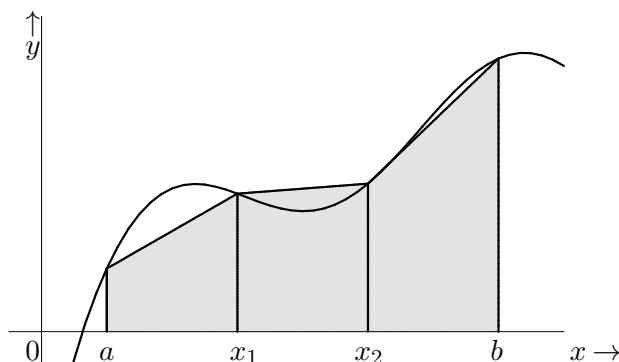
$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} \\ = \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

Dit is de **trapeziumregel** T_n voor de benadering van de bepaalde integraal.

De naam trapeziumregel komt van het feit dat voor positieve functies f de uitdrukking

$$\frac{b-a}{2n} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

gelijk is aan de oppervlakte van een trapezium met hoekpunten $(x_{j-1}, 0)$, $(x_j, 0)$, $(x_j, f(x_j))$ en $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$. Men kan de trapeziumregel ook zien als een



Figuur 6.14: De trapeziumregel T_n met $n = 3$ voor het benaderen van de integraal $\int_a^b f(x) dx$.

benadering van de oppervlakte onder de grafiek door middel van oppervlakten van trapezia, zoals geïllustreerd wordt in Figuur 6.14.

We geven zonder bewijs een stelling over de fout die gemaakt wordt als we de bepaalde integraal $\int_a^b f(x) dx$ benaderen met de trapeziumregel

$$T_n = \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

waarin $x_j = a + j \frac{b-a}{n}$ voor $j = 0, \dots, n$.

Stelling 6.6.3. *Neem aan dat f twee maal afleidbaar is op $[a, b]$ en dat M zodanig is dat*

$$|f''(x)| \leq M, \quad \text{voor alle } x \in [a, b]. \quad (6.6.7)$$

Dan geldt

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \quad (6.6.8)$$

Voorbeeld 6.6.4. We willen $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ benaderen met de trapeziumregel met een fout die kleiner is dan $\varepsilon = 10^{-2}$.

Hier geldt $a = 0$, $b = 1$ en

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2} \\ f'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ f''(x) &= (-2 + 4x^2)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

We zoeken een waarde voor M die voldoet aan (6.6.7). Er geldt dat

$$0 \leq e^{-x^2} \leq 1$$

en $-2 + 4x^2$ stijgt van -2 bij $x = 0$ tot $+2$ bij $x = 1$, zodat

$$|-2 + 4x^2| \leq 2 \quad \text{voor alle } 0 \leq x \leq 1.$$

Bijgevolg geldt

$$|f''(x)| = |-2 + 4x^2| \cdot e^{-x^2} \leq 2 \cdot 1 = 2$$

voor alle $x \in [0, 1]$. We kunnen dus $M = 2$ nemen in (6.6.8) en er volgt dat

$$|I - T_n| \leq \frac{2 \cdot (1 - 0)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

De waarde $1/(6n^2)$ is dus een bovengrens voor de fout. Het kan zijn dat de echte fout kleiner is, maar we weten zeker dat de fout niet groter is dan $1/(6n^2)$. De vraag is nu hoe groot we n moeten nemen opdat we zeker zijn dat de fout kleiner is dan $\varepsilon = 10^{-2}$.

Als we $1/(6n^2)$ berekenen voor een aantal waarden van n krijgen we de volgende tabel.

| n | $1/(6n^2)$ |
|-----|-----------------------|
| 1 | $1/6 = 0,17 \dots$ |
| 2 | $1/24 = 0,042 \dots$ |
| 3 | $1/54 = 0,019 \dots$ |
| 4 | $1/96 = 0,0104 \dots$ |
| 5 | $1/150 = 0,007 \dots$ |

Hieruit zien we dat voor $n = 5$ geldt dat $1/(6n^2) = 0,007 \dots < 10^{-2}$. Als we dus de trapeziumregel T_n nemen met $n = 5$ dan zijn we zeker dat de fout kleiner is dan 10^{-2} .

De formule voor T_5 is (met $a = 0$, $b = 1$)

$$T_5 = \frac{1}{10} \left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{5}\right) + 2f\left(\frac{2}{5}\right) + 2f\left(\frac{3}{5}\right) + 2f\left(\frac{4}{5}\right) + f(1) \right].$$

We berekenen de functiewaarden met drie decimale cijfers

$$\begin{aligned} T_5 &= \frac{1}{10} [1,000 + 2 \cdot 0,961 + 2 \cdot 0,852 + 2 \cdot 0,698 + 2 \cdot 0,527 + 0,368] \\ &= 0,7444 \end{aligned}$$

hetgeen inderdaad minder dan 10^{-2} verschilt van de echte waarde

$$I = 0,7468241330 \dots$$

6.7 Oefeningen

Oefening 6.1. Bereken de volgende onbepaalde integralen. Als de integraal, naast de integratieveranderlijke, nog een andere veranderlijke bevat, beschouw die andere veranderlijke dan als een constante.

- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) $\int dx$ | (e) $\int e^{-cx} dx$ |
| (b) $\int (e^x + 2 \cos x) dx$ | (f) $\int (5s^4 + 2t + 3) ds$ |
| (c) $\int (t^{-2/3} + \sin at) dt$ | (g) $\int (5s^4 + 2t + 3) dt$ |
| (d) $\int \frac{dt}{bt - 1}$ | (h) $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2} dx$ |

Oefening 6.2. Bereken de volgende bepaalde integralen.

- | | |
|----------------------------------|--|
| (a) $\int_{-1}^2 x dx$ | (e) $\int_{-1}^2 (x + 1 - x) dx$ |
| (b) $\int_{-1}^1 \sqrt{ x } dx$ | (f) $\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\theta \quad \text{met } n \in \mathbb{N}$ |
| (c) $\int_a^{2a} \frac{1}{t} dt$ | (g) $\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) d\theta \quad \text{met } n \in \mathbb{N}$ |

Oefening 6.3. Bereken

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|
| (a) $\int_0^3 [x] dx$ | (b) $\int_0^3 [x^2] dx$ | (c) $\int_0^3 [x]^2 dx$ |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|

waarin $[x]$ de entierfunctie is, zie Voorbeeld 6.3.3.

Oefening 6.4. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de kromme $y = f(x)$, de x -as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$:

- | |
|---|
| (a) $f(x) = \cos x \quad \text{met } a = 0 \text{ en } b = \frac{3\pi}{2}.$ |
| (b) $f(x) = x^3 \quad \text{met } a = 1 \text{ en } b = 5$ |
| (c) $f(x) = \sin x \quad \text{met } a = 0 \text{ en } b = 3\pi$ |

Oefening 6.5. Bepaal de snijpunten van de grafieken $y = f_1(x)$ en $y = f_2(x)$ en bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de twee grafieken als:

- | |
|---|
| (a) $f_1(x) = x^2 \quad \text{en} \quad f_2(x) = \sqrt{x}$ |
| (b) $f_1(x) = 5x \quad \text{en} \quad f_2(x) = x^3 - 4x$ |
| (c) $f_1(x) = x \quad \text{en} \quad f_2(x) = x^2 - 2$ |
| (d) $f_1(x) = \sin x \quad \text{en} \quad f_2(x) = \cos x \quad \text{met } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ |

Oefening 6.6. Schets de twee krommen \mathcal{K}_1 en \mathcal{K}_2 in het xy -vlak en bereken de oppervlakte van het gebied dat door hen begrensd wordt:

(a) $\mathcal{K}_1 : x + y = 1$ en $\mathcal{K}_2 : x = y^2$ met $x, y \geq 0$

(b) $\mathcal{K}_1 : x^2 + y^2 = 2$ en $\mathcal{K}_2 : y = x^2$

Oefening 6.7. Welke van de volgende functies zijn even? Welke zijn oneven?

(a) $f(x) = |x|$ (c) $f(x) = x \cos x$ (e) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (d) $f(x) = x \sin x$ (f) $f(x) = \operatorname{bgtan} x$

Oefening 6.8. Voor welke functies uit de vorige oefening geldt dat

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 0 \quad ?$$

Oefening 6.9. Bereken de afgeleide van de volgende functies

(a) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt$ (d) $f(x) = \int_{-x}^x \frac{1}{1+t} dt$

(b) $f(x) = \int_1^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$ (e) $f(x) = \int_0^{x^3} \sin(t^2) dt$

(c) $f(x) = \int_x^2 \frac{1}{t} dt$ (f) $f(x) = \int_x^{4x} \frac{1}{t} dt$

Oefening 6.10. Bereken de lokale maxima en minima van de functie

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Oefening 6.11. Bereken de Taylorveelterm rond $x = 0$ van graad 4 voor de volgende functies

(a) $\int_0^x e^{-t^2} dt$ (b) $\int_0^x \ln(1+t) dt$

Oefening 6.12. Bereken $f(0)$, $f'(0)$ en $f''(0)$ voor de functie f gegeven door

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t^2 + 1} dt$$

Oefening 6.13. Laat zien dat

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

constant is voor $0 < x < \infty$. Wat is deze constante?

Oefening 6.14. Bereken

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x \sin t \, dt\right)^2}{x \int_0^x \sin(t^2) \, dt} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{2x} \sqrt{1+t^2} \, dt}{x^2}$$

Oefening 6.15. Bereken de gemiddelde waarde over de gegeven intervallen:

$$(a) 2x^2 + 3x + 4 \text{ over } [-1, 1] \qquad (b) e^{-ax} \text{ over } [0, a] \text{ met } a > 0.$$

Oefening 6.16. Bereken de oneigenlijke integralen

$$(a) \int_0^\infty e^{-3t} \, dt \qquad (c) \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)} \qquad (e) \int_0^1 x^{-1/3} \, dx$$

$$(b) \int_2^\infty \frac{dx}{x(x-1)} \qquad (d) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1} \, dy \qquad (f) \int_{-1}^2 \frac{1}{x} \, dx$$

Hint bij (b) en (c): $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

Oefening 6.17. (a) Laat zien dat $\frac{d}{dx}(x \ln x - x) = \ln x$

(b) Bereken

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

Oefening 6.18. Bepaal de ondersom en de bovensom voor de gegeven functie op het gegeven interval. Neem 4 deelintervallen en equidistante punten.

$$(a) f(x) = \frac{1}{x} \text{ op } [1, 2].$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ op } [-2, 0] \text{ met partitie } \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } x \leq 1 \\ 3-x & \text{text } x > 1 \end{cases} \text{ op } [0, 4].$$

Oefening 6.19. (a) Laat zien dat

$$\ln(n!) - n \ln n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}$$

(b) Leg uit dat

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}$$

te zien is als een bovensom voor de functie $\ln x$ op het interval $[0, 1]$.

(c) Wat is de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \ln(n!) - \ln n \right] \quad ?$$

Oefening 6.20. Bereken voor de gegeven functie f op het gegeven interval $[a, b]$ het volgende

1. de trapeziumregel T_n voor de gegeven waarde van n ,
2. de afschatting voor de integratiefout zoals gegeven in Stelling 6.6.3,
3. een waarde van n zodanig dat

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| < 10^{-5}.$$

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = 1 - x^2$, $[a, b] = [0, 1]$, $n = 8$, | (e) $f(x) = \sin x$, $[a, b] = [0, \pi]$, $n = 4$, |
| (b) $f(x) = x - x^2$, $[a, b] = [0, 1]$, $n = 8$, | (f) $f(x) = \cos x$, $[a, b] = [0, \pi]$, $n = 4$, |
| (c) $f(x) = x^2$, $[a, b] = [-1, 1]$, $n = 10$, | (g) $f(x) = x \sin x$, $[a, b] = [0, \pi]$, $n = 6$, |
| (d) $f(x) = x^3$, $[a, b] = [-1, 1]$, $n = 10$, | (h) $f(x) = x \cos x$, $[a, b] = [0, \pi]$, $n = 6$. |

Oefening 6.21. Bereken

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx$$

voor gehele getallen n en m .

Oefening 6.22. Omdat $\cos 2t = \operatorname{Re} e^{2it}$ geldt

$$\int_0^\infty e^{-t} \cos 2t dt = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-t} e^{2it} dt = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-t+2it} dt.$$

- (a) Gebruik dit om de integraal $\int_0^\infty e^{-t} \cos 2t dt$ te berekenen.
- (b) Bereken $\int_0^\infty e^{-t} \sin 2t dt$ op soortgelijke wijze.

Hoofdstuk 7

Toepassingen van integralen

In dit hoofdstuk geven we enkele voorbeelden van het gebruik van integralen.

7.1 Oppervlakte

In het vorige hoofdstuk is de bepaalde integraal ingevoerd als de oppervlakte onder de grafiek van een functie. Het is duidelijk dat de berekening van oppervlakten een belangrijke toepassing van integralen is. We geven nog enkele voorbeelden.

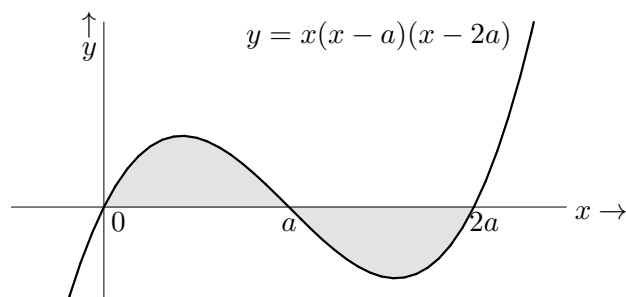
Voorbeeld 7.1.1. Neem $a > 0$ en bereken de oppervlakte van het gebied tussen de kromme $y = x(x - a)(x - 2a)$ en de x -as en tussen $x = 0$ en $x = 2a$.

De grafiek van $y = f(x) = x(x - a)(x - 2a)$ ziet u in Figuur 7.1. Omdat $f(x) \leq 0$ voor $x \in [a, 2a]$ en $f(x) \geq 0$ voor $x \in [0, a]$, geldt

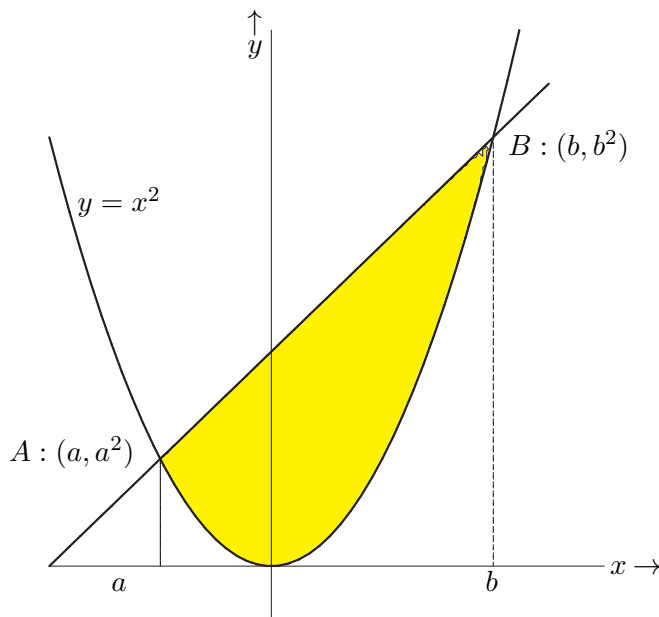
$$S = \int_0^{2a} |f(x)| \, dx = \int_0^a f(x) \, dx - \int_a^{2a} f(x) \, dx.$$

Nu is $f(x) = x(x - a)(x - 2a) = x^3 - 3ax^2 + 2a^2x$ en een primitieve functie voor $f(x)$ is $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - ax^3 + a^2x^2$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned} S &= [F(x)]_0^a - [F(x)]_a^{2a} = (F(a) - F(0)) - (F(2a) - F(a)) \\ &= 2F(a) - F(2a) - F(0). \end{aligned}$$



Figuur 7.1: De grafiek van de functie $y = x(x - a)(x - 2a)$ uit Voorbeeld 7.1.1.



Figuur 7.2: Het gebied begrensd door de kromme $y = x^2$ en de rechte door A en B . Illustratie bij Voorbeeld 7.1.2.

Aangezien $F(0) = 0$ en

$$F(a) = \frac{1}{4}a^4 - a \cdot a^3 + a^2 \cdot a^2 = \frac{1}{4}a^4$$

$$F(2a) = \frac{1}{4}(2a)^4 - a \cdot (2a)^3 + a^2 \cdot (2a)^2 = 4a^4 - 8a^4 + 4a^4 = 0$$

volgt

$$S = 2F(a) = \frac{1}{2}a^4.$$

Voorbeeld 7.1.2. Neem twee punten $A : (a, a^2)$ en $B : (b, b^2)$ op de parabool $y = x^2$, waarbij $a < b$. Bereken de oppervlakte van het gebied dat begrensd wordt door de rechte door A en B en de parabool $y = x^2$.

Zij $f(x) = x^2$ en zij $y = g(x)$ de vergelijking van de rechte door A en B . Dan is de gevraagde oppervlakte S gelijk aan

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

De bepaalde integraal van f is

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_a^b = \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \\ &= \frac{1}{3}(b-a)(b^2 + ab + a^2). \end{aligned}$$

De integraal van g is de oppervlakte van een trapezium met hoekpunten $(a, 0)$, $(b, 0)$, $B : (b, b^2)$ en $A : (a, a^2)$. De breedte van het trapezium is $b - a$ en de gemiddelde hoogte is $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Bijgevolg is

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(b - a).$$

De oppervlakte S is dus

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(b-a)(a^2+b^2) - \frac{1}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2) \\ &= \frac{1}{6}(b-a)(3a^2+3b^2-2b^2-2ab-2a^2) \\ &= \frac{1}{6}(b-a)(b^2-2ab+a^2) = \frac{1}{6}(b-a) \cdot (b-a)^2 \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3. \end{aligned}$$

Aan deze uitdrukking zien we duidelijk dat $S > 0$. We krijgen ook het (misschien verrassende) resultaat dat de oppervlakte alleen afhangt van het verschil $b-a$ tussen a en b , en niet van de precieze locatie van a en b .

In bovenstaande aanpak hebben we $\int_a^b g(x) dx$ uitgerekend zonder $g(x)$ eerst zelf uit te rekenen. Ga zelf na dat $g(x) = (a+b)x - ab$ en dat inderdaad

$$\int_a^b [(a+b)x - ab] dx = \frac{1}{2}(a^2+b^2)(b-a).$$

7.2 Lengte van een kromme

Bepaalde integralen kunnen ook gebruikt worden om de lengte van een kromme te bepalen.

Een kromme \mathcal{K} in het vlak kan gegeven worden als deel van een grafiek van een functie f

$$\mathcal{K} : y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

of door middel van een parametervergelijking

$$\mathcal{K} : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

waarbij x en y afhangen van een veranderlijke t . We berekenen de lengte van \mathcal{K} in beide gevallen.

7.2.1 Kromme $y = f(x)$

Om de lengte van de kromme

$$\mathcal{K} : y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

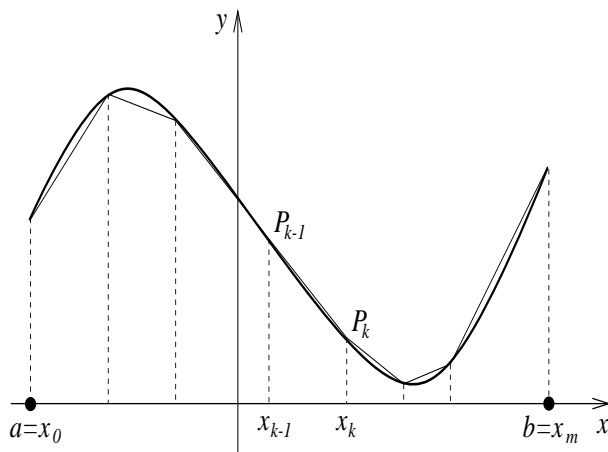
te bepalen, benaderen we de kromme door lijnstukken zoals aangegeven in Figuur 7.3 en we tellen de lengten van deze lijnstukken bij elkaar op.

We kiezen punten x_0, \dots, x_n in $[a, b]$ met

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Met het punt x_j correspondeert een punt $P_j(x_j, y_j)$, $y_j = f(x_j)$ op \mathcal{K} . De lengte van het lijnstuk tussen twee opeenvolgende punten P_{j-1} en P_j is

$$\begin{aligned} d(P_{j-1}, P_j) &= \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}\right)^2} \Delta x_j \end{aligned}$$



Figuur 7.3: Berekening van de lengte van de kromme \mathcal{K} die bepaald is als grafiek van f .

waarin $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ en $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. De totale som van de lengten van de n lijnstukken is bijgevolg

$$\sum_{j=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \right)^2} \Delta x_j. \quad (7.2.1)$$

Als we het aantal punten x_j laten toenemen, waarbij $\max_j \Delta x_j \rightarrow 0$, dan sluiten de lijnstukken steeds beter aan bij de kromme \mathcal{K} en wordt de lengte van \mathcal{K} steeds beter benaderd door de som (7.2.1). De lengte van \mathcal{K} is dus de limiet van de sommen (7.2.1) waarbij $n \rightarrow \infty$ en $\max_j \Delta x_j \rightarrow 0$.

In deze limiet geldt dat

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

en bijgevolg gaat de som (7.2.1) over in de bepaalde integraal

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (7.2.2)$$

De conclusie is dat de lengte van \mathcal{K} gegeven wordt door (7.2.2). Dit resultaat is geldig als f afleidbaar is met een continue afgeleide f' .

In veel gevallen zal de integraal (7.2.2) niet expliciet uitgerekend kunnen worden. We kunnen altijd wel een benadering vinden met behulp van de trapeziumregel.

Voorbeeld 7.2.1. Bereken de lengte van de kromme $y = e^x$ tussen $x = 1$ en $x = 2$.

De kromme is de grafiek van $y = f(x)$ met $f(x) = e^x$. Dan is $f'(x) = e^x$, zodat volgens (7.2.2) de lengte van de kromme gelijk is aan

$$\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx.$$

Deze integraal kunnen we met de tot nu toe behandelde integratietechnieken niet uitrekenen. In het volgende hoofdstuk komen we hier op terug, zie Voorbeeld 8.6.4. We kunnen met de trapeziumregel wel een benadering voor de integraal vinden.

7.2.2 Kromme gegeven door parametervergelijking

Een kromme \mathcal{K} kan gegeven worden door een parametervergelijking

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b, \quad (7.2.3)$$

waarbij x en y afhangen van een parameter t .

Om de lengte van \mathcal{K} te bepalen, kiezen we punten t_0, \dots, t_n in het interval $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

Met elke waarde t_j correspondeert een x -waarde $x_j = x(t_j)$, een y -waarde $y_j = y(t_j)$ en een punt $P_j : (x_j, y_j)$ op de kromme \mathcal{K} . De lengte van het lijnstuk tussen twee opeenvolgende punten P_{j-1} en P_j is

$$d(P_{j-1}, P_j) = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

Er geldt

$$\begin{aligned} x_j - x_{j-1} &= \Delta x_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta t_j} \cdot \Delta t_j, \\ y_j - y_{j-1} &= \Delta y_j = \frac{\Delta y_j}{\Delta t_j} \cdot \Delta t_j. \end{aligned}$$

Dan is

$$d(P_{j-1}, P_j) = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t_j}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta t_j}\right)^2} \Delta t_j$$

en de totale som van de lengten van deze lijnstukken is

$$\sum_{j=1}^n d(P_{j-1}, P_j) = \sum_{j=1}^n \sqrt{\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t_j}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_j}{\Delta t_j}\right)^2} \Delta t_j. \quad (7.2.4)$$

We nemen nu de limiet $n \rightarrow \infty$ met $\max_j \Delta t_j \rightarrow 0$. Dan gaat de som (7.2.4) over in de lengte van de kromme \mathcal{K} . In deze limiet geldt

$$\frac{\Delta x_j}{\Delta t_j} \rightarrow \frac{dx}{dt} = x'(t), \quad \frac{\Delta y_j}{\Delta t_j} \rightarrow \frac{dy}{dt} = y'(t)$$

en de som gaat (7.2.4) gaat over in

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (7.2.5)$$

De bepaalde integraal (7.2.5) is de lengte van de kromme \mathcal{K} gegeven door (7.2.3). We schrijven ook

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (7.2.6)$$

7.2.3 Lengte van kromme in poolcoördinaten

We gebruiken nu (7.2.5) om een uitdrukking af te leiden voor de lengte van een kromme gegeven in poolcoördinaten:

$$\mathcal{K} : r = f(\theta) \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2. \quad (7.2.7)$$

Omdat $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$, geeft (7.2.7) aanleiding tot de volgende parametrisatie voor \mathcal{K} in cartesische coördinaten

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta.$$

Dan is

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, \\ \frac{dy}{d\theta} &= f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

en (na enig rekenwerk waarbij we gebruik maken van $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2.$$

Bijgevolg is de lengte van de kromme \mathcal{K} volgens (7.2.6) gelijk aan

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta. \quad (7.2.8)$$

Voorbeeld 7.2.2. Bereken de lengte van de kromme \mathcal{K} die in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$\mathcal{K} : r = a(1 + \cos \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

waarin $a > 0$ een vaste constante is.

Daar $f(\theta) = a(1 + \cos \theta)$, is

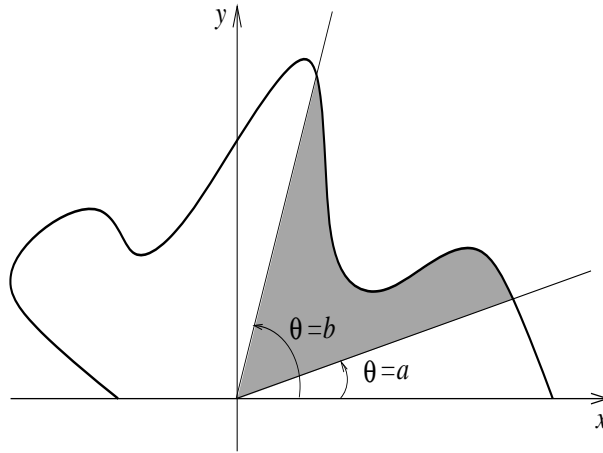
$$\begin{aligned} [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 &= a^2[(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta] = a^2[1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \\ &= 2a^2[1 + \cos \theta] = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van de dubbele hoek formule voor de cosinus: $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$. Er volgt

$$\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} = 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|. \quad (7.2.9)$$

Let goed op dat we hier absolute waarde moeten nemen, omdat $\cos \frac{\theta}{2}$ negatief kan zijn. Vanwege (7.2.8) is de lengte van \mathcal{K} gelijk aan

$$2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta. \quad (7.2.10)$$



Figuur 7.4: Gebied omsloten door de kromme $\mathcal{K} : r = f(\theta)$ en de voerstralen $\theta = a$ en $\theta = b$.

Omdat $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ voor $0 \leq \theta < \pi$ en $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ voor $\pi < \theta \leq 2\pi$, volgt nu dat (7.2.10) gelijk is aan

$$\begin{aligned} 2a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta - 2a \int_\pi^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta &= 2a [2 \sin \frac{\theta}{2}]_0^\pi - 2a [2 \sin \frac{\theta}{2}]_\pi^{2\pi} \\ &= 4a + 4a = 8a. \end{aligned}$$

Het antwoord is (uiteraard) positief, want het betreft de lengte van een kromme. Als in (7.2.9) de absolute waarde niet genomen zou zijn, dan had de verdere berekening opgeleverd dat de lengte van \mathcal{K} gelijk aan 0 zou zijn, hetgeen absurd zou zijn.

7.3 Oppervlakte in poolcoördinaten

We kunnen ook zekere gebieden in het vlak door poolcoördinaten beschrijven. Als $r = f(\theta)$ een functie is die continu en niet-negatief is voor θ in het interval $[a, b]$ met $a < b \leq a + 2\pi$, dan omsluit de kromme $\mathcal{K} : r = f(\theta)$ samen met de voerstralen $\theta = a$ en $\theta = b$ een gebied in het vlak, zoals aangegeven in Figuur 7.4. We zoeken een uitdrukking voor de oppervlakte van dit gebied.

Zij θ een waarde tussen a en b . Het deel van het gebied tussen de voerstralen θ en $\theta + \Delta\theta$ is, als $\Delta\theta$ klein is, bij benadering een cirkelsector met straal $f(\theta)$ en middelpuntshoek $\Delta\theta$. Deze cirkelsector heeft oppervlakte (ga zelf na)

$$\frac{1}{2} [f(\theta)]^2 \Delta\theta.$$

Kies een groot aantal punten $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ met

$$a = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = b.$$

Dan wordt de oppervlakte van het gebied benaderd door de som van de oppervlakten van n cirkelsectoren

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [f(\theta_j)]^2 \Delta\theta_j \quad (7.3.1)$$

met $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$. De benadering wordt beter naarmate n toeneemt. Als $n \rightarrow \infty$ met $\max_j \Delta\theta_j \rightarrow 0$ dan gaat de som (7.3.1) over in de bepaalde integraal

$$\frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta \quad (7.3.2)$$

en dit is de gevraagde oppervlakte.

Voorbeeld 7.3.1. Bereken de oppervlakte van het deel van het eerste kwadrant dat begrensd is door de kromme $\mathcal{K} : r = a + \cos \theta$ met $a \geq 1$.

Het eerste kwadrant wil zeggen dat $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Vanwege (7.3.2) geldt dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (a + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (a^2 + 2a \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta. \quad (7.3.3)$$

Als we $\cos^2 \theta$ omschrijven tot $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ dan kan elke term in (7.3.3) eenvoudig geïntegreerd worden. Er volgt dat de oppervlakte gelijk is aan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[a^2 \theta + 2a \sin \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} &= \frac{1}{2} \left[a^2 \cdot \frac{1}{2}\pi + 2a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi \right] \\ &= \frac{1}{4} \pi a^2 + a + \frac{1}{8} \pi. \end{aligned}$$

7.4 Volume van een omwentelingslichaam

Een omwentelingslichaam is een drie-dimensionaal volume dat ontstaat door een kromme (de profielkromme) rond een as (de wentelas) te draaien.

Neem aan dat de profielkromme gegeven wordt als grafiek van een functie

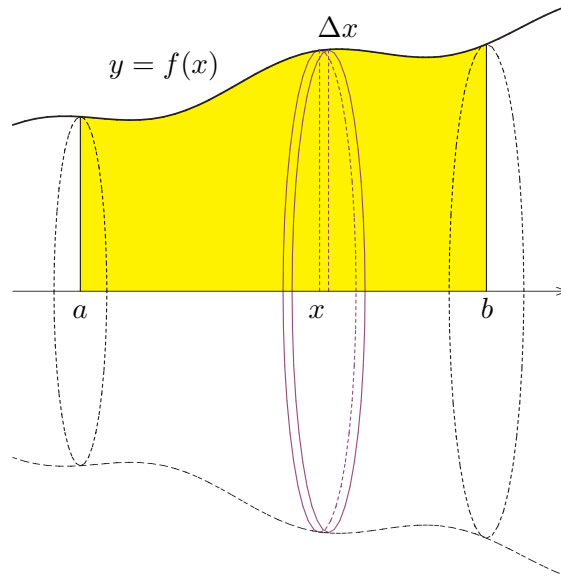
$$\mathcal{K} : y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

met f een niet-negatieve continue functie op het interval $[a, b]$. Wanneer de kromme \mathcal{K} gewenteld wordt rond de x -as ontstaat een omwentelingslichaam met de x -as als wentelas en de kromme \mathcal{K} als profielkromme, zie Figuur 7.5. We berekenen het volume van het omwentelingslichaam.

Neem x tussen a en b . Het deel van het omwentelingslichaam dat ontstaat door \mathcal{K} tussen x en $x + \Delta x$ te wentelen rond de x -as is, als Δx klein is, bij benadering een schijf met straal $f(x)$ en dikte Δx , zie Figuur 7.5. Het volume van de schijf is

$$\pi [f(x)]^2 \Delta x.$$

Het omwentelingslichaam kunnen we ons voorstellen als zijnde opgebouwd uit een aantal schijven.



Figuur 7.5: Illustratie bij de berekening van het volume van een omwentelingslichaam.

Als we een groot aantal punten x_0, x_1, \dots, x_n kiezen met

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

dan wordt het volume van het omwentelingslichaam benaderd door de som van de volumes van n schijven:

$$\pi \sum_{j=1}^n [f(x_j)]^2 \Delta x_j$$

met $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

In de limiet $n \rightarrow \infty$ met $\max_j \Delta x_j \rightarrow 0$ leidt dit tot de bepaalde integraal

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (7.4.1)$$

en dit is het gevraagde volume V van het omwentelingslichaam.

Voorbeeld 7.4.1. We berekenen het volume van een bol met straal R . Een bol met straal R wordt verkregen door een halve cirkel met straal R te wentelen rond de x -as. De halve cirkel wordt gegeven door

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R.$$

Volgens (7.4.1) geldt

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx. \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid geldt omdat de integrand een even functie is. Nu kunnen we verder rekenen

$$V = 2\pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

7.5 Massaverdelingen

7.5.1 Discrete massaverdeling

Gegeven een systeem van N massadeeltjes op een horizontale rechte. De massa's bevinden zich in de punten x_1, \dots, x_N en in het punt x_j bevindt zich een massa m_j . Aan dit systeem van massa's kunnen we volgende grootheden toekennen.

(a) De totale massa M :
$$M = \sum_{j=1}^N m_j,$$

(b) Het massamiddelpunt X :
$$X = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j x_j,$$

(c) Het eerste massamoment rond O :
$$\sum_{j=1}^N m_j x_j,$$

(d) Het tweede massamoment rond O :
$$I = \sum_{j=1}^N m_j x_j^2.$$

Het tweede massamoment heet ook wel het **traagheidsmoment**.

Hogere orde massamomenten worden analoog gedefinieerd.

Voorbeeld 7.5.1. Neem aan dat twee massa's m_1 en m_2 zich bevinden in x_1 en x_2 met $x_1 < 0 < x_2$. We duiden met $r_1 = -x_1$ en $r_2 = x_2$ de afstanden van de twee massapunten tot de oorsprong aan.

Het massamiddelpunt is

$$X = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 x_1 + m_2 x_2)$$

Het massamiddelpunt bevindt zich in de oorsprong O als en slechts als

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad \text{ofwel} \quad m_1 r_1 = m_2 r_2.$$

Als $R = r_1 + r_2$ de afstand tussen de massapunten is, dan komt dit ook neer op

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R.$$

Ga dit zelf na.

Het traagheidsmoment van de twee massa's is

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

Als het massamiddelpunt zich in de oorsprong bevindt, dan is dit gelijk aan

$$I = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} R \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} R \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} R^2.$$

De grootheid

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

is de **gereduceerde massa** van het systeem. Het traagheidsmoment t.o.v. het massamiddelpunt van een systeem met twee massapunten is gelijk aan het traagheidsmoment van een enkele massa μ op afstand R .

7.5.2 Continue massaverdeling

Vaak is de massa niet beperkt tot een eindig aantal massadeeltjes maar is er een continue verdeling van de massa over een zeker interval, zoals in een massieve rechte staaf die zich bevindt op een interval $[a, b]$ met lengte $l = b - a$.

Als het deelinterval van x tot $x + \Delta x$ een massa Δm bezit, dan is $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ de **gemiddelde massadichtheid** over het interval $[x, x + \Delta x]$. Voor $\Delta x \rightarrow 0$ nadert dit tot

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

en $\rho(x)$ is de **massadichtheid** in het punt x .

Relevante grootheden worden nu uitgedrukt door middel van bepaalde integralen waarin de massadichtheid optreedt.

- (a) De totale massa M : $M = \int_a^b \rho(x) dx,$
- (b) Het massamiddelpunt X : $X = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx,$
- (c) Het eerste massamoment rond O : $\int_a^b x \rho(x) dx,$
- (d) Het **traagheidsmoment** I (of tweede massamoment) t.o.v. een punt x_0 :

$$I = \int_a^b (x - x_0)^2 \rho(x) dx.$$

Voorbeeld 7.5.2. Vind de totale massa, het massamiddelpunt en het traagheidsmoment t.o.v. een willekeurig punt x_0 van de lineaire massadichtheid

$$\rho(x) = c(b - x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

De totale massa M is de oppervlakte onder de grafiek van $\rho(x)$ met $0 \leq x \leq b$. Dit is de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden b en bc , zodat

$$M = \int_0^b c(b - x) dx = \frac{b^2 c}{2}.$$

Het massamiddelpunt bevindt zich in

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_0^b x \rho(x) dx = \frac{2}{b^2 c} \int_0^b x c(b-x) dx \\ &= \frac{2}{b^2} \int_0^b (bx - x^2) dx = \frac{2}{b^2} \left[\frac{1}{2} bx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^b = \frac{1}{3} b. \end{aligned}$$

Het traagheidsmoment t.o.v. x_0 is

$$\begin{aligned} I &= \int_0^b (x - x_0)^2 \rho(x) dx = \int_0^b (x - x_0)^2 c(b-x) dx \\ &= \frac{b^2 c}{12} (b^2 - 4bx_0 + 6x_0^2). \end{aligned}$$

Reken dit zelf na.

Als functie van x_0 is I een tweedegraadsveelterm die haar minimum bereikt in die waarde van x_0 waarvoor

$$\frac{dI}{dx_0} = \frac{b^2 c}{12} (-4b + 12x_0) = 0.$$

Dit is de waarde $x_0 = \frac{1}{3}b$, hetgeen ook precies het massamiddelpunt is.

Dit geldt algemeen: het traagheidsmoment is minimaal als het uitgerekend wordt ten opzichte van het massamiddelpunt.

7.6 Kansrekening

Bepaalde integralen treden ook veelvuldig op bij het berekenen van kansen.

7.6.1 Discrete kansverdeling

Neem aan dat een zeker experiment kan leiden tot reële waarden x_1, \dots, x_N , waarbij de waarde x_j voorkomt met een kans p_j . De kansen p_j voldoen aan

$$0 \leq p_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Als we bijvoorbeeld met een dobbelsteen gooien, dan zijn de mogelijke uitkomsten $1, 2, \dots, 6$. We kunnen dus stellen

$$x_j = j, \quad j = 1, \dots, 6$$

Als het een zuivere dobbelsteen betreft, dan heeft elke uitkomst een even grote kans, zodat

$$p_j = 1/6, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Merk op dat we kansen aanduiden met getallen tussen 0 en 1, en niet met percentages. Een kans $1/2$ komt overeen met 50% kans.

Belangrijke grootheden die we kunnen uitdrukken in x_j en p_j zijn:

(a) De **gemiddelde waarde** (of verwachtingswaarde) μ : $\mu = \sum_{j=1}^N p_j x_j$,

(b) De **variantie** σ^2 : $\sigma^2 = \sum_{j=1}^N p_j (x_j - \mu)^2$,

(c) De **standaardafwijking** (of standaarddeviatie) is de vierkantswortel van de variantie

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N p_j (x_j - \mu)^2}.$$

De variantie en de standaardafwijking zijn een maat voor de spreiding van de kansverdeling rond het gemiddelde.

Voorbeeld 7.6.1. Beschouw een experiment met mogelijke uitkomsten $x_j = j$ voor $j = 1, \dots, N$, elk met kans $p_j = 1/N$. Het geval $N = 6$ komt overeen met het gooien met een zuivere dobbelsteen.

Het gemiddelde is

$$\mu = \sum_{j=1}^N p_j x_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N j = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

en de variantie is

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N p_j (x_j - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (j - (N+1)/2)^2.$$

Voor $N = 6$ hebben we bijvoorbeeld $\mu = 7/2$ en

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{6} \left((1 - \frac{7}{2})^2 + (2 - \frac{7}{2})^2 + (3 - \frac{7}{2})^2 + (4 - \frac{7}{2})^2 + (5 - \frac{7}{2})^2 + (6 - \frac{7}{2})^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} \left((5/2)^2 + (3/2)^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2 + (3/2)^2 + (5/2)^2 \right) \\ &= \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Voor algemene N kan men laten zien dat

$$\sigma^2 = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

7.6.2 Continue kansverdeling

In het geval van een continue kansverdeling kan de uitkomst van een experiment een willekeurig reëel getal zijn uit een zeker interval $[a, b]$, dat ook onbegrensd kan zijn.

De kans ΔP dat de uitkomst ligt in het interval $[x, x + \Delta]$ zal in veel gevallen klein zijn als Δx klein is. De limiet

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{dP}{dx}$$

noemen we de **kansdichtheid** en noteren we met $p(x)$.

Een functie $p(x)$ op $[a, b]$ kan optreden als kansdichtheid als

$$p(x) \geq 0, \quad \text{voor } x \in [a, b], \quad \text{en} \quad \int_a^b p(x) dx = 1.$$

Als $[c, d]$ een deelinterval van $[a, b]$ is, dan is

$$P([c, d]) = \int_c^d p(x) dx$$

de kans dat de uitkomst van het experiment in het interval $[c, d]$ ligt.

Andere relevante grootheden worden ook gegeven door bepaalde integralen.

