Содержание

1 Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны

Рассмотрим решение задачи о колебании однородной струны, закреплённой на концах. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x),\, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x)\ (0 \leq x \leq l) \tag{3}$$

Будем искать частные решения (1), не равные тождественно нулю, (т.е. **нетривиальные**) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

удовлетворяющим (2).

Подставив (4) в (1), получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{5}$$

Т.к. левая часть (5) зависит только от t, а правая - только от x, то равенство возможно только когда $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, $\lambda - const$.

Из (5) получим тогда:

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{7}$$

Чтобы найти нетривиальные решения вида (4), удовлетворяющие (2), необходимо найти решения уравнения (7), удовлетворяющие

$$X(0) = 0, X(l) = 0 \tag{8}$$

Те λ, при которых (7)-(8) имеет нетривиальные решения, называются **собственными числами (значениями)**, а сами эти решения **- собственными функциями**

Найдем собственные функции и значения (7)-(8). Рассмотрим три случая $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$.

1. $\lambda < 0$. Общее решение (7) имеет вид

   $$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

   Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

   $$C_1 + C_2 = 0, C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \tag{9}$$

   Так как определитель системы (9) отличен от нуля, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0 \implies X(x) \equiv 0$.

2. При $\lambda = 0$ общее решение (7) имеет вид

   $$X(x) = C_1 + C_2 x$$

   Граничные условия (8) дают

   $$C_1 = 0, C_1 + C_2 l = 0,$$

   поэтому $C_1 = C_2 = 0 \implies X(x) \equiv 0$.

3. При $\lambda > 0$ общее решение (7) имеет вид

   $$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

   Удовлетворяя (8), получим

   $$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

   Из первого уравнения $C_1 = 0$, из второго $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Мы должны считать $C_2 \neq 0$, ибо в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, то есть $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{Z}$.

   Нетривиальные решения (7)-(8) возможны при

   $$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \ (k \in \mathbb{N})$$

   Этим λ_k соответствуют собственные функции

   $$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя C. Положим $C = 1$.

Разные k, отличающиеся только знаком, дают собственные функции, отличающиеся лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно рассматривать $k \in \mathbb{N}$.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l}$$

a_k, b_k – const.

Таким образом, функции

$$u_k(x,t) = X_k(x) T_k(t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют (1) и граничным условиям (2) $\forall a_k, b_k$.

(1) линейно и однородно, поэтому конечная сумма таких решений также будет решением. Аналогично для ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{10}$$

если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Т.к. каждое слагаемое в (10) удовлетворяет граничным условиям (2), то (2) будет удовлетворять и сумма ряда $u(x,t)$. Остается определить a_k, b_k так, чтобы удовлетворить условиям (3).

Продифференцируем (10) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left(-a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{11}$$

Полагая в (10) и (11) $t = 0$, в силу (3), получим:

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \\ F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \end{gathered} \tag{12}$$

Формулы (12) представляют разложение $f(x), F(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты разложений (12) выписываются по известным формулам:

$$\begin{gathered} a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \\ b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) даётся рядом (10), где a_k, b_k определяются формулами (13).

1.1 Теорема

Если $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям

$$f(0) = f(l) = 0, \; f''(0) = f''(l) = 0, \tag{14}$$

а $F(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(l) = 0, \tag{15}$$

то функция $u(x,t)$, определяемая рядом (10), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет (1)-(3). При этом возможно почленное дифференцирование (10) по x и t два раза, а полученные ряды будут абсолютно и равномерно сходящимися при $0 \leq x \leq l$ и $\forall t$.

Доказательство

Интегрируя по частям (13) и принимая во внимание (14)-(15), получим

$$\begin{aligned} a_k &= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{b_k^{(3)}}{k^3} \\ b_k &= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{a_k^{(2)}}{k^3} \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} b_k^{(3)} &= \frac{2}{l} \int\limits_0^l f'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \\ a_k^{(2)} &= \frac{2}{l} \int\limits_0^l \frac{F''(x)}{a} \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{aligned} \tag{17}$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|a_k^{(2)}\right|}{k}, \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|b_k^{(3)}\right|}{k} \tag{18}$$

сходятся. Подставив (16) в (10), получим

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(b_k^{(3)} \cos \frac{k\pi at}{l} + a_k^{(2)} \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{19}$$

Этот ряд мажорируется рядом

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\left|b_k^{(3)}\right| + \left|a_k^{(2)}\right| \right),$$

который сходится. Следовательно, (10) сходится абсолютно и равномерно. Из (18), (10) можно дважды почленно дифференцировать по x и t.

