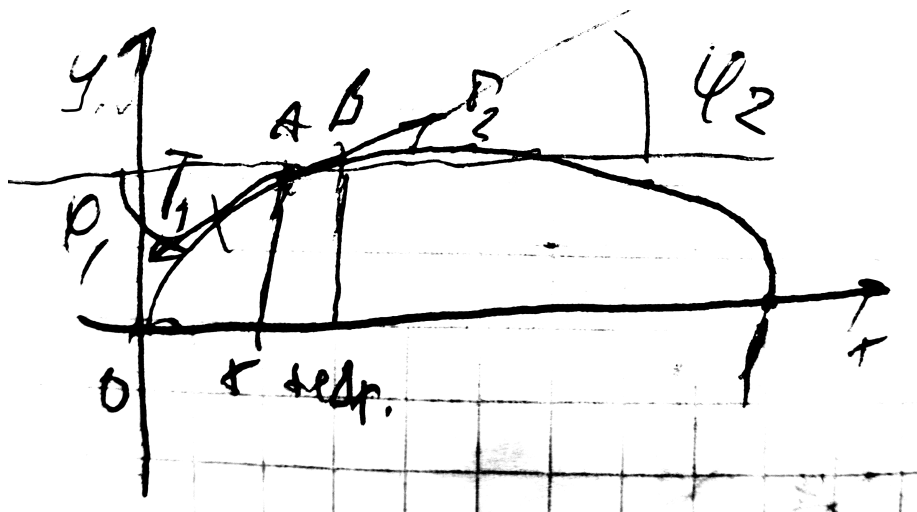


# Содержание

<b>1</b>	<b>Вывод уравнения струны</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Решение уравнения струны</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны</b>	<b>6</b>
3.1	Теорема . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Общая схема метода Фурье</b>	<b>11</b>
4.1	Определение 1 . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Сопряжённое уравнение</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Примеры из физики</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Одномерная частица в потенциальной яме</b>	<b>25</b>

## 1 Вывод уравнения струны

Пусть есть струна, закрепленная в точках  $0, l$ . И мы эту струну оттягиваем от положения равновесия:



Силой тяжести мы пренебрегаем, продольное движение отсутствует, а остаются только две силы натяжения нити  $T_1, T_2$ . Спроецируем их на оси:

$$Ox : 0 = -T_1 \cos \varphi_1 + T_2 \cos \varphi_2$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1$$

Отсюда получается, что  $T_1 \approx T_2 =: T$ . Спроецируем на  $Ou$  :

$$ma = T \sin \varphi_2 - T \sin \varphi_1$$

$$ma = T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x+\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x} \right)$$

Массу можно представить в виде  $m = l \cdot \rho$ , где  $l$  - длина,  $\rho = const$  - линейная плотность, тогда

$$l = \int_{AB} ds = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \Delta x$$

Отсюда

$$m = \rho \cdot \Delta x$$

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x+\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x} \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Уравнения в частных производных отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений тем, что в обыкновенных диффурах конечное число степеней свободы, а в уравнениях в частной производной - бесконечно много.

## 2 Решение уравнения струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Кроме того, есть граничные условия

$$u(0, t) = 0 \quad \forall t$$

$$u(l, t) = 0$$

и начальные

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad x \in [0, l]$$

Решение Эйлера получается через замену:

$$\begin{cases} \xi = at + x \\ \eta = -at + x \end{cases}$$

решение выражается через  $u_{\xi\eta} = 0, u = G(\xi) + F(\eta)$ .

Решение Даламбера – ищем стоячие волны  $F(x)$ , такие, что

$$u(x, t) = \cos(\omega t + \chi) F(x)$$

являются решением уравнения струны.

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= -\omega^2 \cos(\omega t + \chi) F(x) \\ u_{xx}(x, t) &= \cos(\omega t + \chi) F''(x) \\ -\omega^2 \cos(\omega t + \chi) F(x) &= a^2 \cos(\omega t + \chi) F''(x) \\ F''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} F(x) &= 0 \\ u(0, t) = \cos(\omega t + \chi) F(0) &= 0 \quad \forall t \implies F(0) = 0 \\ F(l) &= 0 \end{aligned}$$

Решаем диффур второго порядка и получаем решение:

$$\begin{aligned} F(x) &= c \sin \frac{\omega}{a} x \\ F(l) = c \sin \frac{\omega}{a} l &= 0 \implies \frac{\omega}{a} l = \pi k, k \in \mathbb{N} \\ \omega_k &= \frac{a\pi}{l} k \\ F_k(x) &= C \sin \left( \frac{\pi k}{l} x \right) \end{aligned}$$

Из этого можно получить метод Фурье. Если сложить все  $F_k$  в одну функцию, то получится

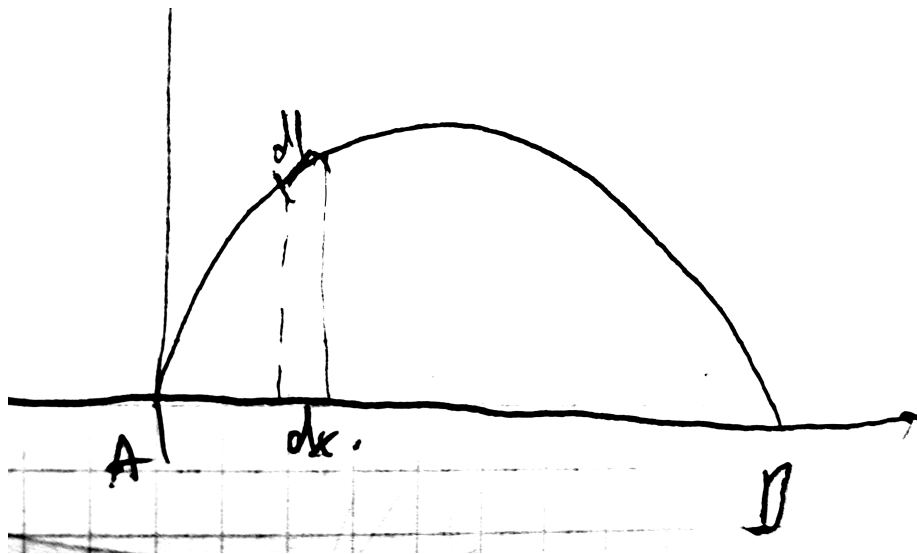
$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(\omega_k t + \chi_k) \sin \left( \frac{\pi k}{l} x \right) = \dots$$