(a) De totale kans: $\int_a^b p(x) dx = 1,$

(b) De **gemiddelde** waarde (of verwachtingswaarde): $\mu = \int_a^b xp(x) dx,$

(c) De **variantie**: $\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 p(x) dx,$

(d) De **standaardafwijking**:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 p(x) dx}.$$

Voor de variantie geldt

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_a^b (x^2 - 2\mu x + \mu^2) p(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 p(x) dx - 2\mu \int_a^b xp(x) dx + \mu^2 \int_a^b p(x) dx. \end{aligned}$$

Omdat $\int_a^b p(x) dx = 1$ en $\int_a^b xp(x) dx = \mu$, volgt hieruit dat

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 p(x) dx - 2\mu^2 + \mu^2 = \int_a^b x^2 p(x) dx - \mu^2.$$

Deze laatste vorm is vaak handig bij berekeningen.

Voorbeeld 7.6.2. De uniforme kansverdeling op het interval $[a, b]$ wordt gegeven door

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{voor } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Merk op dat inderdaad $p(x) \geq 0$ en $\int_a^b p(x) dx = 1$.

Het gemiddelde is

$$\begin{aligned} \mu &= \int_a^b xp(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

De variantie berekenen we volgens

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 p(x) dx - \mu^2,$$

met $\mu = \frac{a+b}{2}$ en

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 p(x) dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\sigma^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Merk op dat de variantie enkel afhangt van de lengte $b-a$ van het interval.

7.7 Krachtenvelden

7.7.1 Kracht en arbeid

Beschouw een deeltje dat een eendimensionale beweging ondergaat langs de x -as met snelheid $v = \frac{dx}{dt}$. Als een kracht F op het deeltje werkt, dan geldt volgens de tweede wet van Newton dat

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

waarin m de massa van het deeltje is en a de versnelling.

De kracht verricht een **arbeid** bij verplaatsing van het deeltje van A naar B . Als de kracht constant is dan is de arbeid (in het Engels: work, vandaar W)

$$W = F(x_B - x_A).$$

Als de kracht niet constant is, maar verandert met de positie $F = F(x)$, dan wordt de arbeid W gegeven door een bepaalde integraal. De arbeid bij verplaatsing van x naar $x + \Delta x$ is $\Delta W \approx F(x)\Delta x$. In de limiet $\Delta x \rightarrow 0$ geldt

$$dW = F(x)dx$$

hetgeen na integratie betekent dat

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx.$$

Voorbeeld 7.7.1. De wet van Coulomb geeft de kracht tussen twee elektrische ladingen q_1 en q_2 op afstand x :

$$F(x) = k \frac{q_1 q_2}{x^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

met ϵ_0 de elektrische veldconstante. Als de ladingen hetzelfde teken hebben (beide positief of beide negatief) dan is de kracht afstotend. Als de ladingen verschillend teken hebben dan is de kracht aantrekkend.

Neem aan dat twee positief geladen deeltjes aanvankelijk oneindig ver van elkaar vandaan zijn. Omdat de ladingen elkaar afstoten moet er werk verricht worden om het deeltje met lading q_2 vanuit het oneindige naar een afstand x_0 tot lading q_1 te brengen. Een kracht $-F$ moet uitgeoefend worden om de afstoting op te heffen en bijgevolg is

$$W = - \int_{\infty}^{x_0} F(x) dx = k q_1 q_2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

De oneigenlijke integraal kunnen we uitrekenen:

$$W = k q_1 q_2 \left[-\frac{1}{x} \right]_{x_0}^{\infty} = k \frac{q_1 q_2}{x_0}.$$

7.7.2 Kracht, arbeid en energie

Neem aan dat een deeltje beweegt in een krachtenveld $F(x)$.

Kinetische energie

De arbeid die de kracht $F(x)$ verricht als het deeltje beweegt van A naar B is gelijk aan

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = m \int_{x_A}^{x_B} \frac{dv}{dt} dx$$

waarbij we de tweede wet van Newton $F = ma = m \frac{dv}{dt}$ gebruikt hebben. Vanwege $v = dx/dt$ kunnen we ook schrijven $dx = v dt$ en dus

$$W = m \int_{t_A}^{t_B} \frac{dv}{dt} v dt$$

met t_A en t_B het tijdstip waarop het deeltje in A resp. B is. [Dit is in feite een gebruik van de substitutiemethode; zie later.]

Merk op dat $\frac{d}{dt} [\frac{1}{2} v^2] = v \frac{dv}{dt}$, zodat we de integraal kunnen uitrekenen

$$W = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{t_A}^{t_B} = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2)$$

waarin v_A en v_B de snelheden aanduiden in A en B .

De uitdrukking $\frac{1}{2}mv^2$ is de **kinetische energie** die we hier met T aangeven:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

De arbeid is bijgevolg gelijk aan de verandering in de kinetische energie

$$W = T_B - T_A. \quad (7.7.1)$$

Potentiële energie

We nemen aan dat het krachtenveld $F(x)$ alleen afhangt van de positie x en niet verandert in de tijd. Krachten die afhangen van de snelheid van het deeltje (zoals wrijvingskrachten) sluiten we dus uit.

Neem verder aan dat $F(x)$ continu afhangt van x . Dan is er volgens de hoofdstelling van de integraalrekening een primitieve functie, die we noteren met $-V(x)$, en er geldt

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = [-V(x)]_{x_A}^{x_B} = V_A - V_B. \quad (7.7.2)$$

We noemen V de **potentiële energie** en V_A en V_B zijn de waarden van V in A en B . Uit de definities volgt

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}, \quad V(x) = -\int F(x) dx + C.$$

Omdat $\frac{dV}{dx} = -F$, werkt de kracht in de richting waarin de potentiële energie afneemt.

Omdat er een potentiële energie bestaat voor het krachtenveld $F(x)$ noemen we het krachtenveld **conservatief**. Dit is een algemene eigenschap van ééndimensionale krachtenvelden die alleen van de positie afhangen. In hogere dimensies is dit evenwel niet meer zo en dan is het conservatief zijn van een krachtenveld een bijzondere, niet algemeen geldende eigenschap.

Eenvoudige, maar belangrijke voorbeelden zijn

- (a) $F = \text{constant}$, $V(x) = -Fx + C$,
- (b) $F = -kx$, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$,
- (c) $F = -\frac{1}{x^2}$, $V(x) = -\frac{1}{x} + C$.

De potentiële energie is bepaald op een constante na. In concrete berekeningen kiezen we meestal een zekere constante, bv. $C = 0$.

Uit (7.7.1) en (7.7.2) volgt dat

$$T_A + V_A = T_B + V_B, \quad (7.7.3)$$

hetgeen uitdrukt dat in een conservatief systeem de **totale energie** $T + V$ constant is. Het resultaat (7.7.3) is een voorbeeld van een behoudswet: als een deeltje beweegt in een conservatief krachtenveld $F(x)$ kunnen de kinetische energie en de potentiële energie veranderen, maar de totale energie blijft behouden.

Voorbeeld 7.7.2. In Voorbeeld 7.7.1 hebben we gezien dat de arbeid die nodig is om twee ladingen in het krachtenveld vanuit het oneindige tot een afstand x_0 te brengen, gelijk is aan

$$W = k \frac{q_1 q_2}{x_0}.$$

Dit is ook de arbeid die het krachtenveld uitoefent om de ladingen van elkaar te verwijderen:

$$W = \int_{x_0}^{\infty} F(x) dx = k \frac{q_1 q_2}{x_0}.$$

De elektrostatische potentiële energie $V(x)$ voldoet aan

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}, \quad W = V(x_0) - V(\infty).$$

Als we de constante zo kiezen dat $V(\infty) = 0$, dan geldt dus

$$V(x) = k \frac{q_1 q_2}{x}.$$

7.8 Oefeningen

Oefening 7.1. Bereken de oppervlakte van de volgende gebieden in het vlak:

- (a) het gebied begrensd door de grafieken van $y = 2x^2 - 1$ en van $y = x^2$,
- (b) het gebied begrensd door de grafieken van $y = 2x^2$ en van $y = 2x + 4$,
- (c) het gebied begrensd door de grafieken van $y = 10x - x^2$ en van $y = 30 - 3x$.

Oefening 7.2. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de kromme $y = 1 - ax$, de x -as, en de rechten $x = 0$ en $x = b$.

Hier zijn a en b gegeven positieve getallen. Er zijn twee gevallen, afhankelijk van de waarden van a en b . Onderzoek beide gevallen.

Oefening 7.3. Bereken de oppervlakte van de volgende gebieden

- (a) het gebied begrensd door $y = 1 - x^2$ en $y = -3$
- (b) het gebied onder $y = 2 - x^2$ en boven $y = \max(-x, 0)$
- (c) het gebied tussen $x = |y|$ en $x = 2 - y^2$

Oefening 7.4. (a) Bereken de oppervlakte onder de grafiek van $y = \sin x$ tussen $x = 0$ en $x = \pi$.

- (b) Bepaal een horizontale rechte $y = c$ die het gebied uit onderdeel (a) in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt.

Oefening 7.5. (a) Bepaal de oppervlakte A_m van het gebied begrensd door de krommen $x = 1$, $x = m$, $y = 0$ en $y = \frac{1}{x^3}$, met $m > 1$.

- (b) Bepaal $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m$.

Oefening 7.6. Bepaal een horizontale rechte $y = c$ die het gebied tussen de krommen $y = x^2 - 1$ en $y = 8$ in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt.

Oefening 7.7. Bereken $\int_0^1 \ln \sin x \, dx$ door de integraal te zien als de oppervlakte van een gebied in het xy -vlak en vervolgens te integreren met betrekking tot y .

Oefening 7.8. Vind een eenvoudige parametrisatie voor de kromme in het eerste kwadrant gegeven door de vergelijking

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$$

en bereken dan haar lengte. Neem aan $a > 0$.

Oefening 7.9. Stel een integraal op voor de lengte van de volgende krommen. Als het eenvoudig te doen is, dan moet u de integraal ook verder uitrekenen.

$$(a) \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$(b) y = x^{3/2} \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$(c) y = \ln x \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$(d) y = \sqrt{4 - x^2} \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$(e) \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = \frac{1}{2}t^2 + 3 \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$(f) y = \ln(1 - x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$(g) \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Oefening 7.10. Stel een integraal op voor de lengte van de volgende krommen die in poolcoördinaten gegeven zijn. Als het eenvoudig te doen is, dan moet u de integraal ook verder uitrekenen.

$$(a) r = 1 + \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$(b) r = 1 - \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$(c) r = 3\theta^2 \quad 1 \leq \theta \leq 2$$

$$(d) r = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$(e) r = e^\theta \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

$$(f) r = |\sin \theta| \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Oefening 7.11. Stel een integraal op voor de oppervlakte van het gedeelte van het platte vlak omsloten door de volgende krommen die in poolcoördinaten gegeven zijn. Als het eenvoudig te doen is, dan moet u de integraal ook verder uitrekenen.

$$(a) r = 2(1 + \cos \theta)$$

$$(b) r = 2a \cos \theta \quad \text{met } a > 0$$

$$(c) r = 1 + 2 \sin \theta$$

$$(d) r = 2 + \sin 2\theta$$

$$(e) r = \sin^2 \theta$$

$$(f) r = a^2 \sin^2 \theta$$

$$(g) r = \cos 3\theta \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

$$(h) r = 2 + \cos \theta$$

Oefening 7.12. Bepaal de oppervlakte van het gebied ingesloten door de spiraal $r = 3\theta$ voor $0 \leq \theta \leq \pi$ en de x -as.

Oefening 7.13. Geef een integraal voor de oppervlakte van het gebied binnen zowel de slak $r = 2 - \cos \theta$ als de cardioïde $r = 1 + \cos \theta$.

Oefening 7.14. Bepaal de oppervlakte van het gebied in het eerste kwadrant ingesloten door de eerste lus van de spiraal $r = \theta$ en de voerstralen $\theta = \pi/6$ en $\theta = \pi/3$.

Oefening 7.15. De oppervlakte van de mantel van het omwentelingslichaam dat ontstaat door $y = f(x)$ met $a \leq x \leq b$ rond de x -as te wentelen is

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) [1 + (f'(x))^2]^{1/2} dx$$

Een bol met straal R is te zien als een omwentelingslichaam. Gebruik bovenstaande formule om de oppervlakte van een bol uit te rekenen.

Oefening 7.16. Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de kromme $y = (r/h)x$ tussen $x = 0$ en $x = h$ te wentelen rond de x -as.

Oefening 7.17. Stel een integraal op voor het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de gegeven profielkromme te wentelen rond de x -as. Als het eenvoudig te doen is, dan moet u de integraal ook verder uitrekenen.

(a) $y = 1 - x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$

(e) $y = \frac{1}{\cos x} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

(b) $y = x^3 \quad 1 \leq x \leq 2$

(f) $y = e^{-x} \quad 0 \leq x < \infty$

(c) $y = \frac{1}{x} \quad 1 \leq x \leq a$

(g) $y = \ln x \quad 1 \leq x \leq 2$

(d) $y = xe^{x/2} \quad 0 \leq x \leq 1$

(h) $y = (1 + x)^{1/2} \quad 1 \leq x \leq 5$

Oefening 7.18. Zij R het gebied begrensd door de kromme $y = 1/(4 + x^2)$ en de rechten $x = 0$, $y = 0$ en $x = 2$. Bereken

(a) de oppervlakte van R ,

(b) het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door R te wentelen rond de y -as.

Oefening 7.19. Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de kromme met vergelijking $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ te wentelen rond de x -as. Welk volume krijg je als je dezelfde kromme wentelt rond de y -as?

Oefening 7.20. Beschouw voor een $c \in [0, 1]$ de kromme met vergelijking $y = |1 - x^2 - c|$ met $-1 \leq x \leq 1$. Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door deze kromme te wentelen rond de x -as. Dit volume hangt af van c . Voor welke waarde(n) van c in $[0, 1]$ is dit volume minimaal, voor welke maximaal?

Oefening 7.21. De zijdelingse oppervlakte van een kegel (d.w.z. de oppervlakte van de mantel) met lengte h en straal (van het grondvlak) r is $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$, d.w.z. de halve omtrek van het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte tot de top gemeten langs de mantel. Toon aan dat dit inderdaad zo is.

Oefening 7.22. Toon aan dat bij het snijden van sneden van een rond brood (bol) met dezelfde dikte, elke snede dezelfde hoeveelheid korst heeft.

Oefening 7.23. (a) Voor welke $p > 0$ heeft het gebied onder de grafiek $y = 1/x^p$ voor $x \geq 1$ een eindige oppervlakte?

(b) Voor welke $p > 0$ heeft het omwentelingslichaam dat ontstaat door $y = 1/x^p$ voor $x \geq 1$ rond de x -as te wentelen een eindig volume?

Oefening 7.24. Zij $V = V(a)$ het volume van een omwentelingslichaam dat ontstaat door de profielkromme $y = f(x)$ met $0 \leq x \leq a$ rond de x -as te wentelen.

Wat is $\frac{dV(a)}{da}$?

Oefening 7.25. Drie massapunten $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ en $m_3 = 3$ liggen op een rechte met respectievelijke coördinaten $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ en $x_3 = 4$ ten opzichte van een punt O de rechte. Bereken

- (a) de positie van het massamiddelpunt,
- (b) het traagheidsmoment ten opzichte van O ,
- (c) het traagheidsmoment ten opzichte van het massmiddelpunt.

Oefening 7.26. De massadichtheid in een staaf van lengte ℓ wordt gegeven door $\rho(x) = x^2$, met $0 \leq x \leq \ell$. Bereken

- (a) de totale massa,
- (b) de positie van het massamiddelpunt,
- (c) het traagheidsmoment ten opzichte van een willekeurig punt x_0 ,
- (d) het traagheidsmoment ten opzichte van het massmiddelpunt.

Oefening 7.27. De massadichtheid in een staaf van lengte 2ℓ wordt gegeven door $\rho(x) = 1 - |x|/\ell$, met $-\ell \leq x \leq \ell$. Bereken

- (a) de totale massa,
- (b) de positie van het massamiddelpunt,
- (d) het traagheidsmoment ten opzichte van het massmiddelpunt.

Oefening 7.28. De uniforme kansverdeling op twee intervallen $[a, b] \cup [c, d]$ met $a < b < c < d$ wordt gegeven door

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+c-d} & \text{voor } a \leq x \leq b \text{ en voor } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Wat is de kans dat een uitkomst behoort tot het interval $[a, b]$?
- (b) Bereken het gemiddelde en de variantie van de verdeling.

Oefening 7.29. De exponentiële verdeling met parameter $\lambda > 0$ heeft kansdichtheid

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{met } x > 0.$$

- (a) Laat zien dat $\int_0^\infty p(x) dx = 1$, zodat $p(x)$ inderdaad een kansdichtheid is.
- (b) Bereken het gemiddelde van deze verdeling.
[De berekening is gebaseerd op partiële integratie, zie hiervoor ook het volgende hoofdstuk.]

De mediaan van een kansverdeling is een waarde m waarvoor geldt dat de kans op een uitkomst $\leq m$ gelijk aan $1/2$ is.

- (c) Bereken de mediaan van de exponentiële verdeling.

Oefening 7.30. Een deeltje voert een één dimensionale beweging onder invloed van een kracht $F = kx$ met $k > 0$.

- (a) Wat is de arbeid die het krachtenveld uitoefent als het deeltje beweegt van $x = x_A$ naar $x = x_B$?
- (b) Bereken de potentiële energie $V(x)$ (neem $V(0) = 0$).

Neem aan dat het deeltje in rust is op $x = 1$.

- (c) Wat is de totale energie E ?
- (d) Wat is de kinetische energie $T(x)$ als een functie van x .
- (e) Schets de grafieken van V , T en E als functies van x .
- (f) Beschrijf de beweging van het deeltje.
- (g) Hoe zou de beweging zijn als het deeltje in rust vertrok vanuit $x = -1$ of vanuit $x = 0$?

Oefening 7.31. Beantwoord dezelfde vragen als in de vorige opgave voor het krachtenveld $F = -kx$ met $k > 0$.

Oefening 7.32. (Examenvraag) Een staaf van lengte $\ell > 1$ heeft massadichtheid

$$\rho(x) = 3x^{-1/2}|x - 1|, \quad 0 < x < \ell$$

en totale massa $M = 8$.

- (a) Bepaal ℓ .
- (b) Stel een integraal op die de positie van het massamiddelpunt weergeeft. U hoeft deze integraal niet uit te rekenen.
- (c) Benader de integraal uit (b) met de trapeziumregel T_4 .

Hoofdstuk 8

Integratietechnieken

8.1 Inleiding

Om een bepaalde integraal uit te rekenen zullen we meestal eerst de onbepaalde integraal uitrekenen

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

om daarna de grenzen in te vullen

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

We zoeken dus een primitieve functie F met $F' = f$.

Omdat het primitiveren de omgekeerde bewerking is van differentiëren geeft elke regel voor differentiëren in principe een regel voor primitiveren, gewoon door de regel om te keren. In het bijzonder geven de kettingregel en de productregel voor afgeleiden, na omkering, twee belangrijke methoden voor het berekenen van integralen: de substitutiemethode en de regel van partiële integratie.

Bij het gebruik van deze regels is het doel om een gegeven integraal over te brengen naar een andere integraal die we herkennen en die we als standaard-integraal kunnen uitrekenen. Het is ook mogelijk dat we een aantal regels na elkaar moeten toepassen om de integraal uit te kunnen rekenen. We geven in dit hoofdstuk een overzicht van de meest gebruikte integratietechnieken.

8.2 Goniometrische identiteiten

Bij het uitrekenen van integralen met goniometrische functies kunnen we vaak gebruik maken van goniometrische identiteiten om de integraal over te brengen naar een eenvoudigere ‘integreerbare’ vorm.

De volgende identiteiten komen vaak van pas

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad (8.2.1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (8.2.2)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad (8.2.3)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] \quad (8.2.4)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)] \quad (8.2.5)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)] \quad (8.2.6)$$

Voorbeeld 8.2.1. Bereken $I = \int \cos^2 2x \, dx$.

We gebruiken (8.2.1) met x vervangen door $2x$. Dan

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right] + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 4x + C \end{aligned}$$

Voorbeeld 8.2.2. Bereken $I = \int \sin 2x \sin 4x \, dx$.

We gebruiken (8.2.4) met x vervangen door $2x$ en y vervangen door $4x$. Dan volgt

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} [\cos(2x - 4x) - \cos(2x + 4x)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos(-2x) - \cos 6x) \, dx. \end{aligned}$$

Omdat de cosinus een even functie is, geldt $\cos(-2x) = \cos 2x$. Dan kunnen we verder rekenen:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 6x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin 6x \right] + C = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin 6x + C. \end{aligned}$$

8.3 Substitutiemethode

De veelterm $f(x) = (2x - 1)^3$ kan geïntegreerd worden door eerst de derde macht uit te werken en daarna term voor term te integreren

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \int (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) \, dx \\ &= 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + C' \\ &= \frac{1}{8}(2x - 1)^4 + C \end{aligned}$$

met $C = C' - 1/8$ een willekeurige constante.

Een eenvoudigere manier bestaat erin om de substitutie

$$u = 2x - 1, \quad du = \frac{du}{dx} dx = 2dx$$

te maken. Dan volgt $dx = \frac{1}{2} du$ zodat

$$\int (2x - 1)^3 dx = \int u^3 \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{8} u^4 + C = \frac{1}{8} (2x - 1)^4 + C.$$

Door de substitutie gaat de integraal over in een standaard-integraal met u als integratieveranderlijke, die we eenvoudig kunnen uitrekenen. In de laatste stap gebruiken we het verband tussen u en x weer om het uiteindelijke resultaat te schrijven in termen van de oorspronkelijke veranderlijke x .

De **substitutiemethode** kunnen we zien als een integratietechniek waarbij we overgaan op een andere veranderlijke. Ze hangt samen met de kettingregel voor afgeleiden.

8.3.1 Algemene formulering

De algemene vorm van de substitutiemethode is als volgt. We beschouwen een onbepaalde integraal

$$\int f(x) dx$$

en we gaan over op een nieuwe veranderlijke u . Het verband tussen u en x wordt gegeven door

$$u = u(x), \quad x = x(u).$$

Uitgedrukt in de nieuwe veranderlijke u wordt de functie

$$f(x) = f(x(u)).$$

De differentiaal dx is gelijk aan

$$dx = \frac{dx}{du} du.$$

Dan geldt volgens de substitutiemethode dat

$$\int f(x) dx = \int f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

In de u -veranderlijke krijgen we dus de integraal van een nieuwe functie

$$g(u) = f(x(u)) \frac{dx}{du}.$$

We kunnen de substitutiemethode met succes toepassen als de integraal $\int g(u) du$ eenvoudiger uit te rekenen is.

Voorbeeld 8.3.1. Bereken $\int (ax + b)^n dx$ waarin $a \neq 0$.

We stellen $ax + b = u$. Dan $a dx = du$ en dus

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \int u^n du = \frac{1}{a} \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$$

Dit is geldig als $n \neq -1$. Voor $n = -1$ krijgen we een logaritme

$$\int (ax + b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \int u^{-1} du = \frac{1}{a} \ln |u| + C = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C.$$

Soms wordt de substitutiemethode in de volgende vorm gebruikt. Als we de integraal kunnen zien in de vorm

$$\int f(x) \frac{du}{dx} dx$$

dan leidt de substitutie $x = x(u)$, $u = u(x)$ tot $du = \frac{du}{dx} dx$ zodat

$$\int f(x) \frac{du}{dx} dx = \int f(x(u)) du$$

Voorbeeld 8.3.2. Bereken $\int (x + x^2)^{1/2} (1 + 2x) dx$.

We stellen $x + x^2 = u$. Dan $(1 + 2x) dx = du$ en

$$\begin{aligned} \int (x + x^2)^{1/2} (1 + 2x) dx &= \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (x + x^2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 8.3.3. Bereken $\int x e^{-x^2} dx$.

Hier nemen we $u = x^2$ zodat $du = 2x dx$ en $x dx = \frac{1}{2} du$. Er volgt

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = \frac{1}{2} (-e^{-u}) + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

8.3.2 Meer voorbeelden

Integralen van het type

$$\int f(x) f'(x) dx \quad \text{of} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

kunnen door een substitutie $u = f(x)$, $du = f'(x) dx$ worden uitgerekend.

In het eerste geval krijgen we

$$\int f(x) f'(x) dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} f(x)^2 + C \quad (8.3.1)$$

en in het tweede geval

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |f(x)| + C. \quad (8.3.2)$$

Het quotiënt $f'(x)/f(x)$ heet de **logaritmische afgeleide** van f .

Voorbeeld 8.3.4. (a) De goniometrische integraal

$$\int \sin ax \cos ax \, dx$$

kunnen we berekenen door gebruik te maken van goniometrische identiteiten. Een andere manier is om te bedenken dat $\cos ax$ op een constante na de afgeleide is van $\sin ax$ (en omgekeerd). De integraal is dus van de vorm (8.3.1). We stellen

$$u = \sin ax, \quad du = a \cos ax \, dx$$

zodat

$$\int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \int u \, du = \frac{1}{2a} u^2 + C = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 + C.$$

(b) De integraal $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ is van de vorm (8.3.1) met $f(x) = \ln x$.

We stellen dus $u = \ln x$. Dan is $du = \frac{1}{x} \, dx$ en

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

Voorbeeld 8.3.5. (a) Bereken $I = \int \tan x \, dx$.

Omdat $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ is de integraal van de vorm (8.3.2) met $f(x) = \cos x$ (op een teken na). We stellen $u = \cos x$. Dan $du = -\sin x \, dx$ en dus

$$I = - \int \frac{1}{u} \, du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

(b) Bereken $I = \int \frac{dx}{x \ln x}$.

Hier nemen we $u = \ln x$. Dan $du = \frac{1}{x} \, dx$ en

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C.$$

Met dezelfde techniek kunnen we integralen van de vorm

$$\int [f(x)]^k f'(x) \, dx$$

berekenen. Na substitutie $u = f(x)$ volgt

$$\int [f(x)]^k f'(x) \, dx = \int u^k \, du = \frac{1}{k+1} u^{k+1} + C = \frac{1}{k+1} [f(x)]^{k+1} + C.$$

8.3.3 Bepaalde integralen

De substitutiemethode kan rechtstreeks worden toegepast op bepaalde integralen

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Bij het toepassen van de substitutie $u = u(x)$, $x = x(u)$ moet men echter twee zaken goed in de gaten houden:

- De substitutie moet een eenduidig verband geven tussen x in het interval $[a, b]$ en u in een interval $[c, d]$. Dit wil zeggen dat bij elke $x \in [a, b]$ precies één $u \in [c, d]$ hoort en omgekeerd.
- De integratiegrenzen in de bepaalde integraal moeten mee aangepast worden.

De eerste eis houdt in dat $u = u(x)$ een strikt stijgende of strikt dalende functie op het interval $[a, b]$ moet zijn met als bereik het interval $[c, d]$ waarin $c = u(a)$, $d = u(b)$ als u stijgend is, en $c = u(b)$, $d = u(a)$ als u dalend is.

Als $u = u(x)$ strikt stijgend is op $[a, b]$ met $u(a) = c$ en $u(b) = d$, dan moet men de grenzen als volgt aanpassen

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

Als $u = u(x)$ strikt dalend is op $[a, b]$ met $u(a) = d$ en $u(b) = c$, dan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_d^c f(x(u)) \frac{dx}{du} du = - \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

Voorbeeld 8.3.6. Bereken

$$I = \int_0^\pi (\cos x)^k \sin x dx \quad \text{met } k \in \mathbb{N}.$$

We stellen $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. Dan is $u = \cos x$ strikt dalend voor $0 \leq x \leq \pi$ met $u = 1$ voor $x = 0$ en $u = -1$ voor $x = \pi$. Er volgt

$$\begin{aligned} I &= - \int_1^{-1} u^k du = \int_{-1}^1 u^k du = \left[\frac{1}{k+1} u^{k+1} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{k+1} (1 - (-1)^{k+1}). \end{aligned}$$

De waarde van $(-1)^{k+1}$ is -1 of $+1$, afhankelijk van het feit of k even of oneven is:

$$(-1)^{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{als } k \text{ oneven is,} \\ -1 & \text{als } k \text{ even is.} \end{cases}$$

Als k oneven is, dan volgt

$$I = \frac{1}{k+1} (1 - 1) = 0.$$

Als k even is, dan volgt

$$I = \frac{1}{k+1} (1 + 1) = \frac{2}{k+1}.$$

8.3.4 Goniometrische substituties

Sommige integralen met vierkantswortels kunnen door geschikte substitutie herleid worden tot een integraal met een goniometrische functie. In integralen met $\sqrt{a^2 - x^2}$ kan soms de substitutie $x = a \sin \theta$ of $x = a \cos \theta$ gebruikt worden. We geven enkele voorbeelden.

Voorbeeld 8.3.7. We berekenen $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (met $a > 0$) door substitutie

$$x = a \sin \theta, \quad dx = a \cos \theta d\theta$$

Bovendien is

$$a^2 - x^2 = a^2(1 - \sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

We nemen verder aan dat θ zo gekozen worden dat $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Dit heeft tot gevolg dat $\cos \theta \geq 0$, zodat

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta,$$

want $a > 0$. Nu volgt

$$I = \int \frac{a \cos \theta d\theta}{a \cos \theta} = \int d\theta = \theta + C.$$

Uit $x = a \sin \theta$ met $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ volgt dat $\theta = \text{bgsin}(x/a)$, zodat we uiteindelijk vinden

$$I = \text{bgsin}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Voorbeeld 8.3.8. We berekenen $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ met $a > 0$.

We stellen weer $x = a \sin \theta$, $dx = a \cos \theta d\theta$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$, met $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, zodat

$$I = a^2 \int \cos^2 \theta d\theta.$$

De integraal van $\cos^2 \theta$ berekenen we zoals in Voorbeeld 8.2.1:

$$I = \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C.$$

Om weer naar de veranderlijke x terug te gaan merken we op dat

$$\sin \theta = \frac{x}{a}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad \text{en} \quad \theta = \text{bgsin} \frac{x}{a}.$$

Dus

$$I = \frac{a^2}{2} \text{bgsin} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Voorbeeld 8.3.9. Bereken de oppervlakte omsloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ met straal $r > 0$.

De gevraagde oppervlakte S is vier keer de oppervlakte van het deel binnen de cirkel in het eerste kwadrant en dit is de oppervlakte onder de grafiek van $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ met $0 \leq x \leq r$. Dus

$$S = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

De onbepaalde integraal is in het vorige voorbeeld uitgerekend. Er volgt

$$S = 4 \left[\frac{r^2}{2} \operatorname{bgsin} \frac{x}{r} + \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} \right]_{x=0}^{x=r} = 2r^2 \operatorname{bgsin} 1 = \pi r^2.$$

Dit resultaat voor de oppervlakte van een cirkel met straal r hadden we uiteraard kunnen verwachten. Het wordt hier door de berekening bevestigd.

Deze tabel toon enkele nuttige goniometrische substituties, in de tweede kolom. We stellen steeds dat $a > 0$

| | | |
|----------------------------------|---|--|
| $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ | $x = a \sin \theta$ | $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$ |
| $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ | $x = a \sec \theta = \frac{a}{\cos \theta}$ | $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$ |
| $\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ | $x = a \tan \theta$ | $\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos \theta}$ |

8.4 Partiële integratie

8.4.1 Algemene beschrijving

De onbepaalde integraal

$$\int x \cos x dx$$

is gelijk aan $x \sin x + \cos x + C$, zoals door differentiatie na te gaan is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x \sin x + \cos x + C) &= \frac{d}{dx} (x \sin x) + \frac{d}{dx} \cos x \\ &= (x \cos x + \sin x) - \sin x = x \cos x. \end{aligned}$$

We hebben de productregel gebruikt om het product $x \sin x$ af te leiden.

Het ligt niet zo voor de hand om de primitieve $x \sin x + \cos x + C$ van $x \cos x$ meteen op te schrijven. De methode van **partiële integratie** is een techniek om dit soort primitieven te vinden. De methode is gebaseerd op de productregel voor afgeleiden.

Als in het algemeen $y = uv$ met u en v functies van x , dan geldt

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Met andere woorden, uv is een primitieve van $u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$. Bijgevolg is

$$\int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx = uv.$$

[De integratieconstante speelt hier geen rol; we hebben $C = 0$ genomen.] Dit kunnen we ook schrijven als

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx. \quad (8.4.1)$$

en dit is de regel voor partiële integratie.

Gegeven een integrand zoals $x \cos x$ zullen we een van de factoren gelijkstellen aan u en de andere aan dv/dx . In het voorbeeld is

$$u = x, \quad \frac{dv}{dx} = \cos x.$$

Dan

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad v = \sin x$$

en de regel van partiële integratie (8.4.1) levert

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx. \quad (8.4.2)$$

De rechterkant van (8.4.2) bevat nog een onbepaalde integraal, die we nog verder moeten uitrekenen. Dit verklaart de naam partiële integratie. De originele integraal is deels uitgerekend, maar er blijft nog een integraal over.

In (8.4.2) is de term $x \sin x$ reeds uitgerekend. Dit is de **geïntegreerde term** of de **stokterm**. De overblijvende integraal $\int \sin x dx$ is eenvoudig uit te rekenen en er volgt

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

De integratieconstante C voegen we pas op het einde toe.

Bij partiële integratie is het de kunst om de goede keuze te maken voor u en v . Als we in het voorbeeld $\int x \cos x dx$ zouden nemen

$$u = \cos x, \quad \frac{dv}{dx} = x,$$

dan volgt

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

en we vinden

$$\int x \cos x dx = \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx.$$

Hoewel dit een juiste berekening is, hebben we er niets aan omdat de overblijvende integraal ingewikkelder is dan de oorspronkelijke.

Als vuistregel kunnen we stellen dat we veeltermen bij partiële integratie willen afleiden (en niet primitiveren) omdat dan de graad afneemt. Voor goniometrische functies $\cos x$ en $\sin x$ maakt het niet uit of we afleiden of primitiveren.

8.4.2 Voorbeelden

Voorbeeld 8.4.1. We berekenen $\int x^2 e^{2x} dx$ door twee keer partieel te integreren.

We stellen

$$u = x^2, \quad \frac{dv}{dx} = e^{2x}$$

zodat

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Dan volgt

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx. \quad (8.4.3)$$

Op de overblijvende integraal $\int x e^{2x} dx$ passen we nog eens partiële integratie toe, nu met

$$u = x, \quad \frac{dv}{dx} = e^{2x}, \quad \text{en} \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Dus

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C'.$$

Als we dit invullen in (8.4.3) dan volgt

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

met $C = -C'$.

Voorbeeld 8.4.2. We berekenen $\int x^n \ln x dx$.

Dit is een uitzondering op de vuistregel dat we veeltermen willen afleiden en niet primitiveren. Hier kiezen we

$$u = \ln x, \quad \frac{dv}{dx} = x^n$$

Dan

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{n+1}x^{n+1},$$

zodat

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

De overblijvende integraal is eenvoudig

$$\int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Het eindresultaat is

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C.$$

Voorbeeld 8.4.3. We berekenen $\int \text{bgtan } x dx$.

De integrand $\text{bgtan } x$ is niet meteen te zien als het product van twee functies. We kunnen echter schrijven dat $\text{bgtan } x = \text{bgtan } x \cdot 1$. Voor partiële integratie kiezen we $u = \text{bgtan } x$ en $dv/dx = 1$, zodat $du/dx = 1/(1+x^2)$ en $v = x$. Er volgt

$$\int \text{bgtan } x dx = x \text{bgtan } x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

In de overblijvende integraal maken we de substitutie $u = x^2$, $du = 2x dx$,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2} \ln(1+u) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C'.$$

Het eindresultaat is

$$\int \text{bgtan } x dx = x \text{bgtan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Soms vinden we na enkele keren partiële integratie de oorspronkelijke integraal weer terug.

Voorbeeld 8.4.4. Bereken voor $a > 0$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos x dx. \quad (8.4.4)$$

Hier maakt het niet uit welke factor gedifferentieerd wordt en welke geïntegreerd. We kiezen $u = e^{-ax}$, $dv/dx = \cos x$ met $du/dx = -ae^{-ax}$ en $v = \sin x$. Er volgt voor de onbepaalde integraal

$$I_a = \int e^{-ax} \cos x dx = e^{-ax} \sin x + a \int e^{-ax} \sin x dx. \quad (8.4.5)$$

Na partiële integratie vinden we een integraal die van dezelfde moeilijkheidsgraad is als degene waarmee we begonnen zijn. We lijken er niets mee opgeschoten te zijn. Maar laten we nog eens partieel integreren, waarbij we opnieuw e^{-ax} afleiden. Dan is

$$\int e^{-ax} \sin x dx = -e^{-ax} \cos x - a \int e^{-ax} \cos x dx$$

en dus wordt (8.4.5)

$$I_a = e^{-ax} \sin x - ae^{-ax} \cos x - a^2 \int e^{-ax} \cos x dx.$$

De overblijvende integraal is precies de onbepaalde integraal I_a waarmee we begonnen zijn. Dus I_a voldoet aan de vergelijking

$$I_a = e^{-ax}(\sin x - a \cos x) - a^2 I_a,$$

waaruit we I_a kunnen oplossen:

$$I_a = \frac{1}{1+a^2} e^{-ax} (\sin x - a \cos x).$$

Voor de gevraagde oneigenlijke integraal (8.4.4) volgt nu

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax} \cos x \, dx &= \frac{1}{1+a^2} \left[e^{-ax} (\sin x - a \cos x) \right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{1+a^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-ax} (\sin x - a \cos x) \right] - \frac{1}{1+a^2} \cdot 1 \cdot (0 - a) \\ &= \frac{a}{1+a^2}.\end{aligned}$$

8.5 Reductieformules

Integralen die afhangen van een positief geheel getal n kunnen soms met elkaar in verband gebracht worden om zo aanleiding te geven tot een reductieformule. We gebruiken meestal partiële integratie.

Voorbeeld 8.5.1. Beschouw als voorbeeld

$$I_n = \int x^n e^{ax} \, dx$$

met $n \in \mathbb{N}$. We nemen $u = x^n$, $dv/dx = e^{ax}$ en er volgt met partiële integratie

$$I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

De overblijvende integraal is een integraal van dezelfde familie maar met parameter $n-1$. Dus

$$I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}.$$

Dit is de **reductieformule** voor de integralen I_n . Het heet ook wel een **recursierelatie**.

Er geldt bijvoorbeeld

$$I_3 = \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \frac{3}{a} I_2, \quad I_2 = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} I_1, \quad I_1 = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} I_0.$$

Omdat de integraal I_0 eenvoudig uit te rekenen is

$$I_0 = \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

kunnen we de reductieformule gebruiken om achtereenvolgens de integralen I_1 , I_2 , I_3 , ... uit te rekenen. We vinden na enig rekenwerk

$$I_3 = \frac{1}{a} e^{ax} \left[x^3 - \frac{3}{a} x^2 + \frac{6}{a^2} x - \frac{6}{a^3} \right] + C.$$

In dit voorbeeld is de reductieformule niet expliciet op te lossen voor algemene n .

Als we in plaats hiervan kijken naar de (oneigenlijke) bepaalde integraal

$$J_n = \int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx, \quad a > 0$$

dan vinden we na partiële integratie

$$J_n = \left[-\frac{1}{a} x^n e^{-ax} \right]_0^\infty + \frac{n}{a} J_{n-1}.$$

Voor $n \geq 1$ is de geïntegreerde term $x^n e^{-ax}$ nul voor zowel $x = 0$ als $x \rightarrow \infty$ (dit laatste omdat $a > 0$). Bijgevolg geldt

$$J_n = \frac{n}{a} J_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Nu is het eenvoudig om de reductieformule herhaald toe te passen

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{n}{a} J_{n-1} = \frac{n}{a} \cdot \frac{n-1}{a} J_{n-2} = \dots \\ &= \frac{n}{a} \frac{n-1}{a} \dots \frac{2}{a} \frac{1}{a} J_0 \\ &= \frac{n!}{a^n} J_0 \end{aligned}$$

met $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$, de faculteit van n . Omdat $J_0 = 1/a$ volgt

$$J_n = \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

Voorbeeld 8.5.2. We vinden een reductieformule voor

$$I_n = \int \cos^n x \, dx$$

waarin n een natuurlijk getal is.

We schrijven de integrand als $\cos^{n-1} x \cos x$ en we nemen

$$u = \cos^{n-1} x, \quad \frac{dv}{dx} = \cos x.$$

Dan

$$\frac{du}{dx} = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x, \quad v = \sin x$$

zodat

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx.$$

Omdat $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ volgt hieruit

$$\begin{aligned} I_n &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Als we dit oplossen naar I_n dan vinden we de reductieformule

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

8.6 Rationale functies en partieelbreuken

Een rationale functie heeft de vorm

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m},$$

met P en Q veeltermen van graad n en m . Als $n \geq m$ kan een rationale functie geschreven worden als de som van een veelterm en een rationale functie waarvan de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer.

Zoals we gezien hebben in paragraaf 2.3.4 kan een rationale functie waarvan de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer vervolgens geschreven worden als lineaire combinatie van eenvoudige rationale functies die we **partieelbreuken** noemen. Er zijn vier typen partieelbreuken (zie weer paragraaf 2.3.4)

Type (i) $\frac{1}{x-a}$ met $a \in \mathbb{R}$,

Type (ii) $\frac{1}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \geq 2$,

Type (iii) $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ waarbij x^2+px+q geen reële nulpunten heeft. Dit houdt in dat de discriminant p^2-4q negatief is: $p^2-4q < 0$.