$\square$.

Если $f(x)$ и $F(x)$ не удовлетворяют условиям теоремы, то может не существовать дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (1)-(3). Однако, если $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, для которой $f(0) = f(l) = 0$, а $F(x)$ - непрерывная функция, для которой $F(0) = F(l) = 0$, то (10) равномерно сходится при $0 \leq x \leq l$ и любом t и определяет непрерывную $u(x,t)$.

Будем называть **обобщённым решением** уравнения (1) при условиях (2)-(3) функцию $u(x,t)$, являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности $u_n(x,t)$ решений уравнения (1), удовлетворяющих (2)-(3), где $f_n(x), F_n(x)$ - последовательности функций, удовлетворяющих условиям теоремы выше и таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^l [f(x) - f_n(x)]^2\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^l [F(x) - F_n(x)]^2\, dx = 0.$$

При этих предположениях на $f(x), F(x)$, частные суммы ряда (10) образуют последовательность $u_n(x,t)$, удовлетворяющую условиям, следовательно обобщенное решение существует и ряд (10) является таким решением.

Нетрудно показать, что обобщённое решение смешанной задачи (1)-(3) единственно.

Возвратимся к найденному решению (10) задачи (1)-(3).

Ввведём обозначения

$$a_k = A_k \sin\varphi_k,\ \ b_k = A_k \cos\varphi_k$$

и запишем это решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\left(\frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k\right) \tag{20}$$

Каждый член этого ряда представляет собой стоячую волну, при которой точки x струны совершают гармоническое колебательной движение с амплитудой $A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$, частотой $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ и фазой φ_k.

уфф

Звуки можно классифицировать на музыкальные и немузыкальные - первые называются **нотами**, вторые **шумами**. Музыкальные звуки естественным образом располагаются в определённом порядке соответственно высоте – качеству, которое до известной степени может оценивать каждый. Те ноты, которые ухо не может различать по высоте, далее называются **тонами**.

При колебании струна издаёт звук, высота которого зависит от частоты колебаний; частота основного (самого низкого) тона выражается формулой

$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Тона, соответствующие более высоким частотам, чем основная, называются **обертонами**. Обертоны, частоты которых являются кратными основной частоте, называются **гармониками**. Первой гармоникой будем считать основной тон, второй гармоникой - тон с частотой $\omega_2 = 2\omega_1$ и т.д.

Вроде T_0 - натяжение струны, ρ - линейная плотность

Решение (20) складывается из отдельных гармоник. Амплитуды их, а потому и влияния их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники и всё их действие сводится к созданию тембра звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих гармоник.

Существует очень мало колебательных систем с гармоническими обертонами, но эти немногие системы являются основными для построения почти всех музыкальных инструментов. Это следует из того, что звук с гармоническими обертонами кажется особенно приятным в музыкальном отношении.

В точках

$$x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}l, l$$

амплитуда колебаний k-й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках $\sin\frac{k\pi x}{l} = 0$. Эти точки называются **узлами** k-й гармоники. Напротив, в точках

$$x = \frac{l}{2k}, \frac{3l}{2k}, \ldots, \frac{(2k-1)}{2k}l,$$

называемых пучностями, амплитуда k-й гармоники достигает наибольшей величины, т.к. $\sin\frac{k\pi x}{l}$ там имет максимальное абсолютное значение.

Если мы прижмём колеблющуюся струну точно в середине, то есть в пучности её основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучность в этой точке, то есть нечетнх гармоник. Напротив, на чётные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четыре гармоники. Самой низкой частотой будет $\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, и струна будет издавать не своё основной звук, а его октаву, то есть звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.

2 Общая схема метода Фурье

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где $p(x), p'(x), q(x)$ и $\rho(x)$ - непрерывные функции при $0 \leq x \leq l$, причём $p(x) > 0, q(x) \geq 0, \rho(x) > 0$.

Пусть требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} \alpha u(0,t) + \beta \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= 0, \\ \gamma u(l,t) + \delta \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta - const, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) \ (0 \leq x \leq l)$$

Будем сначала искать нетривиальные решения (1) в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{4}$$

удовлетворяющего только граничным условиям (2).

