Санкт–Петербургский государственный университет

Задорский Михаил Сергеевич

Сравнительный анализ систем всплесков в задачах обработки изображений

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент Кривошеин А. В.

Заведующий кафедрой:
д.ф.-м.н., профессор Егоров Н. В.

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

1 Введение

С развитием вычислительной техники особую важность приобретает задача цифровой обработки изображений. Задачи такого рода возникают, например, при разработке инструментов цифрового искусства, построении моделей машинного обучения и создании инструментов сжатия изображений. Традиционные подходы к решению таких задач основаны на принципах преобразования Фурье, метода, который с момента его создания стал де-факто стандартом для первичной обработки любых непрерывных сигналов, в том числе изображений. Принцип преобразования Фурье заключается в приведении получаемого сигнала из временной области в частотную путем разложения по ортогональной системе синусов. Физический смысл такого преобразования интуитивно понятен и заключается в разбиении сигнала на частотные составляющие, что напрямую соответствует некоторым биологическим процессам, а также сопровождается широкой теоретической основой для работы с таким видом функций.

Системы всплесков, или вейвлетов, расширяют метод преобразования Фурье путем введения возможности разложения не только по системе синусов, а по намного более широкому множеству ортогональных базисов. Это позволяет добиться для всплеск-преобразований намного большей гибкости, а также потенциально более сложной внутренней структуры. Поэтому вопрос изучения свойств всплеск-систем при рассмотрении различных базисов стал сегодня важным направлением передовых исследований.

В данной работе проводится сравнительный анализ таких систем всплесков, а также рассматривается вопрос применимости всплесков к конкретным прикладным задачам и конкретные методы их реализации. Кроме того, реализуется программный пакет для работы с в том числе несепарабельными системами всплесков, что представляет собой практический интерес ввиду отсутствия подобных инструментов в открытом доступе.

2 Всплеск-системы

2.1 Кратномасштабный анализ

Кратномасштабным анализом называется цепочка множеств $\{V_j\} \subset L_2(\mathbb{R}^d), j \in \mathbb{Z}$, где каждое V_j раскладывается в прямую сумму ортогональных подпространств:

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1},\ V_{j-1} \perp W_{j-1}$$

Пространства V_j и W_j порождаются соответственно функциями φ и ψ, называемыми соответственно **масштабируемой функцией** и **всплеск-функцией**. Это производится с помощью задания базисов пространств V_j, W_j соответственно как $\{\varphi_{j,N}\}$ и $\{\psi_{j,N}\}, N \in \mathbb{Z}^d, j \in \mathbb{Z}$, где:

$$\begin{array}{l} \varphi_{j,k}(x) = (\det M)^{\frac{j}{2}}\varphi(M^j x - k) \\ \psi_{j,k}(x) = (\det M)^{\frac{j}{2}}\psi(M^j x - k) \end{array},$$

а M - квадратная целочисленная матрица, все собственные числа которой по модулю больше единицы, называемая **матричным коэффициентом растяжения**. Полученные $\varphi_{j,K}, \psi_{j,K}$ являются масштабированными путем применения к их координатам M как линейного оператора, а затем сдвига на K.

2.2 Биортогональные системы

Вместо пары φ, ψ можно рассмотреть четыре функции $\varphi, \widetilde{\varphi}, \psi^{(v)}, \widetilde{\psi}^{(v)}$. Биортонормальной пара $\varphi, \widetilde{\varphi}$ является, если для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(\xi + k)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi + k)} = 1$$

Преимущество таких систем заключается в том, что для них произвольная функция разложима по пространствам W_j:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left\langle f, \widetilde{\psi}_{j,n} \right\rangle \psi_{j,n},$$

и это разложение называется **всплеск-преобразованием**.

Проекция f на фиксированное V_j:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}$$

называется **уровнем приближения**.

Далее будут рассмотрены практические аспекты совершения такого преобразования.

2.3 Маски

Пусть:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h(k)^{(0)} e^{2\pi i (k,\xi)} \tag{1}$$

где $m = \det M$, и рассмотрим уравнение, называемое **масштабирующим уравнением**:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{2}$$

Рассмотрим обратное преобразование Фурье от (2) с учетом (1):

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h^{(0)}(k) \varphi_{1,k} \tag{3}$$

При существовании такой 1-периодической m_0 пространства $\{V_j\}$, порождаемые φ, будут удовлетворять аксиомам кратномасштабного анализа, m_0 будет называться **маской**, а ее коэффициенты $h_n^{(0)}$ - **фильтром** масштабирующей функции φ. Если к (3) применить j раз операцию сжатия, а затем сдвинуть на k, то получим формулы перехода с уровня на уровень для φ:

$$\varphi_{j,n} = \sqrt{m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h(k - Mn) \varphi_{j+1,k}$$

