Содержание

1 Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны

Рассмотрим решение задачи о колебании однородной струны, закреплённой на концах. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x),\, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x)\ (0 \le x \le l) \tag{3}$$

Будем искать частные решения (1), не равные тождественно нулю, (т.е. **нетривиальные**) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

удовлетворяющим (2).

Подставив (4) в (1), получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{5}$$

Т.к. левая часть (5) зависит только от t, а правая - только от x, то равенство возможно только когда $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, $\lambda - const$.

Из (5) получим тогда:

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{7}$$

Чтобы найти нетривиальные решения вида (4), удовлетворяющие (2), необходимо найти решения уравнения (7), удовлетворяющие

$$X(0) = 0, X(l) = 0 \tag{8}$$

Те λ, при которых (7)-(8) имеет нетривиальные решения, называются **собственными числами (значениями)**, а сами эти решения - **собственными функциями**

Найдем собственные функции и значения (7)-(8). Рассмотрим три случая $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$.

1. $\lambda < 0$. Общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

$$C_1 + C_2 = 0, C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \tag{9}$$

Так как определитель системы (9) отличен от нуля, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0 \implies X(x) \equiv 0$.

2. При $\lambda = 0$ общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Граничные условия (8) дают

$$C_1 = 0, C_1 + C_2 l = 0,$$

поэтому $C_1 = C_2 = 0 \implies X(x) \equiv 0$.

3. При $\lambda > 0$ общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя (8), получим

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Из первого уравнения $C_1 = 0$, из второго $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Мы должны считать $C_2 \neq 0$, ибо в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, то есть $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{Z}$.

Нетривиальные решения (7)-(8) возможны при

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \ (k \in \mathbb{N})$$

Этим λ_k соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя C. Положим $C = 1$.

Разные k, отличающиеся только знаком, дают собственные функции, отличающиеся лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно рассматривать $k \in \mathbb{N}$.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi a t}{l}$$

a_k, b_k – const.

Таким образом, функции

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi a t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют (1) и граничным условиям (2) $\forall a_k, b_k$.

(1) линейно и однородно, поэтому конечная сумма таких решений также будет решением. Аналогично для ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi a t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{10}$$

если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Т.к. каждое слагаемое в (10) удовлетворяет граничным условиям (2), то (2) будет удовлетворять и сумма ряда $u(x,t)$. Остается определить a_k, b_k так, чтобы удовлетворить условиям (3).

Продифференцируем (10) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi a t}{l} + b_k \cos\frac{k\pi a t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{11}$$

Полагая в (10) и (11) $t = 0$, в силу (3), получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} \\ F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \end{aligned} \tag{12}$$

Формулы (12) представляют разложение $f(x), F(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты разложений (12) выписываются по известным формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \\ b_k &= \frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) даётся рядом (10), где a_k, b_k определяются формулами (13).

1.1 Теорема

Если $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям

$$f(0) = f(l) = 0,\ f''(0) = f''(l) = 0, \tag{14}$$

а $F(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(l) = 0, \tag{15}$$

то функция $u(x,t)$, определяемая рядом (10), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет (1)-(3). При этом возможно почленное дифференцирование (10) по x и t два раза, а полученные ряды будут абсолютно и равномерно сходящимися при $0 \leq x \leq l$ и $\forall t$.

Доказательство

Интегрируя по частям (13) и принимая во внимание (14)-(15), получим

$$\begin{aligned} a_k &= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{b_k^{(3)}}{k^3} \\ b_k &= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{a_k^{(2)}}{k^3} \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} b_k^{(3)} &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f'''(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \\ a_k^{(2)} &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{F''(x)}{a}\sin\frac{k\pi x}{l}dx \end{aligned} \tag{17}$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|a_k^{(2)}\right|}{k}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|b_k^{(3)}\right|}{k} \tag{18}$$

сходятся. Подставив (16) в (10), получим

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(b_k^{(3)} \cos\frac{k\pi a t}{l} + a_k^{(2)} \sin\frac{k\pi a t}{l}\right) \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{19}$$

Этот ряд мажорируется рядом

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\left|b_k^{(3)}\right| + \left|a_k^{(2)}\right|\right),$$

который сходится. Следовательно, (10) сходится абсолютно и равномерно. Из (18), (10) можно дважды почленно дифференцировать по x и t.