Подставляя (4) в (1), получим

$$T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] - q(x)X(x)T(t) = \rho(x)X(x)T''(t)$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} \tag{5}$$

Левая часть (5) зависит только от x, правая - только от t, значит (5) $= -\lambda = const$. Тогда из (5) получим два дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] + \left[\lambda\rho(x) - q(x)\right]X(x) = 0 \tag{7}$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (1) вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо, чтобы $X(x)$ удовлетворяла граничным условиям

$$\begin{aligned} \alpha X(0) + \beta X'(0) &= 0, \\ \gamma X(l) + \delta X'(l) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче **Штурма-Лиувилля** о собственных числах: найти такие значения λ, при которых существуют нетривиальные решения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8).

Эта задача не при всяком λ имеет отличные от нулевого решения. Те значения λ, при которых задача (7)-(8) имеет нетривиальные решения, называются **собственными числами**, а сами эти решения - **собственными функциями**, соответствующими этому с.ч. λ. (собственные функции собственных чисел = с.ф. с.ч.) В силу однородности (7)-(8), собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Выберем его так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x) X^2(x) dx = 1 \tag{9}$$

Собственные функции, удовлетворяющие (9), будем называть **нормированными**.

Установим некоторые общие свойства с.ф. с.ч. задачи Штурма-Лиувилля:

1. Всякому с.ч. соответствует только одна линейно независимая с.ф.

   Действительно, предположим, что при некотором λ существуют два линейно независимых решения (7), удовлетворяющих (8). Тогда оказалось бы, что и общее решение уравнения (7) удовлетворяет (8). Но этого быть не может, так как всегда можно найти решение уравнения (7) при таких начальных данных $X(0), X'(0)$, например, $X(0) = \alpha, X'(0) = \beta$, которые не удовлетворяют первому из граничных условий (8).

2. Собственные функции, соответствующие различным с.ч., ортогональны с весом $\rho(x)$, то есть

   $$\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0 \tag{10}$$

   Пусть λ_1, λ_2 - два различных с.ч., а $X_1(x), X_2(x)$ - соответствующие им с.ф., так что

   $$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_1'(x)\right] + \left[\lambda_1\rho(x) - q(x)\right] X_1(x) = 0$$
   $$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_2'(x)\right] + \left[\lambda_2\rho(x) - q(x)\right] X_2(x) = 0$$

   Умножим первое равенство на $X_2(x)$, второе - на $X_1(x)$ и вычтем одно из другого почленно, получаем равенство

   $$X_2(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_1'(x)\right] - X_1(x)\frac{d}{dx}\left[X_2'(x)p(x)\right] + (\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x)X_1(x)X_2(x) = 0,$$

   которое можно переписать в виде

   $$(\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x)X_1(X)X_2(x) + \frac{d}{dx}\left\{p(x)\left[X_2(x)X_1'(x) - X_1(x)X_2(x)\right]\right\} = 0$$

   Интегрируя это равенство по x от 0 до l, получим

   $$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^l \rho(x)X_2(x)X_1(x)dx = p(x)\left[X_2(x)X_1'(x) - X_1(x)X_2'(x)\right]_{x=0}^{x=l}$$

Приняв во внимание граничные условия (8), легко убеждаемся, что

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int\limits_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0,$$

откуда в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\int\limits_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0,$$

$\square$.

3. Все собственные числа вещественны.

   В самом деле, допустим, что существует с.ч. $\lambda \in \mathbb{C}$, которому соответствует с.ф. $X(x)$. Тогда $\overline{\lambda}$ также будет с.ч., а $\overline{X}(x)$ - с.ф., так как коэффициенты в (7) и (8) вещественны. Из условий ортогональности

   $$\int\limits_0^l \rho(x) X(x) \overline{X}(x) dx = \int\limits_0^l \rho(x) \left| X(x) \right|^2 dx = 0,$$

   следует, что $X(x) \equiv 0$, т.е. λ не является собственным.

