理解双线性插值中图像坐标映射带0.5偏移

在进行双线性插值计算前，关键的一步是要得到插值点在原图的坐标表示，用该坐标与最近的四个点对应的像素值进行加权计算得到插值点的像素值。

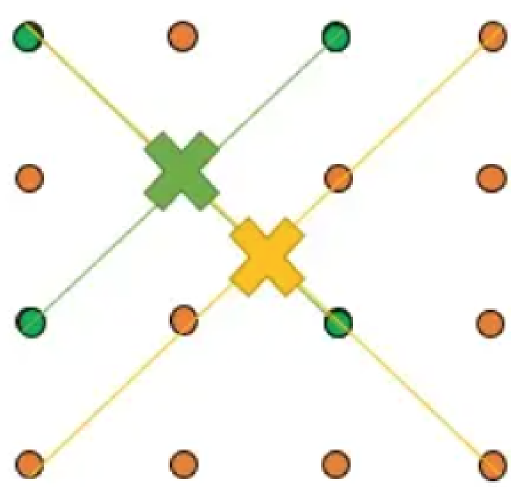
记采样后任意像素点的坐标为 (x,y) ，对应原图的坐标为 (x',y') ,采样后图像高为 h ，宽为 w ，原图像高为 h' ，宽为 w' ，得到图像缩放比例 $S_h=\frac{h'}{h}$ ，$S_w=\frac{w'}{w}$ 。