$\square$.

Если $f(x)$ и $F(x)$ не удовлетворяют условиям теоремы, то может не существовать дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (1)-(3). Однако, если $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, для которой $f(0) = f(l) = 0$, а $F(x)$ - непрерывная функция, для которой $F(0) = F(l) = 0$, то (10) равномерно сходится при $0 \leq x \leq l$ и любом t и определяет непрерывную $u(x,t)$.

Будем называть **обобщённым решением** уравнения (1) при условиях (2)-(3) функцию $u(x,t)$, являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности $u_n(x,t)$ решений уравнения (1), удовлетворяющих (2)-(3), где $f_n(x), F_n(x)$ - последовательности функций, удовлетворяющих условиям теоремы выше и таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l \left[f(x) - f_n(x)\right]^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^l \left[F(x) - F_n(x)\right]^2 dx = 0.$$

При этих предположениях на $f(x), F(x)$, частные суммы ряда (10) образуют последовательность $u_n(x,t)$, удовлетворяющую условиям, следовательно обобщенное решение существует и ряд (10) является таким решением.

Нетрудно показать, что обобщённое решение смешанной задачи (1)-(3) единственно.

Возвратимся к найденному решению (10) задачи (1)-(3).

Ввведём обозначения

$$a_k = A_k \sin\varphi_k, \ b_k = A_k \cos\varphi_k$$

и запишем это решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\left(\frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k\right) \tag{20}$$

Каждый член этого ряда представляет собой стоячую волну, при которой точки x струны совершают гармоническое колебательной движение с амплитудой $A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$, частотой $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ и фазой φ_k.

уфф

Звуки можно классифицировать на музыкальные и немузыкальные - первые называются **нотами**, вторые **шумами**. Музыкальные звуки естественным образом располагаются в определённом порядке соответственно высоте – качеству, которое до известной степени может оценивать каждый. Те ноты, которые ухо не может различать по высоте, далее называются **тонами**.

При колебании струна издаёт звук, высота которого зависит от частоты колебаний; частота основного (самого низкого) тона выражается формулой $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Тона, соответствующие более высоким частотам, чем основная, называются **обертонами**. Обертоны, частоты которых являются кратными основной частоте, называются **гармониками**. Первой гармоникой будем считать основной тон, второй гармоникой - тон с частотой $\omega_2 = 2\omega_1$ и т.д.

Вроде T_0 - натяжение струны, ρ - линейная плотность

Решение (20) складывается из отдельных гармоник. Амплитуды их, а потому и влияния их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники и всё их действие сводится к созданию тембра звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих гармоник.

Существует очень мало колебательных систем с гармоническими обертонами, но эти немногие системы являются основными для построения почти всех музыкальных инструментов. Это следует из того, что звук с гармоническими обертонами кажется особенно приятным в музыкальном отношении.

В точках

$$x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}l, l$$

амплитуда колебаний k-й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках $\sin\frac{k\pi x}{l} = 0$. Эти точки называются **узлами** k-й гармоники. Напротив, в точках

$$x = \frac{l}{2k}, \frac{3l}{2k}, \ldots, \frac{(2k-1)}{2k}l,$$

называемых пучностями, амплитуда k-й гармоники достигает наибольшей величины, т.к. $\sin\frac{k\pi x}{l}$ там имет максимальное абсолютное значение.

Если мы прижмём колеблющуюся струну точно в середине, то есть в пучности её основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучность в этой точке, то есть нечетнх гармоник. Напротив, на чётные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четыре гармоники. Самой низкой частотой будет $\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, и струна будет издавать не своё основной звук, а его октаву, то есть звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.