4. Существует бесконечное множество вещественных с.ч.

   $$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n \dots, \ \lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

   Прежде чем перейти к обоснованию этого утверждениия, укажем ещё одно важное свойство с.ч.. Пусть λ_k - с.ч., а $X_k(x)$ - с.ф., образующие ортогональную нормированную систему. Имеем

   $$\frac{d}{dx} \left[p(x) X_k'(x) \right] - q(x) X_k(x) = -\lambda_k \rho(x) X_k(x)$$

   Умножая обе части на $X_k(x)$, интегрируя и принимая во внимание (9), получаем

   $$\lambda_k = -\int\limits_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) X_k'(x) \right] - q(x) X_k(x) \right\} X_k(x) dx,$$

   откуда, интегрируя первое млагаемое по частям, придем к формуле:

   $$\lambda_k = \int\limits_0^l \left[p(x) {X_k'}^2 + q(x) X_k^2(x) \right] dx - \left[p(x) X_k(x) X_k'(x) \right]_{x=0}^{x=l} \qquad (11)$$

Допустим, что $p(x) > 0, q(x) \geq 0, \rho(x) > 0$ и, кроме того,

$$[p(x)X_k(x)X'_k(x)]_{x=0}^{x=l} \leq 0 \tag{11a}$$

Тогда из (9) следует, что все с.ч. задачи (7)-(8) неотрицательны.

Условие (11a) выполняется при наиболее часто встречающихся в приложениях граничных условиях:

$$X(0) = 0, X(l) = 0, \tag{8a}$$

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, X'(l) + h_2 X(l) = 0,\ h_1 \geq 0, h_2 \geq 0 \tag{8b}$$

В заключение отметим, что с.ф. $X_k(x)$ граничной задачи (7)-(8a) или (7)-(8b) (если $h_1 = h_2 = 0$, то $q(x) \geq q_0 > 0$) образуют точную систему.

2.1 Определение 1

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется **полной**, если не существует отличной от тождественно равной нулю, суммируемой с квадратом функции, ортогональной ко всем функциям системы.

Обратимся теперь к (6). Его общее решение при $\lambda = \lambda_k$, которое обозначим $T_k(t)$, имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t,$$

где A_k, B_k - произвольные постоянные.

Каждая функция

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right) X_k(x)$$

будем решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2).

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right) X_k(x) \tag{12}$$

Если этот ряд сходится равномерно вместе с рядами, получаемыми из него двухкратным почленным дифференцированием, то сумма его, очевидно, будет решением (1), удовлетворяющим граничным условиям (2). Для выполнения начальных условий (2) необходимо, чтобы

$$u|_{t=0} = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x) \tag{14}$$

Таким образом, мы пришли к задаче о разложении произвольной функции в ряд по с.ф. $X_k(x)$ граничной задачи (7)-(8).

Предполагая, что (13) и (14) сходятся равномерно, можно определить A_k, B_k, умножить обе части равенств (13)-(14) на $\rho(x)X_k(x)$ и проинтегрировать по x от 0 до l. Тогда, принимая во внимание (9)-(10, получим

$$A_k = \int_0^l \rho(x) f(x) X_k(x) dx, \; B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \rho(x) F(x) X_k(x) dx$$

Подставив эти значения A_k, B_k в (12), получим решение смешанной задачи (1)-(3), если ряд (12) и ряды, полученные из него двухкратным почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся.

Замечание

Метод Фурье применим и в случае многих пространственных переменных для гиперболических уравнений специального вида, а также для уравнений эллиптического и параболического типов.

Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами p, q, закреплённой по контуру.

Как известно, эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{15}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = 0, \; u|_{x=p} = 0 \\ u|_{y=0} = 0, \; u|_{y=q} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x,y), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x,y) \tag{17}$$

Будем искать частные решения (15) в виде

$$u(x,y,t) = T(t)v(x,y), \tag{18}$$

удовлетворяющие граничным условиям (16).

Подставив (18) в (15), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v}$$

Очевидно, что это равенство может иметь место, только когда обе его части равны одной и той же постоянной величине. Обозначим эту постоянную через $-k^2$, и, принимая во внимание (16), найдём, что

$$T''(t) + (ak)^2 T(t) = 0 \tag{19}$$

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = 0 \tag{20}$$

$$\begin{gathered} v|_{x=0} = 0,\, v|_{x=p} = 0 \\ v|_{y=0} = 0,\, v|_{y=q} = 0 \end{gathered} \tag{21}$$

Граничную задачу (20)-(21) будем решать методом Фурье, полагая

$$v(x, y) = X(x)Y(y) \tag{22}$$

Подставляя (22) в (20), получим

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)}$$

откуда получаем два уравнения:

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, Y''(y) + k_2^2 Y(y) = 0 \tag{23}$$

где

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 \tag{24}$$

Общие решения (23), как известно, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} X(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x \\ Y(y) = C_3 \cos k_2 x + C_4 \sin k_2 x \end{gathered} \tag{25}$$