注意：我们这里的坐标都是0-based，即对高为3的图像，坐标表示为 0、1、2

直觉上，我们会认为变化公式为：

$$\begin{aligned}x' &= x \times S_h \\ y' &= y \times S_w\end{aligned}$$

这样映射后的像素对应如下图所示：



注意到，原图和采样结果图的几何中心在不同的位置，这样会导致最终插值不准确。

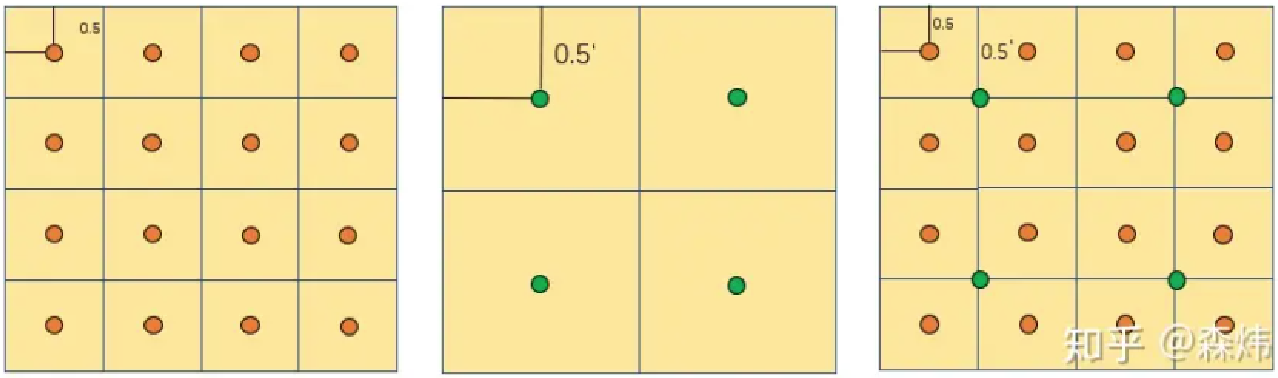
正确的坐标变换公式为：

$$x' = (x+\frac{1}{2}) \times S_h - \frac{1}{2}$$

$$y' = (y+\frac{1}{2}) \times S_w - \frac{1}{2}$$

1、 像素坐标和像素中心分离

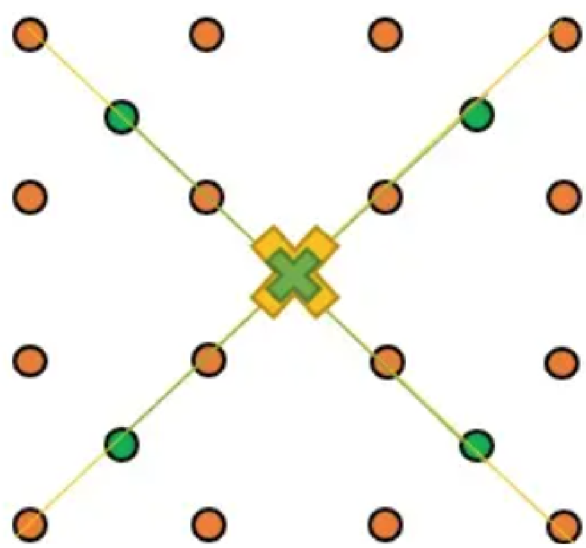
如下图所示，将像素数视为 1×1 的正方形，像素坐标 $+\frac{1}{2}$ 后为像素中心坐标，因此，要保证变换前后的图像的几何中心一致，即保证像素中心对齐。



对任意一个采样图上的像素坐标 (x, y) ,先将其表示为像素中心的坐标 $(x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2})$,由像素中心对齐得，该像素中心在原图上的像素中心坐标为 $(x+\frac{1}{2} \times S_h, y+\frac{1}{2} \times S_w)$,最后，将像素中心坐标变换为像素坐标，得 $(x+\frac{1}{2} \times S_h-\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2} \times S_w-\frac{1}{2})$ 。

2、 像素坐标与像素中心一致

进一步思考，能否不分离像素坐标和像素中心坐标的表示推导坐标变换公式？答案是肯定的。现在，我们将像素坐标与像素中心坐标统一起来，从这个角度出发推导坐标变换公式。从前文的分析可知，采样后的图像与原图必须有相同的几何中心，如下图所示。



原图的几何中心： $(\frac{h'-1}{2}, \frac{w'-1}{2})$,采样结果的几何中心为 $(\frac{h-1}{2}, \frac{w-1}{2})$

原理：先计算目标像素到采样结果图的几何中心距离，再将该距离变换到原图对应的距离，从原图的几何中心延伸出该距离得到变换后的坐标位置，也即对于采样结果图上的距离 d ,其对应的原图距离为 $d \times S$（注意， S 的几何意义便是，采样结果图距离为单位1，则原图对应的距离为 S ），我们取其中一维计算，另一位同理。

$$x' = \frac{h'-1}{2} - |x - \frac{h-1}{2}| \times S_h, 0 \leq x \leq \frac{h-1}{2}$$
$$x' = \frac{h'-1}{2} - |x - \frac{h-1}{2}| \times S_h, \frac{h-1}{2} < x \leq h-1$$

易得：

$$x' = \frac{h'-1}{2} + (x - \frac{h-1}{2}) \times S_h, 0 \leq x \leq h-1$$

同理可得：

$$y' = \frac{w'-1}{2} + (y - \frac{w-1}{2}) \times S_w, 0 \leq y \leq w-1$$

下证，

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{h'-1}{2} + (x - \frac{h-1}{2}) \times S_h \\
&= \frac{h'-1}{2} + (x - \frac{h-1}{2}) \times \frac{h'}{h} \\
&= \frac{h'}{2} - \frac{1}{2} + (x + \frac{1}{2} - \frac{h}{2}) \times \frac{h'}{h} \\
&= \frac{h'}{2} - \frac{1}{2} + (x + \frac{1}{2}) \times \frac{h'}{h} - \frac{h'}{2} \\
&= (x + \frac{1}{2}) \times \frac{h'}{h} - \frac{1}{2} \\
&= (x + \frac{1}{2}) \times S_h - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

同理可证：

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{w'-1}{2} + (y - \frac{w-1}{2}) \times S_w \\
&= (y + \frac{1}{2} \times S_w - \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

证毕。链接