Аналогичным способом можно определить маску m_1 и соответствующие коэффициенты $h_n^{(1)}$ для всплеск-функции, а также соответствующие компоненты для $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$:

$$
\begin{aligned}
\psi &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h^{(1)}(k)\varphi_{1,k} \\
\psi_{j,n} &= \sqrt{m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h^{(1)}(k-Mn)\varphi_{j+1,l} \\
\widetilde{\varphi} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{h}^{(0)}(k)\widetilde{\varphi}_{1,l} \\
\widetilde{\varphi}_{j,k} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{h}^{(0)}(l-Mk)\widetilde{\varphi}_{j+1,l} \\
\widetilde{\psi} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{h}^{(1)}(k)\widetilde{\varphi}_{1,l} \\
\widetilde{\psi}_{j,k} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{h}^{(1)}(l-Mk)\widetilde{\varphi}_{j+1,l}
\end{aligned}
$$

Если φ имеют **компактный носитель**, т.е. ее наименьшее по включению множество, на дополнении которого она равна нулю, компактно, то $h^{(0)}, h^{(1)}$ будут иметь только конечное число ненулевых коэффициентов. Это свойство полезно при практических вычислениях. φ с компактным носителем также называются **финитными**. Аналогичное свойство справедливо для $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{h}^{(0)}, \widetilde{h}^{(1)}$.

2.4 Операторы Transition и Subdivision

Введём операторы, отвечающие за переход с уровня на уровень.

$$
\begin{aligned}
T_{h,M}v(n) &= m\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v(k)\overline{h(k-Mn)} \\
S_{h,M}v(n) &= m\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v(k)h(n-Mk)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим преобразования Фурье от этих операторов:

$$
\begin{aligned}
\widehat{T}_{h,M}v(\xi) &= m\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v(Mn+k)\overline{h(k)}e^{2\pi i(n,\xi)} \\
\widehat{S}_{h,M}v(\xi) &= m\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v(k)h(n-Mk)e^{2\pi i(n,\xi)}
\end{aligned}
$$

Эти операторы можно записать через комбинацию операторов свертки $\star$ и апсемплинга/даунсемплинга $\uparrow$ / $\downarrow$, т.е.:

$$
\begin{aligned}
&h \star v(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} v(k) h(n-k) \\
&(v \downarrow M)(n) = v(Mn) \\
&(v \uparrow M)(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } M^{-1}n \notin \mathbb{Z}^d \\ v(M^{-1}n) & \text{если } M^{-1}n \in \mathbb{Z}^d \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Тогда:

$$
\begin{aligned}
T_{h,M} v(n) &= m \left(\left(v \star \overline{h^-} \right) \downarrow M \right)(n) \\
S_{h,M} v(n) &= m \left((v \uparrow M) \star h \right)(n)
\end{aligned}
$$

где $h^-(n) = h(-n)$.

Такая запись позволяет эффективно вычислять эти операторы с помощью существующих реализаций свертки и ап/даунсемплинга.

2.5 Операторы T, S для дискретного всплеск-преобразования

Рассмотрим переход с уровня на уровень:

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\varphi}_{j+1,k} \rangle \varphi_{j+1,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left\langle f, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle \psi_{j,k}
$$

Т.к.:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{j,k} &= \sqrt{m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \widetilde{h}^{(0)}(l - Mk) \widetilde{\varphi}_{j+1,l} \\
\widetilde{\psi}_{j,k} &= \sqrt{m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \widetilde{h}^{(1)}(l - Mk) \widetilde{\varphi}_{j+1,l}
\end{aligned}
$$

то скалярные произведения в разложении можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
A_j(k) = \langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k} \rangle = \sqrt{m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \overline{\widetilde{h}^{(0)}(l - Mk)} \langle f, \widetilde{\varphi}_{j+1,l} \rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} T_{\widetilde{h}^{(0)},M} A_{j+1}(k) \\
D_j(k) = \left\langle f, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle = \sqrt{m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \overline{\widetilde{h}^{(1)}(l - Mk)} \langle f, \widetilde{\varphi}_{j+1,l} \rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} T_{\widetilde{h}^{(1)},M} A_{j+1}(k)
\end{aligned},
$$

Обратное разложение выглядит следующим образом:

$$A_{j+1}(l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h^{(0)}(l-Mk)\left\langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k}\right\rangle + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h^{(1)}(l-Mk)\left\langle f, \widetilde{\psi}_{j,k}\right\rangle = \\ = \frac{1}{m}\left(S_{h^{(0)}}A_j(l) + S_{h^{(1)}}D_j(l)\right)$$

В полученных формулах при условии компактности носителя φ можно заменить бесконечные суммы на конечные. Это напрямую приводит нас к рекурсивному виду вычисления разложений.