Из граничных условия (21) получим

$$\begin{gathered} X(0) = 0, X(p) = 0 \\ Y(0) = 0, Y(q) = 0 \end{gathered} \tag{26}$$

откуда ясно, что $C_1 = C_3 = 0$, и если мы положим $C_2 = C_4 = 1$, то окажется:

$$X(x) = \sin k_1 x,\ Y(y) = \sin k_2 y \tag{27}$$

причём должно быть

$$\sin k_1 p = 0, \sin k_2 q = 0 \tag{28}$$

Из уравнения (28) вытекает, что k_2 и k_1 имеют бесконечное множество значений:

$$k_{1m} = \frac{m\pi}{p}, k_{2m} = \frac{n\pi}{q} (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

Тогда из равенства (24) получим соответствующие значения k^2:

$$k_{mn}^2 = k_{1m}^2 + k_{2n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right) \tag{29}$$

Таким образом, с.ч. (29) соответствуют с.ф.

$$v_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \tag{30}$$

граничной задачи (20)-(21).

Обращясь теперь к (19), видим, что для каждого с.ч. $k^2 = k_{mn}^2$ его общее решение имеет вид

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t \tag{31}$$

Таким образом, в силу (18), (30) и (31), частные решения уравнения (15), удовлетворяющие граничным условиям (16), имеют вид:

$$u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \tag{32}$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (17), составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \tag{33}$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x, y и t, то сумма его, очевидно, будет удовлетворять (15) и (16). Для выполнения начальных условий (17) необходимо, чтобы

$$u|_{t=0} = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \tag{34}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ak_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \tag{35}$$

Предполагая, что ряды (34), (35) сходятся равномерно, мы можем определить A_{mn}, B_{mn}, умножив обе части (34) и (35) на

$$\sin \frac{m_1 \pi x}{p} \sin \frac{n_1 \pi y}{q}$$

и проинтегрировав по x от 0 до p и по y от 0 до q. Тогда, приняв во внимание, что

$$\int_0^p \int_0^q \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m_1 \pi x}{p} \sin \frac{n_1 \pi y}{q} dxdy =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m_1 \text{ или } n \neq n_1 \\ \dfrac{pq}{4}, & \text{если } m = m_1 \text{ и } n = n_1 \end{cases}$$

получаем

$$
\begin{aligned}
A_{mn} &= \frac{4}{pq}\int\limits_0^p\int\limits_0^q f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}dxdy,\\
B_{mn} &= \frac{4}{apqk_{mn}}\int\limits_0^p\int\limits_0^q F(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}dxdy
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Решение (33) можно записать также в виде

$$
u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}M_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\left(ak_{mn}t+\varphi_{mn}\right) \tag{37}
$$

где

$$
M_{mn}=\sqrt{A_{mn}^2+B_{mn}^2},\ \varphi_{mn}=\operatorname{arctg}\frac{A_{mn}}{B_{mn}}
$$

3 Сопряжённое уравнение

Рассмотрим задачу: дано линейное дифференциальное выражение

$$
L[y]=a_n(x)y+a_{n-1}(x)y'+a_{n-2}(x)y''+\cdots+a_1(x)y^{(n-1)}+a_0(x)y^{(n)}, \tag{1}
$$

найти такую функцию $z(x)$, чтобы при умножении на неё (1) оно становилось точной производной по x при любой n раз дифференциремой функцией y. Эта функция $z(x)$ называется **множителем дифференциального выражения** $L[y]$. При этом мы будем предполагать, что функции $a_k(x),\ \ k=\overline{0,n}$, непрерывные в рассматриваемом интервали и имеющие непрерывные производные всех порядков, которые войдут в наши формулы. Умножаем (1) на искомую функцию $z(x)$ и вычисляем

$$
\int z(x)L[y]dx
$$

так, что каждый член интегрируем по частям, понижая порядок производной от y до тех пор, пока под интегралом не останется множитель y. Таким образом, будем иметь:

$$\int a_n(x)yzdx = \int a_n(x)yzdx,$$

$$\int a_{n-1}(x)y'zdx = a_{n-1}(x)zy - \int y(a_{n-1}(x)z)'dx$$

$$\int a_{n-2}(x)y''z = a_{n-2}(x)zy' - \int (a_{n-2}(x)z)'y' =$$

$$= a_{n-2}(x)zy' - (a_{n-2}(x)z)'y + \int y(a_{n-2}(x)z)''dx$$

$$\dots$$

$$\int a_1(x)y^{(n-1)}zdx = a_1(x)zy^{(n-2)} - (a_1(x)z)'y^{(n-3)} + (a_1(x)z)''y^{(n-4)} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-2}(a_1(x)z)^{(n-2)}y + (-1)^{n-1}\int y(a_1(x)z)^{(n-1)}dx$$