т.е. ряд Фурье. Это будет общее решение.

$$\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos(\omega_k t) \sin \left( \frac{\pi k}{l} x \right) + B_k \sin(\omega_k t) \sin \left( \frac{\pi k}{l} x \right) \right)$$

Неизвестными будут  $A_k, B_k$ . Они подбираются так, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Посчитаем полную энергию струны.



$$\begin{aligned}
E &= E_K + E_\Pi \\
dE_K &= \frac{dm \cdot u_t^2}{2} = \frac{\rho dl u_t^2}{2} \\
E_K &= \int_{AB} \frac{\rho dl \cdot u_t^2}{2} = \int_0^l \frac{\rho u_t^2}{2} \sqrt{1 + u_x^2} dx = \\
&= \frac{\rho}{2} \int_0^l u_t^2 \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx \frac{\rho}{2} \int_0^l u_t^2 dx \\
dE_\Pi &= T \underbrace{(dl - dx)}_{\text{удлинение струны}} \\
E_\Pi &= \int_{AB} T(dl - dx) = T \int_0^l (\sqrt{1 + u_x^2} - 1) dx \approx \\
&\approx \frac{T}{2} \int_0^l u_x^2 dx \\
E = E_K + E_\Pi &\approx \frac{\rho}{2} \int_0^l u_t^2 dx + \frac{T}{2} \int_0^l u_x^2 dx = \dots \\
a^2 &= \frac{T}{\rho} \implies \\
\dots &= \frac{\rho}{2} \int_0^l [u_t^2 + a^2 u_x^2] dx
\end{aligned}$$

Рассмотрим тогда функцию вида

$$u(x, t) = \cos(\omega_k t + \varphi) \sin\left(\frac{\omega_k}{a} x\right)$$

Для неё

$$\begin{aligned}
u_t^2 + a^2 u_x^2 &= \omega_k^2 \sin^2(\omega_k t + \varphi) \sin^2\left(\frac{\omega_k}{a} x\right) + \omega_k^2 \cos^2(\omega_k t + \varphi) \cos^2\left(\frac{\omega_k}{a} x\right) = \\
&= \frac{\omega_k^2}{2} + \dots \cos\left(\frac{2\omega_k}{a} x\right) \\
E &= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\omega_k^2}{l} = \frac{\rho \pi^2 k^2 a^2}{4}
\end{aligned}$$

Отсюда получается, что чтобы заставить струну колебаться с  $k$ -й гармоникой, надо  $k^2$  энергии.

### 3 Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны

Рассмотрим решение задачи о колебании однородной струны, закреплённой на концах. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (3)$$

Будем искать частные решения (1), не равные тождественно нулю, (т.е. **нетривиальные**) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

удовлетворяющим (2).

Подставив (4) в (1), получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (5)$$

Т.к. левая часть (5) зависит только от  $t$ , а правая - только от  $x$ , то равенство возможно только когда  $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ ,  $\lambda - const$ .

Из (5) получим тогда:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (7)$$

Чтобы найти нетривиальные решения вида (4), удовлетворяющие (2), необходимо найти решения уравнения (7), удовлетворяющие

$$X(0) = 0, X(l) = 0 \quad (8)$$

Те  $\lambda$ , при которых (7)-(8) имеет нетривиальные решения, называются **собственными числами (значениями)**, а сами эти решения - **собственными функциями**

Найдем собственные функции и значения (7)-(8). Рассмотрим три случая  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$ .

1.  $\lambda < 0$ . Общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

$$C_1 + C_2 = 0, C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \quad (9)$$

Так как определитель системы (9) отличен от нуля, то  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0 \implies X(x) \equiv 0$ .

2. При  $\lambda = 0$  общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Граничные условия (8) дают

$$C_1 = 0, C_1 + C_2 l = 0,$$

поэтому  $C_1 = C_2 = 0 \implies X(x) \equiv 0$ .

3. При  $\lambda > 0$  общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя (8), получим

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0.$$

Из первого уравнения  $C_1 = 0$ , из второго  $C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ . Мы должны считать  $C_2 \neq 0$ , ибо в противном случае  $X(x) \equiv 0$ . Поэтому  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , то есть  $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{Z}$ .

Нетривиальные решения (7)-(8) возможны при

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Этим  $\lambda_k$  соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя  $C_2$ . Положим  $C_2 = 1$ .

Разные  $k$ , отличающиеся только знаком, дают собственные функции, отличающиеся лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно рассматривать  $k \in \mathbb{N}$ .

При  $\lambda = \lambda_k$  общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l}$$

$a_k, b_k - \text{const.}$

Таким образом, функции

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют (1) и граничным условиям (2)  $\forall a_k, b_k$ .

(1) линейно и однородно, поэтому конечная сумма таких решений также будет решением. Аналогично для ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (10)$$

если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $t$ . Т.к. каждое слагаемое в (10) удовлетворяет граничным условиям (2), то (2) будет удовлетворять и сумма ряда  $u(x, t)$ . Остается определить  $a_k, b_k$  так, чтобы удовлетворить условиям (3).