2.5.1 Выбор начальных A_j

Для достаточно больших j $\varphi_{j,k}, \widetilde{\varphi}_{j,k}$ обычно будет очень близки к дельта-функциям (т.к. они в практических задачах выбирается финитными), поэтому в качестве A_j можно выбрать исходную дискретизированную функцию. Возможно также и более точное вычисление A_j в случае известной непрерывной f, но такой способ требует численного интегрирования и редко целесообразен.

2.6 Возможность использования нескольких всплеск-функций

Вместо использования одной всплеск-функции ψ возможно построить систему с несколькими всплеск-функциями $\{\psi^{(v)}\}_{v=1}^{r}$. Тогда разложение будет выглядеть так:

$$f = \sum_{v=1}^{r}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left\langle f, \widetilde{\psi}^{(v)}_{j,k}\right\rangle \psi^{(v)}_{j,k},$$

а переход с уровня на уровень примет вид:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left\langle f, \widetilde{\varphi}_{j+1,k}\right\rangle \varphi_{j+1,k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left\langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k}\right\rangle \varphi_{j,k} + \sum_{v=1}^{r}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left\langle f, \widetilde{\psi}^{(v)}_{j,k}\right\rangle \psi^{(v)}_{j,k}$$

У каждой такой функции $\widetilde{\psi}^{(v)}$ будет свой собственный фильтр $\widetilde{h}^{(v)}$, определяемый аналогично случаю с одной $\widetilde{\psi}$. Вид $A_j(k)$ не изменится, а вместо $D_j(k)$ рассматривается r d-мерных матриц $D_j^{(v)}$:

$$D_j^{(v)}(k) = \left\langle f, \widetilde{\psi}^{(v)}_{j,k}\right\rangle = \sqrt{m}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\overline{\widetilde{h}^{(v)}(l-Mk)}\left\langle f, \widetilde{\varphi}_{j+1,l}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}}T_{\widetilde{h}^{(v)},M}A_{j+1}(k)$$

Обратное разложение приобретет r компонент, связанных с $D_j^{(v)}$:

$$A_{j+1}(l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h^{(0)}(l-Mk)\left\langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k}\right\rangle + \sum_{v=1}^{r}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h^{(v)}(l-Mk)\left\langle f, \widetilde{\psi}_{j,k}^{(v)}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{m}\left(S_{h^{(0)}}A_j(l) + \sum_{v=1}^{r} S_{h^{(v)}}D_j(l)\right)$$

3 Дальнейшие детали реализации

Как было описано ранее, $A_j, D_j^{(v)}$ в програмной реализации возможно реализовать с помощью d-мерных целочисленных матриц, при условии, что рассматриваются системы с компактным носителем. Фильтры $h^{(0)}.\widetilde{h}^{(0)}, h^{(1)}, \widetilde{h^{(1)}}$ рассматриваются в виде матриц, состоящих из их ненулевых коэффициентов. Это позволяет обходиться исключительно пакетом линейной алгебры для реализации всплеск-преобразования, без прибегания к символьным вычислениям.

Отдельный интерес представляет програмная реализация апсемплинга. Апсемплинг требует проверки целочисленности получающихся координат для точной реализации методов (4). Наивная реализация предполагает проверку целочисленности путем взятия дробной части, сохраненной в типе *float*, и отсеивание координат, норма чьих дробных частей превышает заданный порог. Такой подход легко реализовать, но он может приводить к ошибочным отсеиваниям, если точности формата не хватает для сохранения дробной части, либо если выбран неподходящий порог отсеивания.

Другой вариант - рассматривать дробную арифметику. Операция даунсемплинга в таком случае может быть реализована напрямую, а для даунсемплинга целочисленность можно проверять в обратную сторону, рассматривая вместо, например, координат $z = M^{-1}n$, не обязательно целочисленные из-за компоненты M^{-1}, равенство $Mz = n$, рассматривая только те пары координат, для которых оно выполняется точно. Подробный анализ перспектив работы с дробными масками будет рассмотрен в дальнейшей работе.

o999999999999999999999999999999A P;;

4 Литература

1. Nickolas P. Wavelets: a student guide. – Cambridge University Press, 2017. – Т. 24.

2. Han B. Framelets and wavelets //Algorithms, Analysis, and Applications, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser xxxiii Cham. – 2017.

3. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. – 2005.

4. Krivoshein A., Protasov V. I., Skopina M. Multivariate wavelet frames. – Springer Nature., 2016.

5. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. – 2003.