$$\int a_0(x)y^{(n)}zdx = a_0(x)zy^{(n-1)} - (a_0(x)z)'y^{(n-2)} + (a_0(x)z)''y^{(n-3)} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{(n-1)}(a_0(x)z)^{(n-1)}y + (-1)^n\int y(a_0(x)z)^{(n)}dx$$

Собирая отдельно члены, не содержащие интегралов, и под общим знакам интеграла члены, содержащие квадратуру, получаем:

$$\int zL[y]dx = a_{n-1}(x)zy - (a_{n-2}z)'y + \dots + (-1)^{n-1}(a_0(x)z)^{(n-1)}y +$$

$$+ a_{n-2}(x)zy' - (a_{n-3}(x)z)'y' + \dots + (-1)^{(n-2)}(a_0(x)z)^{(n-2)}y' + \dots$$

$$\dots$$

$$+ a_1(x)zy^{(n-2)} - (a_0(x)z)'y^{(n-2)} + a_0(x)zy^{(n-1)} +$$

$$+ \int y\left[a_n(x)z - (a_{n-1}(x)z)' + (a_{n-2}(x)z)'' - \dots + (-1)^n(a_0(x)z)^{(n)}\right]dx$$

или, перенося интеграл в левую часть и вводя новые обозначения,

$$\int (zL[y] - yM[z])\,dx = \Psi[y,z] \tag{2}$$

Дифференциальное выражение

$$M[z] = a_n(x)z - (a_{n-1}(x)z)' + \dots + (-1)^{n-1}(a_1(x)z)^{(n-1)} + (-1)^n(a_0(x)z)^{(n)} \tag{3}$$

называется **сопряжённым** с $L[y]$ дифференциальным выражением (или *оператором*), а $\Psi[y,z]$ есть билинейная форма относительно $y, y', \dots, y^{(n-1)}$

с одной стороны и $z, z', \dots, z^{(n-1)}$ с другой стороны, а именно:

$$\begin{aligned}\Psi[y,z] = y\Big(a_{n-1}(x)z - (a_{n-2}(x)z)' + \dots + (-1)^{n-1}(a_0(x)z)^{(n-1)}\Big) + \\ +y'\Big(a_{n-2}(x)z - (a_{n-3}(x)z)' + \dots + (-1)^{(n-2)}(a_0(x)z)^{(n-2)}\Big) \\ \dots \\ +y^{(n-2)}\left(a_1(x)z - (a_0(x)z)'\right) + y^{(n-1)}a_0(x)z\end{aligned} \tag{3'}$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$M[z] = 0 \tag{4'}$$

называется уравнением, сопряжённым с уравнением

$$L[y] = 0 \tag{4}$$

Соотношение (2) есть тождество не только по x_1 - оно справедливо при любых функциях y, z. Если мы теперь возьмём в качестве z решение уравнения (4'), $z = \overline{z}$, то (2) примет вид:

$$\int \overline{z}L[y]dx = \Psi\left[y, \overline{z}\right].$$

или, дифференцируя,

$$\overline{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi\left[y, \overline{z}\right]$$

Таким образом, поставленная в начале задача решена: если умножить данное дифференциальное выражение (1) на любое решение $\overline{z}$ сопряжённого уравнения (3'), то оно становится полной производной от дифференциального выражения $(n-1)$-го порядка $\Psi\left[y, \overline{z}\right]$. Обратно, для того, чтобы функция $\overline{z}$ при умножении на $L[y]$ делала его такой производной при любой функции y, необходимо, чтобы $M\left[\overline{z}\right] = 0$.