Type (iv) $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ met $p^2-4q < 0$ en $n \geq 2$.

Partieelbreuken van elk van de vier typen kunnen expliciet geïntegreerd worden.

8.6.1 Type (i)

Dit type komt het meest voor. Er geldt

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$$

Voorbeeld 8.6.1. We bepalen de integraal $\int \frac{dx}{(x-2)(x-4)}$.

We splitsen eerst in partieelbreuken

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2} \right].$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-2)(x-4)} &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{dx}{x-4} - \int \frac{dx}{x-2} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\ln|x-4| - \ln|x-2|) + C. \end{aligned}$$

8.6.2 Type (ii)

Het type (ii) treedt op als de noemer meervoudige reële nulpunten heeft. Er geldt als $n \geq 2$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

Voorbeeld 8.6.2. We berekenen $\int \frac{5x+1}{x^3-3x+2} dx$.

De derdegraadsveelterm in de noemer factoriseert als

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Bijgevolg zoeken we een partieelbreuksplitsing van de vorm

$$\frac{5x+1}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Enig rekenwerk levert $A = 1$, $B = 2$ en $C = -1$. Dan

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+1}{x^3-3x+2} dx &= \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+2| + C \\ &= \ln \frac{|x-1|}{|x+2|} - \frac{2}{x-1} + C. \end{aligned}$$

8.6.3 Type (iii)

Bij de berekening van een integraal van type (iii) splitsen we eerst een kwadraat af in de noemer

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}$$

Er is verondersteld dat $p^2 - 4q < 0$. Daarom is $-\frac{p^2-4q}{4} > 0$ en we kunnen de noemer schrijven als som van twee kwadraten

$$x^2 + px + q = u^2 + r^2$$

met

$$u = x + \frac{p}{2} \quad \text{en} \quad r = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} > 0.$$

Dan voeren we de substitutie $u = x + \frac{p}{2}$ door in de integraal

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{a(u-\frac{p}{2})+b}{u^2+r^2} du \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{2u}{u^2+r^2} du + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{u^2+r^2} du. \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

De eerste integraal in (8.6.1) is van de vorm

$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du \quad \text{met } f(u) = u^2 + r^2$$

en bijgevolg

$$\int \frac{2u}{u^2 + r^2} du = \ln(u^2 + r^2) + C.$$

De tweede integraal in (8.6.1) leidt tot een boogtangens

$$\int \frac{1}{u^2 + r^2} du = \frac{1}{r} \operatorname{bgtan} \frac{u}{r} + C.$$

Voorbeeld 8.6.3. We bepalen $I = \int \frac{16x + 3}{4x^2 - 4x + 26} dx$.

De noemer is

$$4x^2 - 4x + 26 = 4\left(x^2 - x + \frac{13}{2}\right) = 4\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}\right)$$

en deze heeft geen reële nulpunten. We stellen $u = x - \frac{1}{2}$ en er volgt

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{16x + 3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{16u + 11}{u^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} du.$$

We krijgen twee termen $I = I_1 + I_2$ met

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int \frac{2u}{u^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} du = 2 \ln(u^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2) + C_1 \\ &= 2 \ln(x^2 - x + \frac{13}{2}) + C_1 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{11}{4} \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} du = \frac{11}{4} \cdot \frac{2}{5} \operatorname{bgtan} \left(\frac{2u}{5}\right) + C_2 \\ &= \frac{11}{10} \operatorname{bgtan} \left(\frac{2x - 1}{5}\right) + C_2. \end{aligned}$$

Het uiteindelijke antwoord is

$$I = 2 \ln \left(x^2 - x + \frac{13}{2}\right) + \frac{11}{10} \operatorname{bgtan} \left(\frac{2x - 1}{5}\right) + C$$

met $C = C_1 + C_2$.

8.6.4 Type (iv)

Dit type komt maar weinig voor. Het kan met reductieformules teruggebracht worden tot het Type (iii). We gaan hier verder niet op in.

8.6.5 Voorbeeld

Sommige integralen gaan na een zekere substitutie over in een integraal van een rationale functie die vervolgens met de in deze paragraaf besproken technieken uitgerekend kan worden. We geven hiervan een voorbeeld.

Voorbeeld 8.6.4. In het vorig hoofdstuk, zie Voorbeeld 7.2.1, hebben we gezien dat de lengte van de kromme $\mathcal{K} : y = e^x$ tussen $x = 1$ en $x = 2$ gelijk is aan de bepaalde integraal

$$\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx.$$

We stellen $1 + e^{2x} = u^2$, met u positief, zodat

$$e^{2x} dx = u du, \quad \text{en} \quad dx = \frac{u}{e^{2x}} du = \frac{u}{u^2 - 1} du.$$

De ondergrens $x = 1$ komt overeen met $u = \sqrt{1 + e^2}$ en de bovengrens $x = 2$ komt overeen met $u = \sqrt{1 + e^4}$. Bijgevolg gaat de integraal over in

$$\int_{\sqrt{1+e^2}}^{\sqrt{1+e^4}} \frac{u^2}{u^2 - 1} du.$$

We hebben nu een integraal van een rationale functie die we schrijven als

$$\frac{u^2}{u^2 - 1} = 1 + \frac{1}{u^2 - 1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u + 1}$$

met als onbepaalde integraal

$$\int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = u + \frac{1}{2} \ln(u - 1) - \frac{1}{2} \ln(u + 1) + C = u + \frac{1}{2} \ln \frac{u - 1}{u + 1} + C.$$

De lengte van de kromme \mathcal{K} is dus

$$\left[u + \frac{1}{2} \ln \frac{u - 1}{u + 1} \right]_{u=\sqrt{1+e^2}}^{u=\sqrt{1+e^4}} = \sqrt{1 + e^4} - \sqrt{1 + e^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1 + e^4} - 1)(\sqrt{1 + e^2} + 1)}{(\sqrt{1 + e^4} + 1)(\sqrt{1 + e^2} - 1)}.$$

8.6.6 Rationale goniometrische integralen

Integralen zoals

$$\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta, \quad \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta$$

zijn voorbeelden van integralen van een rationale functies in de goniometrische functies \cos en \sin .

Door de substitutie

$$x = \tan \frac{\theta}{2}, \quad \theta = 2 \operatorname{bgtan} x, \quad d\theta = \frac{2}{1 + x^2} dx$$

kan zo'n integraal altijd omgezet worden in een integraal van een rationale functie. Dit is gebaseerd op de goniometrische formules

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Bijgevolg geldt als $x = \tan \frac{\theta}{2}$, dat

$$\sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

en dit zijn rationale functies van x . Omdat ook

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

een rationale functie van x is, gaat dus inderdaad een integraal met een rationale uitdrukking in $\sin \theta$ en $\cos \theta$ door de substitutie $x = \tan(\theta/2)$ over in de integraal van een rationale functie. Deze integraal kan vervolgens met de hiervoor besproken technieken uitgerekend worden.

Voorbeeld 8.6.5. Voor $I = \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta$ vinden we na substitutie $x = \tan(\theta/2)$,

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \\ &= \ln |\tan(\theta/2)| + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 8.6.6. Als we de substitutie $x = \tan \theta/2$ gebruiken in

$$I_a = \int \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta,$$

waarin $a > 0$, dan volgt

$$\begin{aligned} I_a &= \int \left(a + \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx = \int \frac{2}{a(1+x^2) + 1-x^2} dx \\ &= \int \frac{2}{(a-1)x^2 + a+1} dx \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

De noemer heeft reële nulpunten als $0 < a < 1$. In dat geval stellen we

$$\frac{1+a}{1-a} = b^2, \quad \text{met } b > 0$$

en er volgt (ga zelf na)

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{2}{1-a} \int \frac{1}{b^2 - x^2} dx = \frac{2}{1-a} \cdot \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{b+x}{b-x} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \left| \frac{b + \tan \theta/2}{b - \tan \theta/2} \right| + C, \quad \text{als } 0 < a < 1. \end{aligned}$$

Als $a > 1$ dan heeft de noemer in (8.6.2) geen reële nulpunten. In dit geval nemen we

$$\frac{a+1}{a-1} = b^2, \quad \text{met } b > 0$$

en er volgt

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{2}{a-1} \int \frac{1}{x^2 + b^2} dx = \frac{2}{a-1} \cdot \frac{1}{b} \operatorname{bgtan} \left(\frac{x}{b} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{bgtan} \left(\frac{\tan \theta/2}{b} \right) \quad \text{als } a > 1. \end{aligned}$$

8.7 Integralen met een parameter

Het komt vaak voor dat een integraal afhangt van een **parameter**. Zo hangt de bepaalde integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx$$

af van de parameter α . De oneigenlijke integraal convergeert voor elke $\alpha > 0$ en we kunnen door

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \quad (8.7.1)$$

een functie $I(\alpha)$ van de veranderlijke $\alpha > 0$ definiëren. De integraal kan eenvoudig uitgerekend worden en er volgt

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Om de afgeleide van $I(\alpha)$ te berekenen vanuit de integraalvoorstelling (8.7.1) kunnen we een algemeen principe toepassen waarbij we mogen ‘afleiden binnen het integraalteken’. In het geval betekent dit dat

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x} \right) dx \quad (8.7.2)$$

Met $\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x}$ bedoelen we de afgeleide naar α waarbij we x als een constante beschouwen. Dit is in feite een partiële afgeleide waarover in een volgend hoofdstuk meer volgt. Dus

$$\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x} = -x e^{-\alpha x}.$$

Dan wordt (8.7.2)

$$\frac{dI}{d\alpha} = - \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx. \quad (8.7.3)$$

Omdat $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ is $\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}$, zodat uit (8.7.3) volgt dat

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = -\frac{dI}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (8.7.4)$$

De integraal (8.7.4) hadden we ook met partiële integratie kunnen uitrekenen.

Voorbeeld 8.7.1. Bereken $\int_0^1 x^\alpha \ln x dx$ voor $\alpha > -1$.

Merk op dat

$$x^\alpha \ln x = \frac{d}{d\alpha} x^\alpha.$$

Omdat

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = (\alpha+1)^{-1},$$

volgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha \ln x dx &= \frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^1 x^\alpha dx \right) = \frac{d}{d\alpha} ((\alpha+1)^{-1}) \\ &= -(\alpha+1)^{-2} = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 8.7.2. We laten zien dat

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}. \quad (8.7.5)$$

De integraal heeft geen parameter, maar we kunnen een parameter α toevoegen door

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}.$$

Aan het eind van de berekening nemen we $\alpha = 1$.

We weten dat

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha} \operatorname{bgtan} \frac{x}{\alpha} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

We leiden dit af naar α , waarbij we de afgeleide binnen het integraalteken mogen brengen. Omdat

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{x^2 + \alpha^2} \right) = \frac{-2\alpha}{(x^2 + \alpha^2)^2}$$

volgt er

$$\int_0^\infty \frac{-2\alpha}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\pi}{2\alpha} \right) = -\frac{\pi}{2\alpha^2}.$$

Hieruit volgt na deling door -2α

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^2} dx = \frac{\pi}{4\alpha^3}.$$

Als we hierin $\alpha = 1$ nemen dan vinden we (8.7.5).

8.8 Oefeningen

Oefening 8.1. Bereken de volgende integralen:

- | | |
|----------------------------------|---|
| (a) $\int \sin^2 3x \, dx$ | (d) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 nx \, dx \quad \text{met } n \in \mathbb{N}$ |
| (b) $\int \sin px \cos px \, dx$ | (e) $\int_0^\pi \sin x \cos 2x \, dx$ |
| (c) $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$ | (f) $\int \cos x \cos y \, dx \quad \text{met } y \in \mathbb{R}$ |

Oefening 8.2. Bepaal de oppervlakte van het gebied binnen een ellips met vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Oefening 8.3. Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de cirkel met middelpunt $(0, R)$ en straal r te wentelen rond de x -as.

Oefening 8.4. De golffuncties voor een deeltje in een doos (particle in a box) van lengte L zijn

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Toon aan dat deze functies voldoen aan de orthonormaliteitsvoorwaarden

$$\int_0^L \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{als } m = n, \\ 0 & \text{als } m \neq n. \end{cases}$$

Oefening 8.5. Bereken volgende integralen met behulp van een geschikte substitutie:

| | | |
|---|--|---|
| (a) $\int (3x+1)^p dx$ | (f) $\int e^{\sin x} \cos x dx$ | (k) $\int \frac{\operatorname{bgsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| (b) $\int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx$ | (g) $\int x \cos(3x^2-1) dx$ | (l) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$ |
| (c) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ | (h) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ | (m) $\int \tan x dx$ |
| (d) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx$ | (i) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ | (n) $\int \frac{\tan x}{\ln \cos x} dx$ |
| (e) $\int e^x (1+e^x)^{1/2} dx$ | (j) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$ | (o) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |

Oefening 8.6. Neem aan dat f een continue functie is op $[0, 1]$. Toon aan met behulp van de substitutie $y = 1 - x$ dat

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \frac{1}{2}.$$

Oefening 8.7. Bereken de oneigenlijke integralen

| |
|---|
| (a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| (b) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ |

Oefening 8.8. De verdeling van spectraallijnen in spectroscopie wordt vaak beschreven met de Lorentz functie

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{1 + T^2(\omega - \omega_0)^2}.$$

Hierin is $T > 0$ en $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Bereken

$$\int_{\omega_0}^\infty g(\omega) d\omega.$$

Oefening 8.9. Een benadering voor de rotationele partitiefunctie voor een lineaire rotor is

$$S(\alpha) = \int_0^\infty (2J+1)e^{-\alpha J(J+1)} dJ$$

waarin $\alpha > 0$ een parameter is die afhankelijk is van de temperatuur en het traagheidsmoment. Bereken $S(\alpha)$.

Oefening 8.10. Bereken volgende integralen met behulp van partiële integratie:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------------|---|
| (a) $\int x \sin x \, dx$ | (d) $\int_0^3 x\sqrt{1+x} \, dx$ | (g) $\int \operatorname{bgtan} x \, dx$ |
| (b) $\int x^p \ln x \, dx$ | (e) $\int e^{2x} \sin x \, dx$ | (h) $\int_1^3 \sqrt{x} \operatorname{bgtan} \sqrt{x} \, dx$ |
| (c) $\int_0^1 x e^x \, dx$ | (f) $\int e^{-2x} \cos x \, dx$ | (i) $\int x 2^x \, dx$ |

Oefening 8.11. Bereken volgende bepaalde integralen:

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|---|
| (a) $\int_0^1 \ln x \, dx$ | (c) $\int_0^1 \ln(1-x^2) \, dx$ | (e) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ |
| (b) $\int_0^1 (\ln x)^2 \, dx$ | (d) $\int_0^\infty x e^{-2x} \, dx$ | (f) $\int_0^\infty x^2 e^{-4x} \, dx$ |

Oefening 8.12. Men kan laten zien dat $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$. Gebruik dit resultaat om

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

te berekenen. Hierin zijn $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ gegeven waarden.

Oefening 8.13. De kansverdeling voor de snelheid v van een molecule met massa m in een gas van temperatuur T wordt gegeven door de Maxwell-Boltzmann verdeling

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}, \quad v > 0,$$

waarin k de Boltzmannconstante is.

- (a) Laat zien dat inderdaad $\int_0^\infty f(v) \, dv = 1$.
- (b) Bereken de gemiddelde snelheid $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) \, dv$.
- (c) Bereken de variantie $\sigma^2 = \int_0^\infty (v - \bar{v})^2 f(v) \, dv$.

Oefening 8.14. Bewijs met het principe van volledige inductie dat

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n! \quad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}.$$

Oefening 8.15. Bereken de integralen van de volgende rationale functies:

$$(a) \int \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

$$(f) \int_0^3 \frac{x^2-2}{x^2-4} dx$$

$$(b) \int \frac{x^2+4x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$$

$$(g) \int \frac{3x+2}{(x+2)(x-4)} dx$$

$$(c) \int \frac{x}{(x+1)^2(x-1)^2} dx$$

$$(h) \int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{x^4-1} dx$$

$$(i) \int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4} dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$$

$$(j) \int \frac{x^3}{x^3-1} dx$$

Oefening 8.16. Pas de substitutie $t = \tan \theta/2$ toe op de volgende goniometrische integralen:

$$(a) \int \frac{\tan \theta}{1 + \sin \theta} d\theta$$

$$(b) \int \frac{1}{a + \sin \theta + \cos \theta} d\theta$$

Oefening 8.17. Bereken de volgende integralen:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$(e) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$(b) \int \frac{x}{\sqrt{4-x}} dx$$

$$(f) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$$

$$(c) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-3x}} dx$$

$$(g) \int \sqrt{1+e^x} dx$$

$$(d) \int \sqrt{x - \sqrt{x^2-4}} dx$$

$$(h) \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

Oefening 8.18. Bereken de volgende integralen:

$$(a) \int e^{x^2} 2x dx$$

$$(f) \frac{x^2+x+1}{x^2+1} dx$$

$$(b) \int \cos^2 x \sin x dx$$

$$(g) \int \frac{x}{x^4+2x^2+2} dx$$

$$(c) \int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$(h) \int \frac{dx}{x^3(x+1)}$$

$$(d) \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx$$

$$(i) \int \frac{x^4}{x^2-1} dx$$

$$(e) \int \frac{1}{x^2-4x+7} dx$$

$$(j) \int \frac{1}{x^3+1} dx$$

Oefening 8.19. Bereken de volgende integralen:

$$(a) \int \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

$$(f) \int \sin(\ln x) dx$$

$$(b) \int \frac{\ln x}{x \ln x - x} dx$$

$$(g) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$(c) \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

$$(h) \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$(d) \int x^3 e^{x^2} dx$$

$$(i) \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$(e) \int (\ln x)^3 dx$$

$$(j) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 2} dx$$

Oefening 8.20. Bereken de volgende integralen:

$$(a) \int_1^e \ln x dx$$

$$(c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

$$(b) \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 + \cos 2x} dx$$

Oefening 8.21. Bereken de totale massa en het massamiddelpunt van een ijzeren staaf van lengte L met massadichtheid

$$\rho(x) = \sqrt{L^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Oefening 8.22. Toon aan dat $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}.$

Oefening 8.23. Toon aan dat

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

door de integraal

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

n keer af te leiden naar α en vervolgens $\alpha = 1$ te stellen.

Oefening 8.24. Toon aan dat

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

door

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

af te leiden naar a .

Oefening 8.25. Neem aan dat een cirkelvormige schijf van straal a een uniforme ladingsdichtheid σ heeft. De elektrische kracht op een punt op afstand r van het middelpunt van de schijf is dan

$$F = 2\pi\sigma r \int_0^a \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

- (a) Bereken deze kracht.
- (b) Bereken de limiet van F voor $a \rightarrow +\infty$.

Oefening 8.26. Neem aan dat een lading q uniform verdeeld is op het oppervlak van een sfeer van straal a . De elektrische potentiaal V op afstand r van het middelpunt van de sfeer is dan gelijk aan

$$V = \frac{q}{2a} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - 2rx + r^2}}.$$

Toon aan dat

$$V = \begin{cases} \frac{q}{a} & \text{als } r \leq a, \\ \frac{q}{r} & \text{als } r > a. \end{cases}$$

Oefening 8.27. Bij een zekere tweede orde chemische reactie wordt een hoeveelheid X van een stof geproduceerd. De hoeveelheid X hangt samen met de reactietijd volgens

$$kt = \int_0^X \frac{dx}{(1-x)(3-x)}$$

waarin k de reactieconstante is.

Bereken de integraal en los op naar X . Neem aan dat $0 < X < 1$.

Oefening 8.28. (Examenvraag)

- (a) Bereken de integraal

$$\int_0^\infty |x - c|e^{-2x} dx$$

waarin $c \in \mathbb{R}$.

- (b) Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is de integraal minimaal?

Oefening 8.29. (Deel van examenvraag)

Bereken de integraal

$$\int_0^\infty \frac{1}{ce^x - 1} dx$$

met $c > 1$. Als het met algemene c niet lukt, neem dan $c = 2$.

Hoofdstuk 9

Functies van twee of meer veranderlijken

9.1 Grafische voorstelling

9.1.1 Inleiding

Als de ideale gaswet geschreven wordt in de vorm

$$V = f(p, T, n) = \frac{nRT}{p}$$

dan drukken we uit dat het volume V van het gas bepaald wordt door de waarden van de druk p , de temperatuur T en hoeveelheid gas n . Dan is V een functie van de drie veranderlijken p , T en n .

Functies van meerdere veranderlijken komen bijzonder veel voor in de wetenschappen. Als een grootte afhangt van de positie in de ruimte dan is het een functie van de drie coördinaten x , y en z . Als de waarde van de grootte ook verandert in de tijd, dan is het een functie van vier veranderlijken x , y , z en t .

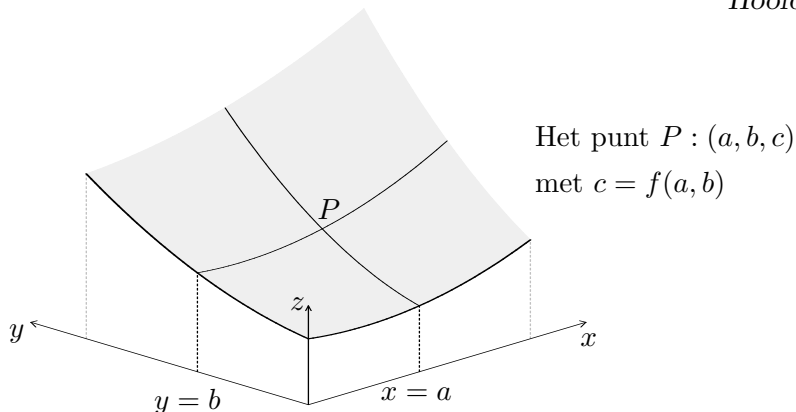
In dit hoofdstuk bestuderen we reële functies van meerdere reële veranderlijken met nadruk op het geval van twee veranderlijken. De twee veranderlijken noteren we in het algemeen met x en y en de functie noteren we met f . De **afhankelijke veranderlijke** geven we aan met z zodat

$$z = f(x, y). \quad (9.1.1)$$

De veranderlijken x en y zijn de **onafhankelijke veranderlijken**. Het domein $\text{dom } f$ van f bestaat uit alle koppels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor we $z = f(x, y)$ kunnen uitrekenen. Om het domein van de functie te benadrukken wordt de volgende uitgebreide en meer precieze notatie gebruikt om de functie aan te geven

$$f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \in \text{dom } f \mapsto z = f(x, y).$$

Deze notatie maakt ook duidelijk dat f een reële functie is, m.a.w. dat de waarde $f(x, y)$ een reëel getal is. In deze cursus beperken we ons tot de notatie (9.1.1).



Figuur 9.1: Grafiek van een functie $z = f(x, y)$.

Een reële functie van n reële veranderlijken x_1, \dots, x_n schrijven we als

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Hierin is z de afhankelijke veranderlijke en x_1, \dots, x_n zijn de onafhankelijke veranderlijken. In de uitgebreide notatie schrijven we

$$f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f \mapsto z = f(x_1, \dots, x_n).$$

9.1.2 Grafiek

De **grafiek** van een functie van twee veranderlijken is een **oppervlak** in de drie-dimensionale ruimte.

We kiezen drie loodrechte assen in de drie-dimensionale ruimte, de x -as, de y -as en de z -as. Een punt met coördinaten (x, y, z) zien we als een punt met hoogte z boven het punt (x, y) in het horizontale xy -vlak.

Zij $z = f(x, y)$ een functie van twee veranderlijken. Elk koppel (a, b) in het domein van f geeft dan aanleiding tot een punt $P : (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$. Dit is het punt met hoogte c boven het punt (a, b) in het xy -vlak, zoals geïllustreerd in Figuur 9.1. Als (x, y) het domein van de functie f doorloopt, dan doorloopt het punt P een zeker oppervlak in de drie-dimensionale ruimte. Dit oppervlak is de grafiek van de functie.

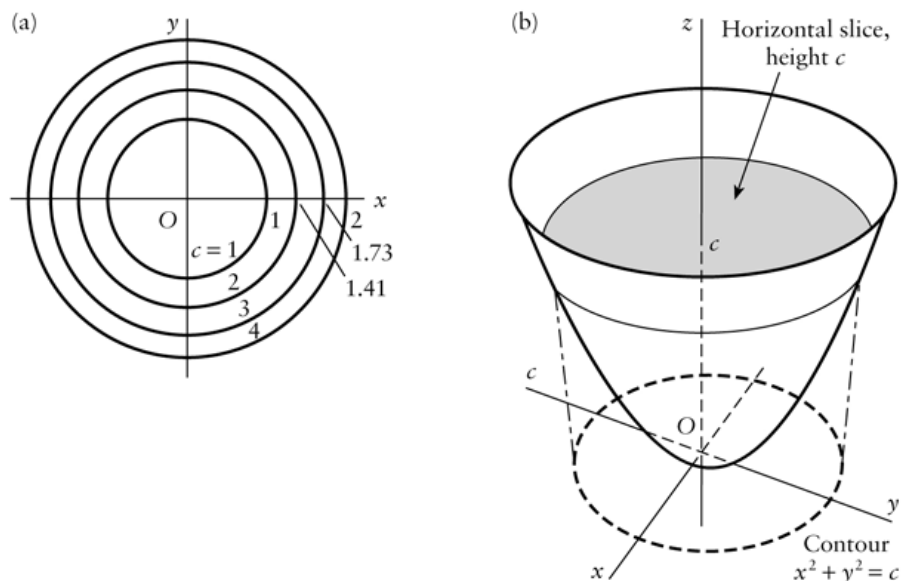
De grafiek van een functie

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

van n veranderlijken is het deel van de $(n + 1)$ -dimensionale ruimte bestaande uit alle $(n + 1)$ -tallen

$$(x_1, \dots, x_n, z) \quad \text{met } z = f(x_1, \dots, x_n).$$

Voor $n = 3$ of hoger kunnen we ons hiervan moeilijk een voorstelling maken, omdat de grafiek zich dan bevindt in een vier-dimensionale of een nog hoger dimensionale ruimte.


 Figuur 9.2: Niveaукrommen van de functie $z = x^2 + y^2$.

9.1.3 Niveaукrommen

Een functie van twee veranderlijken kan ook voorgesteld worden door middel van **niveaукrommen** of **contouren**. Dit begrip zijn we ook al tegengekomen in paragraaf 2.5.1. De niveaукromme van de functie $z = f(x, y)$ behorende bij de waarde c bestaat uit alle koppels (x, y) met $f(x, y) = c$. Door de niveaукrommen van f bij een groot aantal waarden c te tekenen kan een beeld gevormd worden van het verloop van de functie. Zie Figuur 9.2 voor een aantal niveaукrommen van de functie $z = x^2 + y^2$. Voor deze functie zijn de niveaукrommen

$$x^2 + y^2 = c$$

cirkels met de oorsprong als middelpunt.

De niveaукromme van f bij de waarde c kunnen we zien als de doorsnede van de grafiek van f met het horizontale vlak $z = c$, zie de rechterfiguur in Figuur 9.2.

9.2 Partiële afgeleiden

9.2.1 Eerste orde partiële afgeleiden

De eerste orde partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ van een functie $f(x, y)$ van twee veranderlijken zijn kort ingevoerd op het einde van Hoofdstuk 4, zie paragraaf 4.10.

Om de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial x}$ van een functie $f(x, y)$ te berekenen, beschouwen we y als een vaste waarde en we beschouwen $f(x, y)$ alleen als functie van x . De bijbehorende afgeleide is dan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Net zo is

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Neem bijvoorbeeld

$$z = f(x, y) = e^{xy} + y \ln x$$

waarbij we y vast nemen. Dan is z alleen afhankelijk van x , en de afgeleide van f naar x is gelijk aan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{y}{x}.$$

Dit is de **partiële afgeleide** van f naar x , waarbij we y vast houden. Net zo is de afgeleide van f naar y , waarbij we x vast houden, gelijk aan

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + \ln x$$

en dit is de partiële afgeleide van f naar y . Deze partiële afgeleiden hangen af van de waarden van x en y waar ze uitgerekend worden. De partiële afgeleiden zijn ook weer functies van x en y .

De twee partiële afgeleiden van een functie van twee veranderlijken worden vaak samengenomen als een koppel (of een vector)

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Dit noemen we de **gradiënt** van f . Een andere notatie is

$$\nabla f.$$

Het symbool ∇ heet 'nabla'.

Voorbeeld 9.2.1. Als $f(x, y) = 2xy + 3y^2$, dan $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y$, zodat

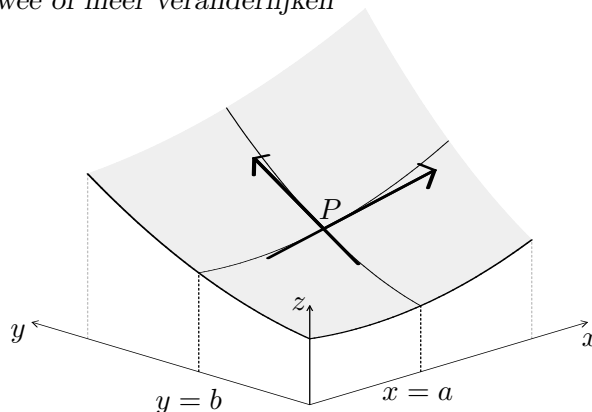
$$\text{grad } f = \nabla f = (2y, 2x + 6y).$$

9.2.2 Meetkundige betekenis

De meetkundige betekenis van partiële afgeleiden wordt geïllustreerd in Figuur 9.3. Als we y een vaste waarde geven, zeg $y = b$ zoals in de figuur, dan krijgen we een kromme $z = f(x, b)$ als doorsnede van de grafiek van f met het vlak $y = b$. De partiële afgeleide van f naar x , uitgerekend in de waarde $x = a$ die hoort bij het punt P , levert de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan deze kromme in P .

Evenzo kunnen we $x = a$ een vaste waarde geven en alleen y laten variëren. De kromme $z = f(a, y)$ is de doorsnede van de grafiek van f met het vlak $x = a$. De partiële afgeleide van f naar y , uitgerekend in $y = b$, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan deze kromme in P .

De twee partiële afgeleiden bepalen dus twee raaklijnen aan de grafiek van f . Samen bepalen deze twee raaklijnen het **raakvlak** aan de grafiek. Meer over rechten en vlakken in drie dimensies volgt in een volgend hoofdstuk.



Figuur 9.3: Illustratie bij partiële afgeleiden.

9.2.3 Hogere orde partiële afgeleiden

De eerste orde partiële afgeleiden zijn zelf functies van twee (of meer) veranderlijken. De partiële afgeleiden van deze functies noemen we **tweede orde partiële afgeleiden** of kortweg **tweede orde afgeleiden**. Als bijvoorbeeld

$$z = x^3 - 3xy^2 + y^3$$

dan zijn de eerste orde partiële afgeleiden gelijk aan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6xy + 3y^2.$$

De partiële afgeleiden van $\partial z / \partial x$ zijn

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6y$$

en de partiële afgeleiden van $\partial z / \partial y$ zijn

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6y \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6x + 6y.$$

Voor een functie van twee veranderlijken zijn er in totaal vier partiële afgeleiden van tweede orde.

We kunnen hiermee doorgaan en derde orde partiële afgeleiden vormen. Voor een functie van twee veranderlijken zijn er 8 mogelijke derde orde partiële afgeleiden.

In het bovenstaande voorbeeld heeft u wellicht opgemerkt dat

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \quad (9.2.1)$$

Deze gelijkheid van de **gemengde tweede orde partiële afgeleiden** is geen toeval. Het blijkt algemeen geldig te zijn voor functies waarvan de eerste en tweede orde partiële afgeleiden bestaan en continue functies van x en y zijn. In alle voorbeelden die we in deze cursus zullen tegenkomen zal dit het geval zijn. De gelijkheid van de gemengde partiële afgeleiden is een niet-triviaal resultaat dat toegeschreven wordt aan de wiskundigen Schwarz en Young, en daarom de **stelling van Schwarz en Young** genoemd wordt.

9.2.4 Afleiden onder het integraalteken

Als toepassing van de gelijkheid (9.2.1) van de tweede orde partiële afgeleiden bespreken we een techniek om de afgeleide te berekenen van functies die gegeven worden door een integraal van de vorm

$$I(x) = \int_a^b f(x, y) dy. \quad (9.2.2)$$

Hierin is $f(x, y)$ een functie van twee veranderlijken. Bij vast gekozen x wordt de functie geïntegreerd tussen $y = a$ en $y = b$. Het resultaat hiervan hangt af van x en dit levert ons de functie $I(x)$. De afgeleide van $I(x)$ kunnen we bepalen via de regel van het ‘afleiden onder het integraalteken’.

Stelling 9.2.2. *Neem aan dat $f(x, y)$ een functie is waarvan de eerste orde partiële afgeleiden bestaan en continu zijn. Dan is de functie $I(x)$ gedefinieerd door (9.2.2) afleidbaar met*

$$\frac{dI}{dx} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \quad (9.2.3)$$

Bewijs. Bij vast gekozen x nemen we een primitieve $F(x, y)$ van $f(x, y)$ met betrekking tot de veranderlijke y . Dat wil zeggen dat

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f(x, y). \quad (9.2.4)$$

Vanwege de hoofdstelling van de integraalrekening geldt dan

$$I(x) = \int_a^b f(x, y) dy = F(x, b) - F(x, a). \quad (9.2.5)$$

Uit (9.2.5) volgt dan dat

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, b) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, a). \quad (9.2.6)$$

Anderzijds geldt vanwege de gelijkheid van de gemengde tweede orde partiële afgeleiden van F dat

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

waarbij we (9.2.4) gebruikt hebben in de laatste stap. Met andere woorden, bij vast gekozen x is $\frac{\partial F}{\partial x}$ een primitieve functie voor $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ met betrekking tot de veranderlijke y . Bijgevolg is, wederom vanwege de hoofdstelling van de integraalrekening,

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \frac{\partial F}{\partial x}(x, b) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, a). \quad (9.2.7)$$

Uit (9.2.6) en (9.2.7) volgt (9.2.3) en de stelling is bewezen. \square

Voorbeeld 9.2.3. Beschouw de integraal

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta.$$

Het is een uitdaging om deze integraal uit te rekenen met ‘gewone’ methoden.

We introduceren een veranderlijke x en schrijven

$$I(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Dan is duidelijk

$$I = I(1) \quad \text{en} \quad I(0) = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi.$$

We berekenen $\frac{dI}{dx}$ door af te leiden onder het integraalteken

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} (\cos \theta \cos(x \sin \theta) - \sin \theta \sin(x \sin \theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

Merk nu op dat

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(e^{x \cos \theta} \sin(x \sin \theta) \right) = x e^{x \cos \theta} (\cos \theta \cos(x \sin \theta) - \sin \theta \sin(x \sin \theta))$$

en dit is, op de factor x na, precies de integrand in (9.2.8). Bijgevolg is

$$\frac{dI}{dx} = \frac{1}{x} \left[e^{x \cos \theta} \sin(x \sin \theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{x} [0 - 0] = 0.$$

De afgeleide van $I(x)$ is gelijk aan nul, zodat de functie $I(x)$ constant is. Omdat $I(0) = 2\pi$, is $I(x) = 2\pi$ voor alle x , en in het bijzonder voor $x = 1$. Dus

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 2\pi.$$

9.2.5 Meer dan twee veranderlijken

Voor een reële functie van n veranderlijken

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

kunnen we op analoge manier de eerste orde en hogere orde partiële afgeleiden invoeren.

De partiële afgeleide

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

is de afgeleide naar de veranderlijke x_j waarbij we alle andere veranderlijken onveranderd laten. Een andere notatie hiervoor is

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}.$$

De n partiële afgeleiden kunnen we samen nemen in een vector van lengte n , de **gradiënt** van f :

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

De partiële afgeleiden zijn functies van de veranderlijken x_1, \dots, x_n , die we in veel gevallen weer partieel kunnen afleiden naar elk van de veranderlijken. Als we de partiële afgeleide $\frac{\partial z}{\partial x_j}$ partieel afleiden naar de veranderlijke x_k ontstaat de tweede orde partiële afgeleide

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Omdat we dit kunnen doen voor elke j en k met $1 \leq j \leq n$ en $1 \leq k \leq n$, zijn er in totaal n^2 mogelijke tweede orde partiële afgeleiden voor een functie van n veranderlijken.

De gelijkheid van de gemengde tweede orde afgeleiden geldt ook in deze situatie, onder de voorwaarden die in de volgende stelling vermeld staan. Het bewijs van de stelling zullen we hier niet geven.

Stelling 9.2.4. (stelling van Schwarz en Young) Als $z = f(x_1, \dots, x_n)$ een functie van n veranderlijken is waarvoor de eerste en tweede orde partiële afgeleiden bestaan en continue functies zijn van x_1, \dots, x_n , dan geldt voor elke j en k met $1 \leq j \leq n$ en $1 \leq k \leq n$ dat

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_j}. \quad (9.2.9)$$

Om op een overzichtelijke manier met de tweede orde partiële afgeleiden te kunnen werken worden ze vaak samengenomen in een $n \times n$ matrix H waarin $\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k}$ het element is in rij j en kolom k . Deze matrix H heet de **Hessiaan** van de functie f . Voor het geval $n = 3$ is de Hessiaan gelijk aan de volgende 3×3 matrix

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}.$$

Vanwege de gelijkheid (9.2.9) van de gemengde tweede orde partiële afgeleiden is de matrix H **symmetrisch**, d.w.z. dat het element in rij j en kolom k gelijk is aan het element in rij k en kolom j . Anders gezegd: de matrix verandert niet als we de rijen en kolommen met elkaar verwisselen.

Meer over matrices volgt in Wiskunde II.

9.2.6 Andere notatie

Andere notatie die voor partiële afgeleiden gebruikt wordt is

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2},$$

enzovoorts. Met deze notatie wordt de gelijkheid van de gemengde tweede orde afgeleiden uitgedrukt door

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Voor de derde orde partiële afgeleiden geldt (onder de vereiste continuïteitsvoorwaarden op de derde orde afgeleiden)

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy},$$

zodat er onder de 8 mogelijke derde orde partiële afgeleiden van een functie van twee veranderlijken maar vier verschillend zijn:

$$f_{xxx}, \quad f_{xxy}, \quad f_{xyy}, \quad f_{yyy}.$$

Voorbeeld 9.2.5. (a) Als $u = x + xy + 2y^3$ dan is

$$u_x = 1 + y, \quad u_y = x + 6y^2, \quad u_{xy} = 1, \quad u_{yy} = 12y, \quad u_{yyy} = 12$$

Alle andere partiële afgeleiden zijn gelijk aan 0.

(b) De eerste en tweede orde partiële afgeleiden van $u = \sin x \cos y + x/y$ zijn

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cos y + \frac{1}{y}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \sin y - \frac{x}{y^2},$$

en

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \cos y, & u_{xy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y - \frac{1}{y^2}, \\ u_{yx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y - \frac{1}{y^2}, & u_{yy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \cos y + \frac{2x}{y^3}. \end{aligned}$$

Merk op dat inderdaad $u_{xy} = u_{yx}$.

In sommige wetenschapsgebieden wordt een eigen notatie gebruikt voor partiële afgeleiden. Zo is het in de thermodynamica gebruikelijk om bij de partiële afgeleiden expliciet aan te geven welke veranderlijken constant gehouden worden. Als het gaat om een functie $f(x, y, z)$ van drie veranderlijken dan wordt dit genoteerd met

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z}$$

voor de afgeleide van f bij constante y en z .

Voorbeeld 9.2.6. Voor een ideaal gas geldt $V = nRT/p$. Dan is

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,n} = -\frac{nRT}{p^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,n} = \frac{nR}{p}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{p,T} = \frac{RT}{p}.$$

9.3 De totale differentiaal

9.3.1 Inleiding

De partiële afgeleiden geven aan hoe een functie $z = f(x, y)$ verandert bij verandering van één van de veranderlijken, waarbij de andere veranderlijke constant blijft. Als (x, y) verandert naar $(x + \Delta x, y)$ dan geldt voor de verandering

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

dat

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x \quad (9.3.1)$$

De benadering (9.3.1) wordt steeds beter naarmate Δx dichterbij nul komt. Voor infinitesimale veranderingen gaat (9.3.1) over in

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx. \quad (9.3.2)$$

De eigenschappen (9.3.1) en (9.3.2) zijn niets anders dan de eigenschappen (4.8.2) en (4.8.3) die we in Hoofdstuk 4 voor functies van één veranderlijke hebben gezien. We benadrukken dat (9.3.1) en (9.3.2) alleen geldig zijn als er geen verandering in de y -veranderlijke is. Dus (9.3.1) geldt als $\Delta y = 0$ en (9.3.2) geldt als $dy = 0$.

Op dezelfde wijze volgt bij een kleine verandering van y naar $y + \Delta y$, waarbij x constant blijft, dat

$$\Delta z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

voldoet aan

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y \quad (9.3.3)$$

en

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy. \quad (9.3.4)$$

De uitdrukkingen (9.3.3) en (9.3.4) zijn geldig als er geen verandering in de x -veranderlijke is. Dus (9.3.3) geldt als $\Delta x = 0$ en (9.3.4) geldt als $dx = 0$.

We vragen ons nu af wat er gebeurt als x en y allebei veranderen. Waarvoor moeten we (9.3.1) en (9.3.3) vervangen als $\Delta x \neq 0$ en $\Delta y \neq 0$? Op het niveau van differentiaal wordt de vraag waardoor we (9.3.2) en (9.3.4) moeten vervangen als $dx \neq 0$ en $dy \neq 0$.