Продифференцируем (10) по  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (11)$$

Полагая в (10) и (11)  $t = 0$ , в силу (3), получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \\ F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) представляют разложение  $f(x), F(x)$  в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, l)$ . Коэффициенты разложений (12) выписываются по известным формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \\ b_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) даётся рядом (10), где  $a_k, b_k$  определяются формулами (13).



### 3.1 Теорема

Если  $f(x)$  на отрезке  $[0, l]$  дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0, \quad (14)$$

а  $F(x)$  непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(l) = 0, \quad (15)$$

то функция  $u(x, t)$ , определяемая рядом (10), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет (1)-(3). При этом возможно почленное дифференцирование (10) по  $x$  и  $t$  два раза, а полученные ряды будут абсолютно и равномерно сходящимися при  $0 \leq x \leq l$  и  $\forall t$ .

#### Доказательство

Интегрируя по частям (13) и принимая во внимание (14)-(15), получим

$$\begin{aligned} a_k &= - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{b_k^{(3)}}{k^3} \\ b_k &= - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{a_k^{(2)}}{k^3} \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} b_k^{(3)} &= \frac{2}{l} \int_0^l f'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \\ a_k^{(2)} &= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{F''(x)}{a} \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{aligned} \quad (17)$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(2)}|}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k^{(3)}|}{k} \quad (18)$$

сходятся. Подставив (16) в (10), получим

$$u(x, t) = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left( b_k^{(3)} \cos \frac{k\pi at}{l} + a_k^{(2)} \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (19)$$

Этот ряд мажорируется рядом

$$\left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left( |b_k^{(3)}| + |a_k^{(2)}| \right),$$

который сходится. Следовательно, (10) сходится абсолютно и равномерно. Из (18), (10) можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $t$ .

□.

Если  $f(x)$  и  $F(x)$  не удовлетворяют условиям теоремы, то может не существовать дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (1)-(3). Однако, если  $f(x)$  - непрерывно дифференцируемая функция, для которой  $f(0) = f(l) = 0$ , а  $F(x)$  - непрерывная функция, для которой  $F(0) = F(l) = 0$ , то (10) равномерно сходится при  $0 \leq x \leq l$  и любом  $t$  и определяет непрерывную  $u(x, t)$ .

Будем называть **обобщённым решением** уравнения (1) при условиях (2)-(3) функцию  $u(x, t)$ , являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности  $u_n(x, t)$  решений уравнения (1), удовлетворяющих (2)-(3), где  $f_n(x)$ ,  $F_n(x)$  - последовательности функций, удовлетворяющих условиям теоремы выше и таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l [f(x) - f_n(x)]^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^l [F(x) - F_n(x)]^2 dx = 0.$$

При этих предположениях на  $f(x)$ ,  $F(x)$ , частные суммы ряда (10) образуют последовательность  $u_n(x, t)$ , удовлетворяющую условиям, следовательно обобщенное решение существует и ряд (10) является таким решением.

Нетрудно показать, что обобщённое решение смешанной задачи (1)-(3) единственно.

Возвратимся к найденному решению (10) задачи (1)-(3).

Введём обозначения

$$a_k = A_k \sin \varphi_k, \quad b_k = A_k \cos \varphi_k$$

и запишем это решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left( \frac{k\pi at}{l} + \varphi_k \right) \quad (20)$$

Каждый член этого ряда представляет собой стоячую волну, при которой точки  $x$  струны совершают гармоническое колебательное движение с амплитудой  $A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ , частотой  $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$  и фазой  $\varphi_k$ .

уфф

Звуки можно классифицировать на музыкальные и немзыкальные - первые называются **нотами**, вторые **шумами**. Музыкальные звуки естественным образом располагаются в определённом порядке соответственно высоте - качеству, которое до известной степени может оценивать каждый. Те ноты, которые ухо не может различать по высоте, далее называются **тонами**.

При колебании струна издаёт звук, высота которого зависит от частоты колебаний; частота основного (самого низкого) тона выражается формулой

$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ . Тона, соответствующие более высоким частотам, чем основная, называются **обертонами**. Обертоны, частоты которых являются кратными основной частоте, называются **гармониками**. Первой гармоникой будем считать основной тон, второй гармоникой - тон с частотой  $\omega_2 = 2\omega_1$  и т.д.

Вроде  $T_0$  - натяжение струны,  $\rho$  - линейная плотность

Решение (20) складывается из отдельных гармоник. Амплитуды их, а потому и влияния их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники и всё их действие сводится к созданию тембра звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих гармоник.

Существует очень мало колебательных систем с гармоническими обертонами, но эти немногие системы являются основными для построения почти всех музыкальных инструментов. Это следует из того, что звук с гармоническими обертонами кажется особенно приятным в музыкальном отношении.

В точках

$$x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}l, l$$

амплитуда колебаний  $k$ -й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках  $\sin \frac{k\pi x}{l} = 0$ . Эти точки называются **узлами**  $k$ -й гармоники. Напротив, в точках

$$x = \frac{l}{2k}, \frac{3l}{2k}, \dots, \frac{(2k-1)l}{2k},$$

называемых пучностями, амплитуда  $k$ -й гармоники достигает наибольшей величины, т.к.  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  там имеет максимальное абсолютное значение.

Если мы прижмём колеблющуюся струну точно в середине, то есть в пучности её основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучность в этой точке, то есть нечетных гармоник. Напротив, на чётные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четыре гармоники. Самой низкой частотой будет  $\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ , и струна будет издавать не своё основной звук, а его октаву, то есть звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.

## 4 Общая схема метода Фурье

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $p(x), p'(x), q(x)$  и  $\rho(x)$  - непрерывные функции при  $0 \leq x \leq l$ , причём  $p(x) > 0, q(x) \geq 0, \rho(x) > 0$ .