В самом деле, если $\overline{z}$ есть какой-нибудь множитель выражения (1), то имеет место равенство:

$$\overline{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi_1[y] \tag{2'}$$

где, как легко видеть, Psi_1 есть линейное выражение относительно $y, y', \dots, y^{(n-1)}$:

$$\Psi_1[y] = b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y.$$

С другой стороны, подставляя $\overline{z}$ вместо z в (2) и дифференцируя по x, находим:

$$\overline{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi\left[y, \overline{z}\right] + yM\left[\overline{z}\right] \tag{2''}$$

Из (2'), (2") получаем:

$$\frac{d}{dx}\left(\Psi_1[y] - \Psi\left[y, \overline{z}\right]\right) - yM\left[\overline{z}\right] = 0 \tag{2'''}$$

В левой части (2''') стоит линейное выражение n-го порядка относительно y; так как равенство нулю выполняется тождественно для любой функции y, то коэффициенты при y и всех пго производных тождественно равны нулю, иначе (2”) было бы дифференциальным уравнением для y. Из вида (2’) билинейного выражения для Ψ следует:

$$b_{n-1} = a_0(x)\overline{z}, b_{n-2} = a_1(x)\overline{z} - (a_0(x)\overline{z})', \dots,$$
$$b_0 = a_{n-1}(x)\overline{z} - (a_{n-2}(x)z)' + \dots + (-1)^{n-1}(a_0(x)\overline{z})^{(n-1)'}$$

т.е. $\Psi_1[y] = \Psi[y, \overline{z}]$, и равенство (2''') даёт: $M[\overline{z}] = 0$.

Следовательно, мы можем сделать вывод:

Для того, чтобы функция $z(x)$ при всякой функции $y(x)$ обращала произведения $\overline{z}L[y]$ в точную производную, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{z}$ являлось решением сопряжённого уравнения (4’).

Каждое решение сопряжённого уравнения (4’) является множителем уравнения (4’), при умножении на который левая часть (4) становится точной производной. Таким образом, (4) допускает первый интеграл:

$$\Psi[y, \overline{z}] = C \tag{5}$$

который сам является (неоднородным) уравнением порядка $n-1$. Очевидно, если нам дано уравнение $L[y] = f(x)$, то та же функция $\overline{z}$ является его множителем, и мы получим первый интеграл:

$$\Psi[y, \overline{z}] = \int f(x)\overline{z}dx + C$$

Если имеем линейное уравнение первого порядка

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

то уравнение, сопряжённое соответствующему однородному, будет

$$P(x)z - z' = 0;$$

его решение

$$\overline{z} = e^{\int p(x)dx}$$

будет множителем данного уравнения.

Замечание 1

Чтобы левая часть данного уравнения сама была точной производной, необходимо и достаточно, чтобы сопряжённое уравнение допускало решение $\overline{z} = 1$, то есть чтобы коэффициент при z в уравнении (4’) был равен нулю. Раскрывая выражение (3) и подсчитывая в нём коэффициенты при z', находим условие того, чтобы левая часть уравнения (4) была точной производной, в виде:

$$a_n(x) - \frac{d}{dx}a_{n-1}(x) + \frac{d^2}{dx^2}a_{n-2}(x) - \dots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}a_0(x) = 0$$

Замечание 2

Оператор $L[y]$ четного порядка $n = 2m$ называется **самосопряжённым**: $L[y] \equiv M[y]$. Уравнение $L[y] = 0$ называется в таком случае **самосопряжённым уравнением**. Для оператора второго порядка

$$L[y] = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

сопряжённый оператор есть

$$M[z] = a_2(x)z - (a_1(x)z)' + (a_0(x)z)'' =$$
$$= (a_2(x) - a_1'(x) + a_0''(x))z + (-a_1(x) + 2a_0'(x))z' + a_0(x)z'';$$

условия самосопряжённости

$$-a_1(x) + 2a_0'(x) = a_1(x), a_2(x) - a_1'(x) + a_0''(x) = a_2(x)$$

сводятся к одному первому: $a_1(x) = a_0'(x)$. Итак, самосопряжённый оператор второго порядка имеет вид:

$$(a_0(x)y')' + a_2(x)y.$$

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$Mu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha} \partial x_\beta + \sum_{\alpha=1}^{3} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu, \tag{6}$$

где $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c$ - некоторые функции x_1, x_2, x_3. Если функции $a_{\alpha\beta}$, а также функции

$$e_\alpha = b_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \tag{7}$$

имеют непрерывные первые производные, то дифференциальному выражению Mu можно придать вид

$$Mu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + Cu \tag{8}$$

Найдём функцию $v(x_1, x_2, x_3)$, при умножении на которую выражение Mu выражение vMu может быть представлено в виде суммы частных производных первого порядка по x_1, x_2, x_3.

остаток конспекта потерян в вечности...