Deze vraag leidt tot de totale differentiaal en de totale afgeleide.

9.3.2 Totale differentiaal dz

Veronderstel dat x en y veranderen van (x, y) naar $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. De verandering in de functiewaarde is dan

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (9.3.5)$$

Laten we (9.3.5) uitrekenen voor een kwadratische functie

$$z = f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Voor deze kwadratische functie geldt

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x)(y + \Delta y) + c(y + \Delta y)^2$$

zodat

$$\begin{aligned} \Delta z &= a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x)(y + \Delta y) + c(y + \Delta y)^2 - ax^2 - bxy - cy^2 \\ &= a(2x\Delta x + (\Delta x)^2) + b(x\Delta y + y\Delta x + (\Delta x)(\Delta y)) + c(2y\Delta y + (\Delta y)^2). \end{aligned}$$

Dit kunnen we herschrijven tot

$$\Delta z = (2ax + by)\Delta x + (bx + 2cy)\Delta y + a(\Delta x)^2 + b(\Delta x)(\Delta y) + c(\Delta y)^2.$$

Omdat

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + by, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = bx + 2cy$$

en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2c$$

kunnen we de verandering Δz ook schrijven als

$$\begin{aligned} \Delta z &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) (\Delta x)(\Delta y) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) (\Delta y)^2. \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

De formule (9.3.6) is exact voor de gegeven kwadratische functie en voor alle functies waarvan de derde en hogere orde partiële afgeleiden gelijk aan nul zijn. Voor een algemene functie $f(x, y)$ geeft de rechterkant van (9.3.6) de eerste termen van een Taylorontwikkeling rond het punt (x, y) .

Als Δx en Δy allebei klein zijn, dan zijn de kwadratische termen $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)(\Delta y)$ en $(\Delta y)^2$ nog veel kleiner. Als we deze termen verwaarlozen, dan vinden we de eerste orde benadering voor Δz :

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y. \quad (9.3.7)$$

Dit resultaat is de gezochte veralgemening van (9.3.1) en (9.3.3). Merk op dat (9.3.7) overgaat in (9.3.1) als $\Delta y = 0$ en in (9.3.3) als $\Delta x = 0$.

De formule (9.3.7) laat zien dat bij kleine veranderingen Δx en Δy de totale verandering in z bij benadering gelijk is aan de verandering in z vanwege de verandering Δx (dit is de eerste term in de rechterkant van (9.3.7)) plus de verandering in z vanwege de verandering Δy (de tweede term in de rechterkant van (9.3.7)).

De benadering (9.3.7) wordt beter naarmate Δx en Δy kleiner worden. Bij infinitesimale veranderingen dx en dy gaat (9.3.7) over in een gelijkheid

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy. \quad (9.3.8)$$

Dit noemen we de **totale differentiaal** van z met betrekking tot x en y .

Men kan aantonen dat (9.3.7) en (9.3.8) geldig zijn voor alle continue functies van twee veranderlijken met continue partiële afgeleiden. Dit staat geformuleerd in de volgende stelling. Het bewijs van de stelling valt echter buiten het bereik van deze cursus.

Stelling 9.3.1. *Neem aan dat $z = f(x, y)$ een continue functie van twee veranderlijken is waarvoor de partiële afgeleiden bestaan en continue functies zijn. Dan geldt bij kleine veranderingen Δx en Δy dat*

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

voldoet aan

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y. \quad (9.3.9)$$

Voor de bijbehorende differentialen geldt

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy. \quad (9.3.10)$$

Voor een reële functie van meer dan twee veranderlijken

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

geldt analoog dat

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \Delta x_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \Delta x_n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right) \Delta x_k. \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

De totale differentiaal is gelijk aan

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n} \right) dx_n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right) dx_k. \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

Voorbeeld 9.3.2. Zij $z = x^2 - 3xy + y^2$. Dan is de totale differentiaal

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x - 3y)dx + (-3x + 2y)dy.$$

Stel dat (x, y) verandert van $(2, 1)$ naar $(2.05, 0.96)$. Dan is $\Delta x = 0.05$ en $\Delta y = -0.04$. Voor de verandering Δz in z geldt dan bij benadering

$$\begin{aligned}\Delta z &\approx \frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) \cdot \Delta y \\ &= 1 \cdot 0.05 + (-4) \cdot (-0.04) = 0.21\end{aligned}$$

Dit ligt inderdaad redelijk dicht bij de echte waarde $\Delta z = 0.2201$.

9.3.3 Raakvlak aan de grafiek

Als toepassing van de totale differentiaal berekenen we de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van een functie $z = f(x, y)$. Neem een punt $P : (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ op de grafiek van f .

Als (x, y, z) , $z = f(x, y)$ een willekeurig punt op de grafiek is, dan geldt

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = z - z_0.$$

Als (x, y, z) dicht bij $P : (x_0, y_0, z_0)$ ligt, dan geldt vanwege (9.3.7) dat

$$z - z_0 \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) (y - y_0)$$

waarbij we ons moeten bedenken dat de partiële afgeleiden uitgerekend worden in (x_0, y_0) . Als we schrijven

$$a = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) (x_0, y_0), \quad b = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \quad (9.3.13)$$

dan geldt dus

$$z - z_0 \approx a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Als we hierin \approx vervangen door een gelijkheid

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad (9.3.14)$$

dan krijgen we een vergelijking van een vlak in de drie-dimensionale ruimte. Het punt (x_0, y_0, z_0) voldoet aan de vergelijking en ligt bijgevolg op het vlak. Het vlak gegeven door vergelijking (9.3.14) met a en b gegeven door (9.3.13) is het **raakvlak** aan de grafiek van de functie $z = f(x, y)$ in P .

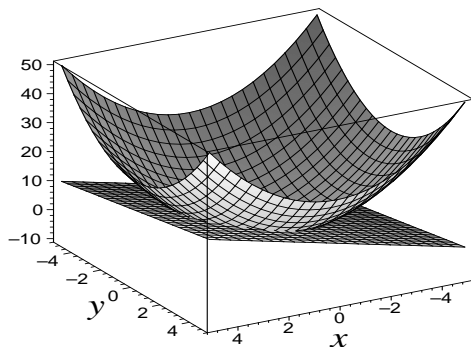
Voorbeeld 9.3.3. Bereken de vergelijking van het vlak dat het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ raakt in het punt $P : (2, 1, -2)$.

Merk op dat de z -coördinaat van P negatief is. Rond P komt het boloppervlak bijgevolg overeen met de grafiek van de functie

$$z = f(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

We berekenen de partiële afgeleiden

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -(-2x) \cdot \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -(-2y) \cdot \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-1/2} = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.\end{aligned}$$



Figuur 9.4: Het raakvlak aan de grafiek van een functie $z = f(x, y)$.

Voor $x = 2$ en $y = 1$ wordt dit

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = \frac{1}{2}$$

zodat volgens (9.3.14) het raakvlak in P gelijk is aan

$$z - (-2) = 1 \cdot (x - 2) + \frac{1}{2} \cdot (y - 1)$$

ofwel $z = x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2}$, of nog anders geschreven

$$2x + y - 2z = 9.$$

9.4 Totale afgeleide

9.4.1 Kettingregel

Neem aan dat $z = f(x, y)$ en dat x en y functies zijn van een nieuwe veranderlijke t :

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Dan is de samenstelling

$$z = f(x(t), y(t))$$

een functie van de veranderlijke t . Dit is een functie van één veranderlijke. De **totale afgeleide** van z is de afgeleide $\frac{dz}{dt}$ naar t .

Het verband tussen de totale afgeleide $\frac{dz}{dt}$ en de partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ wordt uitgedrukt door de **kettingregel** voor functies van twee veranderlijken.

We hebben in (9.3.7) gezien dat

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y. \quad (9.4.1)$$

We weten ook dat een kleine verandering Δt aanleiding geeft tot veranderingen Δx en Δy met

$$\Delta x \approx \frac{dx}{dt} \Delta t, \quad \Delta y \approx \frac{dy}{dt} \Delta t.$$

Als we dit gebruiken in (9.4.1) dan volgt na deling door Δt dat

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt}$$

De benadering wordt beter naarmate Δt kleiner wordt. In de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ volgt

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt}. \quad (9.4.2)$$

Formule (9.4.2) is de gezochte vorm voor de kettingregel voor functies van twee veranderlijken.

In termen van differentiaal hebben we de gelijkheden

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} dt + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} dt. \end{aligned}$$

Voor een reële functie $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ van n veranderlijken waarin alle veranderlijken $x_k = x_k(t)$ afhangen van t , geldt analoog aan (9.4.2) dat

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \frac{dx_2}{dt} + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right) \frac{dx_k}{dt}. \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

Voorbeeld 9.4.1. Bereken $\frac{dz}{dt}$ als $z = x^2 + y^3$ met $x = e^t$ en $y = e^{-t}$.

De afgeleide kunnen we op twee manieren berekenen. Ofwel bepalen we eerst $z(t)$ expliciet en we leiden dan af, ofwel gebruiken we de kettingregel (9.4.2).

(i) Na substitutie vinden we $z = z(t) = e^{2t} + e^{-3t}$, zodat

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2t} - 3e^{-3t}.$$

(ii) Er geldt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = -e^{-t}.$$

De kettingregel (9.4.2) levert bijgevolg

$$\frac{dz}{dt} = 2xe^t - 3y^2e^{-t}.$$

Omdat $x = e^t$ en $y = e^{-t}$ vinden we uiteindelijk

$$\frac{dz}{dt} = 2e^t e^t - 3(e^{-t})^2 e^{-t} = 2e^{2t} - 3e^{-3t}.$$

Voorbeeld 9.4.2. (Beweging op een cirkel) De cirkel met de oorsprong als middelpunt en met straal a heeft vergelijking $x^2 + y^2 = a^2$.

Een beweging over de cirkel is het eenvoudigst te beschrijven met poolcoördinaten

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta.$$

Als $z = f(x, y)$ dan geldt vanwege de kettingregel (9.4.2) dat

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{d\theta}.$$

Omdat poolcoördinaten aan $dx/d\theta = -y$ en $dy/d\theta = x$ voldoen, wordt dit

$$\frac{dz}{d\theta} = -y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Als bijvoorbeeld $z = xy$ dan

$$\frac{dz}{d\theta} = x^2 - y^2 = a^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

Speciaal geval

Een speciaal geval van de totale afgeleide is als t vervangen wordt door x . Stel dat $y = y(x)$ een functie is van x . Dan kan $z = f(x, y(x))$ gezien worden als een functie van x alleen. Dan volgt uit (9.4.2)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (9.4.4)$$

Voorbeeld 9.4.3. Neem aan dat $z = x^2 + y^3$ en $y = 1/x$. Dan is

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

en vanwege (9.4.4) geldt

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3y^2 \cdot (-x^{-2}) = 2x - 3y^2 x^{-2}.$$

Omdat $y = 1/x$ volgt dat

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 3x^{-4}.$$

9.4.2 Niveaukrommen

Een **niveaукromme** van de functie $z = f(x, y)$ is een kromme in het xy -vlak waarop de functie constant is

$$f(x, y) = c. \quad (9.4.5)$$

Zij $(x(t), y(t))$ een parametrisatie van de niveaukromme (9.4.5) met behulp van een parameter t . Dan geldt

$$z = f(x(t), y(t)) = c \quad \text{voor elke } t.$$

Bijgevolg is de totale afgeleide

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Als we dit combineren met de kettingregel (9.4.2) dan zien we dat

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{dy}{dt} = 0. \quad (9.4.6)$$

Nemen we aan dat een parametrisatie van de niveaukromme gegeven wordt door $(x, y(x))$. In dit speciaal geval wordt (9.4.6) de volgende vergelijking, omwille van (9.4.4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (9.4.7)$$

We vinden hieruit dat

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \quad (9.4.8)$$

Zoals bekend is $\frac{dy}{dx}$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan een kromme $y = y(x)$. Bijgevolg geeft (9.4.8) ons de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de niveaukromme. Als we de raaklijn aan de niveaukromme willen opstellen in een bepaald punt (x_0, y_0) , dan moeten we de partiële afgeleiden in (9.4.8) uitrekenen in het desbetreffende punt (x_0, y_0) , zeg

$$a = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (9.4.9)$$

Dan, als we veronderstellen at $b \neq 0$, is de richtingscoëfficiënt gelijk aan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$$

zodat de raaklijn de vorm heeft

$$y = -\frac{a}{b}x + k \quad (9.4.10)$$

waarin k zodanig gekozen wordt dat (x_0, y_0) aan (9.4.10) voldoet. Dit betekent dat

$$k = y_0 + \frac{a}{b}x_0$$

en dan wordt (9.4.10)

$$y = -\frac{a}{b}x + y_0 + \frac{a}{b}x_0.$$

Dit kan in een meer symmetrische vorm geschreven worden als

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \quad (9.4.11)$$

waarin a en b gegeven zijn door (9.4.9).

Voorbeeld 9.4.4. Bereken de raaklijn aan de niveaukromme van $z = x^2y^3$ die gaat door het punt $(2, 1)$.

Er geldt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

In het punt $(2, 1)$ is dat

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = 12.$$

Volgens (9.4.9) is $a = 4$ en $b = 12$, zodat vanwege (9.4.11) de raaklijn gegeven wordt door

$$4(x - 2) + 12(y - 1) = 0.$$

We kunnen dit nog eenvoudiger schrijven als

$$x + 3y = 5.$$

Opmerking over notatie in thermodynamica

Het komt wel eens voor dat de drie veranderlijken x , y en z als gelijkwaardig beschouwd worden. Dit treedt met name op in de thermodynamica voor de drie veranderlijken druk p , temperatuur T en volume V .

Neem aan dat er een verband $z = f(x, y)$ tussen x , y en z gegeven is. De partiële afgeleiden worden in de thermodynamica genoteerd met

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

waarbij het subscript x of y aangeeft dat x of y constant gehouden wordt.

Als we de veranderlijken op een gelijkwaardige manier beschouwen kunnen we $z = f(x, y)$ ook herschrijven tot functies

$$y = g(x, z), \quad \text{of} \quad x = h(y, z),$$

waarbij we de gelijkheid $z = f(x, y)$ oplossen naar y en x , respectievelijk. We hebben dan de analoge partiële afgeleiden

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y.$$

De partiële afgeleide $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ is de afgeleide van y naar x bij gelijkblijvende z . Als z gelijk blijft, dan bewegen we ons over de niveaukromme van $z = f(x, y)$. Bijgevolg is $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ gelijk aan de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ waarvan sprake is in (9.4.8).

Als we ook gebruik maken van de regel voor de afgeleide van de inverse functie, waardoor bv. geldt

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right]^{-1}$$

en (net zo voor elke permutatie van x , y en z), dan kunnen we (9.4.8) herschrijven tot

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1.$$

9.4.3 Verandering van onafhankelijke veranderlijken

Zij $z = f(x, y)$ een reële functie van de onafhankelijk veranderlijken x en y met een totale differentiaal

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy.$$

Stel dat x en y op hun beurt afhangen van twee nieuwe veranderlijken u en v :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Dan kan z beschouwd worden als functie van u en v :

$$z = f(x(u, v), y(u, v))$$

met als totale differentiaal

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) dv.$$

De partiële afgeleiden hierin hangen als volgt samen

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Dit is een gevolg van de kettingregel (9.4.2)

De inverse relaties zijn als volgt (hier veronderstellen we dat u en v als functies van x en y geschreven kunnen worden):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Een belangrijk voorbeeld hiervoor treedt op bij overgang naar poolcoördinaten

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta.$$

De poolcoördinaten r en θ spelen hier de rol van de nieuwe onafhankelijk veranderlijken u en v . Hiervoor vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

De inverse relaties zijn

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

9.4.4 Exacte differentiaal

Een fundamentele vergelijking uit de thermodynamica, die zowel de eerste als de tweede hoofdwet omvat, zegt dat

$$dU = T dS - p dV$$

waarin U de inwendige energie van een thermodynamisch systeem is, S de entropie, en p , V en T respectievelijk de druk, het volume en de temperatuur. De differentiaal dU is de totale differentiaal van een functie $U = U(S, V)$ van S en V . Er geldt bijgevolg

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV.$$

Als we de twee uitdrukkingen voor dU met elkaar vergelijken, zien we dat

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad -p = \frac{\partial U}{\partial V}.$$

We noemen $dU = TdS - pdV$ een exacte differentiaal.

In het algemeen is een differentiaal

$$F(x, y) dx + G(x, y) dy$$

een **exacte differentiaal**, als er een functie $z = f(x, y)$ bestaat met

$$F = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{en} \quad G = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

De differentiaal is dan de totale differentiaal van z :

$$dz = F(x, y) dx + G(x, y) dy.$$

De functie f heet de **potentiaalfunctie** voor de exacte differentiaal.

Als de differentiaal exact is, dan geldt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Vanwege de gelijkheid van de gemengde tweede orde partiële afgeleiden van $z = f(x, y)$ volgt dan dat

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (9.4.12)$$

De gelijkheid (9.4.12) is een nodige voorwaarde voor het exact zijn van de differentiaal $Fdx + Gdy$ die in veel gevallen ook een voldoende voorwaarde is.

Voorbeeld 9.4.5. De differentiaal

$$(6xy - y^3) dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2) dy \quad (9.4.13)$$

is exact.

Er geldt namelijk

$$F(x, y) = 6xy - y^3 \quad G(x, y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$$

en

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x - 3y^2, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 6x - 3y^2$$

zodat de gelijkheid (9.4.12) geldt. We kunnen bijgevolg verwachten dat er een functie $z = f(x, y)$ bestaat met

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{en} \quad G = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

We kunnen de potentiaalfunctie f als volgt vinden. Omdat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F(x, y) = 6xy - y^3$$

moet gelden, vinden we door de primitieve te nemen naar x , waarbij we y als constante beschouwen dat

$$f(x, y) = 3x^2y - xy^3 + K$$

waarbij de integratieconstante K mag afhangen van y . Dus $K = K(y)$ en

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + K'(y).$$

Als we dit vergelijken met het gewenste resultaat

$$\frac{\partial f}{\partial y} = G(x, y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$$

zien we dat we $K(y)$ zo moeten kiezen dat $K'(y) = 4y$. Dus $K(y) = 2y^2 + C$ met een constante C die onafhankelijk is van x en y . Het eindresultaat is dat

$$z = f(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C$$

en dz is gelijk aan de differentiaal (9.4.13).

Voorbeeld 9.4.6. Voor elke waarde van p is de differentiaal

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)^p} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)^p} dy$$

exact.

Er geldt namelijk

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2)^p} \right) = -\frac{2pxy}{(x^2 + y^2)^{p+1}}.$$

De potentiaalfunctie is

$$f(x, y) = \frac{1}{2(-p+1)} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{p-1}} + C$$

als $p \neq 1$. Als $p = 1$ dan krijgen we in plaats hiervan een logaritme:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C.$$

Merk op dat de potentiaalfunctie altijd op een constante C na bepaald is.

9.4.5 Richtingsafgeleide

Neem θ vast en stel

$$x(t) = x_0 + t \cos \theta, \quad y(t) = y_0 + t \sin \theta. \quad (9.4.14)$$

Dit is een parametrisatie van een rechte door (x_0, y_0) die een hoek θ maakt met de x -as. Voor de afgeleiden naar t geldt

$$\frac{dx}{dt} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = \sin \theta.$$

Merk op dat $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1$. Als we t als een tijdsveranderlijke beschouwen dan kunnen we (9.4.14) zien als de beweging van een deeltje dat met constante snelheid 1 over de rechte beweegt.

Als $z = f(x, y)$ dan geeft de kettingregel (9.4.2) voor het geval (9.4.14) dat

$$\frac{dz}{dt} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Deze totale afgeleide noemen we de **richtingsafgeleide** van $z = f(x, y)$ in de richting bepaald door de hoek θ . Het geeft aan in welke mate z verandert als we vanuit (x_0, y_0) langs de rechte met hoek θ weggaan.

De richtingsafgeleide hangt af van de hoek θ . Om dit aan te geven noteren we de richtingsafgeleide met

$$D_\theta f = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (9.4.15)$$

Speciale gevallen zijn:

- Als $\theta = 0$, dan $D_\theta f = \frac{\partial z}{\partial x}$.
- Als $\theta = \pi/2$, dan $D_\theta f = \frac{\partial z}{\partial y}$.
- Als $\theta = \pi$, dan $D_\theta f = -\frac{\partial z}{\partial x}$.
- Als $\theta = 3\pi/2$, dan $D_\theta f = -\frac{\partial z}{\partial y}$.

De partiële afgeleiden worden steeds uitgerekend in (x_0, y_0) .

Stel dat we $\text{grad } f = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ in poolcoördinaten schrijven als

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = r \cos \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = r \sin \phi,$$

met $r > 0$. Merk op dat we hier ϕ gebruiken voor de hoek in poolcoördinaten, omdat we θ al voor de hoek in de richtingsafgeleide gebruiken. De richtingsafgeleide $D_\theta f$ in (x_0, y_0) kunnen we nu schrijven als

$$\begin{aligned} (D_\theta f)(x_0, y_0) &= r \cos \theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi \\ &= r \cos(\theta - \phi). \end{aligned} \quad (9.4.16)$$

Als θ verandert, verandert de richtingsafgeleide, en we kunnen ons bv. afvragen voor welke hoek θ de richtingsafgeleide maximaal is. Omdat r en ϕ vast zijn, zien we uit (9.4.16) het volgende:

- (a) De richtingsafgeleide is maximaal als $\theta = \phi$. Immers, dan is $\cos(\theta - \phi) = 1$ en de richtingsafgeleide is gelijk aan r .
- (b) De richtingsafgeleide is minimaal als $\theta = \phi \pm \pi$. Immers, dan is $\cos(\theta - \phi) = \cos(\pm\pi) = -1$ en de richtingsafgeleide is $-r$.
- (c) De richtingsafgeleide is nul als $\theta = \phi \pm \frac{\pi}{2}$. Dan is $\cos(\theta - \phi) = 0$.

Voorbeeld 9.4.7. Zij $z = f(x, y) = x^2 + xy$. Dan is $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = x$. De richtingsafgeleide van f in de richting met hoek θ in het punt $(1, -3)$ is gelijk aan

$$D_{\theta}f = -\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos(\theta - \frac{3\pi}{4}).$$

(In de laatste vergelijking hebben we de som en verschilregels voor cosinus in §3.1.2 toegepast.) De richtingsafgeleide is maximaal als $\theta = 3\pi/4$ en minimaal als $\theta = -\pi/4$. De richtingsafgeleide is nul als $\theta = \pi/4$ en $\theta = -3\pi/4$.

9.5 Oefeningen

Oefening 9.1. Schets enkele niveaукrommen van de volgende functies:

- (a) $f(x, y) = x - y$
- (b) $f(x, y) = xy$
- (c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
- (d) $f(x, y) = x - 3y^2$
- (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (f) $f(x, y) = xy^2$

Oefening 9.2. Bereken de partiële afgeleiden van de volgende functies:

- (a) $\frac{20}{1 + x^2 + 2y^2}$
- (b) $x^2 e^{-xy}$
- (c) $\int_x^y e^{-t^2} dt$
- (d) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5xz - 6yz$
- (e) $z \sin(x^2 + 2y^2)$
- (f) $\int_0^{xy} e^{-t^2} dt$

Oefening 9.3. Bereken de partiële afgeleiden in het aangegeven punt P :

- (a) $x^2y + xy$ in $P : (-1, 0)$
- (b) $\text{bgtan} \frac{y}{x}$ in $P : (-1, 1)$
- (c) $3x^2 - y^2 + 2xy^3$ in $P : (1, -2)$

Oefening 9.4. Laat zien dat de functie $z = f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ voldoet aan

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Oefening 9.5. Toon aan dat de functie

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

voldoet aan

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = -2f(x, y, z).$$

Oefening 9.6. Bereken alle eerste en tweede orde partiële afgeleiden van:

$$(a) \quad z = 2x^2y + \cos(x + y) \qquad (b) \quad z = \sin(x + y)e^{y-x}$$

Controleer dat $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Oefening 9.7. Bereken de Hessiaan voor de functie $z = \ln(2x + 3y)$.

Oefening 9.8. Toon aan dat de volgende functies voldoen aan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

$$(a) \quad f(x, y) = \text{bgtan} \frac{y}{x} \qquad (b) \quad f(x, y) = e^x \cos y$$

Oefening 9.9. Als $\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ met c een constante en f en g twee functies van één reële veranderlijke, laat dan zien dat

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Oefening 9.10. Als $xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 0$, vind dan $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$.

Oefening 9.11. De vergelijking van Van der Waals is

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) - nRT = 0.$$

Bereken

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,n} \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T,n}.$$

Oefening 9.12. Bereken de differentiaal dz voor volgende functies en gebruik dit om de waarde van de functie in het gegeven punt P te benaderen:

- (a) $z = xe^{-xy}$ in $P : (0.01, 1.01)$,
- (b) $z = \text{bgtan}(y/x)$ in $P : (3.01, 2.99)$,
- (c) $z = \sin(\pi xy^2)$ in $P : (1.05, 1.01)$,
- (d) $z = \sqrt{x_1 + 2x_2 + 3x_3}$ in $P : (1.95, 2.03, 1.02)$.

Oefening 9.13. Bereken het raakvlak aan de grafiek in het gegeven punt P voor de volgende functies:

(a) $z = x^2 - y^2$ in $P : (-2, 1, 3)$,

(b) $z = \sin(xy)$ in $P : (1, \pi, 0)$,

(c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ in $P : (0, 0, 0)$,

(d) $z = \frac{5}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ in $P : (4, -3, 1)$.

Oefening 9.14. Als $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ met $x = (1 + t)^{1/2}$ en $y = (1 - t)^{1/2}$, bereken dan $\frac{dz}{dt}$, zowel met substitutie als met de kettingregel.

Oefening 9.15. Bereken $\frac{du}{dt}$ met de kettingregel:

(a) $u = e^{x-y}$ met $x = 2 \cos t$ en $y = 3t$,

(b) $u = \ln(x + y + z)$ met $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ en $z = ct$,

(c) $u = \ln(2x + 3y)$ met $x = a \cos t$ en $y = a \sin t$,

(d) $u = \sin(s + t)$ met $s = \cos t$.

Oefening 9.16. Bereken de raaklijn aan de niveaукromme van de gegeven functie in het gegeven punt P :

(a) $z = x^2 - y^2$ in $P : (-2, 1)$,

(b) $z = \sin(xy)$ in $P : (1, \pi)$,

(c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ in $P : (0, 0)$,

(d) $z = \frac{5}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ in $P : (4, -3)$.

Oefening 9.17. Bereken het raakvlak aan de volgende oppervlakken in het gegeven punt P :

(a) $2y - z^2 - 3xz = 0$ in $P : (1, 5, 2)$,

(b) $\sin(\pi xy) + \sin(\pi xz) + \sin(\pi yz) = 2$ in $P : (1, \frac{1}{2}, 1)$,

(c) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} - xy$ in $P : (3, 4, -2)$.

Oefening 9.18. Gegeven is dat $x = au + vb$ en $y = bu - av$ waarin a en b constanten zijn.

(a) Voor een reële functie f van x en y , druk $\frac{\partial f}{\partial u}$ en $\frac{\partial f}{\partial v}$ uit in $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Als $f(x, y) = x^2 + y^2$ vind dan $\frac{\partial f}{\partial u}$ en $\frac{\partial f}{\partial v}$ als functie van u en v .

Oefening 9.19. Neem aan dat $x = au + vb$ en $y = bu - av$ zoals in de vorige oefening. Zij f een functie van x en y . Laat zien dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (a^2 + b^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = ab \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Oefening 9.20. Ga na of de volgende differentiaal exact zijn en geef een potentiaalfunctie indien dat het geval is.

(a) $(4x + 3y)dx + (3x + 8y)dy$

(b) $y \cos x dx + \sin y dy$

(c) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy$

Oefening 9.21. Gegeven is de totale differentiaal

$$dG = -SdT + Vdp$$

Laat zien dat

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Oefening 9.22. Bepaal de richtingsafgeleide van de volgende functies in het punt P in de richting met hoek θ met de positieve x -as:

(a) $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ in $P : (0, 1)$ met $\theta = \frac{\pi}{4}$,

(b) $f(x, y) = \frac{x}{1+y}$ in $P : (0, 0)$ met $\theta = \frac{\pi}{4}$,

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ in $P : (1, -1)$ met θ willekeurig.

Oefening 9.23. Beschouw de functies uit de vorige oefening.

In welke richting is de toename van f maximaal in het punt P ? Bepaal de richtingsafgeleide van f in deze richting in het punt P .

Oefening 9.24. (Deel van examenvraag) Bereken de partiële afgeleiden van

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}.$$

Schets de niveaokrommen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en bepaal alle punten (x, y) waar beide partiële afgeleiden gelijk aan nul zijn.

Hoofdstuk 10

Eerste orde differentiaalvergelijkingen

10.1 Inleiding

In vele wetenschapsgebieden worden verbanden tussen grootheden uitgedrukt met differentiaalvergelijkingen. Een differentiaalvergelijking is een vergelijking voor een onbekende functie van één of meerdere veranderlijken waarin afgeleiden van de functie voorkomen. Als de onbekende functie afhangt van één onafhankelijke veranderlijke dan spreken we van een **gewone differentiaalvergelijking**. Voorbeelden van gewone differentiaalvergelijkingen zijn

$$(a) \quad \frac{dx}{dt} = kx$$

$$(b) \quad \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

$$(c) \quad \frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

$$(d) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

$$(e) \quad -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi$$

Deze vijf voorbeelden beschrijven elk een bepaalde fysische situatie. De vergelijkingen (a) en (b) beschrijven (modellen voor) elementaire groeiprocessen in fysica, chemie en ook in de biologie. Vergelijkingen (c), (d) en (e) zijn bewegingsvergelijkingen uit de (kwantum)mechanica. De vergelijkingen (a) en (b) bevatten enkel afgeleiden van de eerste orde. Dit zijn **eerste orde** differentiaalvergelijkingen. De drie andere vergelijkingen bevatten een tweede afgeleide en zijn daarom **tweede orde** differentiaalvergelijkingen. In het algemeen is de **orde** van een gewone differentiaalvergelijking gelijk aan de orde van hoogste afgeleide die voorkomt in de differentiaalvergelijking.

Als de onbekende functie van twee of meer onafhankelijke veranderlijken afhangt dan spreken we van een **partiële differentiaalvergelijking**. Voorbeelden hiervan zijn

$$(f) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(g) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Andere belangrijke voorbeelden zijn de Maxwellvergelijkingen voor elektromagnetisme en de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking uit de kwantummechanica. Partiële differentiaalvergelijking bespreken we verder niet in deze cursus.

10.2 Oplossingen van een differentiaalvergelijking

Een gewone differentiaalvergelijking voor een onbekende functie $y(x)$ van de veranderlijke x heeft de algemene vorm

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0.$$

Een oplossing van de differentiaalvergelijking is een functie $y(x)$ die aan de vergelijking voldoet.

De eerste orde vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{10.2.1}$$

heeft bijvoorbeeld de oplossing

$$y = x^2 + c \tag{10.2.2}$$

met c een willekeurige constante. Er geldt namelijk dat $d(x^2 + c)/dx = 2x$. De differentiaalvergelijking wordt in dit geval opgelost door middel van (onbepaalde) integratie. De oplossing (10.2.2) is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking. De oplossing die we krijgen voor een speciale waarde van c is een particuliere oplossing.

Voorbeeld 10.2.1. De vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{10.2.3}$$

is een model voor een eerste orde proces, zoals radioactief verval, of voor een eerste orde chemische reactie $X \mapsto Y$ waarin $x(t)$ de hoeveelheid wegreagerende stof is op tijdstip t . De constante k in (10.2.3) is de reactieconstante. Let op dat x hier de functie voorstelt, die afhangt van de onafhankelijke veranderlijke t , die we als de tijd interpreteren.

Voor elke constante C is

$$x(t) = Ce^{-kt} \tag{10.2.4}$$

een oplossing van de differentiaalvergelijking, zoals door invulling in (10.2.3) eenvoudig na te gaan is. Dit blijkt ook de algemene oplossing te zijn, hetgeen betekent dat elke oplossing van de vorm (10.2.4) is. Voor dit (eenvoudige) voorbeeld kunnen we dit als volgt inzien.

Voor een willekeurige functie $x(t)$ geldt

$$\frac{d}{dt} [x(t)e^{kt}] = \frac{dx}{dt} e^{kt} + x(t)k e^{kt} = \left(\frac{dx}{dt} + kx(t) \right) e^{kt}.$$

Als $x(t)$ aan (10.2.3) voldoet dan zien we dat

$$\frac{d}{dt} [x(t)e^{kt}] = 0$$

waaruit volgt dat $x(t)e^{kt}$ een constante is, zeg $x(t)e^{kt} = C$. Dit leidt inderdaad tot (10.2.4).

Door $t = 0$ in te vullen in (10.2.4) vinden we dat

$$x(0) = C$$

zodat C de hoeveelheid is op tijdstip $t = 0$. Dit is een **beginvoorwaarde**.

We zien dat de algemene oplossing van de eerste orde differentiaalvergelijking (10.2.3) afhangt van een vrije constante die bepaald kan worden door middel van een beginvoorwaarde. Dit blijkt een algemeen geldend feit te zijn.

De algemene oplossing van een tweede orde differentiaalvergelijking bevat twee vrije constanten, zoals geïllustreerd wordt in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 10.2.2. De differentiaalvergelijking

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{10.2.5}$$

waarin $\omega > 0$ een constante is, heeft als algemene oplossing

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x \tag{10.2.6}$$

met c_1 en c_2 twee vrij te kiezen constanten.

Het is eenvoudig te controleren dat de functies (10.2.6) inderdaad aan (10.2.5) voldoen. We krijgen namelijk als we (10.2.6) afleiden

$$y'(x) = -c_1 \omega \sin \omega x + c_2 \omega \cos \omega x. \tag{10.2.7}$$

Als we dit nogmaals afleiden dan volgt

$$\begin{aligned} y''(x) &= -c_1 \omega^2 \cos \omega x - c_2 \omega^2 \sin \omega x \\ &= -\omega^2 (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x). \end{aligned}$$

Vanwege (10.2.6) geldt dat $y'' = -\omega^2 y$ zodat inderdaad voldaan is aan (10.2.5).

De constanten c_1 en c_2 in de algemene oplossing (10.2.6) kunnen we vinden uit twee beginvoorwaarden. Als bijvoorbeeld

$$y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad y'(0) = y_1$$

gegeven zijn, dan volgt uit (10.2.6) en (10.2.7) dat $y_0 = c_1$ en $y_1 = c_2 \omega$, zodat

$$c_1 = y_0 \quad \text{en} \quad c_2 = \frac{y_1}{\omega}.$$

10.3 Eerste orde DV

10.3.1 Existentiestelling

We zijn vaak geïnteresseerd in een functie $x(t)$ die niet alleen voldoet aan een eerste orde differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (10.3.1)$$

maar ook aan een beginvoorwaarde

$$x(t_0) = x_0, \quad (10.3.2)$$

waarin t_0 en x_0 gegeven waarden zijn. De twee voorwaarden (10.3.1) en (10.3.2) vormen een **beginwaardeprobleem**.

Voor het beginwaardeprobleem geldt de volgende stelling die een voldoende voorwaarde geeft voor het bestaan van een unieke oplossing van (10.3.1)–(10.3.2).

Stelling 10.3.1. *Nee aan dat de functies $f(t, x)$ en $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ bestaan en continu zijn op een rechthoekig domein D in het tx -vlak*

$$D : \quad a \leq t \leq b, \quad c \leq x \leq d.$$

Als er geldt dat

$$a < t_0 < b \quad \text{en} \quad c < x_0 < d$$

dan is er een interval I rond t_0 en een unieke functie $x(t)$ gedefinieerd op I die voldoet aan het beginwaardeprobleem (10.3.1)–(10.3.2).

Het bewijs van deze stelling valt buiten het bereik van deze cursus.

Voorbeeld 10.3.2. Het beginwaardeprobleem

$$\frac{dx}{dt} = 4t|x|^{1/2}, \quad x(0) = 0$$

heeft de twee oplossingen

$$x(t) = 0 \quad \text{en} \quad x(t) = t^4$$

zoals door direct invullen eenvoudig na te gaan valt.

We hebben hier

$$f(t, x) = 4t|x|^{1/2},$$

waarvoor geldt dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \begin{cases} \frac{2t}{x^{1/2}} & \text{als } x > 0, \\ -\frac{2t}{|x|^{1/2}} & \text{als } x < 0, \\ \text{bestaat niet} & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Bijgevolg is niet aan de voorwaarden van Stelling 10.3.1 voldaan als $x_0 = 0$.

Als $x_0 \neq 0$ dan is wel aan de voorwaarden van Stelling 10.3.1 voldaan. Voor elke t_0 en $x_0 \neq 0$ is er wel een unieke oplossing met $x(t_0) = x_0$.

Voorbeeld 10.3.3. Voor de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \quad (10.3.3)$$

geldt dat $f(t, x) = 1 + x^2$ en $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2x$ continu zijn in het gehele tx -vlak. Voor elke t_0 en x_0 is er bijgevolg een unieke oplossing met $x(t_0) = x_0$.

De functie

$$x(t) = \tan t \quad (10.3.4)$$

is een oplossing van (10.3.3) met beginvoorwaarde $x(0) = 0$ zoals uit een eenvoudige berekening blijkt. Vanwege Stelling 10.3.1 is dit ook de enige oplossing van het beginwaardeprobleem $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$ met $x(0) = 0$.

De oplossing (10.3.4) wordt echter oneindig bij $t = \pm\pi/2$. Het maximale interval I rond $x_0 = 0$ waarop de oplossing bestaat is in dit geval

$$I =] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [.$$

10.3.2 Lijnelementenveld van $x' = f(t, x)$

Voordat we verdere oplosmethoden bespreken zullen we eerst een grafische manier behandelen om naar een eerste orde differentiaalvergelijking te kijken.

Teken in elk punt van het (t, x) vlak een lijnstukje met richtingscoëfficiënt $f(t, x)$. Zo'n lijnstukje noemen we een **lijnelement**. Het geheel van lijnelementen noemen we het **lijnelementenveld**. Neem aan dat $x(t)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking is. We beschouwen de grafiek van $x(t)$ in het lijnelementenveld. De afgeleide $x'(t)$ is zoals bekend de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie $x(t)$. Omdat $x'(t) = f(t, x)$, zal er dan gelden dat in elk punt **de grafiek raakt aan het lijnelement** in dat punt.

Voorbeeld 10.3.4. Beschouw als voorbeeld

$$x' = -\frac{x}{t}. \quad (10.3.5)$$

Het is door directe berekening eenvoudig na te gaan dat

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

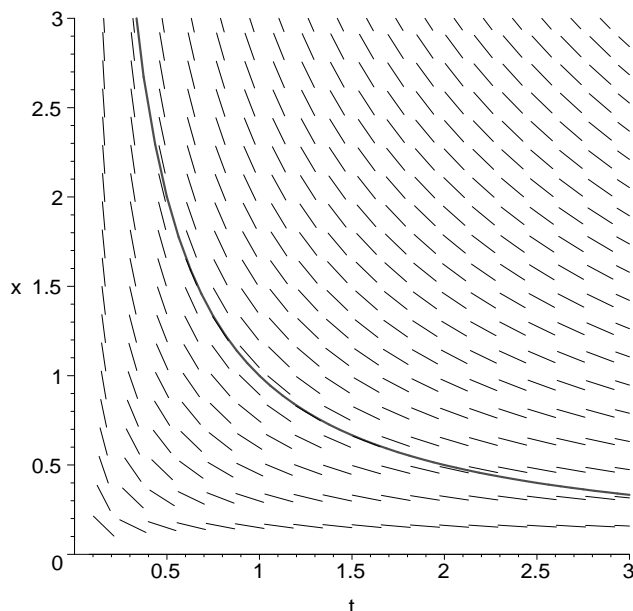
aan de differentiaalvergelijking (10.3.5) voldoet. Immers de linkerkant van (10.3.5) is voor $x = \frac{1}{t}$ gelijk aan

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

en de rechterkant is

$$-\frac{x}{t} = -\frac{\frac{1}{t}}{t} = -\frac{1}{t^2},$$

en dit is inderdaad hetzelfde. In Figuur 10.1 staat het lijnelementenveld in het eerste kwadrant getekend, samen met de grafiek van de oplossing. Merk op dat de grafiek in elk punt raakt aan het lijnelementenveld.



Figuur 10.1: Lijnelementenveld van $x' = -\frac{x}{t}$ samen met de grafiek van de oplossing $x(t) = \frac{1}{t}$.

Laten we aannemen dat $f(t, x)$ en $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ bestaan en continu zijn in een rechthoekig gebied D , zodat aan de voorwaarden van Stelling 10.3.1 voldaan is. Voor elke beginwaarde $x(t_0) = x_0$ heeft het beginwaardeprobleem voor $x' = f(t, x)$ dan een unieke oplossing. Daar volgt o.a. uit dat door elk punt van het (t, x) vlak precies één oplossing van de differentiaalvergelijking gaat. Dit betekent dat grafieken van verschillende oplossingen elkaar niet kunnen snijden.

