

## Содержание

1	Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны	1
1.1	Теорема . . . . .	4

## 1 Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны

Рассмотрим решение задачи о колебании однородной струны, закреплённой на концах. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} = F(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (3)$$

Будем искать частные решения (1), не равные тождественно нулю, (т.е. **нетривиальные**) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

удовлетворяющим (2).

Подставив (4) в (1), получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (5)$$

Т.к. левая часть (5) зависит только от  $t$ , а правая - только от  $x$ , то равенство возможно только когда  $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \lambda - const.$

Из (5) получим тогда:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (7)$$

Чтобы найти нетривиальные решения вида (4), удовлетворяющие (2), необходимо найти решения уравнения (7), удовлетворяющие

$$X(0) = 0, X(l) = 0 \quad (8)$$

Те  $\lambda$ , при которых (7)-(8) имеет нетривиальные решения, называются **собственными числами (значениями)**, а сами эти решения - **собственными функциями**

Найдем собственные функции и значения (7)-(8). Рассмотрим три случая  $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$ .

1.  $\lambda > 0$ . Общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

$$C_1 + C_2 = 0, C_1 e^{-\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \quad (9)$$

Так как определитель системы (9) отличен от нуля, то  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0 \implies X(x) = 0$ .

2. При  $\lambda = 0$  общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Граничные условия (8) дают

$$C_1 + C_2 = 0, C_1 + C_2 l = 0,$$

поэтому  $C_1 = C_2 = 0 \implies X(x) = 0$ .

3. При  $\lambda > 0$  общее решение (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя (8), получим

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0.$$

Из первого уравнения  $C_1 = 0$ , из второго  $C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ . Мы должны считать  $C_2 \neq 0$ , ибо в противном случае  $X(x) \equiv 0$ . Поэтому  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , то есть  $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{Z}$ .

Нетривиальные решения (7)-(8) возможны при

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Этим  $\lambda_k$  соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя  $C$ . Положим  $C = 1$ .

Разные  $k$ , отличающиеся только знаком, дают собственные функции, отличающиеся лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно рассматривать  $k \in \mathbb{N}$ .

При  $\lambda = \lambda_k$  общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l}$$

$a_k, b_k - \text{const.}$

Таким образом, функции

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют (1) и граничным условиям (2)  $\forall a_k, b_k$ .

(1) линейно и однородно, поэтому конечная сумма таких решений также будет решением. Аналогично для ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (10)$$

если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $t$ . Т.к. каждое слагаемое в (10) удовлетворяет граничным условиям (2), то (2) будет удовлетворять и сумма ряда  $u(x, t)$ . Остается определить  $a_k, b_k$  так, чтобы удовлетворить условиям (3).

Продифференцируем (10) по  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (11)$$

Полагая в (10) и (11)  $t = 0$ , в силу (3), получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \\ F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) представляют разложение  $f(x), F(x)$  в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, l)$ . Коэффициенты разложений (12) выписываются по известным формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \\ b_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) даётся рядом (10), где  $a_k, b_k$  определяются формулами (13).

### 1.1 Теорема

Если  $f(x)$  на отрезке  $[0, l]$  дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0, \quad (14)$$

а  $F(x)$  непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(l) = 0, \quad (15)$$

то функция  $u(x, t)$ , определяемая рядом (10), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет (1)-(3). При этом возможно почленное дифференцирование (10) по  $x$  и  $t$  два раза, а полученные ряды будут абсолютно и равномерно сходящимися при  $0 \leq x \leq l$  и  $\forall t$ .

#### Доказательство

Интегрируя по частям (13) и принимая во внимание (14)-(15), получим

$$\begin{aligned} a_k &= - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{b_k^{(3)}}{k^3} \\ b_k &= - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{a_k^{(2)}}{k^3} \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} b_k^{(3)} &= \frac{2}{l} \int_0^l f'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \\ a_k^{(2)} &= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{F''(x)}{a} \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{aligned} \quad (17)$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(2)}|}{k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k^{(3)}|}{k} \quad (18)$$

сходятся. Подставив (16) в (10), получим

$$u(x, t) = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left( b_k^{(3)} \cos \frac{k\pi at}{l} + a_k^{(2)} \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (19)$$

Этот ряд мажорируется рядом

$$\left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left( |b_k^{(3)}| + |a_k^{(2)}| \right),$$

который сходится. Следовательно, (10) сходится абсолютно и равномерно. Из (18), (10) можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $t$ .