Пусть требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{aligned}\alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ \gamma u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta - const, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ , и начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (0 \leq x \leq l)\tag{3}$$

Будем сначала искать нетривиальные решения (1) в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)T(t),\tag{4}$$

удовлетворяющего только граничным условиям (2).

Подставляя (4) в (1), получим

$$T(t) \frac{d}{dx} [p(x)X'(x)] - q(x)X(x)T(t) = \rho(x)X(x)T''(t)$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx} [p(x)X'(x)] - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}\tag{5}$$

Левая часть (5) зависит только от  $x$ , правая - только от  $t$ , значит (5) =  $-\lambda = const$ . Тогда из (5) получим два дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0,\tag{6}$$

$$\frac{d}{dx} [p(x)X'(x)] + [\lambda \rho(x) - q(x)] X(x) = 0\tag{7}$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (1) вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо, чтобы  $X(x)$  удовлетворяла граничным условиям

$$\begin{aligned}\alpha X(0) + \beta X'(0) &= 0, \\ \gamma X(l) + \delta X'(l) &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче **Штурма-Лиувилля** о собственных числах: найти такие значения  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8).

Эта задача не при всяком  $\lambda$  имеет отличные от нулевого решения. Те значения  $\lambda$ , при которых задача (7)-(8) имеет нетривиальные решения, называются **собственными числами**, а сами эти решения - **собственными функциями**, соответствующими этому с.ч.  $\lambda$ . (собственные функции собственных чисел = с.ф. с.ч.) В силу однородности (7)-(8), собственные

функции определяются с точностью до постоянного множителя. Выберем его так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x) X^2(x) dx = 1 \quad (9)$$

Собственные функции, удовлетворяющие (9), будем называть **нормированными**.

Установим некоторые общие свойства с.ф. с.ч. задачи Штурма-Лиувилля:

1. Всякому с.ч. соответствует только одна линейно независимая с.ф.

Действительно, предположим, что при некотором  $\lambda$  существуют два линейно независимых решения (7), удовлетворяющих (8). Тогда оказалось бы, что и общее решение уравнения (7) удовлетворяет (8). Но этого быть не может, так как всегда можно найти решение уравнения (7) при таких начальных данных  $X(0), X'(0)$ , например,  $X(0) = \alpha, X'(0) = \beta$ , которые не удовлетворяют первому из граничных условий (8).

2. Собственные функции, соответствующие различным с.ч., ортогональны с весом  $\rho(x)$ , то есть

$$\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0 \quad (10)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - два различных с.ч., а  $X_1(x), X_2(x)$  - соответствующие им с.ф., так что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [p(x) X_1'(x)] + [\lambda_1 \rho(x) - q(x)] X_1(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx} [p(x) X_2'(x)] + [\lambda_2 \rho(x) - q(x)] X_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Умножим первое равенство на  $X_2(x)$ , второе - на  $X_1(x)$  и вычтем одно из другого почленно, получаем равенство

$$X_2(x) \frac{d}{dx} [p(x) X_1'(x)] - X_1(x) \frac{d}{dx} [p(x) X_2'(x)] + (\lambda_1 - \lambda_2) \rho(x) X_1(x) X_2(x) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \rho(x) X_1(x) X_2(x) + \frac{d}{dx} \{p(x) [X_2(x) X_1'(x) - X_1(x) X_2'(x)]\} = 0$$

Интегрируя это равенство по  $x$  от 0 до  $l$ , получим

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^l \rho(x) X_2(x) X_1(x) dx = p(x) [X_2(x) X_1'(x) - X_1(x) X_2'(x)]_{x=0}^{x=l}$$

Приняв во внимание граничные условия (8), легко убеждаемся, что

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0,$$

откуда в силу  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,

$$\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0,$$

□.

3. Все собственные числа вещественны.

В самом деле, допустим, что существует с.ч.  $\lambda \in \mathbb{C}$ , которому соответствует с.ф.  $X(x)$ . Тогда  $\bar{\lambda}$  также будет с.ч., а  $\bar{X}(x)$  - с.ф., так как коэффициенты в (7) и (8) вещественны. Из условий ортогональности

$$\int_0^l \rho(x) X(x) \bar{X}(x) dx = \int_0^l \rho(x) |X(x)|^2 dx = 0,$$

следует, что  $X(x) \equiv 0$ , т.е.  $\lambda$  не является собственным.

4. Существует бесконечное множество вещественных с.ч.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

Прежде чем перейти к обоснованию этого утверждения, укажем ещё одно важное свойство с.ч.. Пусть  $\lambda_k$  - с.ч., а  $X_k(x)$  - с.ф., образующие ортогональную нормированную систему. Имеем

$$\frac{d}{dx} [p(x) X_k'(x)] - q(x) X_k(x) = -\lambda_k \rho(x) X_k(x)$$

Умножая обе части на  $X_k(x)$ , интегрируя и принимая во внимание (9), получаем

$$\lambda_k = - \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} [p(x) X_k'(x)] - q(x) X_k(x) \right\} X_k(x) dx,$$

откуда, интегрируя первое слагаемое по частям, придем к формуле:

$$\lambda_k = \int_0^l [p(x) X_k'^2 + q(x) X_k^2(x)] dx - [p(x) X_k(x) X_k'(x)]_{x=0}^{x=l} \quad (11)$$

Допустим, что  $p(x) > 0, q(x) \geq 0, \rho(x) > 0$  и, кроме того,

$$[p(x)X_k(x)X'_k(x)]_{x=0}^{x=l} \leq 0 \quad (11a)$$

Тогда из (9) следует, что все с.ч. задачи (7)-(8) неотрицательны.

Условие (11a) выполняется при наиболее часто встречающихся в приложениях граничных условиях:

$$X(0) = 0, X(l) = 0, \quad (8a)$$

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, X'(l) + h_2 X(l) = 0, \quad h_1 \geq 0, h_2 \geq 0 \quad (8b)$$

В заключение отметим, что с.ф.  $X_k(x)$  граничной задачи (7)-(8a) или (7)-(8b) (если  $h_1 = h_2 = 0$ , то  $q(x) \geq q_0 > 0$ ) образуют полную систему.