10.4 Scheidbare veranderlijken

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$x'(t) = f(x)g(t) \quad (10.4.1)$$

wordt een differentiaalvergelijking met **scheidbare veranderlijken** genoemd. We nemen aan dat f continu afleidbaar en g continu is, zodat aan de voorwaarden van Stelling 10.3.1 voldaan is.

Als $f(x_0) = 0$ voor zekere waarde x_0 , dan is de constante functie $x(t) = x_0$ een oplossing van (10.4.1). De grafiek van deze constante functie is een horizontale rechte in het lijnelementenveld.

De niet-constante oplossingen kunnen we als volgt vinden. De grafiek van een niet constante oplossing $x(t)$ van (10.4.1) zal de grafiek van een constante oplossing niet doorsnijden. Dit is een gevolg van Stelling 10.3.1, zoals we gezien hebben aan het eind van vorige paragraaf. Bijgevolg is $f(x(t)) \neq 0$ voor alle t . We kunnen dus delen door $f(x(t))$ en er volgt

$$\frac{1}{f(x(t))} x'(t) = g(t). \quad (10.4.2)$$

Zij F een primitieve van de functie $1/f$ en G een primitieve van g . Dan is

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{1}{f(x(t))}x'(t) \quad \text{en} \quad \frac{d}{dt}G(t) = g(t),$$

zodat uit (10.4.2) volgt dat $F(x(t))$ en $G(t)$ dezelfde afgeleiden hebben. Bijgevolg is $F(x(t)) = G(t) + C$, voor zekere constante C , ofwel

$$F(x) = G(t) + C. \quad (10.4.3)$$

Uit (10.4.3) kan men soms op eenvoudige wijze de functie $x(t)$ oplossen. Vaak is dat niet mogelijk en moet men de oplossing in de impliciete vorm (10.4.3) laten staan. We noemen (10.4.3) in dat geval een **impliciete oplossing** van de differentiaalvergelijking.

Bij scheiding van variabelen gaat men in de praktijk vaak als volgt te werk. We schrijven $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ zodat de differentiaalvergelijking luidt

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t). \quad (10.4.4)$$

Nu gaan we $\frac{dx}{dt}$ beschouwen als een breuk (hoewel het dat in feite niet is!). We vermenigvuldigen (10.4.4) aan beide kanten met dt en we delen door $f(x)$, zodat we krijgen

$$\frac{1}{f(x)} dx = g(t) dt. \quad (10.4.5)$$

Vervolgens integreren we door aan beide kanten van (10.4.5) een integraalteken te plaatsen

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt. \quad (10.4.6)$$

De twee onbepaalde integralen in (10.4.6) rekenen we uit. Als F een primitieve van $\frac{1}{f}$ en G een primitieve van g is, dan volgt uit (10.4.6) dat

$$F(x) = G(t) + C$$

voor zekere constante C en dit is precies de impliciete oplossing (10.4.3) die we al eerder gevonden hadden.

Voorbeeld 10.4.1. De differentiaalvergelijking

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$$

kunnen we schrijven als $x dx = -t dt$ of ook

$$2x dx = -2t dt$$

en hierin zijn de veranderlijken gescheiden. Na integratie vinden we

$$x^2 = -t^2 + C,$$

zodat

$$x = \pm \sqrt{C - t^2}. \quad (10.4.7)$$

De constante C (en ook het \pm teken) wordt bepaald door de beginwaarde. Als bv. gegeven is dat $x(0) = 1$ dan volgt uit (10.4.7) dat $C = 1$. Omdat $x(0) > 0$ moeten we ook het $+$ teken nemen in (10.4.7). De oplossing met $x(0) = 1$ is dus

$$x = \sqrt{1 - t^2}.$$

Deze oplossing bestaat voor $-1 \leq t \leq 1$.

Bij een negatieve beginwaarde moeten we het $-$ teken kiezen in (10.4.7). Als bijvoorbeeld $x(0) = -2$, dan is $C = 4$ en

$$x = -\sqrt{4 - t^2}.$$

Deze oplossing bestaat voor $-2 \leq t \leq 2$.

Dit voorbeeld illustreert ook het feit dat het interval I waarvan sprake is in Stelling 10.3.1 afhangt van de specifieke oplossing van de differentiaalvergelijking. Als $x(0) = 1$ dan is $I = [-1, 1]$ en als $x(0) = -2$ dan is $I = [-2, 2]$.

Voorbeeld 10.4.2. De differentiaalvergelijking in het beginwaardeprobleem

$$\frac{dx}{dt} + 3t^2 x^2 = 0, \quad x(1) = \frac{1}{2}$$

kunnen we schrijven als

$$-\frac{dx}{x^2} = 3t^2 dt.$$

Na integratie volgt

$$-\int \frac{dx}{x^2} = \int 3t^2 dt$$

ofwel

$$\frac{1}{x} = t^3 + c.$$

De algemene oplossing is

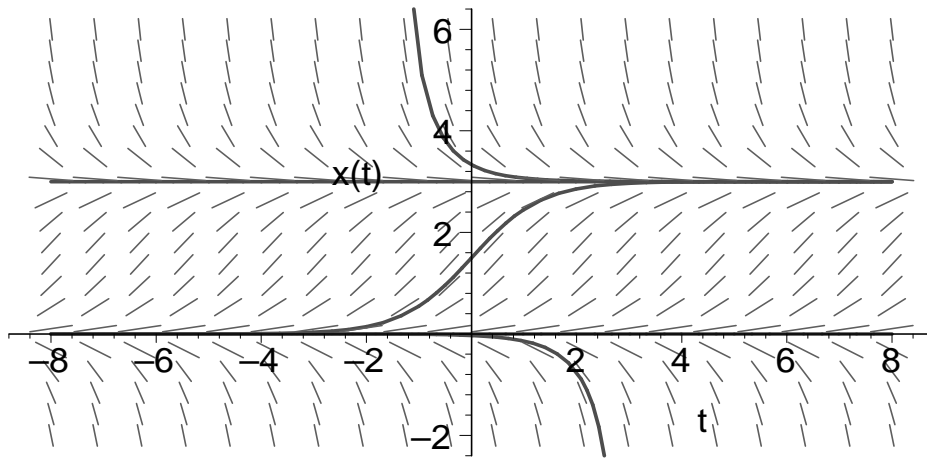
$$x(t) = \frac{1}{t^3 + c}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt dat $x = 1/2$ voor $t = 1$. Als we dit invullen in de algemene oplossing dan volgt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + c}$$

waaruit we vinden dat $c = 1$ en dus

$$x(t) = \frac{1}{t^3 + 1}.$$



Figuur 10.2: Lijnelementenveld en enkele oplossingen van de logistieke differentiaalvergelijking (10.5.1) voor $k = 1/2$ en $M = 3$.

10.5 Logistiek model

Het **logistiek model** voor het verloop van een populatie is

$$x' = kx(M - x) \quad (10.5.1)$$

waarin k en M positieve constanten zijn. In Figuur 10.2 staat het lijnelementenveld getekend voor het geval $k = 1/2$ en $M = 3$, samen met enkele oplossingen.

We zien dat

$$x(t) = 0 \quad \text{en} \quad x(t) = M$$

constante oplossingen zijn. De andere oplossingen van (10.5.1) vinden we door scheiding van veranderlijken. Uit (10.5.1) volgt

$$\frac{1}{x(M - x)} dx = k dt$$

en na integratie

$$\int \frac{1}{x(M - x)} dx = \int k dt + C = kt + C.$$

We gaan nu met partieelbreuksplitsing de overblijvende integraal uitrekenen. Uit

$$\frac{1}{x(M - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{M - x}$$

volgt $A = B = 1/M$, zodat

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(M - x)} dx &= \frac{1}{M} \left(\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{M - x} dx \right) \\ &= \frac{1}{M} (\ln |x| - \ln |M - x|) \\ &= \frac{1}{M} \ln \left| \frac{x}{M - x} \right|. \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{x}{M-x} \right| = kt + C$$

waaruit volgt

$$\left| \frac{x}{M-x} \right| = e^{Mkt+MC}$$

zodat

$$\frac{x}{M-x} = \pm e^{MC} e^{Mkt} = C_1 e^{Mkt}.$$

Hieruit kunnen we x oplossen en er volgt (ga na!)

$$x = \frac{MC_1 e^{Mkt}}{1 + C_1 e^{Mkt}}.$$

Met $C_2 = 1/C_1$ kunnen we ook schrijven

$$x = x(t) = \frac{M}{1 + C_2 e^{-Mkt}}. \quad (10.5.2)$$

Uit de oplossing (10.5.2) zien we dat

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = M.$$

10.6 Lineaire DV van eerste orde

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$a_0(t)x'(t) + a_1(t)x(t) = g(t) \quad (10.6.1)$$

waarin a_0 , a_1 en g gegeven functies van t zijn, noemen we een **lineaire differentiaalvergelijking** van eerste orde. De algemene theorie van lineaire differentiaalvergelijkingen zal in het volgende hoofdstuk behandeld worden. Dan zal ook de structuur die achter de differentiaalvergelijking (10.6.1) zit duidelijk worden.

We zullen aannemen dat $a_0(t) \neq 0$, zodat we (10.6.1) mogen delen door $a_0(t)$ en dan krijgen we

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t) \quad (10.6.2)$$

waarin $p(t) = a_1(t)/a_0(t)$ en $q(t) = g(t)/a_0(t)$.

10.6.1 Homogene DV

We beschouwen weer een eerste orde DV in de vorm (10.6.2), dus

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t) \quad (10.6.3)$$

met $p(t)$ en $q(t)$ gegeven functies. Als $q(t) \equiv 0$ dan noemen we de DV (10.6.3) homogeen. In dat geval is (10.6.3) op te lossen met scheiding van veranderlijken. Stel namelijk dat

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0. \quad (10.6.4)$$

Dit is te schrijven als $\frac{dx}{dt} = -p(t)x$ hetgeen na scheiding van veranderlijken leidt tot

$$\frac{1}{x}dx = -p(t)dt.$$

We integreren

$$\int \frac{1}{x}dx = - \int p(t)dt = -P(t) + C_0. \quad (10.6.5)$$

waarbij $P(t)$ een primitieve functie is van $p(t)$. De linkerkant van (10.6.5) is gelijk aan $\ln |x|$ en na enig rekenwerk vinden we dat de algemene oplossing van (10.6.4) gegeven wordt door

$$x(t) = Ce^{-P(t)} \quad (10.6.6)$$

waarbij $P(t)$ een primitieve functie van $p(t)$ is, en C is een willekeurige constante.

Het is ook eenvoudig te controleren dat (10.6.6) inderdaad aan (10.6.4) voldoet. Immers uit (10.6.6) en $P'(t) = p(t)$ volgt dat

$$x'(t) = Ce^{-P(t)}(-P'(t)) = -Cp(t)e^{-P(t)} = -p(t)x(t).$$

en dit geeft inderdaad (10.6.4).

10.6.2 Variatie van constanten

De niet-homogene differentiaalvergelijking (10.6.3) gaan we vervolgens oplossen met een techniek die **variatie van constanten** genoemd wordt. We weten dat (10.6.6) de algemene oplossing is van de homogene DV (10.6.4). Hierin is C een willekeurige constante. Variatie van constanten betekent dat we van deze constante een functie maken en we zoeken een oplossing van (10.6.3) in de vorm

$$x(t) = y(t)e^{-P(t)} \quad (10.6.7)$$

waarbij $y(t)$ een nog onbekende functie is. De afgeleide van (10.6.7) luidt, vanwege de productregel en de kettingregel voor afgeleiden,

$$x'(t) = y(t)e^{-P(t)}(-P'(t)) + y'(t)e^{-P(t)}.$$

Vanwege $P'(t) = p(t)$ en de vorm (10.6.7) voor $x(t)$ vinden we hieruit

$$x'(t) = -p(t)x(t) + y'(t)e^{-P(t)}.$$

Als we dit vergelijken met (10.6.3) dan zien we dat we $y(t)$ zodanig moeten nemen dat $y'(t)e^{-P(t)} = q(t)$, ofwel

$$y'(t) = q(t)e^{P(t)}.$$

Bijgevolg moet $y(t)$ een primitieve functie zijn van $q(t)e^{P(t)}$ zijn. Dus

$$y(t) = \int q(t)e^{P(t)}dt + C$$

voor zekere constante C . Vanwege (10.6.7) vinden we uiteindelijk

$$x(t) = \left(\int q(t)e^{P(t)}dt + C \right) e^{-P(t)}. \quad (10.6.8)$$

10.6.3 Voorbeeld

We lossen de DV

$$x' = 2x + t \quad (10.6.9)$$

op. De bijbehorende homogene DV is

$$x' = 2x$$

met als algemene oplossing $x(t) = Ce^{2t}$. We zoeken een oplossing van (10.6.9) in de vorm

$$x(t) = y(t)e^{2t}. \quad (10.6.10)$$

Dan is

$$x'(t) = 2y(t)e^{2t} + y'(t)e^{2t} = 2x(t) + y'(t)e^{2t}.$$

We willen dat aan (10.6.9) voldaan is en daarom moeten we er voor zorgen dat

$$y'(t)e^{2t} = t.$$

Dit betekent $y'(t) = te^{-2t}$ en daarom

$$y(t) = \int te^{-2t} dt.$$

We passen partiële integratie toe en er volgt

$$y(t) = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C.$$

Uiteindelijk volgt vanwege (10.6.10)

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C \right) e^{2t} \\ &= -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + Ce^{2t}. \end{aligned}$$

10.7 Oefeningen

Oefening 10.1. Ga na of de gegeven functie aan de gegeven differentiaalvergelijking voldoet, en zo ja, of het aan de gegeven beginvoorwaarde voldoet.

(a) $x(t) = e^{2t} - 2$, $x' = 2x + 4$, $x(0) = -2$.

(b) $x(t) = t^2$, $x' = tx^2 - 2t$, $x(1) = 1$,

(c) $x(t) = e^t$, $x'' - 2x' + x = 0$, $x(0) = -1$,

(d) $x(t) = 3 \cos 2t$, $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 3$.

Oefening 10.2. Laat zien dat voor elke waarde van $c > 0$ de functie

$$x(t) = (t + c\sqrt{t})^2$$

aan het beginwaardeprobleem

$$x'(t) = \frac{x}{t} + \sqrt{x}, \quad x(0) = 0, \quad t \geq 0$$

voldoet. Het beginwaardeprobleem heeft dus oneindig veel oplossingen. Waarom is dit niet in tegenspraak met Stelling 10.3.1?

Oefening 10.3. Los op:

(a) $x' = -\frac{x}{t}$

(e) $x' = (x - 1)^2 \cos t$

(b) $x' = x \cos t - tx$ met $x(0) = 1$

(f) $\frac{dx}{dt} = -kx^n$ met k constant

(c) $x' = (t - 1)x$

(g) $x' = -2xt$ met $x(0) = 1$

(d) $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$

(h) $(r^2 + 1) \cos \theta \frac{dr}{d\theta} = r \sin \theta$

Oefening 10.4. Geef de oplossing van de volgende beginwaardeproblemen:

(a) $x' = \frac{t}{x}, \quad x(1) = 3$

(c) $x' = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2x - 2}, \quad x(0) = -1$

(b) $x' = -2xy, \quad x(0) = 1$

(d) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, \quad y(0) = 0$

Oefening 10.5. (a) Laat zien dat in de differentiaalvergelijking

$$x' = (x + t + 1)^2$$

de veranderlijken niet gescheiden kunnen worden.

(b) Leid een differentiaalvergelijking af voor $y = x + t + 1$ en laat zien dat hierin de veranderlijken wel gescheiden kunnen worden.

(c) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking uit (a).

Oefening 10.6. Los op:

(a) $x' = ax$ met a constant

(d) $y' + 2xy = x$

(b) $x' + ax = b$ met a en b constant

(e) $(x^2 + 1)y' + 3xy = 6x$

(c) $x^2y' = \frac{x^2 + 1}{3y^2 + 1}$

(f) $\frac{dx}{dt} + 2tx = 4t$

Oefening 10.7. Bij een tweede orde chemische reactie



wordt de concentratie $a(t)$ van A op tijdstip t gemodelleerd door de differentiaalvergelijking

$$a'(t) = -2r[a(t)]^2$$

waarin r de reactieconstante is ($r > 0$).

- (a) Los de differentiaalvergelijking op.
- (b) Bepaal $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t)$.
- (c) Wat gebeurt er in het (chemisch niet-relevante) geval dat $a(0) < 0$.

Oefening 10.8. Beantwoord dezelfde vragen voor de derde orde chemische reactie $3A \longrightarrow \dots$ die gemodelleerd wordt door

$$a'(t) = -3r [a(t)]^3.$$

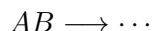
Oefening 10.9. Los op:

- (a) $x^2(y+1) + y^2(x-1)y' = 0$
- (b) $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$
- (c) $y' + (3x^2 - \frac{2}{x})y = 6x^4$
- (d) $(x+1)y' - (x+1)^4 - 2y = 0$
- (e) $x \ln x - xy' + 3y = 0$
- (f) $x + y \cos x + y' \sin x = 0$
- (g) $y' = \frac{4y}{x(y-3)}$
- (h) $x' = -x^p$ met $p > 0$

Oefening 10.10. Los op:

- (a) $\frac{dy}{dx} = x(x-1)$
- (b) $\frac{dy}{dx} = y(y-1)$

Oefening 10.11. Een chemische reactie



wordt gemodelleerd door het tweetal differentiaalvergelijkingen

$$a'(t) = -ra(t)b(t)$$

$$b'(t) = -ra(t)b(t)$$

met $r > 0$.

- (a) Laat zien dat er een constante C is met $b(t) = a(t) + C$ voor alle t .
- (b) Gebruik makend van (a) vinden we

$$a'(t) = -ra(t)(a(t) + C).$$

Geef de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

- (c) Bepaal $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t)$ en $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t)$. Hierbij mag u aannemen dat $a(0) > 0$ en $b(0) > 0$. Het antwoord hangt af van de constante C .

Oefening 10.12. Geef de algemene oplossing van de logistieke vergelijking

$$x'(t) = kx(t)(M - x(t))$$

waarin $k > 0$ en $M > 0$. Schets een aantal oplossingen in één figuur.

Oefening 10.13. Laat zien dat de volgende differentiaalvergelijkingen exact zijn en los ze op.

(a) $(2t - 2) dt + (8x - 16) dx = 0$

(b) $(4te^{x/2} + 4) dt + t^2 e^{x/2} dx = 0$

(c) $t dt + x dx = 0$ met $x(3) = 4$

Oefening 10.14. Los op:

(a) $x' = x/t - 2$

(d) $x' + \frac{x}{t+1} = 2$ met $x(0) = 2$

(b) $x' = 4x + 2t$

(e) $t(t+1)x' = 2 + x$ met $x(1) = 0$

(c) $x' = t^2 - \frac{2tx}{1+t^2}$

(f) $\frac{dr}{d\theta} = r \tan \theta + \sin \theta$ met $0 < \theta < \pi/2$

Oefening 10.15. Schrijf de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2xy$$

in termen van de **error functie** $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$.

Oefening 10.16. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$2tx \frac{dx}{dt} = 4t^2 + 3x^2.$$

(a) Leid uit de differentiaalvergelijking voor $x(t)$ een differentiaalvergelijking af voor $y(t) = x(t)^2$.

(b) Los de differentiaalvergelijking voor $y(t)$ op.

(c) Geef de oplossing van de differentiaalvergelijking voor $x(t)$.

Oefening 10.17. De temperatuur T als functie van de tijd t voldoet aan de afkoelwet van Newton indien

$$T'(t) = k(T_{omg} - T(t)) \quad (10.7.1)$$

met T_{omg} de omgevingstemperatuur en k een positieve constante. [Als T lager is dan de omgevingstemperatuur dan is (10.7.1) in feite een opwarmwet.]

Neem aan dat de temperatuur van een kip aan (10.7.1) voldoet.

(a) De kip komt uit de diepvries en heeft een temperatuur van -20 graden Celsius. Ze wordt 20 minuten in een oven van 200 graden geplaatst waarna de temperatuur van de kip 20 graden is. Bereken hieruit de constante k .

(b) Hoe lang moet de kip in de oven staan om een temperatuur van 60 graden te bereiken?

Oefening 10.18. Neem aan dat de temperatuur van een kopje koffie aan de afkoelwet van Newton (10.7.1) voldoet met een omgevingstemperatuur van $T_0 = 20$ graden. We voegen melk van $T_{melk} = 5$ graden toe in een verhouding van 1 : 4 ten opzichte van de hoeveelheid koffie. Als we goed roeren, dan gaat de temperatuur van de koffie hierbij over van T in

$$\frac{1}{5}(4T + T_{melk}).$$

We hebben koffie van 30 graden, die we echter niet meteen willen gaan drinken. Wanneer kunnen we dan het best de melk toevoegen om bij het drinken een zo warm mogelijk kopje koffie te hebben? Meteen aan het begin, of pas als we willen gaan drinken, of maakt het geen verschil?

Oefening 10.19. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waarvan de grafiek de volgende meetkundige eigenschap heeft.

Voor elk punt $(x_0, f(x_0))$ van de grafiek ligt het snijpunt van de raaklijn aan de grafiek in $(x_0, f(x_0))$ met de x -as precies in het midden tussen de oorsprong en x_0 .

Oefening 10.20. Vind alle functies f die voldoen aan de voorwaarde

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{2}{3}x f(x).$$

Hoe interpreteer je deze voorwaarde grafisch?

Oefening 10.21. (Examenvraag) Bij een tweede orde chemische reactie $2A \rightarrow B$ voldoet de concentratie $a(t)$ van stof A aan de differentiaalvergelijking

$$a'(t) = -2k[a(t)]^2$$

met $k > 0$.

- Los de differentiaalvergelijking op, uitgaande van een strikt positieve beginconcentratie $a(0) > 0$.
- Als gegeven is dat op tijdstip $t = 10$ de concentratie gedaald is tot $\frac{1}{2}a(0)$, wanneer is de concentratie dan gelijk aan $\frac{1}{10}a(0)$?

Hoofdstuk 11

Lineaire DV van tweede orde

11.1 Inleiding

Veel tweede orde differentiaalvergelijkingen die van belang zijn in de wetenschappen hebben de algemene lineaire vorm

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = r(t) \quad (11.1.1)$$

waarin $p(t)$, $q(t)$ en $r(t)$ gegeven functies zijn. Als $r(t)$ de nulfunctie is, dan krijgen we

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0 \quad (11.1.2)$$

en deze vergelijking wordt **homogeen** genoemd. De algemene vorm (11.1.1) is **niet-homogeen**.

De functies $p(t)$ en $q(t)$ zijn de **coëfficiënten** van de differentiaalvergelijking. Als de coëfficiënten constanten zijn dan spreken we van een lineaire differentiaalvergelijking met **constante coëfficiënten**. De oplossingen van zo'n vergelijking kunnen we uitdrukken in elementaire functies en dat is wat we zullen bespreken in dit hoofdstuk. Voorbeelden van zulke vergelijkingen zijn de bewegingsvergelijkingen voor de harmonische oscillator en voor gedwongen oscillaties in mechanische en elektrische systemen.

11.2 Homogene lineaire DV

We bespreken eerst de homogene lineaire differentiaalvergelijking (11.1.2). De structuur van de oplossingen wordt gegeven in de volgende eigenschap. Deze eigenschap geeft ook de reden waarom de vergelijkingen (11.1.1) en (11.1.2) lineair genoemd worden.

Eigenschap 11.2.1. *Neem aan dat $x_1(t)$ en $x_2(t)$ twee oplossingen zijn van (11.1.2). Voor elke keuze van constanten c_1 en c_2 is*

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \quad (11.2.1)$$

dan ook een oplossing van (11.1.2).

Bewijs. Er geldt dat

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \frac{dx_1}{dt} + c_2 \frac{dx_2}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = c_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}.$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x &= \left(c_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} \right) + p(t) \left(c_1 \frac{dx_1}{dt} + c_2 \frac{dx_2}{dt} \right) + q(t) (c_1x_1 + c_2x_2) \\ &= c_1 \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + p(t) \frac{dx_1}{dt} + q(t)x_1 \right) \\ &\quad + c_2 \left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + p(t) \frac{dx_2}{dt} + q(t)x_2 \right). \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Omdat $x_1(t)$ en $x_2(t)$ allebei oplossingen zijn van (11.1.2) geldt er

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + p(t) \frac{dx_1}{dt} + q(t)x_1 &= 0, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + p(t) \frac{dx_2}{dt} + q(t)x_2 &= 0, \end{aligned}$$

zodat beide termen in het rechterlid van (11.2.2) gelijk aan 0 zijn. Dus $x(t)$ voldoet inderdaad aan (11.1.2). \square

De functie $x(t)$ in (11.2.1)

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

is een **lineaire combinatie** van de functies $x_1(t)$ en $x_2(t)$. Eigenschap 11.2.1 zegt dat elke lineaire combinatie van oplossingen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking ook een oplossing is. Deze belangrijke eigenschap van homogene vergelijkingen wordt ook het **superpositiebeginsel** genoemd.

Het superpositiebeginsel is typisch voor homogene lineaire differentiaalvergelijkingen. Het is niet geldig voor niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen en ook niet voor niet-lineaire differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 11.2.2. De functies $x_1(t) = e^{2t}$ en $x_2(t) = e^{3t}$ zijn twee oplossingen van de vergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0. \quad (11.2.3)$$

Dit kunnen we door direct invullen eenvoudig nagaan. Voor $x_1(t)$ vinden we bijvoorbeeld

$$x_1 = e^{2t}, \quad \frac{dx_1}{dt} = 2e^{2t}, \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = 4e^{2t},$$

zodat

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 5 \frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 4e^{2t} - 5 \cdot 2e^{2t} + 6e^{2t} = (4 - 10 + 6)e^{2t} = 0.$$

Dus $x_1(t)$ voldoet inderdaad aan (11.2.3). Een soortgelijke berekening leert ons dat $x_2(t) = e^{3t}$ ook voldoet.

Vanwege Eigenschap 11.2.1 kunnen we nu ook concluderen dat

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

aan (11.2.3) voldoet voor elke keuze van c_1 en c_2 .

Omdat de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = 0 \quad (11.2.4)$$

van tweede orde is bevat de algemene oplossing twee vrije constanten. Als $x_1(t)$ en $x_2(t)$ twee oplossingen zijn dan is volgens Eigenschap 11.2.1 elke lineaire combinatie

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (11.2.5)$$

ook een oplossing. Deze oplossing bevat twee vrije constanten c_1 en c_2 . De oplossing (11.2.5) is echter niet altijd de algemene oplossing van (11.2.4).

Als we in het Voorbeeld 11.2.2 namelijk de twee oplossingen $x_1(t) = e^{2t}$ en $x_2(t) = 4e^{2t}$ hadden gekozen, dan is elke lineaire combinatie

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \cdot 4e^{2t} = (c_1 + 4c_2) e^{2t}$$

een veelvoud van e^{2t} . De oplossing $x(t) = e^{3t}$ kunnen we evenwel niet op deze manier verkrijgen. Het probleem met de twee oplossingen $x_1(t) = e^{2t}$ en $x_2(t) = 4e^{2t}$ is dat ze **lineair afhankelijk** zijn. Er geldt namelijk dat $x_2(t) = 4x_1(t)$, zodat $x_1(t)$ en $x_2(t)$ niet wezenlijk verschillende oplossingen zijn.

Definitie 11.2.3. De functies $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ zijn **lineair afhankelijk** als er getallen c_1, c_2, \dots, c_n zijn, niet allemaal gelijk aan 0, zodat

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0 \quad \text{voor alle } t.$$

Als zulke getallen er niet zijn, dan zijn de functies **lineair onafhankelijk**.

De functies zijn dus lineair onafhankelijk als uit

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0 \quad \text{voor alle } t$$

volgt dat $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

We kunnen nu de structuur van de algemene oplossing van de lineaire homogene differentiaalvergelijking (11.2.4) als volgt beschrijven. De algemene oplossing is gelijk aan

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (11.2.6)$$

waarin $x_1(t)$ en $x_2(t)$ twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn. Om de differentiaalvergelijking (11.2.4) op te lossen volstaat het dus om twee lineair onafhankelijke oplossingen te vinden. Deze twee oplossingen worden een **basis** van de oplossingsruimte genoemd. Elke andere oplossing is een lineaire combinatie (11.2.6) met twee constanten c_1 en c_2 die uit **beginvoorwaarden** gevonden kunnen worden.

Voorbeeld 11.2.4. Twee oplossingen van de homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$t^2 x''(t) - 4tx'(t) + 6x = 0 \quad (11.2.7)$$

zijn

$$x_1(t) = t^2 \quad \text{en} \quad x_2(t) = t^3$$

zoals door invulling in de vergelijking eenvoudig na te gaan valt. De twee oplossingen zijn lineair onafhankelijk en de algemene oplossing is dus

$$x(t) = c_1 t^2 + c_2 t^3. \quad (11.2.8)$$

Als de beginvoorwaarden

$$x(1) = 0, \quad x'(1) = 1 \quad (11.2.9)$$

gegeven zijn dan volgt door $t = 1$ in te vullen in (11.2.8) dat

$$0 = c_1 + c_2$$

en door $t = 1$ in te vullen in $x'(t) = 2c_1 t + 3c_2 t^2$ dat

$$1 = 2c_1 + 3c_2.$$

Deze twee vergelijkingen voor c_1 en c_2 hebben de oplossing $c_1 = -1$ en $c_2 = 1$ zodat

$$x(t) = -t^2 + t^3$$

de unieke oplossing is van de differentiaalvergelijking (11.2.7) met beginvoorwaarden (11.2.9).

11.3 Constante coëfficiënten

De algemene homogene lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde met **constante coëfficiënten** is

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (11.3.1)$$

waarin a en b constanten zijn.

De differentiaalvergelijking (11.2.3) uit Voorbeeld 11.2.2 is hiervan een voorbeeld. Geïnspireerd door de vorm van de oplossingen van (11.2.3) zullen we voor (11.3.1) een oplossing proberen te vinden van de vorm

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (11.3.2)$$

met λ een nog nader te bepalen constante.

De afgeleide van (11.3.2) is

$$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t},$$

en de tweede afgeleide is

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Bijgevolg voldoet de functie (11.3.2) aan (11.3.1) als

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

ofwel

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$$

voor alle t . Hieraan is voldaan als en slechts als

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (11.3.3)$$

De vergelijking (11.3.3) heet de **karakteristieke vergelijking** van de differentiaal-vergelijking (11.3.1).

Oplossingen van de karakteristieke vergelijking zijn nulpunten van de veelterm

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b \quad (11.3.4)$$

die ook wel de **karakteristieke veelterm** van (11.3.1) genoemd wordt.

De oplossingen van (11.3.3) zijn

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-a - \sqrt{a^2 - 4b} \right).$$

Elk van de oplossingen levert een oplossing

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

van (11.3.1).

Afhankelijk van de discriminant $D = a^2 - 4b$ van de kwadratische vergelijking (11.3.3) kunnen we nu een drietal gevallen onderscheiden.

- (1) $D = a^2 - 4b > 0$: De nulpunten λ_1 en λ_2 van de karakteristieke veelterm (11.3.4) zijn reëel en onderling verschillend.
- (2) $D = a^2 - 4b = 0$: De nulpunten λ_1 en λ_2 zijn reëel en aan elkaar gelijk.
- (3) $D = a^2 - 4b < 0$: De nulpunten λ_1 en λ_2 zijn niet-reëel.

We gaan deze drie gevallen apart behandelen.

(1) Reële en verschillende nulpunten

Het geval (1) is het eenvoudigste geval. Als de twee nulpunten reëel zijn en onderling verschillend dan zijn de twee oplossingen

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{en} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

reële functies die bovendien lineair onafhankelijk zijn. De algemene oplossing van (11.3.1) is dan

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

(2) Samenvallende nulpunten

In het geval dat $D = a^2 - 4b = 0$ geldt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}.$$

We vinden nu slechts één oplossing van de vorm (11.3.2), namelijk

$$x_1(t) = e^{-at/2}. \quad (11.3.5)$$

Hoe vinden we een tweede, lineair onafhankelijke oplossing? We gebruiken hiervoor het idee van **variatie van de constante**. We hebben reeds de oplossingen $Cx_1(t)$ van (11.3.1) en we proberen een oplossing van de vorm

$$x(t) = v(t)x_1(t) \quad (11.3.6)$$

met een nog nader te bepalen functie $v(t)$. We weten al dat $v(t) = C$ (een constante) zal voldoen, maar we hopen nog een andere functie te vinden.

De eerste en tweede afgeleiden van (11.3.6) zijn

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \frac{dx_1}{dt} + \frac{dv}{dt} x_1 \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= v \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} x_1. \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx &= \left(v \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} x_1 \right) + a \left(v \frac{dx_1}{dt} + \frac{dv}{dt} x_1 \right) + b v x_1 \\ &= v \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + a \frac{dx_1}{dt} + b x_1 \right) + \frac{dv}{dt} \left(2 \frac{dx_1}{dt} + a x_1 \right) + \frac{d^2v}{dt^2} x_1. \quad (11.3.7) \end{aligned}$$

Daar x_1 voldoet aan de vergelijking (11.3.1) is de eerste term in het rechterlid van (11.3.7) gelijk aan nul. Het opmerkelijke is dat ook

$$2 \frac{dx_1}{dt} + a x_1 = 0.$$

Dit is eenvoudig na te gaan aan de hand van (11.3.5). De tweede term in het rechterlid van (11.3.7) is dus ook gelijk aan nul, en we houden over

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = \frac{d^2v}{dt^2} x_1. \quad (11.3.8)$$

Als we nu $v(t)$ zo kiezen dat

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 0 \quad (11.3.9)$$

dan is (11.3.8) gelijk aan 0 en dan zal de functie $x = v x_1$ aan de differentiaalvergelijking (11.3.1) voldoen. Aan (11.3.9) is voldaan als $v(t) = C$ (een constante) is, maar ook als $v(t) = Bt + C$ een eerstegraads veelterm is. Voor de bijzondere keuze

$$v(t) = t$$

krijgen we vanwege (11.3.6) de oplossing

$$x_2(t) = t x_1(t) = t e^{-at/2}$$

en deze oplossing is lineair onafhankelijk van $x_1(t)$.

De algemene oplossing van (11.3.1) in het geval (2) is bijgevolg

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad (11.3.10)$$

met $\lambda = -a/2$ en c_1 en c_2 twee vrij te kiezen constanten.

Voorbeeld 11.3.1. Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$x'' + 4x' + 4x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

De karakteristieke veelterm is

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

met $\lambda = -2$ als dubbel nulpunt. De algemene oplossing is dus

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}.$$

De afgeleide hiervan is

$$x'(t) = -2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t}.$$

We vinden dat

$$x(0) = c_1 \quad \text{en} \quad x'(0) = -2c_1 + c_2.$$

Aan de beginvoorwaarden is dus voldaan als $1 = c_1$ en $-1 = -2c_1 + c_2$. Hieruit volgt

$$c_1 = 1 \quad \text{en} \quad c_2 = 1.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem is

$$x(t) = e^{-2t} + t e^{-2t}.$$

(3) Niet-reële nulpunten

In geval (3) zijn de nulpunten λ_1 en λ_2 niet-reëel maar vormen een paar van complex toegevoegde nulpunten. Omdat $D = a^2 - 4b < 0$ is

$$\pm\sqrt{D} = \pm i\sqrt{-D} = \pm i\sqrt{4b - a^2}$$

zuiver imaginair. De nulpunten zijn

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}.$$

We schrijven

$$\lambda_1 = \mu + i\omega, \quad \lambda_2 = \mu - i\omega$$

met

$$\mu = -\frac{a}{2}, \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} > 0.$$

De functies

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\mu t + i\omega t} \quad \text{en} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{\mu t - i\omega t}, \quad (11.3.11)$$

zijn dan complexwaardige oplossingen van de vergelijking (11.3.1). De complexe e -macht is ingevoerd in paragraaf 3.8.1. De lezer wordt aangeraden om deze paragraaf nog eens door te nemen. Uit (11.3.11) en de Definitie 3.8.1 volgt dat

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\mu t} (\cos \omega t + i \sin \omega t), \\ x_2(t) &= e^{\mu t} (\cos \omega t - i \sin \omega t). \end{aligned} \quad (11.3.12)$$

Om toch tot reële oplossingen te komen, nemen we geschikte lineaire combinaties van de oplossingen uit (11.3.12). Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x_1(t) + x_2(t)) &= e^{\mu t} \cos \omega t, \\ \frac{1}{2i} (x_1(t) - x_2(t)) &= e^{\mu t} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (11.3.13)$$

Vanwege Eigenschap 11.2.1 zijn dit ook oplossingen van (11.3.1) en de oplossingen uit (11.3.13) zijn reëel. Ze zijn ook lineair onafhankelijk, zodat een basis van oplossingen in het geval van niet-reële nulpunten gegeven wordt door

$$e^{\mu t} \cos \omega t \quad \text{en} \quad e^{\mu t} \sin \omega t.$$

De algemene oplossing is nu

$$x(t) = c_1 e^{\mu t} \cos \omega t + c_2 e^{\mu t} \sin \omega t = (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) e^{\mu t} \quad (11.3.14)$$

met c_1 en c_2 twee (reële) constanten.

Voorbeeld 11.3.2. De lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0 \quad (11.3.15)$$

heeft als karakteristieke veelterm

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5.$$

De nulpunten van $p(\lambda)$ zijn complex:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Er geldt dus $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$ met

$$\mu = -1 \quad \text{en} \quad \omega = 2.$$

Vanwege (11.3.14) is de algemene oplossing van (11.3.15) gelijk aan

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t = (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) e^{-t} \quad (11.3.16)$$

Indien nog beginvoorwaarden gegeven zijn, dan kan men daaruit de constanten c_1 en c_2 bepalen. Neem aan dat bijvoorbeeld

$$x(0) = 2 \quad \text{en} \quad x'(0) = 0 \quad (11.3.17)$$

gegeven is. Uit (11.3.16) volgt

$$x(0) = c_1$$

en

$$x'(t) = (-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t) e^{-t} - (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) e^{-t},$$

zodat

$$x'(0) = 2c_2 - c_1.$$

Vanwege $x(0) = 2$ en $x'(0) = 0$ volgt dan $c_1 = 2$ en $2c_2 - c_1 = 0$, zodat

$$c_1 = 2 \quad \text{en} \quad c_2 = 1.$$

De oplossing van het beginwaardeprobleem (11.3.15), (11.3.17) is dus

$$x(t) = (2 \cos 2t + \sin 2t) e^{-t}.$$

11.4 Niet-homogene lineaire DV

11.4.1 Particuliere oplossing

Bij de bespreking van niet-homogene vergelijkingen (11.1.1) zullen we ons beperken tot lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = r(t) \quad (11.4.1)$$

met $r(t)$ een gegeven functie van t .

In de voorgaande paragraaf hebben we de oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (11.4.2)$$

gevonden. De algemene oplossing van (11.4.2) is gelijk aan

$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (11.4.3)$$

waarin $x_1(t)$ en $x_2(t)$ twee lineair onafhankelijke oplossingen van (11.4.2) zijn.

Uit de volgende eigenschap blijkt dat het om de algemene oplossing van (11.4.1) te kunnen geven volstaat om één oplossing van (11.4.1) te vinden. Zo'n oplossing heet een **particuliere oplossing** en wordt genoteerd met $x_P(t)$.

Eigenschap 11.4.1. *Zij $x_P(t)$ een particuliere oplossing van (11.4.1). Dan wordt de algemene oplossing van (11.4.1) gegeven door*

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t) \quad (11.4.4)$$

waarin $x_H(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ de algemene oplossing van de homogene vergelijking (11.4.2) is.

Bewijs. De particuliere oplossing $x_P(t)$ voldoet aan

$$\frac{d^2x_P}{dt^2} + a\frac{dx_P}{dt} + bx_P = r(t)$$

en de oplossing $x_H(t)$ van de homogene vergelijking voldoet aan

$$\frac{d^2x_H}{dt^2} + a\frac{dx_H}{dt} + bx_H = 0.$$

Dan voldoet $x(t)$ uit (11.4.4) aan

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx &= \left(\frac{d^2x_P}{dt^2} + \frac{d^2x_H}{dt^2} \right) + a \left(\frac{dx_P}{dt} + \frac{dx_H}{dt} \right) + b(x_P + x_H) \\ &= \left(\frac{d^2x_P}{dt^2} + a\frac{dx_P}{dt} + bx_P \right) + \left(\frac{d^2x_H}{dt^2} + a\frac{dx_H}{dt} + bx_H \right) \\ &= r(t) + 0 = r(t). \end{aligned}$$

Dus $x(t)$ is inderdaad een oplossing van de niet-homogene vergelijking (11.4.1).