□.

Если  $f(x)$  и  $F(x)$  не удовлетворяют условиям теоремы, то может не существовать дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (1)-(3). Однако, если  $f(x)$  - непрерывно дифференцируемая функция, для которой  $f(0) = f(l) = 0$ , а  $F(x)$  - непрерывная функция, для которой  $F(0) = F(l) = 0$ , то (10) равномерно сходится при  $0 \leq x \leq l$  и любом  $t$  и определяет непрерывную  $u(x, t)$ .

Будем называть **обобщённым решением** уравнения (1) при условиях (2)-(3) функцию  $u(x, t)$ , являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности  $u_n(x, t)$  решений уравнения (1), удовлетворяющих (2)-(3), где  $f_n(x), F_n(x)$  - последовательности функций, удовлетворяющих условиям теоремы выше и таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l [f(x) - f_n(x)]^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^l [F(x) - F_n(x)]^2 dx = 0.$$

При этих предположениях на  $f(x), F(x)$ , частные суммы ряда (10) образуют последовательность  $u_n(x, t)$ , удовлетворяющую условиям, следовательно обобщенное решение существует и ряд (10) является таким решением.

Нетрудно показать, что обобщённое решение смешанной задачи (1)-(3) единственно.

Возвратимся к найденному решению (10) задачи (1)-(3).

Введём обозначения

$$a_k = A_k \sin \varphi_k, \quad b_k = A_k \cos \varphi_k$$

и запишем это решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left( \frac{k\pi at}{l} + \varphi_k \right) \quad (20)$$

Каждый член этого ряда представляет собой стоячую волну, при которой точки  $x$  струны совершают гармоническое колебательное движение с амплитудой  $A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ , частотой  $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$  и фазой  $\varphi_k$ .

уфф

Звуки можно классифицировать на музыкальные и немзыкальные - первые называются **нотами**, вторые **шумами**. Музыкальные звуки естественным образом располагаются в определённом порядке соответственно высоте – качеству, которое до известной степени может оценивать каждый. Те ноты, которые ухо не может различать по высоте, далее называются **тонами**.

При колебании струна издаёт звук, высота которого зависит от частоты колебаний; частота основного (самого низкого) тона выражается формулой  $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ . Тона, соответствующие более высоким частотам, чем основная, называются **обертонами**. Обертоны, частоты которых являются кратными основной частоте, называются **гармониками**. Первой гармоникой будем считать основной тон, второй гармоникой - тон с частотой  $\omega_2 = 2\omega_1$  и т.д.

(я без понятия, что такое  $\frac{T_0}{\rho}$ . надо будет у Стрекопытова спросить).

Решение (20) складывается из отдельных гармоник. Амплитуды их, а потому и влияния их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники и всё их действие сводится к созданию тембра звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих гармоник.

Существует очень мало колебательных систем с гармоническими обертонами, но эти немногие системы являются основными для построения почти всех музыкальных инструментов. Это следует из того, что звук с гармоническими обертонами кажется особенно приятным в музыкальном отношении.

В точках

$$x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}l, l$$

амплитуда колебаний  $k$ -й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках  $\sin \frac{k\pi x}{l} = 0$ . Эти точки называются **узлами**  $k$ -й гармоники. Напротив, в точках

$$x = \frac{l}{2k}, \frac{3l}{2k}, \dots, \frac{(2k-1)l}{2k},$$

называемых пучностями, амплитуда  $k$ -й гармоники достигает наибольшей величины, т.к.  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  там имеет максимальное абсолютное значение.

Если мы прижмём колеблющуюся струну точно в середине, то есть в пучности её основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучность в этой точке, то есть нечетных

гармоник. Напротив, на чётные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четыре гармоники. Самой низкой частотой будет  $\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ , и струна будет издавать не своё основной звук, а его октаву, то есть звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.