#### 4.1 Определение 1

Система функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  называется **полной**, если не существует отличной от тождественно равной нулю, суммируемой с квадратом функции, ортогональной ко всем функциям системы. Обратимся теперь к (6). Его общее решение при  $\lambda = \lambda_k$ , которое обозначим  $T_k(t)$ , имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t,$$

где  $A_k, B_k$  - произвольные постоянные.

Каждая функция

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \left( A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) X_k(x)$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2).

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) X_k(x) \quad (12)$$

Если этот ряд сходится равномерно вместе с рядами, получаемыми из него двукратным почленным дифференцированием, то сумма его, очевидно, будет решением (1), удовлетворяющим граничным условиям (2). Для выполнения начальных условий (3) необходимо, чтобы

$$u|_{t=0} = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x) \quad (14)$$

Таким образом, мы пришли к задаче о разложении произвольной функции в ряд по с.ф.  $X_k(x)$  граничной задачи (7)-(8).

Предполагая, что (13) и (14) сходятся равномерно, можно определить  $A_k, B_k$ , умножить обе части равенств (13)-(14) на  $\rho(x)X_k(x)$  и проинтегрировать по  $x$  от 0 до  $l$ . Тогда, принимая во внимание (9)-(10), получим

$$A_k = \int_0^l \rho(x) f(x) X_k(x) dx, \quad B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \rho(x) F(x) X_k(x) dx$$

Подставив эти значения  $A_k, B_k$  в (12), получим решение смешанной задачи (1)-(3), если ряд (12) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$ , равномерно сходятся.

#### Замечание

Метод Фурье применим и в случае многих пространственных переменных для гиперболических уравнений специального вида, а также для уравнений эллиптического и параболического типов.

Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами  $p, q$ , закреплённой по контуру.

Как известно, эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=p} = 0 \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x, y) \quad (17)$$

Будем искать частные решения (15) в виде

$$u(x, y, t) = T(t)v(x, y), \quad (18)$$

удовлетворяющие граничным условиям (16).

Подставив (18) в (15), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v}$$



Очевидно, что это равенство может иметь место, только когда обе его части равны одной и той же постоянной величине. Обозначим эту постоянную через  $-k^2$ , и, принимая во внимание (16), найдём, что

$$T''(t) + (ak)^2 T(t) = 0 \quad (19)$$

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = 0 \quad (20)$$

$$v|_{x=0} = 0, v|_{x=p} = 0 \quad (21)$$

$$v|_{y=0} = 0, v|_{y=q} = 0$$

Граничную задачу (20)-(21) будем решать методом Фурье, полагая

$$v(x, y) = X(x)Y(y) \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20), получим

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)}$$

откуда получаем два уравнения:

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, Y''(y) + k_2^2 Y(y) = 0 \quad (23)$$

где

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad (24)$$

Общие решения (23), как известно, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x \\ Y(y) &= C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y \end{aligned} \quad (25)$$

Из граничных условия (21) получим

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, X(p) = 0 \\ Y(0) &= 0, Y(q) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

откуда ясно, что  $C_1 = C_3 = 0$ , и если мы положим  $C_2 = C_4 = 1$ , то окажется:

$$X(x) = \sin k_1 x, Y(y) = \sin k_2 y \quad (27)$$

причём должно быть

$$\sin k_1 p = 0, \sin k_2 q = 0 \quad (28)$$

Из уравнения (28) вытекает, что  $k_2$  и  $k_1$  имеют бесконечное множество значений:

$$k_{1m} = \frac{m\pi}{p}, k_{2n} = \frac{n\pi}{q} (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

Тогда из равенства (24) получим соответствующие значения  $k^2$ :

$$k_{mn}^2 = k_{1m}^2 + k_{2n}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} \right) \quad (29)$$

Таким образом, с.ч. (29) соответствуют с.ф.

$$v_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (30)$$

граничной задачи (20)-(21).

Обращаясь теперь к (19), видим, что для каждого с.ч.  $k^2 = k_{mn}^2$  его общее решение имеет вид

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t \quad (31)$$

Таким образом, в силу (18), (30) и (31), частные решения уравнения (15), удовлетворяющие граничным условиям (16), имеют вид:

$$u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (32)$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (17), составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (33)$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по  $x, y$  и  $t$ , то сумма его, очевидно, будет удовлетворять (15) и (16). Для выполнения начальных условий (17) необходимо, чтобы

$$u|_{t=0} = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ak_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (35)$$

Предполагая, что ряды (34), (35) сходятся равномерно, мы можем определить  $A_{mn}, B_{mn}$ , умножив обе части (34) и (35) на

$$\sin \frac{m_1\pi x}{p} \sin \frac{n_1\pi y}{q}$$

и проинтегрировав по  $x$  от 0 до  $p$  и по  $y$  от 0 до  $q$ . Тогда, приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_0^p \int_0^q \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m_1\pi x}{p} \sin \frac{n_1\pi y}{q} dx dy = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m_1 \text{ или } n \neq n_1 \\ \frac{pq}{4}, & \text{если } m = m_1 \text{ и } n = n_1 \end{cases} \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy, \\ B_{mn} &= \frac{4}{apqk_{mn}} \int_0^p \int_0^q F(x, y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} dx dy \end{aligned} \quad (36)$$

Решение (33) можно записать также в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \sin (ak_{mn}t + \varphi_{mn}) \quad (37)$$

где

$$M_{mn} = \sqrt{A_{mn}^2 + B_{mn}^2}, \quad \varphi_{mn} = \arctg \frac{A_{mn}}{B_{mn}}$$