Als omgekeerd $x(t)$ aan (11.4.1) voldoet dan volgt uit een analoge berekening dat $x(t) - x_P(t)$ aan de homogene vergelijking (11.4.2) voldoet. \square

Voorbeeld 11.4.2. We beschouwen de niet-homogene vergelijking

$$x'' + 3x' + 2x = 2t^2. \quad (11.4.5)$$

De bijbehorende homogene vergelijking is

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

met de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. De oplossingen hiervan zijn $\lambda_1 = -2$ en $\lambda_2 = -1$ en de algemene oplossing van de homogene vergelijking is bijgevolg

$$x_H(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}.$$

We hebben nog een particuliere oplossing $x_P(t)$ van (11.4.5) nodig. We proberen hiervoor een willekeurige tweedegraads veelterm

$$x = A + Bt + Ct^2$$

met nog willekeurige coëfficiënten A , B en C . Dan is $x' = B + 2Ct$, $x'' = 2C$ en

$$\begin{aligned} x'' + 3x' + 2x &= 2C + 3(B + 2Ct) + 2(A + Bt + Ct^2) \\ &= (2C + 3B + 2A) + (6C + 2B)t + 2Ct^2. \end{aligned}$$

Dit is gelijk aan $2t^2$ voor elke t , als en slechts als

$$2C + 3B + 2A = 0, \quad 6C + 2B = 0, \quad 2C = 2.$$

We vinden $C = 1$, $B = -3$ en $A = 7/2$, zodat een particuliere oplossing gegeven wordt door

$$x_P(t) = 7/2 - 3t + t^2.$$

De algemene oplossing van (11.4.5) is gelijk aan

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t) = 7/2 - 3t + t^2 + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}.$$

11.4.2 Methode van onbepaalde coëfficiënten

De oplosmethode uit Voorbeeld 11.4.2 staat bekend als de **methode van onbepaalde coëfficiënten**. De methode is bruikbaar als het rechterlid $r(t)$ een bepaalde vorm heeft. Ze kan gebruikt worden als $r(t)$ een **veeltermfunctie** is (zoals in Voorbeeld 11.4.2), een **exponentiële functie**, een **cosinus-** of **sinusfunctie**, of een combinatie van deze functies.

In al deze gevallen proberen we een particuliere oplossing $x_P(t)$ te vinden die enigszins op het rechterlid lijkt. In de volgende tabel staat een overzicht van de belangrijkste mogelijkheden.

| term in $r(t)$ | Probeer voor $x(t)$ |
|--|--|
| veelterm van graad n | $A_0 + A_1 t + \cdots + A_{n-1} t^{n-1} + A_n t^n$ |
| ce^{at} | Ae^{at} |
| (veelterm van graad n) $\cdot e^{at}$ | $(A_0 + A_1 t + \cdots + A_{n-1} t^{n-1} + A_n t^n)e^{at}$ |
| $c \cos \omega t$ of $c \sin \omega t$ | $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ |
| $ce^{\mu t} \cos \omega t$ of $ce^{\mu t} \sin \omega t$ | $e^{\mu t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ |

In de tabel stellen c , a , ω en μ willekeurige gekende reële getallen voor. De hoofdletters A en B zijn de onbepaalde coëfficiënten.

Als het rechterlid $r(t)$ gelijk is aan de som van een aantal functies uit de eerste kolom van de tabel, probeer dan voor $x(t)$ de som van de overeenkomstige functies uit de tweede kolom.

Een waarschuwing is op zijn plaats bij het gebruik van bovenstaande tabel. **Ze werkt namelijk niet altijd.** Wanneer bijvoorbeeld het rechterlid $r(t)$ reeds voldoet aan de homogene vergelijking behorende bij (11.4.1) dan zal de aanbevolen probeerfunctie $x(t)$ uit de tabel ook voldoen aan de homogene vergelijking en dus zeker niet aan de niet-homogene vergelijking (11.4.1). Vermenigvuldiging van $x(t)$ met t kan dan eventueel uitkomst bieden, of mogelijk met t^2 . Als dit ook niet werkt, zijn er andere methoden ontwikkeld, die echter buiten het bereik van deze cursus vallen.

Voorbeeld 11.4.3. Beschouw

$$x'' - 3x' - 4x = 3e^{2t}. \quad (11.4.6)$$

Het rechterlid is $3e^{2t}$. Volgens de tabel proberen we dus

$$x(t) = Ae^{2t}$$

met A een nog te bepalen constante. Uit $x'(t) = 2Ae^{2t}$ en $x''(t) = 4Ae^{2t}$ volgt dan

$$x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = -6Ae^{2t}.$$

Dit is gelijk aan $3e^{2t}$ als en slechts als $-6A = 3$, oftewel

$$A = -\frac{1}{2}.$$

De particuliere oplossing is

$$x_P(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}.$$

Daar de algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking $x'' - 3x' - 4x = 0$ gelijk is aan

$$x_H(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t},$$

vinden we als algemene oplossing van de niet-homogene vergelijking

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + c_1e^{4t} + c_2e^{-t}. \quad (11.4.7)$$

De constanten c_1 en c_2 kunnen we vinden als beginvoorwaarden gegeven zijn. Als bijvoorbeeld gegeven is dat

$$x(0) = 0 \quad \text{en} \quad x'(0) = 0 \quad (11.4.8)$$

dan vinden we door $t = 0$ in te vullen in (11.4.7) dat

$$0 = -\frac{1}{2} + c_1 + c_2$$

en door $t = 0$ in te vullen in $x'(t) = -e^{2t} + 4c_1e^{4t} - c_2e^{-t}$ dat

$$0 = -1 + 4c_1 - c_2.$$

Deze twee vergelijkingen voor c_1 en c_2 hebben als oplossing

$$c_1 = \frac{3}{10} \quad \text{en} \quad c_2 = \frac{1}{5},$$

zodat de oplossing van het beginwaardeprobleem (11.4.6), (11.4.8) gegeven wordt door

$$x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{4t} + \frac{1}{5}e^{-t}.$$

Voorbeeld 11.4.4. Beschouw

$$x'' - 3x' - 4x = 3e^{-t}. \quad (11.4.9)$$

De bijbehorende homogene vergelijking is dezelfde als in het vorige voorbeeld. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus ook hier

$$x_H(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t}.$$

Het rechterlid is $3e^{-t}$. Volgens de tabel proberen we dus

$$x(t) = Ae^{-t}. \quad (11.4.10)$$

Echter, e^{-t} is een oplossing van de homogene vergelijking. Voor elke keuze van A voldoet (11.4.10) bijgevolg aan

$$x'' - 3x' - 4x = 0$$

en niet aan (11.4.9).

We proberen in plaats van (11.4.10) nu

$$x(t) = Ate^{-t}. \quad (11.4.11)$$

De afgeleiden zijn

$$x'(t) = A(-t + 1)e^{-t}, \quad x''(t) = A(t - 2)e^{-t}$$

zodat

$$\begin{aligned} x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) &= A(t - 2)e^{-t} - 3A(-t + 1)e^{-t} - 4Ate^{-t} \\ &= (A + 3A - 4A)te^{-t} + (-2A - 3A)e^{-t} \\ &= -5Ae^{-t}. \end{aligned}$$

Dit is gelijk aan $3e^{-t}$ als en slechts als $-5A = 3$, dus als

$$A = -\frac{3}{5}.$$

De particuliere oplossing is daarmee

$$x_P(t) = -\frac{3}{5}te^{-t}$$

en de algemene oplossing van de niet-homogene vergelijking is

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t) = -\frac{3}{5}te^{-t} + c_1e^{4t} + c_2e^{-t}.$$

11.5 Toepassing: gedwongen trillingen en resonantie

11.5.1 Harmonische oscillator met damping en uitwendige kracht

De vergelijking voor gedwongen **trillingen** in mechanische en elektrische systemen is de niet-homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (11.5.1)$$

Het is de bewegingsvergelijking voor een deeltje met massa m dat beweegt onder invloed van een totale kracht

$$F_{tot} = -kx - c \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t. \quad (11.5.2)$$

Vanwege de tweede wet van Newton (kracht is massa maal versnelling) geldt

$$F_{tot} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

hetgeen leidt tot de vergelijking (11.5.1).

De totale kracht (11.5.2) is opgebouwd uit drie termen.

- (a) De term $-kx$ stelt een kracht voor die evenredig is met de uitwijking x ten opzichte van het evenwichtspunt dat in de oorsprong O genomen is. De kracht is gericht naar de oorsprong toe. Als dit de enige kracht is dan luidt de bewegingsvergelijking

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (11.5.3)$$

die de **harmonische oscillator** genoemd wordt. De constante k is een materiaalconstante. Als het gaat om de uitwijking van een veer wordt k de **veerconstante** genoemd.

Oplossingen van (11.5.3) zijn eenvoudige goniometrische functies

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

die in dit verband ook wel harmonische oscillaties genoemd worden.

De harmonische oscillator (11.5.3) is een eenvoudige vergelijking die ook in algemenere niet-lineaire systemen vaak gebruikt wordt als een lineaire benadering die geldig is bij kleine uitwijkingen.

- (b) De term $-c \frac{dx}{dt}$ is een **dampingsterm** die evenredig is met de snelheid van het deeltje. Ze kan ontstaan vanwege luchtweerstand of wrijving of vanwege andere effecten die bepaald worden door de snelheid van het deeltje en niet door de positie.
- (c) De term $F_0 \cos \omega t$ is een periodieke **uitwendige kracht** die uitgeoefend wordt op het oscillerende deeltje. Dit kan een kracht zijn vanwege een elektrisch veld E . Als het deeltje geladen is met lading q dan ondervindt het een kracht qE . Als het een alternerend elektrische veld betreft, $E = E_0 \cos \omega t$, dan is de kracht van de vorm $qE_0 \cos \omega t$.

11.5.2 Het geval zonder demping

We bekijken het speciale geval dat er geen demping optreedt. Dus $c = 0$ in (11.5.1). De vergelijking (11.5.1) schrijven we als

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t \quad (11.5.4)$$

met

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{en} \quad A_0 = \frac{F_0}{m}.$$

De algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.5.5)$$

is gelijk aan

$$x_H(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \quad (11.5.6)$$

We noemen ω_0 de **natuurlijke frequentie** van het systeem.

Vanwege de niet-homogene term $r(t) = A_0 \cos \omega t$ zoeken we een particuliere oplossing van de vorm

$$x(t) = x_P(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (11.5.7)$$

met onbepaalde coëfficiënten A en B . Voor (11.5.7) geldt

$$\frac{dx}{dt} = \omega B \cos \omega t - \omega A \sin \omega t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t,$$

zodat

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 - \omega^2) (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (11.5.8)$$

Dit is gelijk aan $A_0 \cos \omega t$ als $B = 0$ en $A = A_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. De particuliere oplossing van (11.5.4) is dus

$$x_P(t) = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (11.5.9)$$

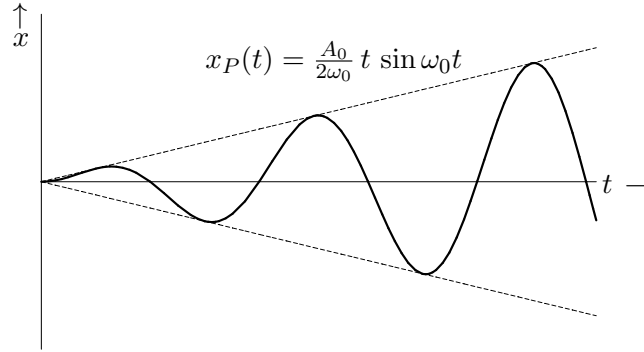
Vanwege (11.5.6) en (11.5.9) is de algemene oplossing van (11.5.4) gelijk aan

$$\begin{aligned} x(t) &= x_P(t) + x_H(t) \\ &= \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (11.5.10)$$

11.5.3 Resonantie

De oplossing (11.5.10) laat zien dat het gedrag van het systeem sterk afhankelijk is van het verschil tussen ω en ω_0 . Als de frequentie ω van de externe kracht dicht ligt bij de natuurlijke frequentie ω_0 dan is de term

$$\frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$



Figuur 11.1: De particuliere oplossing $x_P(t)$ in het geval van resonantie. De amplitude van de oscillaties neemt toe in de tijd.

groot. De oscillaties hebben dan een grote amplitude en deze gaat naar oneindig als $\omega \rightarrow \omega_0$.

Dit fenomeen van grote oscillaties heet **resonantie**. Het is een belangrijk effect in de studie van trillingen zowel in de klassieke mechanica als in de kwantummechanica.

Als $\omega = \omega_0$, dan leidt de methode van onbepaalde coëfficiënten niet tot een particuliere oplossing. De oplossing (11.5.7) die we probeerden voldoet namelijk al aan de homogene vergelijking (11.5.5), en kan dus onmogelijk aan de niet-homogene vergelijking (11.5.4) voldoen.

Er is een uitbreiding van de methode van onbepaalde coëfficiënten waarbij we in zulk geval in plaats van (11.5.7) een particuliere oplossing proberen van de vorm

$$x(t) = x_P(t) = t (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t). \quad (11.5.11)$$

Merk op dat (11.5.11) een extra factor t heeft.

Als we (11.5.11) invullen in

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega_0 t \quad (11.5.12)$$

dan volgt na enig rekenwerk (ga zelf na!) dat we moeten nemen

$$A = 0 \quad \text{en} \quad B = \frac{A_0}{2\omega_0}.$$

De particuliere oplossing is dus

$$x_P(t) = \frac{A_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (11.5.13)$$

en de algemene oplossing is

$$\begin{aligned} x(t) &= x_P(t) + x_H(t) \\ &= \frac{A_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (11.5.14)$$

De grafiek van de particuliere oplossing (11.5.13) is getoond in Figuur 11.1. Vanwege de extra factor t neemt de amplitude van de oscillaties toe in de tijd.

11.6 Oefeningen

Oefening 11.1. Laat zien dat $x_1(t) = 1/t$ en $x_2(t) = t$ lineair onafhankelijke oplossingen zijn van

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} - x = 0.$$

Geef de oplossing van deze differentiaalvergelijking die voldoet aan $x(1) = 0$ en $\frac{dx}{dt}(1) = -1$.

Oefening 11.2. (vervolg) Laat zien dat $x_P(t) = -t/4 + (1/2)t \ln t$ een particuliere oplossing is van

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} - x = t.$$

Geef de oplossing van deze differentiaalvergelijking die voldoet aan $x(1) = 0$ en $\frac{dx}{dt}(1) = -1$.

Oefening 11.3. Geef de algemene oplossing van de volgende homogene vergelijkingen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = x. & \text{(c)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 13x = 0. \\ \text{(b)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - 7 \frac{dx}{dt} + 6x = 0. & \text{(d)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0. \end{array}$$

Oefening 11.4. Geef de oplossing van de volgende beginwaardeproblemen.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0, & x(0) = 4, \quad \frac{dx}{dt}(0) = -5. \\ \text{(b)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0, & x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 5. \\ \text{(c)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0, & x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1. \\ \text{(d)} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 0, & y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0. \end{array}$$

Oefening 11.5. Geef de algemene oplossing van

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} - 4x = 3e^{2t}. & \text{(d)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = t. \\ \text{(b)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 8t^2. & \text{(e)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 2t^2 + 2 \cos t. \\ \text{(c)} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} - 4x = 3te^{2t}. & \text{(f)} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 3x = 2. \end{array}$$

Oefening 11.6. Vind de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

die voldoet aan $y(0) = 2$ en $y(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow +\infty$.

Oefening 11.7. Geef de oplossing van de beginwaardeproblemen:

$$(a) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 3e^{2t}, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = -2.$$

$$(b) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 14 + 2t - 2t^2, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

$$(c) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0, \quad x(\pi/3) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(\pi/3) = -1.$$

Oefening 11.8. Vind de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

die voldoet aan de randvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y(\pi/2) = 2$.

Oefening 11.9. De functie $u(x)$, $0 < x < 2\pi$, voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$u''(x) + u(x) = -x$$

als $0 < x < \pi$, en aan

$$u''(x) + u(x) = -(2\pi - x)$$

als $\pi < x < 2\pi$. Voorts voldoet u aan de randvoorwaarden

$$u(0) = 0 \quad \text{en} \quad u'(0) = 0$$

en is gegeven dat u en u' continue functies zijn in $[0, 2\pi]$. Bereken $u(x)$ en schets de grafiek.

Oefening 11.10. De uitwijking $u(t)$ van een slinger voldoet aan

$$mu''(t) + ku(t) = \cos(\omega t)$$

met constanten $m > 0$, $k > 0$, en $\omega \in \mathbb{R}$. We nemen $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(a) Neem aan dat $\omega \neq \omega_0$. Bepaal de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

(b) Wat is de limiet van de oplossing uit onderdeel (a) als $\omega \rightarrow \omega_0$?

Oefening 11.11. Geef de algemene oplossing van

$$(a) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = e^{3t}.$$

$$(e) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = e^{3t}.$$

$$(b) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 6t - 1.$$

$$(f) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = e^{-t} \cos 2t.$$

$$(c) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \cos t.$$

$$(g) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = te^t.$$

$$(d) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = e^{-t} \sin t.$$

$$(h) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t} \sin t.$$

Oefening 11.12. Geef de algemene oplossing van

- (a) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 3t$. (d) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = e^t$.
- (b) $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = 3t$. (e) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = e^t \sin t$.
- (c) $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos t$. (f) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 2e^{2t} - 1$.

Oefening 11.13. Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem:

- (a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$.
- (b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + t = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$.

Oefening 11.14. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$u''(x) = -\omega^2 u(x)$$

met **randvoorwaarden**

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Het is eenvoudig in te zien dat de nulfunctie $u(x) \equiv 0$ aan dit randwaardeprobleem voldoet.

Voor welke waarden van ω zijn er nog andere oplossingen?

Oefening 11.15. De wet van Hooke zegt bij uitrekking van een veer een kracht optreedt die evenredig, maar tegengesteld gericht is aan de uitwijking x van de veer. Dus

$$F_v = -kx,$$

met k een constante (de veerconstante). De wrijvingskracht is evenredig met de snelheid

$$F_w = -c\frac{dx}{dt}$$

met c een constante (de wrijvingsconstante).

- (a) Laat zien dat de tweede wet van Newton leidt tot

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{11.6.1}$$

waarin m de massa van de veer is.

- (b) We onderzoeken de karakteristieke vergelijking van (11.6.1). Laat zien dat de nulpunten van de karakteristieke vergelijking zuiver imaginair zijn als $c = 0$, en voldoen aan $\operatorname{Re} \lambda < 0$ als $c > 0$.

- (c) Laat zien dat in het geval $c > 0$ voor elke oplossing van (11.6.1) geldt dat

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Geldt dit ook als $c = 0$?

- (d) Voor welke waarden van c geldt dat de nulpunten van de karakteristieke vergelijking reëel zijn? Neem hierbij aan dat m en k constant zijn.

Oefening 11.16. (vervolg) Als bovendien een externe kracht op de veer werkt dan verandert (11.6.1) in

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_e \quad (11.6.2)$$

waarin F_e de externe kracht is. Neem aan dat $m = 2$, $c = 8$, $k = 80$ en $F_e = 2 \cos 4t$. Geef de oplossing van (11.6.2) als $x(0) = 0$ en $\frac{dx}{dt}(0) = 1$.

Oefening 11.17. Geef een voorbeeld van een lineaire niet-homogene differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten van tweede orde waarvoor geldt dat

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2$$

voor elke oplossing $x(t)$.

Oefening 11.18. Sommige differentiaalvergelijkingen kunnen door een eenvoudige transformatie omgezet worden in een lineaire differentiaalvergelijking. Beschouw bijvoorbeeld een Euler-type vergelijking

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + At \frac{dx}{dt} + Bx = 0, \quad \text{voor } t > 0$$

met constanten A en B . Laat zien dat $y(s) = x(e^s)$ voldoet aan

$$y''(s) + (A - 1)y'(s) + By = 0.$$

Oefening 11.19. Gebruik de vorige oefening om de algemene oplossing van de volgende Euler-type vergelijkingen te vinden.

(a) $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$

(b) $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} + x = 0.$

Oefening 11.20. De vibraties van een diatomisch molecule worden vaak beschreven met behulp van de Morse potentiaal

$$V(r) = D_e \left[1 - e^{-a(r-r_e)} \right]^2$$

waarin r de afstand tussen de molecule is, r_e de afstand in geval van evenwicht, en D_e de dissociatie-energie. a is een positieve constante.

De kracht tussen de kernen van de moleculen is

$$F = -\frac{dV}{dr}$$

- (a) Bij kleine uitwijkingen rond het evenwicht benaderen we $V(r)$ door de eerste niet-nul term in de Taylorontwikkeling rond r_e . Bereken deze Taylorbenadering.
- (b) Laat zien dat het gebruik van de Taylorbenadering in $F = -\frac{dV}{dr}$ leidt tot

$$F = -2a^2 D_e(r - r_e)$$

- (c) Los de bijbehorende DV

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -2a^2 D_e(r - r_e)$$

op met $r(0) = 2r_e$ en $r'(0) = 0$.

Oefening 11.21. (Examenvraag)

- (a) Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + cx = 1$$

met $c = 2$.

- (b) Neem $c = 0$ en bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking met $x(0) = 0$ en $x'(0) = 1$.

Hoofdstuk 12

Extrema van functies van meerdere veranderlijken

12.1 Stationaire punten

Een functie $f(x)$ van één veranderlijke heeft een stationair punt in $x = a$ als de afgeleide in dat punt gelijk is aan 0; dus $f'(a) = 0$. Meetkundig betekent dit dat de raaklijn aan de grafiek van f bij $x = a$ horizontaal is.

De analoge eigenschap voor een functie van twee veranderlijken is dat het raakvlak aan de grafiek horizontaal is. Voor een functie $z = f(x, y)$ geldt vanwege (9.3.13) en (9.3.14) dat het raakvlak aan de grafiek van f in het punt (a, b, c) met $c = f(a, b)$, gegeven wordt door

$$z = c + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right) (x - a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) (y - b),$$

waarbij de partiële afgeleiden uitgerekend worden in (a, b) . Het raakvlak is bijgevolg horizontaal als beide partiële afgeleiden gelijk aan nul zijn. In dit geval is het raakvlak gelijk aan $z = c$. Dit leidt tot de definitie van stationair punt voor een functie van twee veranderlijken.

Definitie 12.1.1. Zij $z = f(x, y)$ een functie van twee veranderlijken. Dan is (a, b) een **stationair punt** van f als

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{in } (a, b). \quad (12.1.1)$$

In termen van de gradiënt $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ betekent dit dat

$$\text{grad } f = (0, 0) \quad \text{in } (a, b)$$

voor een stationair punt (a, b) .

Voorbeeld 12.1.2. Vind de stationaire punten van de functie

$$f(x, y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x.$$

De partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y^2 - 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12xy - 6y^2.$$

De stationaire punten voldoen bijgevolg aan de twee vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - 12 = 0 \\ 12xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

De tweede vergelijking kan geschreven worden als $6y(2x - y) = 0$ en hieruit volgt dat $y = 0$ of $y = 2x$.

- Als we $y = 0$ invullen in de eerste vergelijking vinden we $3x^2 = 12$, zodat $x = \pm 2$. Dit geeft twee stationaire punten $(2, 0)$ en $(-2, 0)$.
- Als we de tweede mogelijkheid $y = 2x$ invullen in de eerste vergelijking vinden we $27x^2 = 12$. Dan is $x = \pm 2/3$ en $y = 2x = \pm 4/3$. Dan vinden we nog twee stationaire punten $(2/3, 4/3)$ en $(-2/3, -4/3)$.

In totaal zijn er dus vier stationaire punten: $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(2/3, 4/3)$ en $(-2/3, -4/3)$.

Vanwege de formule voor de richtingsafgeleide van f , zie (9.4.15),

$$D_\theta f = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

geldt in een stationair punt dat

$$D_\theta f = 0 \quad \text{voor alle } \theta.$$

Dit betekent het volgende. Zij (a, b) een willekeurig punt en stel $x = a + t \cos \theta$, $y = b + t \sin \theta$. Voor elke θ is

$$z = z(t) = f(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta) \quad (12.1.2)$$

dan een functie van de veranderlijke t met als afgeleide

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = D_\theta f$$

waarbij de richtingsafgeleide uitgerekend wordt in $(x, y) = (a + t \cos \theta, b + t \sin \theta)$. Voor $t = 0$ is dit

$$z'(0) = D_\theta f(a, b). \quad (12.1.3)$$

Als (a, b) een stationair punt is, dan is $t = 0$ bijgevolg een stationair punt van de functie (12.1.2) van één veranderlijke voor elke keuze van θ . In elke richting is bijgevolg de raaklijn aan de grafiek horizontaal.

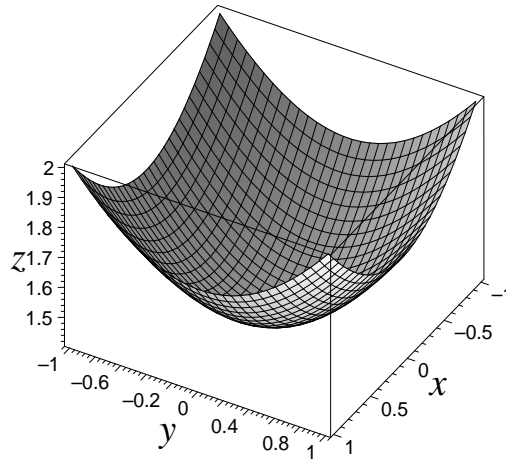
Voor een functie van n veranderlijken

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

geldt dat (a_1, a_2, \dots, a_n) een stationair punt is als

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

voor elke $j = 1, \dots, n$.



Figuur 12.1: Grafiek van een functie van twee veranderlijken rond een lokaal minimum

12.2 Extrema

Bij functies van één veranderlijke is de afgeleide een belangrijk hulpmiddel bij het bepalen van extrema. Voor functies van twee of meer veranderlijken wordt deze rol overgenomen door de partiële afgeleiden.

De definitie van (globale en lokale) maxima en minima voor een functie van meerdere veranderlijken is analoog aan de definitie voor een functie van één veranderlijke, zie paragraaf 5.2. We formuleren de definitie hieronder voor een functie van twee veranderlijken.

Definitie 12.2.1. Een reële functie $z = f(x, y)$ bereikt een **globaal maximum** in een punt (a, b) van het domein indien

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad \text{voor alle } (x, y) \text{ in het domein van } f.$$

De functie bereikt een **globaal minimum** in (a, b) indien

$$f(a, b) \leq f(x, y) \quad \text{voor alle } (x, y) \text{ in het domein van } f.$$

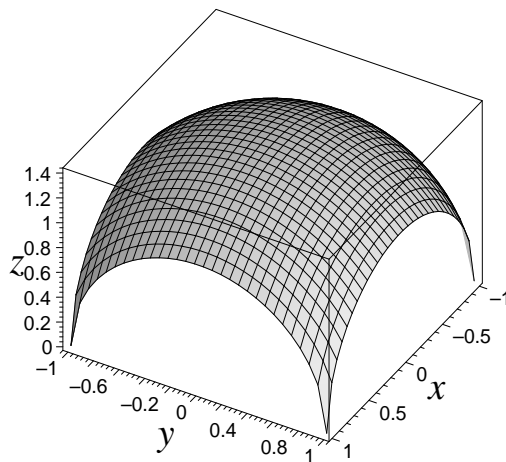
Bij een lokaal maximum of minimum vergelijken we $f(a, b)$ alleen met functiewaarden $f(x, y)$ voor koppels (x, y) die dicht bij (a, b) liggen. Om dit uit te drukken maken we gebruik van de **Euclidische afstand** tussen (x, y) en (a, b) :

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

In de volgende definitie vergelijken we $f(a, b)$ met $f(x, y)$ voor koppels (x, y) op afstand $< r$ van (a, b) voor zekere (kleine) waarde van $r > 0$.

Definitie 12.2.2. De functie f bereikt in (a, b) een **lokaal maximum** indien er een $r > 0$ bestaat zo dat

$$\begin{aligned} f(a, b) &\geq f(x, y) && \text{voor alle } (x, y) \text{ in het domein van } f \\ &&& \text{met } \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r. \end{aligned}$$



Figuur 12.2: Grafiek van een functie van twee veranderlijken rond een lokaal maximum

De functie f bereikt in (a, b) een **lokaal minimum** indien er een $r > 0$ bestaat zo dat

$$f(a, b) \leq f(x, y) \quad \text{voor alle } (x, y) \text{ in het domein van } f \\ \text{met } \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r.$$

Zie Figuur 12.1 voor de grafiek van een functie van twee veranderlijken rond een lokaal minimum en Figuur 12.2 voor de grafiek van een functie van twee veranderlijken rond een lokaal maximum.

De voorwaarde $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r$ betekent dat (x, y) binnen de cirkel rond (a, b) met straal r ligt. In het geval van een lokaal maximum in (a, b) geldt dus dat $f(x, y) \leq f(a, b)$ voor alle punten (x, y) die binnen een zekere cirkel rond (a, b) liggen. In het geval van een lokaal minimum geldt dat $f(x, y) \geq f(a, b)$ voor alle punten (x, y) binnen een cirkel rond (a, b) .

We zeggen dat de functie in (a, b) een **extremum** bereikt, als f in (a, b) een (globaal of lokaal) maximum of minimum bereikt. De volgende eigenschap is eenvoudig te bewijzen.

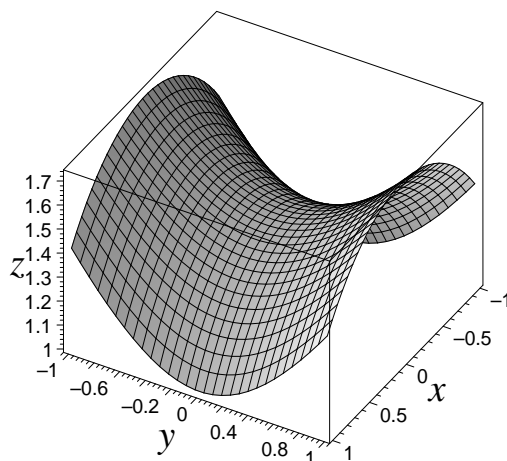
Eigenschap 12.2.3. *Als de afleidbare functie $z = f(x, y)$ een extremum bereikt in een punt (a, b) dat geen randpunt is van het domein van f , dan geldt*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{in } (a, b)$$

zodat (a, b) een stationair punt is van f .

Bewijs. Neem aan dat $z = f(x, y)$ een extremum bereikt in (a, b) . Voor elke willekeurige hoek θ bereikt de functie

$$z = f(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta) \tag{12.2.1}$$



Figuur 12.3: Grafiek van een functie van twee veranderlijken rond een zadelpunt

van de veranderlijke t een extremum voor $t = 0$. Omdat (a, b) geen randpunt is van het domein van f , is $t = 0$ geen randpunt van het interval van t -waarden waarvoor (12.2.1) gedefinieerd is. Uit de theorie voor functies van één veranderlijke weten we dan dat $z'(0) = 0$. Vanwege (12.1.3) en (9.4.15) is

$$z'(0) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Omdat $z'(0) = 0$ voor elke θ , volgt hieruit dat beide partiële afgeleiden in (a, b) gelijk aan nul zijn en dus dat (a, b) een stationair punt is van f . \square

Uit Eigenschap 12.2.3 volgt dat een stationair punt een kandidaat-extremum is. Het kan zijn dat de functie er een lokaal of globaal maximum of minimum aanneemt, maar dat is zeker niet noodzakelijk. Net zoals bij functies van één veranderlijke kan er sprake zijn van een buigpunt. Maar het is ook mogelijk dat het stationair punt een zadelpunt is. Dit is een geval dat niet kan optreden voor functies van één veranderlijke.

12.3 Zadelpunten

De grafiek van een functie van twee veranderlijken rond een punt waar een lokaal minimum of een lokaal maximum bereikt wordt, ziet er uit als in Figuur 12.1 of Figuur 12.2. Deze punten zijn stationaire punten.

Bij een zadelpunt ziet de grafiek er uit zoals in Figuur 12.3. De grafiek is een oppervlak dat lijkt op een zadel. Het buigt in één richting naar boven en in een andere richting naar beneden, zoals ook in een bergpas.

Bij een zadelpunt gaat het dus om een stationair punt (a, b) waarbij we twee richtingen kunnen aanduiden, gegeven door hoeken θ_1 en θ_2 , zodanig dat voor

de twee functies van één veranderlijke

$$\begin{aligned} z_1(t) &= f(a + t \cos \theta_1, b + t \sin \theta_1), \\ z_2(t) &= f(a + t \cos \theta_2, b + t \sin \theta_2) \end{aligned}$$

geldt dat $z_1(t)$ een lokaal minimum bereikt bij $t = 0$ en dat $z_2(t)$ een lokaal maximum bereikt bij $t = 0$.

Met andere woorden, als we vanuit (a, b) weggaan over de rechte die een hoek θ_1 maakt met de positieve x -as, dan neemt de functiewaarde toe. Als we weggaan over de rechte die een hoek θ_2 maakt met de positieve x -as dan neemt de functiewaarde af.

Voorbeeld 12.3.1. De functie $z = f(x, y) = (x - a)^2 - (y - b)^2$ heeft een zadelpunt in (a, b) .

Dit zien we als volgt. Als we $\theta_1 = 0$ stellen, dan geldt

$$z_1(t) = f(a + t, b) = t^2$$

en deze functie bereikt een minimum bij $t = 0$. De functiewaarde neemt dus toe als we vanuit (a, b) bewegen langs de rechte $y = b$. Als we evenwel $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ nemen, dan is

$$z_2(t) = f(a, b + t) = -t^2$$

en dit bereikt een maximum bij $t = 0$. Er is hier dus sprake van een zadelpunt.

Als we nog een andere richting nemen, zeg $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$ zodat $\cos \theta_3 = \sin \theta_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan volgt in dit voorbeeld dat

$$z_3(t) = f(a + \frac{1}{2}\sqrt{2}t, b + \frac{1}{2}\sqrt{2}t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^2 = 0.$$

De functie is bijgevolg constant 0 langs de rechte $x - a = y - b$.

12.4 Tweede afgeleide test

12.4.1 Formulering en voorbeelden

Bij een functie van één veranderlijke kennen we de tweede afgeleide test voor het bepalen van extrema, zie paragraaf 5.2.5. Neem aan dat $x = a$ een stationair punt is van de functie $z = f(x)$ van één veranderlijke. Als $f''(a) > 0$ dan bereikt f in $x = a$ een lokaal minimum, als $f''(a) < 0$ dan bereikt f in $x = a$ een lokaal maximum.

Voor een functie van twee veranderlijken bestaat ook een tweede afgeleide test. Deze test maakt gebruik van alle tweede orde partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

De tweede afgeleide test luidt als volgt

Stelling 12.4.1. *Neem aan dat (a, b) een stationair punt is van de functie van twee veranderlijken $z = f(x, y)$. Neem aan dat de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van f bestaan en continu zijn in een omgeving van (a, b) . Zij*

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (12.4.1)$$

waarbij alle partiële afgeleiden uitgerekend worden in (a, b) .

(a) Als $\Delta < 0$ dan is (a, b) een zadelpunt.

(b) Als $\Delta > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ dan bereikt f in (a, b) een lokaal minimum.

(c) Als $\Delta > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ dan bereikt f in (a, b) een lokaal maximum.

In alle andere gevallen doet de tweede afgeleide test geen uitspraak over het al dan niet extremum zijn van het stationair punt.

Voordat we ingaan op het bewijs van Stelling 12.4.1 geven we enkele voorbeelden.

Voorbeeld 12.4.2. We berekenen de aard van de stationaire punten voor de functie $z = f(x, y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$ uit Voorbeeld 12.1.2. De stationaire punten zijn

$$(2, 0), \quad (-2, 0), \quad (2/3, 4/3) \quad \text{en} \quad (-2/3, -4/3).$$

De eerste orde partiële afgeleiden zijn gegeven in Voorbeeld 12.1.2. Hieruit vinden we de tweede orde partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x - 12y.$$

We bekijken nu elk stationair punt afzonderlijk.

$(2, 0)$: In het punt $(2, 0)$ geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24$, zodat

$$\Delta = 12 \cdot 24 > 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0.$$

De functie bereikt in $(2, 0)$ een lokaal minimum.

$(-2, 0)$: In het punt $(-2, 0)$ geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -24$, zodat

$$\Delta = (-12) \cdot (-24) > 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0.$$

De functie bereikt in $(-2, 0)$ een lokaal maximum.

$(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$: In het punt $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 16$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$, zodat

$$\Delta = (4 \cdot (-8)) - 16^2 < 0.$$

Bijgevolg is $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ een zadelpunt.

$(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$: In het punt $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$, zodat

$$\Delta = (-4 \cdot 8) - (-16)^2 < 0.$$

Ook $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ is een zadelpunt.

Voorbeeld 12.4.3. De rechte door $(-1, -1, 1)$ en $(1, 2, 3)$ wordt beschreven door

$$(2s - 1, 3s - 1, 2s + 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

De rechte door $(0, -1, 3)$ en $(1, 1, 4)$ wordt beschreven door

$$(t, 2t - 1, 3 + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vind de punten op deze twee rechten die het dichtst bij elkaar liggen.

De afstand tussen twee punten van de twee rechten is een functie van de twee veranderlijken s en t :

$$d(s, t) = \sqrt{(2s - 1 - t)^2 + (3s - 2t)^2 + (2s - 2 - t)^2}.$$

We zoeken naar het minimum van $d(s, t)$. Dit komt overeen met het minimum van het kwadraat van $d(s, t)$:

$$f(s, t) = [d(s, t)]^2 = (2s - 1 - t)^2 + (3s - 2t)^2 + (2s - 2 - t)^2.$$

De partiële afgeleiden zijn

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= 4(2s - 1 - t) + 6(3s - 2t) + 4(2s - 2 - t) \\ &= 34s - 20t - 12, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -2(2s - 1 - t) - 4(3s - 2t) - 2(2s - 2 - t) \\ &= -20s + 12t + 6. \end{aligned}$$

We vinden de stationaire punten uit de twee vergelijkingen

$$\begin{cases} 34s - 20t - 12 = 0, \\ -20s + 12t + 6 = 0. \end{cases}$$

De enige oplossing is $s = 3$ en $t = 4.5$. Er is dus één stationair punt $(3, 4.5)$.

Uit de aard van het probleem kunnen we al concluderen dat het hier om een minimum moet gaan. We kunnen dit controleren met de tweede afgeleide test. Er geldt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 34, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = -20, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 12,$$

zodat

$$\Delta = (34 \cdot 12) - (-20)^2 = 8 > 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} > 0.$$

Er is dus inderdaad sprake van een minimum. De minimale afstand is

$$d_{\min} = d(3, 4.5) = \sqrt{0.5^2 + 0^2 + (-0.5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

12.4.2 Bewijs van de tweede afgeleide test

Voor het bewijs van de tweede afgeleide test nemen we een stationair punt (a, b) van een functie $z = f(x, y)$.

Voor willekeurige θ beschouwen we de functie van één veranderlijke

$$z = z(t) = f(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta).$$

Het bewijs is gebaseerd op het volgende feit:

- De functie f bereikt in (a, b) een lokaal minimum als en slechts als $z = z(t)$ een lokaal minimum bereikt in $t = 0$ voor elke θ .
- De functie f bereikt in (a, b) een lokaal maximum als en slechts als $z = z(t)$ een lokaal maximum bereikt in $t = 0$ voor elke θ .

Omdat $z = z(t)$ een functie van één veranderlijke is, kunnen we de tweede afgeleide test voor functies van één veranderlijke er op toepassen. Er geldt

$$z'(t) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta). \quad (12.4.2)$$

Om de tweede afgeleide te berekenen moeten we $\frac{\partial f}{\partial x}(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta)$ afleiden naar t . Dit gebeurt weer met de kettingregel (alle partiële afgeleiden worden uitgerekend in $(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta)$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sin \theta \\ &= \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

en net zo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Als we dit combineren met (12.4.2) dan volgt

$$z''(t) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

waarbij we de partiële afgeleiden uitrekenen in $(a + t \cos \theta, b + t \sin \theta)$. Voor $t = 0$ wordt dit

$$z''(0) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b). \quad (12.4.3)$$

De uitdrukking (12.4.3) is van de vorm

$$z''(0) = A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta \quad (12.4.4)$$

met

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

We stellen

$$\lambda = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \theta = \text{bgtan}(1/\lambda),$$

en dan kunnen we (12.4.4) schrijven als

$$\begin{aligned} z''(0) &= \sin^2 \theta \left(A \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 2B \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + C \right) \\ &= \sin^2 \theta (A\lambda^2 + 2B\lambda + C) \end{aligned} \quad (12.4.5)$$

Merk op dat $-4\Delta = -4(AC - B^2) = 4B^2 - 4AC$ de discriminant is van de tweedegraads veelterm

$$P(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \quad (12.4.6)$$

in de veranderlijke λ .

- (a) Als $\Delta < 0$ dan is de discriminant $-4\Delta > 0$. De veelterm (12.4.6) heeft dan twee verschillende reële nulpunten. In deze nulpunten verandert de veelterm van teken. Ze gaat over van positief naar negatief, of omgekeerd. Bijgevolg neemt $P(\lambda)$ zowel positieve als negatieve waarden aan.

Er zijn dus reële λ_1 en λ_2 met $P(\lambda_1) > 0$ en $P(\lambda_2) < 0$. Voor de bijbehorende waarden $\theta_1 = \text{bgtan}(1/\lambda_1)$ en $\theta_2 = \text{bgtan}(1/\lambda_2)$ volgt dan uit (12.4.5) dat $z''(0) > 0$ voor $\theta = \theta_1$ en $z''(0) < 0$ voor $\theta = \theta_2$. Bijgevolg is (a, b) een zadelpunt.

- (b) Als $\Delta > 0$ dan is de discriminant van de veelterm (12.4.6) strikt negatief. De veelterm heeft dan geen reële nulpunten. Als tevens $A > 0$ dan ligt de grafiek van $P(\lambda)$ helemaal boven de λ -as en dus is $P(\lambda) > 0$ voor alle λ . Uit (12.4.5) volgt dan dat $z''(0) > 0$ voor alle θ en dus bereikt f in (a, b) een lokaal minimum.

- (c) Als $\Delta > 0$ en $A < 0$ dan geldt net zoals bij (b) dat de veelterm geen reële nulpunten heeft. Omdat nu $A < 0$ ligt de grafiek van $P(\lambda)$ helemaal onder de λ -as. Dus is $P(\lambda) < 0$ voor alle λ . Dan is $z''(0) < 0$ voor alle θ zodat f in (a, b) een lokaal maximum bereikt.

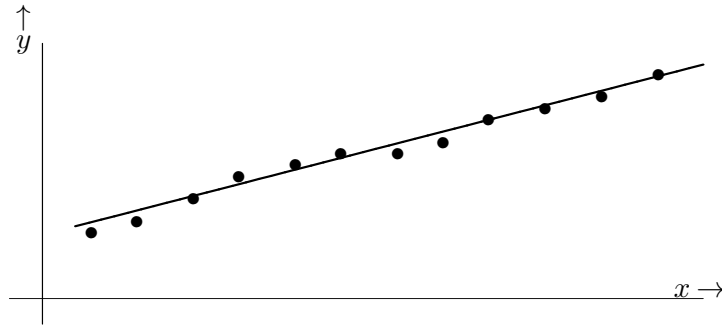
Hiermee is de tweede afgeleide test bewezen.

12.5 Kleinste-kwadratenmethode

Een bijzonder optimalisatieprobleem treedt op bij de analyse en verwerking van meetgegevens. In veel wetenschappelijke experimenten meet men fysische grootheden met als doel om een verband tussen één of meer grootheden te vinden.

Neem aan dat we weten (of verwachten) dat de grootheid y op eenvoudige wijze

$$y = ax + b \quad (12.5.1)$$



Figuur 12.4: Rechte $y = ax + b$ die zo goed mogelijk bij de meetgegevens past.

samenhangt van de grootheid x . De waarden van a en b kent men niet, maar men hoopt ze door middel van experimenten te kunnen bepalen. Neem aan dat N metingen aanleiding geven tot N koppels

$$(x_j, y_j), \quad j = 1, \dots, N$$

waarbij we aannemen dat de waarde x_j exact is, maar dat er een fout kan zijn op de waarde y_j vanwege onnauwkeurigheden in de metingen. De koppels (x_j, y_j) noemen we de **datapunten**.

Als er geen meetfouten zouden zijn en als het verband (12.5.1) geldig is, dan zouden de datapunten (x_j, y_j) precies voldoen aan $y = ax + b$, zodat de volgende N gelijkheden zouden gelden

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \\ \vdots \\ y_N = ax_N + b. \end{cases} \quad (12.5.2)$$

Meetkundig betekent dit dat de datapunten (x_j, y_j) precies op de rechte met vergelijking $y = ax + b$ liggen. Uit de vergelijkingen (12.5.2) kunnen we de waarden van a en b eenvoudig vinden. In feite zijn twee meetgegevens voldoende om a en b te bepalen, als er geen meetfouten zijn.

In de praktijk is het echter niet te vermijden dat er meetfouten optreden. In dat geval liggen de datapunten niet precies op een rechte, zoals in het voorbeeld van Figuur 12.4. We kunnen ons dan afvragen welke rechte $y = ax + b$ het best past bij de gevonden datapunten. Om deze vraag te kunnen beantwoorden, moeten we een criterium bepalen waaraan de best passende rechte zou moeten voldoen.

Bij de **kleinste-kwadratenmethode** beschouwt men de volgende som

$$\sum_{j=1}^N (y_j - (ax_j + b))^2 \quad (12.5.3)$$

als een maat voor de fout. De best passende rechte is de rechte $y = ax + b$ waarbij a en b zo genomen zijn dat de som (12.5.3) zo klein mogelijk is. Het

aldus gevonden verband tussen y en x heet het kleinste-kwadratenverband. De kleinste-kwadratenmethode (12.5.3) is gebaseerd op de aanname dat de waarde van x_j exact gemeten is. Bij een verband $y = ax + b$ en bij afwezigheid van meetfouten, zou de waarde $ax_j + b$ gevonden zijn. Dus

$$(y_j - (ax_j + b))^2$$

is het kwadraat van de afstand tussen de gemeten waarde y_j en de echte waarde $ax_j + b$ en dit wordt gebruikt als de fout in het j -de datapunt. De som van deze kwadraten wil men vervolgens zo klein mogelijk maken, vandaar ook de naam kleinste-kwadratenmethode.

De kleinste-kwadratenmethode leidt tot de vraag naar het minimum van de functie

$$f(a, b) = \sum_{j=1}^N (y_j - (ax_j + b))^2 \quad (12.5.4)$$

van twee veranderlijken a en b .

Om een minimum van f te vinden berekenen we de partiële afgeleiden

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= -2 \sum_{j=1}^N x_j (y_j - ax_j - b), \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= -2 \sum_{j=1}^N (y_j - ax_j - b). \end{aligned}$$

De stationaire punten voldoen bijgevolg aan de twee vergelijkingen

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N x_j (y_j - ax_j - b) = 0 \\ \sum_{j=1}^N (y_j - ax_j - b) = 0 \end{cases}$$

die we kunnen herschrijven tot

$$\begin{cases} a \left(\sum_{j=1}^N x_j^2 \right) + b \left(\sum_{j=1}^N x_j \right) = \sum_{j=1}^N x_j y_j \\ a \left(\sum_{j=1}^N x_j \right) + b N = \sum_{j=1}^N y_j \end{cases} \quad (12.5.5)$$

Dit zijn twee lineaire vergelijkingen voor de onbekenden a en b .

De vergelijkingen en de oplossing ervan kunnen overzichtelijk opgeschreven worden als we de notatie

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j$$

gebruiken voor het gemiddelde van een functie $u = u(x, y)$ over de N datapunten, waarbij $u_j = u(x_j, y_j)$. We schrijven dus

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j y_j.$$

Let op dat $\overline{x^2}$ niet hetzelfde is als $(\bar{x})^2$ en dat \overline{xy} niet hetzelfde is als $\bar{x} \cdot \bar{y}$.

Met deze notatie kunnen we de vergelijkingen (12.5.5) (na deling door N) herschrijven tot

$$\begin{cases} a \overline{x^2} + b \bar{x} = \overline{xy} \\ a \bar{x} + b = \bar{y}. \end{cases} \quad (12.5.6)$$

De oplossing van (12.5.6) is gelijk aan

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - a \bar{x} \quad (12.5.7)$$

en dit is het enige stationair punt. Uit de aard van het probleem kunnen we al wel concluderen dat het om een minimum moet gaan. Dit kan ook met de tweede afgeleide test gevonden worden, maar dat zullen we hier niet verder nagaan.

De oplossing (12.5.7) is alleen geldig als

$$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 \neq 0 \quad (12.5.8)$$

omdat we anders door 0 zouden delen in de formule (12.5.7) voor a . Men kan laten zien dat aan (12.5.8) steeds voldaan is, tenzij alle x -waarden x_j in de datapunten (x_j, y_j) gelijk zijn.

Voorbeeld 12.5.1. We zoeken de rechte die het best bij de volgende datapunten past

| | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_j | 0.0 | 1.1 | 3.2 | 3.9 | 7.1 | 8.9 |
| y_j | 1.1 | 1.6 | 1.6 | 2.8 | 2.9 | 3.8 |

Hier is $N = 6$ en de coëfficiënten voor de vergelijkingen (12.5.6) zijn

$$\sum_{j=1}^6 x_j = 24.2, \quad \sum_{j=1}^6 y_j = 13.8, \quad \sum_{j=1}^6 x_j^2 = 156.28, \quad \sum_{j=1}^6 x_j y_j = 72.21.$$

De vergelijkingen voor a en b zijn bijgevolg

$$\begin{cases} 156.28 a + 24.2 b = 72.21 \\ 24.2 a + 6 b = 13.8 \end{cases}$$

met als oplossing $a = 0.28$ en $b = 1.16$. De gevraagde rechte is

$$y = 0.28 x + 1.16.$$

12.6 Optimalisatie met nevenvoorwaarden

Het vinden van extrema van een functie noemen we **optimalisatie**. In de voorbeelden die we tot nu toe gezien hebben is de functie $z = f(x, y)$ afhankelijk van de veranderlijken x en y waarbij geen verder verband tussen x en y bestaat. In veel gevallen bestaat er wel zo'n verband en dan spreken we van optimalisatie met **nevenvoorwaarden** of beperkingen.

12.6.1 Eliminatiemethode

We geven een voorbeeld.

Voorbeeld 12.6.1. We zoeken de extrema van de functie

$$f(x, y) = 3x^3 + 5y + xy - 2x \quad (12.6.1)$$

onder de nevenvoorwaarde dat

$$x^2 - y = 0. \quad (12.6.2)$$

In dit geval vinden we uit de nevenvoorwaarde (12.6.2) dat $y = x^2$. Als we dat invullen in (12.6.1) dan vinden we dat het probleem teruggebracht kan worden tot het vinden van extrema van de functie

$$f(x, x^2) = F(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x$$

van één veranderlijke.

De extrema van F vinden we op de gebruikelijke manier. Uit

$$F'(x) = 12x^2 + 10x - 2 = 2(6x - 1)(x + 1) = 0$$

volgt $x = \frac{1}{6}$ en $x = -1$. Het tekenverloop van F' is

| | | | | | |
|---------|----------|---------|--------|---------------|----------|
| x | | -1 | | $\frac{1}{6}$ | |
| $F'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $F(x)$ | stijgend | maximum | dalend | minimum | stijgend |

Bijgevolg bereikt F in $x = -1$ een lokaal maximum en in $x = \frac{1}{6}$ een lokaal minimum.

Voor het oorspronkelijke probleem betekent dit dat $f(x, y)$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 - y = 0$ een lokaal maximum bereikt in $(x, y) = (-1, 1)$ en een lokaal minimum in $(x, y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{36})$.

Het optimalisatieprobleem van Voorbeeld 12.6.1 is eenvoudig op te lossen omdat we y door middel van de nevenvoorwaarde (12.6.2) kunnen uitdrukken in x . Daarmee brengen we de functie $f(x, y)$ van twee veranderlijken terug tot een functie $F(x)$ van één veranderlijke. Deze methode heet de **eliminatiemethode** omdat één van de veranderlijken door middel van de nevenvoorwaarde uit het probleem geëlimineerd wordt.

12.6.2 Lagrange techniek

Het optimalisatieprobleem met een nevenvoorwaarde kunnen we voor een functie van twee veranderlijken in het algemeen als volgt formuleren: Zoek de extrema van de functie

$$z = f(x, y) \quad (12.6.3)$$

onder de nevenvoorwaarde

$$g(x, y) = c \quad (12.6.4)$$

met c een constante. In sommige gevallen is het niet mogelijk om de nevenvoorwaarde (12.6.4) te gebruiken om y expliciet te vinden als functie van x , of x als functie van y . In sommige andere gevallen is dit wel mogelijk, maar worden de uitdrukkingen te ingewikkeld om goed mee te kunnen rekenen.

Een alternatieve aanpak is dan de volgende. Uit (12.6.4) kunnen we vaak in principe y uitdrukken als functie van x , zeg $y = y(x)$. We vinden dan

$$g(x, y(x)) = c.$$

Uit de kettingregel voor functies van twee veranderlijken, die we toepassen in de vorm (9.4.4), volgt dan dat

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (12.6.5)$$

Omdat $y = y(x)$ kunnen we de functie (12.6.3) die we optimaliseren schrijven als

$$F(x) = f(x, y(x))$$

met als afgeleide, opnieuw vanwege (9.4.4),

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (12.6.6)$$

Een oplossing (x, y) van het optimalisatieprobleem moet voldoen aan de nevenvoorwaarde en dus aan (12.6.5). Bovendien moet gelden dat $F'(x) = 0$. Dit leidt tot de volgende twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Uit deze twee vergelijkingen kunnen we $\frac{dy}{dx}$ elimineren door de eerste vergelijking te vermenigvuldigen met $\frac{\partial g}{\partial y}$, de tweede met $\frac{\partial f}{\partial y}$, en vervolgens de tweede vergelijking van de eerste af te trekken. Dit leidt tot

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x},$$

ofwel

$$\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (12.6.7)$$

Het is gebruikelijk om de gemeenschappelijke waarde van de twee verhoudingen in (12.6.7) λ te noemen. Dan geldt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (12.6.8)$$

De veranderlijke λ is een nieuwe onbekende in het probleem, die de **Lagrange multiplier** of Lagrange multiplier genoemd wordt.

De vergelijkingen (12.6.8) samen met de nevenvoorwaarde (12.6.4) geven ons een stelsel van drie vergelijkingen voor de onbekenden x , y en λ . Een oplossing van dit stelsel geeft ons een stationair punt van f onder de nevenvoorwaarde (12.6.4). Deze stationaire punten zijn kandidaat-extrema.

Voorbeeld 12.6.2. Zoek de extrema van de functie

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$

onder de voorwaarde $g(x, y) = x^2 + y^2 = 20$. De nevenvoorwaarde zegt dat (x, y) beperkt is tot de cirkel met straal $\sqrt{20}$ rond de oorsprong.

We vormen de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \text{en} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y.$$

De stationaire punten voldoen bijgevolg aan

$$\begin{cases} 8x - 4y &= 2\lambda x \\ -4x + 2y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 20 \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$\lambda = \frac{4x - 2y}{x} = \frac{-2x + y}{y}$$

hetgeen leidt tot

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = (2x - y)(x + 2y) = 0.$$

Er zijn twee mogelijkheden: $y = 2x$ of $x = -2y$.

- Als $y = 2x$ dan volgt uit $x^2 + y^2 = 20$ dat $5x^2 = 20$ zodat $x^2 = 4$. Dit levert $x = 2$ en $x = -2$. De stationaire punten zijn $(2, 4)$ en $(-2, -4)$.
- Als $x = -2y$ dan volgt uit $x^2 + y^2 = 20$ dat $5y^2 = 20$ zodat $y^2 = 4$. Dit levert $y = 2$ en $y = -2$. De stationaire punten die we nu vinden zijn $(-4, 2)$ en $(4, -2)$.

We hebben in totaal vier stationaire punten. Dit zijn de enige kandidaat-extrema. We berekenen

$$f(2, 4) = 0, \quad f(-2, -4) = 0, \quad f(-4, 2) = 100, \quad f(4, -2) = 100.$$

We zien dat f een lokaal minimum bereikt in $(2, 4)$ en $(-2, -4)$ en een lokaal maximum in $(-4, 2)$ en $(4, -2)$. De lokale extrema zijn in dit geval globale extrema.

12.6.3 Meetkundige interpretatie

De Lagrange techniek heeft een interessante meetkundige interpretatie. Beschouw weer het probleem (12.6.3)-(12.6.4): Vind de extrema van

$$z = f(x, y) \quad (12.6.9)$$

onder de nevenvoorwaarde

$$g(x, y) = c. \quad (12.6.10)$$

De nevenvoorwaarde (12.6.10) bepaalt een kromme \mathcal{K} in het xy -vlak die gegeven wordt als niveaukromme van de functie g . Voor elke waarde d is

$$f(x, y) = d \quad (12.6.11)$$

een niveaukromme van de functie f . Als de niveaukromme (12.6.11) de kromme \mathcal{K} snijdt dan ligt op de kromme \mathcal{K} een punt (x, y) waarvoor $f(x, y) = d$. Het optimalisatieprobleem onder nevenvoorwaarde (12.6.10) kan dan ook als volgt geformuleerd worden:

- Vind de grootste of kleinste waarde van d waarvoor de niveaukromme (12.6.11) de kromme \mathcal{K} snijdt.

Als we de kromme \mathcal{K} tekenen samen met enkele niveaukrommen van f , zoals in Figuur 12.5 dan kunnen we het volgende eenvoudig inzien:

- Als d de grootste of kleinste waarde van d is waarvoor de niveaukromme $f(x, y) = d$ de kromme \mathcal{K} snijdt, dan raken de niveaukromme en de kromme \mathcal{K} elkaar.

Uit dit meetkundige inzicht kunnen we ook tot de Lagrange techniek komen. In een punt (a, b) waar de functie $f(x, y)$ een maximum of minimum bereikt onder de nevenvoorwaarde (12.6.10) moeten de niveaukromme $f(x, y) = d$ van f en de niveaukromme $g(x, y) = c$ van g elkaar raken. De raaklijnen aan die niveaukrommen moeten met andere woorden aan elkaar gelijk zijn.

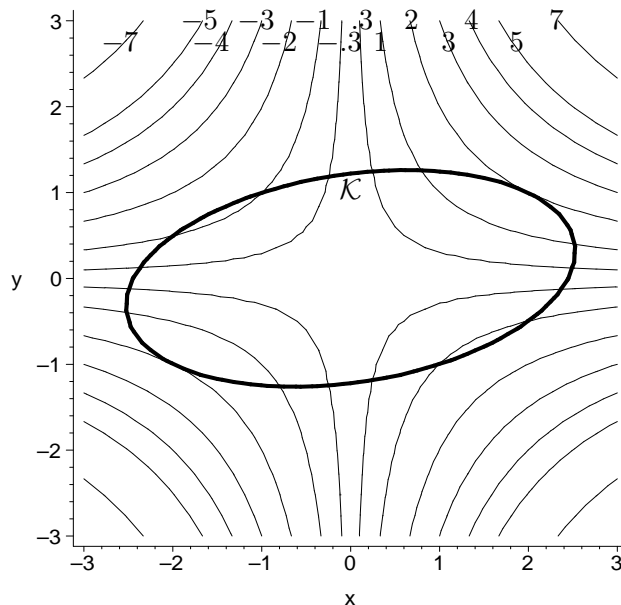
In het vorige hoofdstuk hebben we een methode gezien om de raaklijn aan een niveaukromme te bepalen. Hier is in het bijzonder de formule (9.4.8) van belang die de richtingscoëfficiënt van de raaklijn geeft. Als we dit toepassen op de huidige situatie dan zien we dat de richtingscoëfficiënten van de twee raaklijnen gelijk zijn als en slechts als

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \quad (12.6.12)$$

waarbij we alle partiële afgeleiden uitrekenen in (a, b) . Dit is dezelfde voorwaarde als (12.6.7) en deze leidt zoals we gezien hebben tot de vergelijkingen (12.6.8) met de Lagrange multiplicator λ .

Voorbeeld 12.6.3. In Figuur 12.5 zijn enkele niveaukrommen getekend van de functie

$$f(x, y) = xy$$



Figuur 12.5: Kromme \mathcal{K} en enkele niveaukrommen van de functie $f(x, y) = xy$

en tevens de ellips

$$\mathcal{K} : g(x, y) = x^2 - xy + 4y^2 = 6.$$

We zien in de figuur dat de niveaukromme $f(x, y) = 2$ raakt aan de ellips \mathcal{K} .

Als we het probleem om $f(x, y)$ te maximaliseren onder de nevenvoorwaarde $g(x, y) = 6$ oplossen met de Lagrange techniek dan vinden we de vergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} : & y = \lambda(2x - y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} : & x = \lambda(-x + 8y) \\ g(x, y) = 6 : & x^2 - xy + 4y^2 = 6. \end{cases}$$

Dit is een stelsel van drie vergelijkingen voor x , y en λ .

Uit de eerste twee vergelijkingen volgt

$$\lambda = \frac{y}{2x - y} = \frac{x}{-x + 8y}$$

hetgeen we kunnen herschrijven tot $2x^2 = 8y^2$. Hieruit volgt dat $x = 2y$ of $x = -2y$.

- Als $x = 2y$ dan volgt uit $x^2 - xy + 4y^2 = 6$ dat $6y^2 = 6$. Dan is $y = \pm 1$ en we vinden de stationaire punten $(2, 1)$ en $(-2, -1)$.
- Als $x = -2y$ dan volgt uit $x^2 - xy + 4y^2 = 6$ dat $10y^2 = 6$. Dus $y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ en we vinden de stationaire punten $(2\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}})$ en $(-2\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}})$.

In totaal vinden we vier stationaire punten van f onder de nevenvoorwaarde $g(x, y) = 6$. Deze vier punten zijn precies de punten waar de niveaokromme van f raakt aan de ellips \mathcal{K} . Deze vier punten zijn de enige kandidaat-extrema.

Om het minimum en het maximum te vinden berekenen we f in elk van de stationaire punten. We vinden

$$f(2, 1) = f(-2, -1) = 2,$$

$$f\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = f\left(-2\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) = -\frac{6}{5}.$$

Het maximum wordt bijgevolg bereikt in $(2, 1)$ en $(-2, -1)$ en het minimum in $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ en $\left(-2\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

12.6.4 De Lagrange techniek in meer veranderlijken

We hebben de Lagrange techniek beschreven voor het bepalen van stationaire punten van een functie $f(x, y)$ onder de nevenvoorwaarde $g(x, y) = c$. De uitbreiding naar functies van n veranderlijken luidt als volgt:

Een stationair punt van de functie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ van n veranderlijken onder de nevenvoorwaarde $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ is een oplossing van de $n + 1$ vergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x_1} & = & \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & = & \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & = & \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & c, \end{array} \right.$$

waarin λ de Lagrange multiplier is. De stationaire punten zijn de kandidaat-extrema voor $f(x_1, \dots, x_n)$ onder de nevenvoorwaarde $g(x_1, \dots, x_n) = c$.

In de oefeningen zal het geval $n = 3$ voorkomen. Naast de Lagrange techniek kan soms ook de eliminatiemethode gebruikt worden.

12.7 Oefeningen

Oefening 12.1. Schets de niveaукrommen van de volgende kwadratische functies en ga na welke functies een maximum of een minimum bereiken in de oorsprong:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ | (f) $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2$ |
| (b) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ | (g) $f(x, y) = -4x^2 + xy + 5y^2$ |
| (c) $f(x, y) = -4(x^2 + 5y^2)$ | (h) $f(x, y) = 6x^2 + xy - 2y^2$ |
| (d) $f(x, y) = 2y^2 - x^2$ | (i) $f(x, y) = 3x^2 + 7xy - y^2$ |
| (e) $f(x, y) = 2xy$ | (j) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2$ |

Oefening 12.2. Bepaal en classificeer (d.w.z. ga na of het een lokaal maximum, lokaal minimum, of zadelpunt betreft) de stationaire punten van de volgende functies:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| (a) $3 - x^2 - xy - y^2 + 2y$ | (d) $xye^{-x^2-y^2}$ |
| (b) $x^3 + y^2 - 3x - 4y + 2$ | (e) $3x^2y + xy^2 - 6xy$ |
| (c) $4x^3 - 3x^2y + y^3 - 9y$ | (f) $(x - y)^3 + x^2y^2$ |

Oefening 12.3. Ga na dat $(2, 0)$ een stationair punt van de volgende functies is. Bepaal of het een lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt betreft.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = 1 + y^2 + (x - 2)^2$ | (c) $f(x, y) = 1 + y^2 + (x - 2)^3$ |
| (b) $f(x, y) = 1 + y^2 - (x - 2)^3$ | (d) $f(x, y) = 1 + y^2 + (x - 2)^4$ |

Oefening 12.4. Bepaal en classificeer de stationaire punten van de volgende functies:

- | | |
|---|---------------------------|
| (a) $x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$ | (e) $(x + y)e^{-xy}$ |
| (b) $x + y \sin(x)$ | (f) $(x^2 + y^2)e^{-x-y}$ |
| (c) $x^3 + 3y^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 9y$ | (g) x^2y^2 |
| (d) $xy + y^2$ | (h) $3x^2 - 4xy + y^2$ |

Oefening 12.5. Bepaal en classificeer de stationaire punten van de volgende functies. Bepaal ook de extreme waarden:

- | | |
|----------------------|--|
| (a) $e^{-(x^2+y^2)}$ | (c) $x^2y + y^3 - y$ |
| (b) $\cos(x + y)$ | (d) $2x^3 + 3x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 3x^2 + 6xy$ |

Oefening 12.6. Bepaal en classificeer de stationaire punten van de volgende functies:

- | | |
|-----------------------|------------------------------------|
| (a) xy | (c) $x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$ |
| (b) $x^3 - y^3 + 6xy$ | (d) $x^4 + y^4 + 4xy$ |

Oefening 12.7. Beschouw de functie $f(x, y) = x^3y + 3xy^3 - 3xy$.

- (a) Schets de niveaukromme $f(x, y) = 0$. Bepaal ook de gebieden waar $f(x, y)$ positief is en waar $f(x, y)$ negatief is.
- (b) Bereken de stationaire punten van $f(x, y)$.
- (c) Wat is de aard van de stationaire punten in het eerste kwadrant (d.w.z. met $x > 0$ en $y > 0$)?

Oefening 12.8. Bepaal voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ de stationaire punten en de aard van de stationaire punten voor de functie

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3\alpha xy.$$

Oefening 12.9. Beschouw de functie $f(x, y) = xy^2 - 4y \ln x$ met $x > 0$.

- (a) Schets de niveaukromme $f(x, y) = 0$. Bepaal de gebieden waar $f(x, y)$ positief is en waar $f(x, y)$ negatief is.
- (b) Bereken de stationaire punten van $f(x, y)$.
- (c) Wat is de aard van de stationaire punten?

Oefening 12.10. Beschouw de functie $f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$.

- (a) Onderzoek in welke deel van het xy -vlak de functie positief is, en waar ze negatief is.
- (b) Bereken de stationaire punten van $f(x, y)$.
- (c) Wat is de aard van de stationaire punten?

Oefening 12.11. Zij gegeven n puntmassa's in het geijkte vlak, waarbij massa $m_j > 0$ zich bevindt in (x_j, y_j) . Het zwaartepunt $Z : (x, y)$ is het punt waarvoor

$$\sum_{j=1}^n m_j ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2)$$

minimaal is. Bereken de coördinaten van Z .

Oefening 12.12. Toon aan

- (a) $16x + 22y - 2x^2 + 2xy - 3y^2 - 80$ bereikt een lokaal maximum in $(7, 6)$.
- (b) $x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$ bereikt een lokaal minimum in $(-2, 2)$.
- (c) $e^{-x^2 - y^2 - 2x + 4y - 5}$ bereikt een lokaal maximum in $(-1, 2)$.
- (d) $x^2 - y^2$ heeft een zadelpunt in $(0, 0)$.
- (e) xy heeft een zadelpunt in $(0, 0)$.

Oefening 12.13. Vind de rechte die het best bij de volgende datapunten past (volgens het criterium van de kleinste kwadraten):

(a)

| | | | | |
|-----|----|---|---|----|
| x | -1 | 1 | 2 | 4 |
| y | 2 | 4 | 6 | 12 |

(b)

| | | | |
|-----|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 |
| y | 2 | 2 | 4 |

(c) De volgende tabel geeft de hoeveelheid kaliumbromide M (in gram) die oplost in 100 gram water met een temperatuur T (in graden Celsius)

| | | | | |
|-----|----|----|----|----|
| T | 0 | 20 | 40 | 60 |
| M | 54 | 65 | 75 | 85 |

Hoeveel gram kaliumbromide wordt er naar verwachting opgelost in 100 gram water bij $80^\circ C$?

Oefening 12.14. Beschouw de volgende datapunten:

| | | | | |
|-----|-----|-----|----|----|
| x | -1 | 1 | 2 | 3 |
| y | 0.1 | 2.3 | 10 | 45 |

We zoeken een verband van de vorm $y = ae^{kx}$.

Als $y = ae^{kx}$ dan is $\ln y = \ln a + kx$ een lineair verband tussen $\ln y$ en x . Bereken $\ln y$ voor de bovenstaande datapunten en bepaal $\ln a$ en k volgens de kleinste kwadratenbenadering.

Oefening 12.15. De tijd T die een geoefende loper voor de marathon nodig heeft hangt af van veel factoren zoals lengte, gewicht, leeftijd, trainingsinspanning, enzovoort. Uit studies blijkt dat twee factoren in het bijzonder van belang zijn

- x_1 is aantal trainingskilometers gedurende de laatste acht weken;
- x_2 is de leeftijd.

Een lineair model veronderstelt dat de tijd T (in minuten) voldoet aan

$$T = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

(a) Gebaseerd op de vijf observaties in onderstaande tabel, vind de waarden van α_0 , α_1 en α_2 uit de kleinste kwadratenbenadering.

| | | | | | |
|-------|-----|------|-----|-----|-----|
| x_1 | 990 | 1285 | 331 | 654 | 771 |
| x_2 | 23 | 42 | 31 | 38 | 45 |
| T | 181 | 193 | 212 | 221 | 248 |

- (b) Geef een verwachting voor de marathontijd van een 43-jaar oude loper, die de afgelopen acht weken 720 kilometer getraind heeft.
- (c) Wat is uw eigen verwachte marathontijd?

Oefening 12.16. Vind de stationaire punten van $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ onder de nevenvoorwaarde $x + y = 1$:

- (a) door eliminatie van één van de veranderlijken met behulp van de nevenvoorwaarde,
- (b) met de methode van Lagrange multiplicatoren.

Oefening 12.17. Bepaal het maximum van de functie $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

Oefening 12.18. Bepaal de stationaire punten van de functie $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Laat zien dat deze punten overeenkomen met de punten op de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ waarvan de afstand tot $(1, 2, -1)$ maximaal of minimaal is.

Oefening 12.19. Bepaal de punten van de volgende oppervlakken die het dichtst bij de oorsprong liggen:

- (a) $2x - y + 2z = 16$
- (b) $xy = z + 1$

Oefening 12.20. Bereken de extrema van de functie $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + z$ onder de nevenvoorwaarden $x^2 + y^2 = 1$ en $z = 2$.

Oefening 12.21. Vind de extrema van $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ onder de nevenvoorwaarden dat $x - y = 1$ en $y + z = 1$.

Oefening 12.22. Bepaal de extrema van de volgende functies $f(x, y)$ onder de gegeven nevenvoorwaarde $g(x, y) = c$.

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^4 + y^4$, $c = 1$;
- (b) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $g(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 1$;
- (c) $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$, $g(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 1$;
- (d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $g(x, y) = -4x - 3y$, $c = 6$;
- (e) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y$, $c = 1$;
- (f) $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 5$;
- (g) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $g(x, y) = y - x$, $c = \frac{\pi}{4}$;
- (h) $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$, $g(x, y) = x + 2y$, $c = 24$.

Oefening 12.23. We willen een gesloten balkvormige container maken met een volume van 64 m^3 met zo weinig mogelijk materiaal voor de wanden, dus we willen een zo klein mogelijke oppervlakte van de wanden. Hoe kunnen we dit realiseren?

Oefening 12.24. Welk(e) punt(en) van het oppervlak $z = 1 + x^2 + y^2$ ligt (liggen) het dichtst bij de oorsprong?

Oefening 12.25. Een (vereenvoudigde) student spendeert zijn maandgeld aan 3 dingen: maaltijden in Alma (x_1 keer per maand, 6 Euro per maaltijd), film (x_2 keer per maand, 10 Euro per film) en vervoer (x_3 ritten per maand, 9 Euro per rit). De student wil natuurlijk zo weinig mogelijk uitgeven en toch een constant nutsniveau hebben van 40. Hoe verdeelt hij zijn geld optimaal als zijn nutsfunctie de volgende is:

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1^{0,3} x_2^{0,5} x_3^{0,2} \quad ?$$

Oefening 12.26. Wat is de maximale inhoud van een balk met zijden evenwijdig aan de x - en y -as, gelegen binnen de ellipsoïde met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hierin zijn $a > 0$, $b > 0$ en $c > 0$.

Oefening 12.27. Beschouw de functie

$$E(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2b(xy + yz)$$

waarin a en b constanten zijn.

- (a) Laat zien dat het probleem om stationaire punten te vinden van $E(x, y, z)$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ neerkomt op het oplossen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{rclcl} (a - \lambda)x & + & by & & = 0 \\ bx & + & (a - \lambda)y & + & bz = 0 \\ & & by & + & (a - \lambda)z = 0 \end{array}$$

Deze vergelijkingen hebben een oplossing die voldoet aan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ voor de volgende drie mogelijke waarden van de Lagrange multiplier

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = a + \sqrt{2}b, \quad \lambda_3 = a - \sqrt{2}b.$$

- (b) Bereken voor elke waarde van λ het bijbehorende stationaire punt onder de nevenvoorwaarde. Neem hierbij aan dat x positief is.
- (c) Laat zien dat de waarde van E in elk van de stationaire punten overeenstemt met de waarde van de overeenkomstige λ .
[Dit is het Hückel probleem voor de allylgroep CH_2CHCH_3]

Oefening 12.28. In een elektrisch circuit met een vaste weerstand R en een variabele weerstand x voldoen de elektrische spanning V en de stroomsterkte I aan de wet van Ohm

$$V = I(R + x).$$

We willen weten voor welke waarde van $x \geq 0$ de warmteontwikkeling

$$y = I^2 x$$

bij de variabele weerstand maximaal is. Hierbij nemen we aan dat V en R constant zijn.

(a) Los dit probleem op met de eliminatiemethode.

(b) Los dit probleem op met de Lagrange-techniek.

Oefening 12.29. Bereken het maximum en het minimum van de functie

$$f(x, y) = e^{2xy}$$

onder de nevenvoorwaarde $x^3 + 8y^3 = 16$ met $x \geq 0$ en $y \geq 0$. Denk ook aan mogelijke randextrema.

Oefening 12.30. (Examenvraag) We willen het punt op de ellips

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = r^2$$

bepalen dat het dichtst ligt bij $(1, 0)$. Hierin is $r > 0$ een gegeven waarde.

(a) Formuleer het probleem als een minimalisatieprobleem met nevenvoorwaarden. Stel de bijbehorende vergelijkingen van Lagrange op.

(b) Welk punt op de ellips ligt het dichtst bij $(1, 0)$? Uw antwoord hangt af van de waarde van r .

[Hint: voor sommige waarden van r is het antwoord gelijk aan $(2r, 0)$, maar niet voor alle waarden van r .]

Oefening 12.31. Examenvraag Een functie van twee veranderlijken wordt gegeven door

$$f(x, y) = \int_x^y s(s-1)(s-2) ds.$$

(a) Bereken alle stationaire punten van f .

(b) Bepaal van de stationaire punten of het een lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt betreft. U mag u beperken tot die stationaire punten (x, y) met $x < y$.

(c) Zij D het domein in het xy -vlak bepaald door de ongelijkheden

$$D : 0 \leq x \leq y \leq 4.$$

Schets D en bepaal het maximum en minimum van f op D .

Hoofdstuk 13

Vectoren

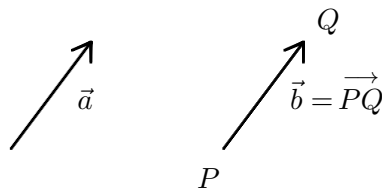
Fysische grootheden zoals massa en temperatuur hebben een waarde die, na keuze van gepaste eenheden, uitgedrukt wordt met een reëel getal. We spreken bijvoorbeeld van 5 kg en 273 K. Deze grootheden worden **scalaire grootheden** genoemd. Andere fysische grootheden hebben naast een grootte ook een richting, zoals bijvoorbeeld snelheid, kracht, impuls en impulsmoment. Dit zijn **vectoriële grootheden** of **vectoren**.

Vectoren voldoen aan zekere rekenregels die we de **vectorrekening** of vectorcalculus noemen. We geven hiervan in dit hoofdstuk een inleiding. We beperken ons voornamelijk tot vectoren in 2 en 3 dimensies.

We zullen ook enkele resultaten uit Hoofdstuk 9 opnieuw interpreteren met behulp van vectoren.

13.1 Inleidende begrippen

Een vector stellen we ons voor als een pijl waarvan de lengte, gemeten in gepast gekozen eenheden, de grootte voorstelt. De richting waarin de pijl wijst bepaalt de richting van de vector.¹



Figuur 13.1: Vectoren hebben een grootte en een richting

Vectoren zullen we aangeven met kleine letters met een pijl erboven, zoals \vec{a} , \vec{b} , \vec{r} , enzovoorts. Als de vector begint in een punt P en eindigt in Q dan

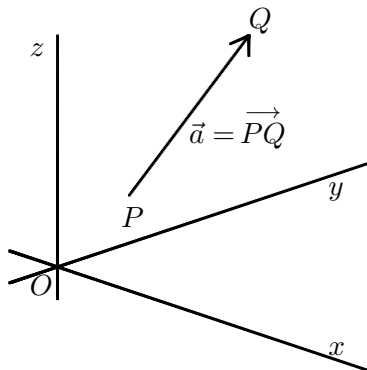
¹Ons gebruik van het begrip “richting” komt overeen met wat in de internationale Engelstalige literatuur gangbaar is, maar wijkt af van het gebruik in het middelbaar onderwijs in Vlaanderen. In het middelbaar maakt men onderscheid tussen “zin” en “richting” van een vector. We gebruiken in deze cursus “richting” in de betekenis van “zin”. Het begrip “zin” gebruiken we niet.

schrijven we ook $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$ zoals in Figuur 13.1. De **lengte** van \vec{a} noteren we met

$$|\vec{a}| \quad \text{of} \quad \|\vec{a}\|.$$

Een vector waarvan de lengte gelijk aan 1 is noemen we een **eenheidsvector**. De **nulvector** is een vector met lengte 0. Deze vector heeft geen richting.

Een **gebonden vector** heeft niet enkel een grootte en een richting, maar ook een aangrijpingspunt. Het **aangrijpingspunt** is het punt waarin de vector vertrekt. Vectors zonder aangrijpingspunt worden in dit verband **vrije vectoren** genoemd. In Figuur 13.1 is \vec{a} een vrije vector en \vec{b} een gebonden vector met P als aangrijpingspunt. Een gebonden vector $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ in drie dimensies zien we in Figuur 13.2



Figuur 13.2: Gebonden vector \vec{a} in een assenstelsel $Oxyz$.

Om met vectoren te kunnen rekenen kiezen we een assenstelsel (Oxy in twee dimensies en $Oxyz$ in drie dimensies) en bijbehorende Cartesische coördinaten. Een gebonden vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ met de oorsprong O als aangrijpingspunt noemen we een **positievector**. Positievectoren worden gebruikt om de positie van deeltjes te beschrijven, zie Figuur 13.3.

Een positievector \overrightarrow{OP} wordt vaak geïdentificeerd met het eindpunt P . In plaats van over punten in de ruimte (of in het vlak) spreken we dan over vectoren in de ruimte (of in het vlak). Net als een punt P in de ruimte wordt een vector dan weergegeven door drie coördinaten en we schrijven

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3).$$

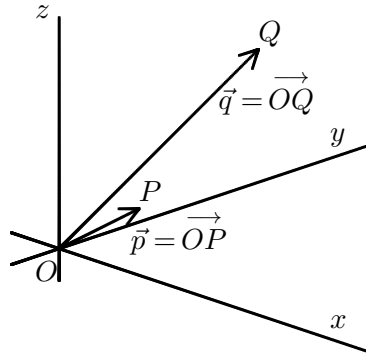
De getallen p_1 , p_2 en p_3 zijn de **componenten** of de **coördinaten** van de vector \vec{p} . Een positievector wordt volledig vastgelegd door zijn componenten.

Een gebonden vector $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ tussen twee punten P en Q met positievectoren

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \quad \text{en} \quad \vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$$

heeft componenten $a_1 = q_1 - p_1$, $a_2 = q_2 - p_2$ en $a_3 = q_3 - p_3$, zodat

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (a_1, a_2, a_3) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3). \quad (13.1.1)$$



Figuur 13.3: Positievectoren \vec{p} en \vec{q} .

De lengte van de vector $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ is dan gelijk aan

$$|\vec{a}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}. \quad (13.1.2)$$

De componenten van een vrije vector \vec{a} definiëren we door \vec{a} te laten aangrijpen in een punt P . Dan wordt \vec{a} een gebonden vector, zeg $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, met componenten gegeven door (13.1.1). Deze componenten definiëren we als de componenten van de vrije vector. Omdat (13.1.1) niet afhangt van het aangrijpingspunt zijn de componenten voor een vrije vector goed gedefinieerd.

Soms is het handig om de componenten van een vector niet achter elkaar te schrijven maar onder elkaar. Dit is bijvoorbeeld het geval als we werken met matrices. Als we de componenten onder elkaar schrijven, zoals in

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

dan spreken we van een **kolomvector**. Een **rijvector** is dan een vector waarvan de componenten achter elkaar staan. In dit hoofdstuk werken we alleen met rijvectoren.

13.2 Bewerkingen

We zullen de bewerkingen op vectoren hier formuleren voor vectoren in de ruimte (drie dimensies). Analoge bewerkingen bestaan voor vectoren in het vlak (twee dimensies) of in hoger dimensionale ruimten.

Gelijkheid van vectoren

Twee vrije vectoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ zijn gelijk als $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ en $a_3 = b_3$.

Twee gebonden vectoren zijn gelijk als ze gelijk zijn als vrije vectoren en als ze bovendien hetzelfde aangrijpingspunt hebben.

Lengte

De lengte van een (vrije of gebonden) vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ is gelijk aan

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (13.2.1)$$

De nulvector $\vec{0} = (0, 0, 0)$ heeft lengte 0. Voor alle andere vectoren is de lengte strikt positief.