## 5 Сопряжённое уравнение

Рассмотрим задачу: дано линейное дифференциальное выражение

$$L[y] = a_n(x)y + a_{n-1}(x)y' + a_{n-2}(x)y'' + \dots + a_1(x)y^{(n-1)} + a_0(x)y^{(n)}, \quad (1)$$

найти такую функцию  $z(x)$ , чтобы при умножении на неё (1) оно становилось точной производной по  $x$  при любой  $n$  раз дифференцируемой функцией  $y$ . Эта функция  $z(x)$  называется **множителем дифференциального выражения**  $L[y]$ . При этом мы будем предполагать, что функции  $a_k(x)$ ,  $k = 0, n$ , непрерывные в рассматриваемом интервале и имеющие непрерывные производные всех порядков, которые войдут в наши формулы. Умножаем (1) на искомую функцию  $z(x)$  и вычисляем

$$\int z(x)L[y]dx$$

так, что каждый член интегрируем по частям, понижая порядок производной от  $y$  до тех пор, пока под интегралом не останется множитель  $y$ . Таким

образом, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\int a_n(x) y z dx &= \int a_n(x) y z dx, \\
\int a_{n-1}(x) y' z dx &= a_{n-1}(x) z y - \int y (a_{n-1}(x) z)' dx \\
\int a_{n-2}(x) y'' z dx &= a_{n-2}(x) z y' - \int (a_{n-2}(x) z)' y' dx \\
&= a_{n-2}(x) z y' - (a_{n-2}(x) z)' y + \int y (a_{n-2}(x) z)'' dx \\
&\dots \\
\int a_1(x) y^{(n-1)} z dx &= a_1(x) z y^{(n-2)} - (a_1(x) z)' y^{(n-3)} + (a_1(x) z)'' y^{(n-4)} + \dots \\
&\dots + (-1)^{n-2} (a_1(x) z)^{(n-2)} y + (-1)^{n-1} \int y (a_1(x) z)^{(n-1)} dx \\
\int a_0(x) y^{(n)} z dx &= a_0(x) z y^{(n-1)} - (a_0(x) z)' y^{(n-2)} + (a_0(x) z)'' y^{(n-3)} - \dots \\
&\dots + (-1)^{(n-1)} (a_0(x) z)^{(n-1)} y + (-1)^n \int y (a_0(x) z)^{(n)} dx
\end{aligned}$$

Собирая отдельно члены, не содержащие интегралов, и под общим знаком интеграла члены, содержащие квадратуру, получаем:

$$\begin{aligned}
\int z L[y] dx &= a_{n-1}(x) z y - (a_{n-2} z)' y + \dots + (-1)^{n-1} (a_0(x) z)^{(n-1)} y + \\
&+ a_{n-2}(x) z y' - (a_{n-3}(x) z)' y' + \dots + (-1)^{(n-2)} (a_0(x) z)^{(n-2)} y' + \dots \\
&\dots \\
&+ a_1(x) z y^{(n-2)} - (a_0(x) z)' y^{(n-2)} + a_0(x) z y^{(n-1)} + \\
&+ \int y \left[ a_n(x) z - (a_{n-1}(x) z)' + (a_{n-2}(x) z)'' - \dots + (-1)^n (a_0(x) z)^{(n)} \right] dx
\end{aligned}$$

или, перенося интеграл в левую часть и вводя новые обозначения,

$$\int (z L[y] - y M[z]) dx = \Psi[y, z] \quad (2)$$

Дифференциальное выражение

$$M[z] = a_n(x) z - (a_{n-1}(x) z)' + \dots + (-1)^{n-1} (a_1(x) z)^{(n-1)} + (-1)^n (a_0(x) z)^{(n)} \quad (3)$$

называется **сопряжённым** с  $L[y]$  дифференциальным выражением (или оператором), а  $\Psi[y, z]$  есть билинейная форма относительно  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$

с одной стороны и  $z, z', \dots, z^{(n-1)}$  с другой стороны, а именно:

$$\begin{aligned} \Psi[y, z] = & y \left( a_{n-1}(x)z - (a_{n-2}(x)z)' + \dots + (-1)^{n-1}(a_0(x)z)^{(n-1)} \right) + \\ & + y' \left( a_{n-2}(x)z - (a_{n-3}(x)z)' + \dots + (-1)^{(n-2)}(a_0(x)z)^{(n-2)} \right) \quad (3') \\ & \dots \\ & + y^{(n-2)} (a_1(x)z - (a_0(x)z)') + y^{(n-1)} a_0(x)z \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$M[z] = 0 \quad (4')$$

называется уравнением, сопряжённым с уравнением

$$L[y] = 0 \quad (4)$$

Соотношение (2) есть тождество не только по  $x_1$  - оно справедливо при любых функциях  $y, z$ . Если мы теперь возьмём в качестве  $z$  решение уравнения (4'),  $z = \bar{z}$ , то (2) примет вид:

$$\int \bar{z} L[y] dx = \Psi[y, \bar{z}].$$

или, дифференцируя,

$$\bar{z} L[y] = \frac{d}{dx} \Psi[y, \bar{z}]$$

Таким образом, поставленная в начале задача решена: если умножить данное дифференциальное выражение (1) на любое решение  $\bar{z}$  сопряжённого уравнения (3'), то оно становится полной производной от дифференциального выражения  $(n-1)$ -го порядка  $\Psi[y, \bar{z}]$ . Обратно, для того, чтобы функция  $\bar{z}$  при умножении на  $L[y]$  делала его такой производной при любой функции  $y$ , необходимо, чтобы  $M[\bar{z}] = 0$ .