Een eenheidsvector heeft lengte 1. Zo is bijvoorbeeld $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ een eenheidsvector. Ga dit zelf na. Speciale eenheidsvectoren zijn

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_y = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z = (0, 0, 1).$$

Deze vectoren zijn de standaardbasisvectoren in de drie-dimensionale ruimte. Dit zijn de drie eenheidsvectoren die wijzen in de richting van de coördinaatassen.

Vermenigvuldiging met reëel getal

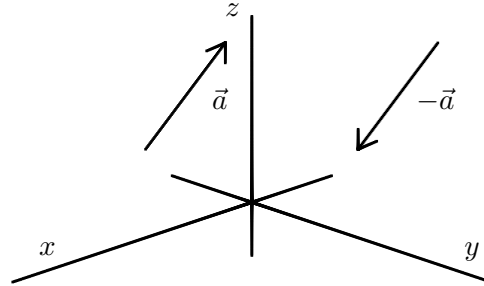
Een vector \vec{a} kunnen we met een reëel getal k vermenigvuldigen. Het resultaat is de vector

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

In plaats van $(-1)\vec{a}$ schrijven we meestal $-\vec{a}$. De vector $k\vec{a}$ is $|k|$ keer zo lang als \vec{a} :

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|.$$

Als $k > 0$ dan heeft $k\vec{a}$ dezelfde richting als \vec{a} en als $k < 0$ dan heeft $k\vec{a}$ de tegengestelde richting. De vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal heet ook wel de **scalaire vermenigvuldiging**.



Figuur 13.4: Vectoren \vec{a} en $-\vec{a}$.

Twee vectoren \vec{a} en \vec{b} zijn **evenwijdig** (of parallel) als ze dezelfde richting of de tegengestelde richting hebben. Dit houdt in dat er een reëel getal k is, verschillend van 0, zo dat

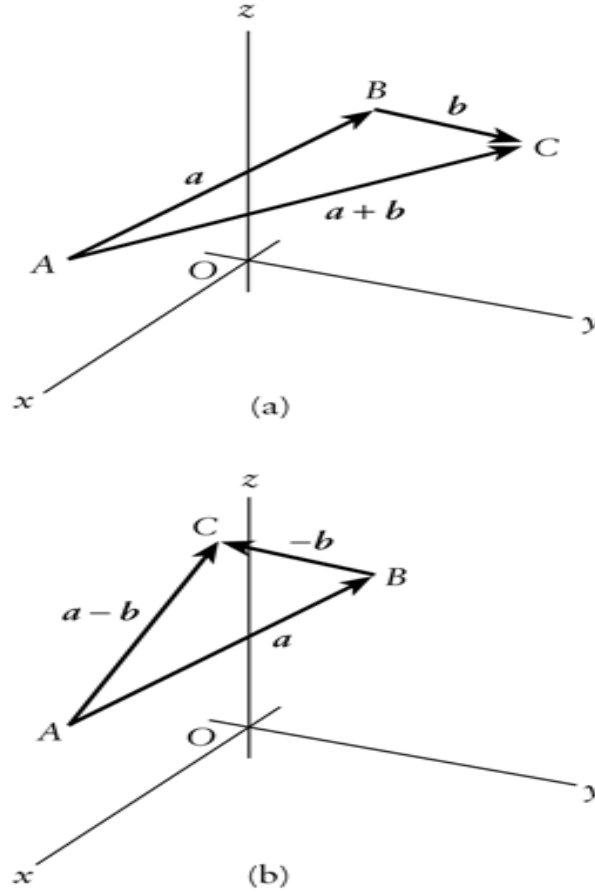
$$\vec{a} = k\vec{b}, \quad \vec{b} = \frac{1}{k}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{k}. \quad (13.2.2)$$

Als $\vec{a} \neq \vec{0}$ dan is

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (13.2.3)$$

een eenheidsvector. Het is de eenheidsvector met dezelfde richting als \vec{a} .

Optelling en aftrekking



Figuur 13.5: De som $\vec{a} + \vec{b}$ en het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ van twee vectoren.

Twee vectoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ kunnen we bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken. De som $\vec{a} + \vec{b}$ is de vector

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \quad (13.2.4)$$

Het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ is de vector

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3). \quad (13.2.5)$$

In het geval van vrije vectoren wordt de optelling geïllustreerd in Figuur 13.5 (a). Kies een aangrijpingspunt A voor de vector \vec{a} . Dan is

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

waarbij B het eindpunt van de vector is. Neem B als aangrijpingspunt van de vector \vec{b} , zeg

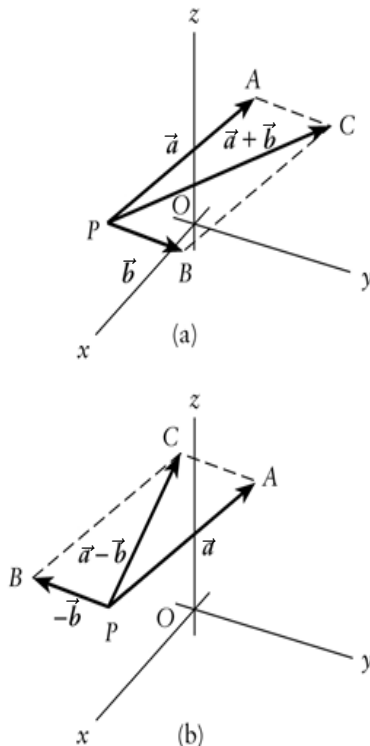
$$\vec{b} = \overrightarrow{BC}$$

waarbij C het eindpunt van \vec{b} is. Dan is

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Dus de som $\vec{a} + \vec{b}$ is de vector van A naar C . Samen vormen \vec{a} , \vec{b} en $\vec{a} + \vec{b}$ drie zijden van een driehoek.

Het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ is op dezelfde wijze geïllustreerd in Figuur 13.5 (b).



Figuur 13.6: De som $\vec{a} + \vec{b}$ en het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ van gebonden vectoren. De vierhoek $PACB$ is een parallellogram.

Voor gebonden vectoren met hetzelfde aangrijpingspunt kunnen we ons de som en het verschil meetkundig voorstellen als in Figuur 13.6. In de figuur hebben \vec{a} en \vec{b} hetzelfde aangrijpingspunt P en

$$\vec{a} = \overrightarrow{PA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{PB}.$$

Kies nu C zodanig dat $PACB$ een **parallellogram** is. Dan is

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC},$$

zie Figuur 13.6 (a).

Het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ is met een parallellogram geïllustreerd in Figuur 13.6 (b).

Een andere illustratie van $\vec{a} - \vec{b}$ ziet u in Figuur 13.7. Neem aan dat \vec{a} en \vec{b} gebonden vectoren met gezamenlijk aangrijpingspunt P , zeg $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ en $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, zoals in Figuur 13.7. Dan is de verschilvector $\vec{a} - \vec{b}$ gelijk aan de

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}.$$

De optelling van vectoren is commutatief:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

en associatief:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Door de optelling van vectoren te combineren met de scalaire vermenigvuldiging kunnen we vanuit \vec{a} en \vec{b} de vectoren

$$k\vec{a} + l\vec{b}, \quad k, l \in \mathbb{R} \quad (13.2.6)$$

vormen. De vector (13.2.6) is een **lineaire combinatie** van \vec{a} en \vec{b} . Als \vec{a} en \vec{b} dezelfde richting of tegengestelde richting hebben dan vormen de lineaire combinaties samen een rechte. Als \vec{a} en \vec{b} niet dezelfde richting en ook niet tegengestelde richting hebben dan vormen de lineaire combinaties (13.2.6) een vlak. Het is het vlak opgespannen door \vec{a} en \vec{b} .

Meer algemeen is een lineaire combinatie van vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$, gelijk aan

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 + \dots \quad \text{met} \quad k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}. \quad (13.2.7)$$

13.3 Het scalair product

Het **scalair product** van twee vectoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ is gelijk aan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (13.3.1)$$

Het scalair product van twee vectoren is een reëel getal. In de context van vectoren worden reële getallen scalaren genoemd, vandaar de naam “scalair product”. Een andere naam voor het scalair product is inwendig product of inproduct.

Voor vectoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2)$ in het vlak is het scalair product gelijk aan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

We kunnen het scalair product ook invoeren voor hoger dimensionale vectoren.

Eenvoudige eigenschappen van het scalair product zijn:

(a) Commutativiteit:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

(b) Associatieve eigenschap:

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad k \in \mathbb{R},$$

(c) Distributieve eigenschap:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

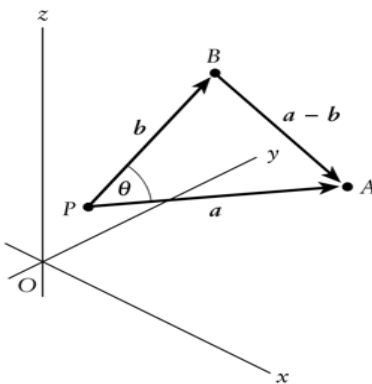
(d) Verband met de lengte:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Het scalair product hangt nauw samen met de **hoek** tussen twee vectoren. Beschouw daartoe twee vectoren \vec{a} en \vec{b} als in Figuur 13.7 die aangrijpen in hetzelfde punt P . De hoek θ tussen \vec{a} en \vec{b} nemen we in het vlak dat bepaald wordt door de twee vectoren. In dit vlak ligt de driehoek PAB en θ is de inwendige hoek die deze driehoek heeft in P . We spreken af dat steeds

$$0 \leq \theta \leq \pi. \quad (13.3.2)$$

We beschouwen dus geen negatieve hoeken.



Figuur 13.7: Hoek θ tussen twee vectoren \vec{a} en \vec{b} .

De lengtes van de zijden van de driehoek zijn

$$|\vec{a}|, \quad |\vec{b}| \quad \text{en} \quad |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Volgens de cosinusregel (zie paragraaf 3.1.2, onderdeel (f)) geldt

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta. \quad (13.3.3)$$

Omdat

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}), \end{aligned}$$

volgt uit (13.3.3) dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. Dit geeft een verband tussen het scalair product en de hoek θ tussen de twee vectoren. Omdat het zo belangrijk is formuleren we het nog als een aparte eigenschap.

Eigenschap 13.3.1. Voor twee vectoren \vec{a} en \vec{b} geldt dat

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (13.3.4)$$

waarbij θ de hoek tussen \vec{a} en \vec{b} is.

Uit (13.3.4) volgt dat het teken van het scalair product bepaald wordt door het teken van $\cos\theta$. Het scalair product kan positief, negatief of nul zijn.

- (a) Het scalair product is positief als $\cos \theta > 0$. Omdat we afgesproken hebben dat $0 \leq \theta \leq \pi$ betekent dit dat $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

In dat geval is er een **scherpe hoek** tussen de vectoren \vec{a} en \vec{b} .

- (b) Het scalair product is negatief als $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi.$$

In dat geval is er een **stompe hoek** tussen \vec{a} en \vec{b} .

- (c) Het scalair product is nul als $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}.$$

In dat geval is er een rechte hoek en de vectoren \vec{a} en \vec{b} staan **loodrecht** op elkaar. We noteren dit met

$$\vec{a} \perp \vec{b}. \quad (13.3.5)$$

Een ander woord voor loodrecht is **orthogonaal**. Als $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dan zijn de vectoren orthogonaal en we spreken dan van **orthogonale vectoren**.

13.4 Raakvectoren

Neem aan dat de coördinaten van een punt P afhangen van een parameter t , die we beschouwen als de tijd, zeg

$$P : (x(t), y(t), z(t)).$$

De positievector \vec{r} van P hangt dan ook af van de tijd t , en we krijgen een vectorfunctie

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)). \quad (13.4.1)$$

Als de waarde van t verandert van $t = a$ naar $t = b$ dan doorloopt het punt P een kromme van A naar B zoals in Figuur 13.8.

Beschouw twee punten P en Q op de kromme, behorende bij parameterwaarden t en $t + \Delta t$. De overeenkomstige positievectoren zijn $\vec{r}(t)$ en $\vec{r}(t + \Delta t)$. Dan is

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$$

de vector van P naar Q . Het is de vector die de verplaatsing van P naar Q aangeeft.

Als we Δt naar 0 laten gaan, dan beweegt het punt Q naar P , en dus $\Delta \vec{r} \rightarrow \vec{0}$. De gemiddelde verplaatsing over het tijdsinterval van t naar $t + \Delta t$ is

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} (\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)) \\ &= \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (13.4.2)$$

Als Δt kleiner wordt, dan gaat de vector $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ steeds meer staan in de richting die raakt aan de kromme in P . In de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ gaat $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ over in een **raakvector** aan de kromme.

Als de coördinaatsfuncties $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ afleidbaar zijn, dan bestaat inderdaad de limiet van (13.4.2)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t)). \quad (13.4.3)$$

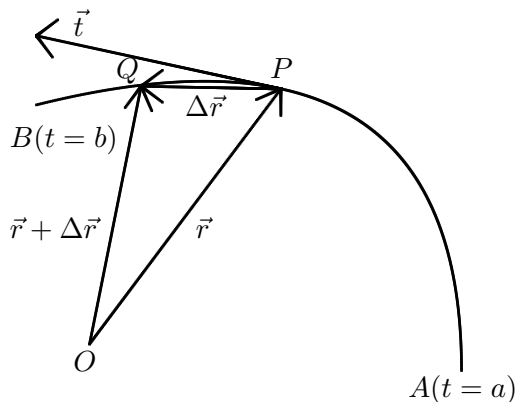
We noteren deze limiet met \vec{t} :

$$\vec{t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

en \vec{t} is een raakvector aan de kromme. Omdat \vec{t} is ingevoerd zoals de afgeleide voor een reële functie van één reële veranderlijke, schrijven we ook

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (13.4.4)$$

voor de raakvector \vec{t} .



Figuur 13.8: Raakvector \vec{t} aan een kromme.

De raakvector is ook te zien als **snelheidsvector** of kortweg snelheid

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (13.4.5)$$

van een puntdeeltje dat zich langs de kromme voortbeweegt op tijdstip t . De lengte

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \quad (13.4.6)$$

is de **scalaire snelheid**. De verandering van de snelheid is de **versnelling**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (13.4.7)$$

De snelheid \vec{v} en versnelling \vec{a} zijn vectoriële grootheden.

We hebben raakvectoren ingevoerd aan krommen in de ruimte (drie dimensies). Analoge formules gelden in het vlak (twee dimensies) of zelfs in hogere dimensies.

13.5 Functies van twee veranderlijken en vectoren

Enkele resultaten van Hoofdstuk 9 zullen we herformuleren in de taal van vectoren. Dit brengt een ander gezichtspunt hetgeen kan helpen om de resultaten beter te begrijpen.

13.5.1 Gradiënt als vectorveld

Het uitgangspunt is de gradiënt van een functie $z = f(x, y)$ die in Hoofdstuk 9 is ingevoerd als de vector met de partiële afgeleiden van f

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

De gradiënt kunnen we uitrekenen in een punt $P : (x, y)$:

$$\text{grad } f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

en we krijgen bij elk punt P een vector $\text{grad } f(P)$, die we zien als een **gebonden vector** met P als aangrijpingspunt. Als P verandert, verandert ook de vector $\text{grad } f(P)$. Daarom wordt $\text{grad } f$ een **vectorveld** genoemd. Door de vector $\text{grad } f(P)$ voor een groot aantal punten P te tekenen, krijgen we een idee van het verloop van het vectorveld. In Figuur 13.9 is het vectorveld $\text{grad } f$ getekend voor de functie

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

13.5.2 Niveaukrommen

Een niveaukromme van $z = f(x, y)$ is een kromme waarop de functie f constant is, zie hiervoor paragraaf 9.4.2.

We gebruiken de vectornotatie

$$\vec{r} = (x, y)$$

om een punt van de niveaukromme aan te geven. Hierin is \vec{r} de positievector die hoort bij het punt $P : (x, y)$. Als $(x(t), y(t))$ een parametrisatie is van de kromme, dan leidt dat tot een vectorfunctie

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \tag{13.5.1}$$

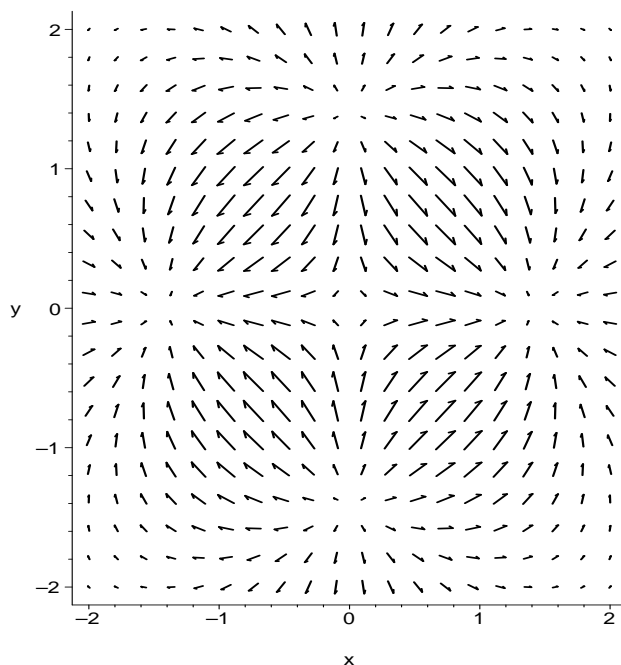
zoals beschreven in paragraaf 13.4.

De vector met de afgeleiden

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (x'(t), y'(t)) \tag{13.5.2}$$

is een raakvector aan de kromme, zie (13.4.4). De vergelijking (9.4.6)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) x'(t) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) y'(t) = 0 \tag{13.5.3}$$



Figuur 13.9: De gradiënt $\text{grad } f$ als vectorveld voor het geval van de functie $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)/2}$.

geeft het verband tussen de partiële afgeleiden van $z = f(x, y)$ en de componenten van (13.5.2). Met behulp van vectoren kunnen we (13.5.3) schrijven als

$$\text{grad } f(P) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0. \quad (13.5.4)$$

Met andere woorden, de gradiënt $\text{grad } f(P)$ staat loodrecht op de raakvector $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ aan de niveaukromme door P .

In Figuur 13.10 zijn enkele niveaukrommen getekend in het vectorveld $\text{grad } f$ van de functie $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)/2}$. Men ziet hier inderdaad dat de gradiënt in elk punt loodrecht op de niveaukromme staat.

Zij $P : (x_0, y_0)$ een punt van de niveaukromme. Volgens vergelijking (9.4.11) wordt de raaklijn aan de niveaukromme in P gegeven door

$$\text{grad } f(P) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

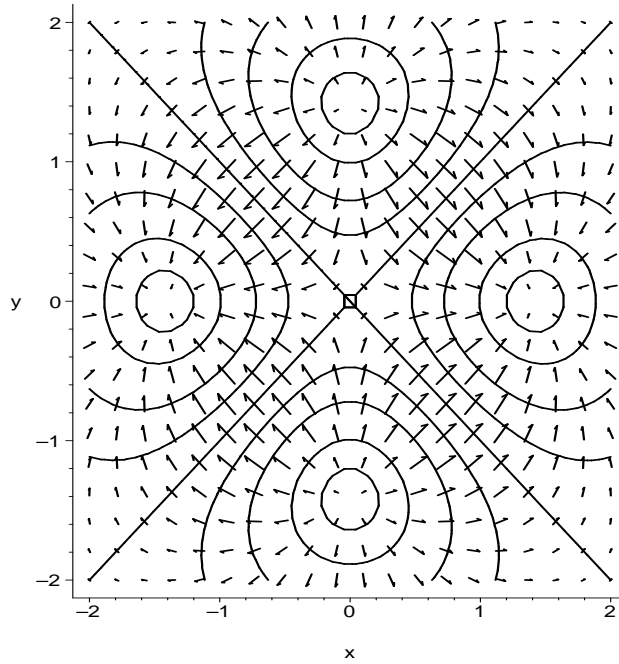
Als we de positievectoren

$$\vec{x} = (x, y) \quad \text{en} \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0)$$

invoeren, dan wordt de raaklijn in vectornotatie gegeven door

$$\text{grad } f(P) \cdot (\vec{x} - \vec{r}_0) = 0. \quad (13.5.5)$$

In (13.5.5) is \vec{x} te zien als een variabele vector. Als aan de vergelijking (13.5.5) voldaan is dan staat de verschilvector $\vec{x} - \vec{r}_0$ loodrecht op de gradiënt $\text{grad } f(P)$ en dan behoort het punt met \vec{x} als positievector tot de raaklijn.



Figuur 13.10: Het gradiëntveld en enkele niveaукrommen voor de functie $z = f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)/2}$. In elk punt staat de gradiënt loodrecht op de niveaукromme.

13.5.3 Richtingsafgeleide

Volgens paragraaf (9.4.5) wordt de richtingsafgeleide bepaald door een hoek θ . De eenheidsvector in de richting die de hoek θ maakt met de positieve x -as is gelijk aan

$$\vec{e}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta). \quad (13.5.6)$$

Merk op dat inderdaad $|\vec{e}_\theta| = 1$.

De richtingsafgeleide (9.4.15) is dan gelijk aan

$$D_\theta f = \text{grad } f \cdot \vec{e}_\theta. \quad (13.5.7)$$

Met andere woorden, de richtingsafgeleide is het scalair product van de gradiënt met de eenheidsvector \vec{e}_θ .

Vanwege de eigenschap van het scalair product is

$$D_\theta f = |\text{grad } f| \cos \psi$$

waarin ψ de hoek is tussen $\text{grad } f$ en \vec{e}_θ . Dit is in feite (9.4.16) waarin

$$r = |\text{grad } f|, \quad \psi = \theta - \phi.$$

De conclusies (a)-(c) op bladzijde 249 kunnen ook als volgt geformuleerd worden:

- (a) De richtingsafgeleide is maximaal in de richting van de gradiënt, zodat de gradiënt wijst in de richting waarin de functie het snelst toeneemt.

- (b) De richtingsafgeleide is minimaal in de richting tegengesteld aan de richting van de gradiënt.
- (c) De richtingsafgeleide is nul in een richting die loodrecht staat op de gradiënt.

13.5.4 Lagrange techniek

De Lagrange techniek dient om de extrema van een functie

$$z = f(x, y)$$

te vinden onder een nevenvoorwaarde

$$g(x, y) = c.$$

In §12.6.3 hebben we een meetkundige interpretatie van de Lagrange techniek gezien: aan een punt (a, b) waar de functie $f(x, y)$ een maximum of minimum bereikt onder de nevenvoorwaarde, moeten de raaklijnen van de niveaukromme $f(x, y) = d$ (waarbij $d = f(a, b)$) en van de niveaukromme $g(x, y) = c$ gelijk zijn.

We gebruiken nu het feit dat $\text{grad } f$ loodrecht staat op de niveaukromme van f , en dat $\text{grad } g$ loodrecht staat op de niveaukromme $g(x, y) = c$. Bijgevolg geldt aan het raakpunt (a, b) dat $\text{grad } f$ en $\text{grad } g$ evenwijdig zijn:

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } g.$$

We verkrijgen dus opnieuw de vergelijking (12.6.8).

13.6 Oefeningen

Oefening 13.1. De positievectoren van de punten A , B , C en D zijn respectievelijk \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} en \vec{d} . Druk de volgende vectoren uit in \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} en \vec{d} :

- (a) \overrightarrow{AB} en \overrightarrow{BA} ,
- (b) de positievector van het zwaartepunt van de vier punten,
- (c) de positievector van het middelpunt van \overrightarrow{BC} ,
- (d) de positievector van een willekeurig punt op de rechte door C en D .

Oefening 13.2. Twee zijden van de driehoek ABC zijn $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$ en $\overrightarrow{AC} = (3, 2, 0)$. Wat is dan \overrightarrow{BC} ?

Oefening 13.3. Bereken de lengte van de vectoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ met de volgende gegeven beginpunten P en eindpunten Q . Bepaal ook een eenheidsvector in dezelfde richting als \vec{a} .

- (a) $P : (1, -2, 0)$ en $Q : (4, 2, 0)$

(b) $P : (-3, 2, 1)$ en $Q : (-1, -3, 2)$

(c) $P : (0, 0, 0)$ en $Q : (2, 3, -1)$

Oefening 13.4. Gegeven zijn $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 3, -4)$ en $\vec{c} = (0, 4, -1)$. Bereken

(a) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$,

(d) $3(\vec{a} - \vec{c})$, $3\vec{a} - 3\vec{c}$,

(b) $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\vec{a}/3$,

(e) $|\vec{a} + \vec{b}|$,

(c) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$,

(f) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Oefening 13.5. Het massamiddelpunt van N massa's m_1, \dots, m_N die zich bevinden in punten met positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ is gelijk aan

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j$$

waarin $M = \sum_{j=1}^N m_j$ de totale massa is.

Bereken het massamiddelpunt voor de drie massa's $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ en $m_3 = 1$ die zich bevinden in punten met respectievelijke positievectoren $\vec{r}_1 = (3, -2, 1)$, $\vec{r}_2 = (2, -1, 0)$ en $\vec{r}_3 = (0, 1, -2)$.

Oefening 13.6. Het dipoolmoment ten opzichte van de oorsprong O van N ladingen q_1, \dots, q_N die zich bevinden in punten met positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, is gelijk aan

$$\vec{\mu} = \sum_{j=1}^N q_j \vec{r}_j.$$

Bereken het dipoolmoment ten opzichte van O voor de drie ladingen $q_1 = 3$, $q_2 = -2$ en $q_3 = 1$ in de punten met positievectoren $\vec{r}_1 = (2, 2, 1)$, $\vec{r}_2 = (2, -2, 3)$ en $\vec{r}_3 = (0, -4, -3)$.

Oefening 13.7. Krachten $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$ zijn in evenwicht als hun som gelijk aan $\vec{0}$ is. Bepaal \vec{F}_1 zodanig dat \vec{F}_1 , \vec{F}_2 en \vec{F}_3 in evenwicht zijn als $\vec{F}_2 = (2, -3, 1)$ en $\vec{F}_3 = (0, 2, -1)$.

Oefening 13.8. Gegeven zijn $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (0, 2, -2)$ en $\vec{c} = (0, 0, -1)$. Bereken

(a) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}$,

(b) een vector die loodrecht staat op \vec{c} en \vec{x} ,

(c) een vector die loodrecht staat op \vec{b} en \vec{c} ,

(d) de hoek tussen \vec{a} en \vec{b} .

Oefening 13.9. Gegeven zijn $\vec{a} = (1, 3, -2)$, $\vec{b} = (0, 3, 1)$ en $\vec{c} = (1, -1, -3)$. Bereken

- (a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{a}$, (c) $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b}$,
 (b) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$, (d) de hoek tussen \vec{a} en \vec{b} .

Oefening 13.10. Laat zien dat $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, -3, 2)$ en $\vec{c} = (-13, 2, 3)$ orthogonale vectoren zijn.

Oefening 13.11. Bereken λ zo dat $\vec{a} = (\lambda, 3, 1)$ en $\vec{b} = (2, 1, -1)$ orthogonaal zijn.

Oefening 13.12. Bereken de hoek tussen de vector $\vec{a} = (1, -1, \sqrt{2})$ en elk van de standaardbasisvectoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 en \vec{e}_3 .

Oefening 13.13. Neem aan dat een lichaam zich verplaatst van positie $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ naar $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ onder de invloed van een constante kracht \vec{F} . De verplaatsing is dan $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ en de arbeid die door de kracht verricht wordt is

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Bereken de arbeid W die de kracht $\vec{F} = (3, 2, 0)$ verricht bij een verplaatsing van $\vec{r}_1 = (-2, 1, 1)$ naar $\vec{r}_2 = (0, 2, 0)$.

Oefening 13.14. Neem aan dat het punt P in het vlak beweegt met positievector $\vec{r}(t) = (\cos 2t, 2t)$.

- (a) Bereken de vectoriële snelheid $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ en de scalaire snelheid.
 (b) Bereken de versnelling \vec{a} .
 (c) Op welke tijdstippen is de scalaire snelheid maximaal? Wanneer minimaal?

Oefening 13.15. Een deeltje met massa m beweegt langs de kromme geparametriseerd door

$$\vec{r}(t) = (at, at - \frac{1}{2}gt^2).$$

Hierin is t de tijd, en zijn a en g constante waarden.

- (a) Bepaal de snelheid en de versnelling op tijdstip t .
 (b) Wat is de kracht die op het deeltje werkt?
 (c) Beschrijf de beweging van het deeltje in de x -richting, in de y -richting en in totaliteit.

Oefening 13.16. Een deeltje met massa m beweegt langs de kromme geparametriseerd door

$$\vec{r}(t) = (2 \cos 3t, 2 \sin 3t, 3t)$$

waarin t de tijd is.

- (a) Bepaal de snelheid en de versnelling op tijdstip t .
- (b) Wat is de kracht die op het deeltje werkt?
- (c) Beschrijf de beweging van het deeltje in het xy -vlak, in de z -richting en in totaliteit.

Oefening 13.17. Een schijf met straal a rolt over de x -as met constante snelheid van 1 radiaal per second.

- (a) Laat zien dat een punt op afstand $b \leq a$ van het middelpunt een kromme volgt met parametrisatie

$$\vec{r}(t) = (at - b \sin t, a - b \cos t)$$

- (b) Schets de kromme voor $b < a$ (een trochoïde) en voor $b = a$ (een cycloïde).
- (c) Bereken de scalaire snelheid op elk tijdstip t .
- (d) Stel een integraal op die de lengte weergeeft van het pad dat een punt op afstand b van het middelpunt doorloopt bij één volledige omwenteling.
- (e) Bereken de integraal voor het geval $b = a$.

[N.B. De lengte van een kromme $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ tussen $t = t_1$ en $t = t_2$ is gelijk aan

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt.$$

met $\vec{v}(t)$ de snelheidsvector op tijdstip t .]

Oefening 13.18. Schets enkele niveaукrommen voor de functie $f(x, y) = xy$. Bereken $\text{grad } f$ en controleer dat $\text{grad } f(P)$ loodrecht op de niveaукromme van f door P staat.

Oefening 13.19. De kromme \mathcal{K} is gegeven door $x^3 - 3x^2 + 4y^2 = 0$.

- (a) Geef vergelijkingen van de raaklijn aan \mathcal{K} in het punt $(-1, 1)$.
- (b) Geef een vergelijking van de rechte door $(-1, 1)$ die loodrecht staat op K .
- (c) Bereken de punten van K met een raaklijn evenwijdig aan de x -as of de y -as.

Oefening 13.20. Zij $f(x, y) = \sin x - \cos y$ en $\vec{e} = \frac{1}{5}(4, 3)$.

- (a) Bepaal de richtingsafgeleide van de functie f in het punt $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ in de richting van \vec{e} .
- (b) In welke richting is in het punt $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ de richtingsafgeleide van f het grootste? En wat is de richtingsafgeleide in die richting?
- (c) Bepaal de richtingsafgeleide van f in de richting van de vector \vec{e} in een algemeen punt (a, b) . Wat is de maximaal haalbare richtingsafgeleide in de richting van \vec{e} , en voor welke punten (a, b) wordt deze bereikt?

Oefening 13.21. Zij $f(x, y, z) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Bepaal in het punt $(1, 2)$ de richting waarin de richtingsafgeleide maximaal is. Bepaal ook deze richtingsafgeleide.

Dezelfde vraag voor het punt $(2, 2)$.

Oefening 13.22. (Deel van examenvraag) Zij K de kromme met vergelijking $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$. Stel dat de functie $g(x, y)$ een maximum op K bereikt in $(x, y) = (1, 1)$. Staat de gradiënt van g in $(1, 1)$ dan loodrecht op K of raakt de gradiënt van g in $(1, 1)$ aan K ? Leg uit.

Index

- aangrijpingspunt, 318
- absolute waarde, 7, 67
- absoluut maximum, 117
- absoluut minimum, 117
- afgeleide, 86
 - inverse functie, 98
 - rekenregels, 93
 - veelterm, 96
- afgeleide functie, 86
- afhankelijke veranderlijke, 2, 227
- afleidbaar, 86
- afleiden onder integraalteken, 232
- afstand, 8, 68, 293
- algebraïsche vergelijking, 4
- arbeid, 193
- argument, 67
- associativiteit, 5

- basis, 271
- basisstap, 16
- beginvoorwaaarde, 255
- beginvoorwaarden, 271
- beginwaardeprobleem, 256
- bepaalde integraal, 153
- bereik, 22
- binomiaalcoëfficiënt, 11, 107
- binomium van Newton, 13
- boogcosinus, 60
- boogsinus, 59
- boogtangens, 60
- bovensom, 169

- cirkel, 40
- coëfficiënten van veelterm, 25
- combinatiegetal, 11
- commutativiteit, 5
- complexe functie, 22
- complexe getallen, 9
- complexe vlak, 67

- componenten van een vector, 318
- constante, 2
- constante coëfficiënten, 269, 272
- constante functie, 117
- contour, 229
- convergent, 164, 166
- cosecans, 55
- cosinus, 52
- cosinusregel, 55
- cotangens, 55
- Coulomb
 - wet van, 194
- cyclometrische functies, 59

- dalend, 115
- datapunten, 301
- de l'Hôpital, 139
- decimale ontwikkeling, 4
- demping, 282
- differentiëren, 85
- differentiaal, 104
- differentiaalrekening, 84
- differentiaalvergelijking, 253
- differentieerbaar, 86
- differentiequotiënt, 84
- discriminant, 26, 73
- distributiviteit, 6
- divergent, 164, 166
- domein, 21
- driehoeksongelijkheid, 7, 8, 68

- eenheid, 2
- eenheidsvector, 318
- eerste orde, 253
- eerste orde benadering, 128
- eerstegraads veelterm, 25
- eliminatiemethode, 304
- ellips, 40
- entierfunctie, 154

- equidistante punten, 170
- Euclidische deling, 28
- even functie, 53, 158
- evenwijdige vectoren, 320
- exacte differentiaal, 246
- exponent, 6
- exponentiële functie, 61
 - eigenschappen, 62
- exponentiële groei, 65
- extrema, 118

- factorisatie, 25
- faculteit, 11
- formule van de Moivre, 71
- functie, 1, 21
 - cyclometrisch, 59
 - rationaal, 27

- geïntegreerde term, 209
- gebonden vector, 318
- gehele getallen, 3
- gemengde tweede orde afgeleiden, 231
- gemiddelde, 192
- gemiddelde waarde, 149, 191
- gesloten interval, 8
- getal, 2
 - π , 5
 - e , 5
 - algebraïsch, 4
 - complex, 9
 - geheel, 3
 - irrationaal, 4
 - natuurlijk, 2
 - rationaal, 3
 - reëel, 4
 - transcendent, 4
- gewone differentiaalvergelijking, 253
- globaal maximum, 117, 293
- globaal minimum, 117, 293
- golflengte, 52
- goniometrische functie, 51
- goniometrische integralen, 201
- graad van veelterm, 25
- gradiënt, 230, 234
- grafiek, 24, 228
- grondtal, 6, 61
- grootheid, 2

- harmonische oscillator, 282
- Hessiaan, 234
- hoek, 324
- hogere orde afgeleide, 105
- homogeen, 269
- hoofdstelling
 - integraalrekening, 160
- hoofdstelling van de algebra, 27, 75
- horizontale asymptoot, 28, 60
- Hornerschema, 30
- hyperbolische functie, 66
- hyperbool, 40, 67

- imaginaire as, 67
- impliciete oplossing, 259
- inductie, 15
- inductiehypothese, 16
- inductiestap, 16
- injectief, 36
- input-output machine, 22
- integraalrekening
 - hoofdstelling, 160
- interval, 8
- inverse functie, 35
- irrationale getallen, 4

- kansdichtheid, 192
- karacteristieke veelterm, 273
- karacteristieke vergelijking, 273
- kegelsnede, 39
- kettingregel, 97, 240
- kinetische energie, 195
- kleinste-kwadratenmethode, 301
- kolomvector, 319
- kritiek punt, 118
- kromme
 - lengte, 181
 - poolcoördinaten, 184
- kwadratische benadering, 128
- kwadratische functie, 25, 39

- Lagrange multiplier, 306
- Lagrange techniek, 305
- Leibniz regel, 108
- lengte van kromme, 181
 - poolcoördinaten, 184
- lengte van vector, 318
- lijnelement, 257

- lijnelementenveld, 257
- limiet, 86
- lineair afhankelijk, 271
- lineair onafhankelijk, 271
- lineaire benadering, 128
- lineaire combinatie, 22, 270, 323
- lineaire DV van eerste orde, 262
- lineaire functie, 25, 39
- lineaire vergelijkingen, 43
- lineariteit, 95
- linkereindpuntregel, 172
- linkerlimiet, 89
- logaritmische afgeleide, 204
- logaritmische functie, 63
- logaritmische groei, 65
- logaritmische schaal, 65
- lokaal maximum, 118, 293
- lokaal minimum, 118, 294
- loodrecht, 325
- machtsverheffen, 6
- Maclaurinveelterm, 130
- massadichtheid, 189
- massamiddelpunt, 188
- massamoment, 188
- maximum, 117, 118, 293
- minimum, 117, 118, 293
- modulus, 7, 67
- multipliciteit, 75
- nabla, 230
- natuurlijke frequentie, 283
- natuurlijke getallen, 2
- natuurlijke logaritme, 63
- neutraal element, 6
- nevenvoorwaarden, 304
- Newton
 - wet van, 193
- Newton-Raphson, 126
- niet-homogeen, 269
- niveaукromme, 39, 229, 242
- nulpunt, 24
- nulvector, 318
- omwentelingslichaam
 - oppervlakte, 198
 - poolcoördinaten, 185
- onafhankelijke veranderlijke, 2, 227
- onbepaalde coëfficiënten, 279
- onbepaalde integraal, 151
- onbepaalde vorm, 9, 87, 88, 138
- ondersom, 169
- oneigenlijke integraal, 164
- oneindig, 8
- oneindig interval, 8
- oneven functie, 53, 158
- open interval, 8
- oppervlak, 228
- oppervlakte
 - omwentelingslichaam, 198
 - poolcoördinaten, 185
- optimalisatie, 304
- orde, 253
- orthogonaal, 325
- parabool, 25, 42
- parallellogram, 322
- parameter, 219
- parametervergelijking, 42, 183
- parametrisatie, 42
- partiële afgeleide, 108, 230
- partiële differentiaalvergelijking, 253
- partiële integratie, 208
- particuliere oplossing, 277
- partieelbreuken, 32, 214
- periode, 52
- periodieke functie, 52
- polynoom, 24
- poolcoördinaten, 56, 67, 184
 - oppervlakte, 185
- positievector, 318
- potentiële energie, 195
- potentiaalfunctie, 246
- primitieve functie, 150
- productfunctie, 22
- productregel, 93
- productteken, 14
- quotiëntfunctie, 22
- quotiëntregel, 93
- raaklijn, 86
- raakvector, 326
- raakvlak, 230, 239
- radiaal, 52
- rationale functie, 27, 96

- rationale getallen, 3
- reële as, 67
- reële functie, 22
- reële getallen, 4
 - bewerkingen, 5
- reële rechte, 4
- rechteindepuntregel, 172
- rechterlimiet, 90, 164
- recursierelatie, 212
- reductieformule, 212
- regel van de l'Hôpital, 139
- regel van Leibniz, 108
- relatief maximum, 118
- relatief minimum, 118
- resonantie, 284
- richtingsafgeleide, 248
- richtingscoëfficiënt, 84, 86
- Riemann-integraal, 170
- Riemann-som, 169
- rijvector, 319

- samengestelde functie, 23
- scalair product, 323
- scalaire grootheid, 317
- scalaire snelheid, 326
- scalaire vermenigvuldiging, 320
- scheidbare veranderlijken, 258
- schuine asymptoot, 30, 41
- secans, 55
- sinus, 52
- sinusregel, 55
- snelheid, 326
- Snellius
 - wet van, 123
- somfunctie, 22
- sommatie-index, 14
- somteken, 14
- standaardafwijking, 191, 192
- stationair punt, 118, 291
- stelling van Schwarz en Young, 231, 234
- stelsel vergelijkingen, 43
- stijgend, 115
- stokterm, 209
- strijdig stelsel, 44
- strikt dalend, 115
- strikt stijgend, 115

- substitutiemethode, 202
- superpositiebeginsel, 270
- symmetrische matrix, 234

- tangens, 55
- Taylorveelterm, 130
- totale afgeleide, 240
- totale differentiaal, 238
- totale energie, 195
- traagheidsmoment, 188, 189
- transcendente functie, 51
- trapeziumregel, 172
- trillingen, 282
- tweede afgeleide test, 122, 296
- tweede orde, 253
- tweede orde afgeleide, 105
- tweede orde benadering, 128
- tweede orde partiële afgeleiden, 231
- tweedegraads veelterm, 25

- uitwendige kracht, 282

- variantie, 191, 192
- variatie van de constante, 274
- vector, 317
- vectorfunctie, 325
- vectoriële grootheden, 317
- vectorveld, 327
- veelterm, 24
- veerconstante, 282
- veranderlijke
 - afhankelijk, 2
 - onafhankelijk, 2
- verloop van een functie, 115
- verschilfunctie, 22
- versnelling, 193, 326
- verticale asymptoot, 28, 55
- verwachtingswaarde, 191
- vierkantswortel, 6, 36
- volledige inductie, 15
- volume
 - omwentelingslichaam, 186
- vrije vector, 318

- worteltruc, 87