В самом деле, если  $\bar{z}$  есть какой-нибудь множитель выражения (1), то имеет место равенство:

$$\bar{z} L[y] = \frac{d}{dx} \Psi_1[y] \quad (2')$$

где, как легко видеть,  $\Psi_1$  есть линейное выражение относительно  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ :

$$\Psi_1[y] = b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y.$$

С другой стороны, подставляя  $\bar{z}$  вместо  $z$  в (2) и дифференцируя по  $x$ , находим:

$$\bar{z} L[y] = \frac{d}{dx} \Psi[y, \bar{z}] + y M[\bar{z}] \quad (2'')$$

Из (2'), (2'') получаем:

$$\frac{d}{dx} (\Psi_1[y] - \Psi[y, \bar{z}]) - y M[\bar{z}] = 0 \quad (2''')$$

В левой части (2''') стоит линейное выражение  $n$ -го порядка относительно  $y$ ; так как равенство нулю выполняется тождественно для любой функции  $y$ , то коэффициенты при  $y$  и всех пго производных тождественно равны нулю, иначе (2'') было бы дифференциальным уравнением для  $y$ . Из вида (2') билинейного выражения для  $\Psi$  следует:

$$b_{n-1} = a_0(x)\bar{z}, b_{n-2} = a_1(x)\bar{z} - (a_0(x)\bar{z})', \dots, \\ b_0 = a_{n-1}(x)\bar{z} - (a_{n-2}(x)\bar{z})' + \dots + (-1)^{n-1} (a_0(x)\bar{z})^{(n-1)},$$

т.е.  $\Psi_1[y] = \Psi[y, \bar{z}]$ , и равенство (2''') даёт:  $M[\bar{z}] = 0$ .

Следовательно, мы можем сделать вывод:

Для того, чтобы функция  $z(x)$  при всякой функции  $y(x)$  обращала произведение  $\bar{z}L[y]$  в точную производную, необходимо и достаточно, чтобы  $\bar{z}$  являлось решением сопряжённого уравнения (4').

Каждое решение сопряжённого уравнения (4') является множителем уравнения (4'), при умножении на который левая часть (4) становится точной производной. Таким образом, (4) допускает первый интеграл:

$$\Psi[y, \bar{z}] = C \quad (5)$$

который сам является (неоднородным) уравнением порядка  $n-1$ . Очевидно, если нам дано уравнение  $L[y] = f(x)$ , то та же функция  $\bar{z}$  является его множителем, и мы получим первый интеграл:

$$\Psi[y, \bar{z}] = \int f(x)\bar{z}dx + C$$

Если имеем линейное уравнение первого порядка

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

то уравнение, сопряжённое соответствующему однородному, будет

$$P(x)z - z' = 0;$$

его решение

$$\bar{z} = e^{\int P(x)dx}$$

будет множителем данного уравнения.

### Замечание 1

Чтобы левая часть данного уравнения сама была точной производной, необходимо и достаточно, чтобы сопряжённое уравнение допускало решение  $\bar{z} = 1$ , то есть чтобы коэффициент при  $z$  в уравнении (4') был равен нулю. Раскрывая выражение (3) и подсчитывая в нём коэффициенты при  $z'$ , находим условие того, чтобы левая часть уравнения (4) была точной производной, в виде:

$$a_n(x) - \frac{d}{dx}a_{n-1}(x) + \frac{d^2}{dx^2}a_{n-2}(x) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}a_0(x) = 0$$

### Замечание 2

Оператор  $L[y]$  четного порядка  $n = 2m$  называется **самосопряжённым**:  $L[y] \equiv M[y]$ . Уравнение  $L[y] = 0$  называется в таком случае **самосопряжённым уравнением**. Для оператора второго порядка

$$L[y] = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

сопряжённый оператор есть

$$\begin{aligned} M[z] &= a_2(x)z - (a_1(x)z)' + (a_0(x)z)'' = \\ &= (a_2(x) - a_1'(x) + a_0''(x))z + (-a_1(x) + 2a_0'(x))z' + a_0(x)z''; \end{aligned}$$

условия самосопряжённости

$$-a_1(x) + 2a_0'(x) = a_1(x), a_2(x) - a_1'(x) + a_0''(x) = a_2(x)$$

сводятся к одному первому:  $a_1(x) = a_0'(x)$ . Итак, самосопряжённый оператор второго порядка имеет вид:

$$(a_0(x)y')' + a_2(x)y.$$

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$Mu = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu, \quad (6)$$

где  $a_{\alpha\beta}, b_\alpha, c$  - некоторые функции  $x_1, x_2, x_3$ . Если функции  $a_{\alpha\beta}$ , а также функции

$$e_\alpha = b_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (7)$$

имеют непрерывные первые производные, то дифференциальному выражению  $Mu$  можно придать вид

$$Mu = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^3 e_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + Cu \quad (8)$$

Найдём функцию  $v(x_1, x_2, x_3)$ , при умножении на которую выражение  $Mu$  выражение  $vMu$  может быть представлено в виде суммы частных производных первого порядка по  $x_1, x_2, x_3$ .

*остаток конспекта потерян в вечности...*

## 6 Примеры из физики

Обозначения:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}, \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

1. Волновые уравнения.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

- уравнение малых колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$$

- уравнение малых колебаний струны с учетом силы тяжести, где  $g$  - потенциал массовой силы.

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + g$$

- уравнение мембраны

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + g$$

- уравнение акустики

2.

$$u_t = a^2 u_{xx} + g$$

- уравнение теплопроводности для стержня.

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + g$$

- уравнение теплопроводности для пластины.

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + g$$

- уравнение теплопроводности для тела.

3. Уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta u = -g$$

4. Уравнение вибраций для стержня:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = g$$

Для пластины:

$$u_{tt} + a^2 (u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) = g$$

5. Уравнение Шрёдингера (квантовая механика):

$$i\hbar u_t = Hu$$

где  $i$  - мнимая единица,  $\hbar$  - постоянная Планка,  $H$  - оператор Гамильтона. Для одномерной частицы получится:

$$H = E_K + E_\Pi$$



В классической механике это будет:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \|\bar{v}\|^2}{2} = \frac{\|\bar{P}\|^2}{2m}$$

В квантовой механике:

$$\bar{P} = -i\hbar\nabla$$

$$E_K = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

То есть  $E_K$  - это оператор.  $E_\Pi$  - потенциал внешнего поля,  $E_\Pi u = U(x) \cdot u$ . Получили уравнение:

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx} + U(x) \cdot u$$

- нерелятивистская одномерная частица.

6. Уравнение Навье–Стокса. Уравнение для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\bar{w}_t = \underbrace{-(\bar{w}, \nabla) \bar{w}}_{\text{перенос жидкости}} + \underbrace{a^2 \Delta \bar{w}}_{\text{вязкость}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\text{плотность}} \nabla \underbrace{P}_{\text{давление}} + \underbrace{g}_{\text{потенциальная массовая сила}}$$

$$\operatorname{div} \bar{w} = 0$$

при этом

$$P = P(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^1$$

$$\bar{w} = \bar{w}(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

## 7 Одномерная частица в потенциальной яме

Рассмотрим уравнение квантовой механики:

$$i\hbar u_t = H u$$

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx} + U(x) \cdot u$$

где  $U$  - потенциал:



Дополнительные условия:  
 $u$  - гладкая функция,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|u(x, t)|^2}_{\substack{\text{амплитуда вероятности} \\ \text{плотность распределения обнаружения частицы в } x}} dx = 1$$

Ищем решения диффура в виде:

$$u(x, t) = e^{i(\omega t + \varphi)} F(x)$$

$$\omega = -\frac{E}{\hbar}$$

$$E := -\omega \hbar$$

$$u(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t + i\varphi} F(x)$$

$$EF(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} F''(x) + U(x)F(x)$$

где  $F(x)$  - вещественная. (потому что как в ряде Фурье, из комбинаций вещественных функций можно собрать любую комплексную, но это не строгие суждения - строгие бы заняли не одну лекцию...)

Пусть  $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$  для простоты (мы всегда можем сделать такую систему

координат, в которой это правда). Тогда:

$$F''(x) = \begin{cases} \overbrace{(U_0 - E)}^{>0} F(x), & x < 0 \\ \overbrace{-E}^{<0} F(x), & x \in (0, l) \\ \underbrace{(U_0 - E)}_{>0} F(x), & x > l \end{cases}$$

Решаем обыкновенный диффур. Пусть  $E \in (0, U_0)$ .

$$F(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{U_0 - E}x} + c_2 e^{-\sqrt{U_0 - E}x}, & x < 0 \\ c_3 \cos(\sqrt{E}x) + c_4 \sin(\sqrt{E}x), & x \in (0, l) \\ c_5 e^{\sqrt{U_0 - E}x} + c_6 e^{-\sqrt{U_0 - E}x}, & x > l \end{cases}$$

Из «дополнительных условий»:

$$\begin{aligned} & F - \text{гладкая} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Самый последний интеграл сходится, поэтому можно сказать, что на бесконечности  $F(x)$  должна быть нулевой  $\implies c_2 = c_5 = 0$ .

Ещё должно быть 4 условия непрерывности:

$$\begin{aligned} F(+0) &= F(-0) \\ F'(+0) &= F'(-0) \\ F(l+0) &= F(l-0) \\ F'(l+0) &= F'(l-0) \end{aligned}$$

Подставим в уравнения:

$$\begin{cases} c_1 = c_3 \\ c_1 \sqrt{U_0 - E} = c_4 \sqrt{E} \\ c_3 \cos(\sqrt{E}l) + c_4 \sin(\sqrt{E}l) = c_6 e^{-\sqrt{U_0 - E}l} \\ -c_3 \sqrt{E} \sin(\sqrt{E}l) + c_4 \sqrt{E} \cos(\sqrt{E}l) = -c_6 \sqrt{U_0 - E} e^{-\sqrt{U_0 - E}l} \end{cases}$$

Пусть

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}$$

Тогда

$$\begin{cases} c_1 = c_3 \\ c_1 \varepsilon = c_4 \\ c_1 \cos(\sqrt{E}l) + c_1 \varepsilon \sin(\sqrt{E}l) = c_6 e^{-\sqrt{U_0-E}l} \\ -c_1 \sin(\sqrt{E}l) + c_1 \varepsilon \cos(\sqrt{E}l) = -c_6 \varepsilon e^{-\sqrt{U_0-E}l} \end{cases}$$

Рассмотрим последние два уравнения:

$$\begin{cases} c_1 \cos(\sqrt{E}l) + c_1 \varepsilon \sin(\sqrt{E}l) = c_6 e^{-\sqrt{U_0-E}l} \\ -c_1 \sin(\sqrt{E}l) + c_1 \varepsilon \cos(\sqrt{E}l) = -c_6 \varepsilon e^{-\sqrt{U_0-E}l} \end{cases}$$

В них неизвестные  $c_1, c_6, E$ .  $c_1^2 + c_6^2 \neq 0$ , т.к. иначе получим нулевое решение. В матричном виде будет:

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{E}l) + \varepsilon \sin(\sqrt{E}l) & -e^{-\sqrt{U_0-E}l} \\ \varepsilon \cos(\sqrt{E}l) - \sin(\sqrt{E}l) & \varepsilon e^{-\sqrt{U_0-E}l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для существования решения необходимо, чтобы определитель матрицы слева был нулевой.

Ещё одна константа получится из условия на  $\int = 1$ .

Получится небольшое число корней - уровни энергии для частицы. И частица может быть только на конкретном числе различных уровней. Вероятность частицы выпрыгнуть из потенциальной ямы тем больше, чем выше её уровень энергии. Но  $\forall E > U_0$  квантование прекращается, и любые уровни энергии достижимы.