1 HIMPUNAN

Overview

Dalam kehidupan nyata, banyak sekali masalah yang terkait dengan data (objek) yang dikumpulkan berdasarkan kriteria tertentu. Kumpulan data ini merupakan representasi dari suatu kondisi, baik secara statistika maupun secara ekonomi. Kumpulan data inilah yang selanjutnya didefinisikan sebagai himpunan. Pada bab awal ini akan dibahas tentang definisi dan keanggotaan suatu himpunan, operasi himpunan dari beberapa jenis himpunan.

Tujuan

1. Mahasiswa memahami konsep dasar tentang himpunan.
2. Mahasiswa memahami berbagai macam operasi dan sifat himpunan.
3. Mahasiswa dapat meyelesaikan berbagai persoalan dan fenomena yang terkait dengan teori himpunan.

1.1 *Definisi dan Keanggotaan Suatu Himpunan*

Himpunan (set) merupakan sekumpulan objek-objek yang berbeda yang dapat didefinisikan dengan jelas. Objek di dalam himpunan dinamakan unsur atau anggota himpunan. Keanggotaan suatu himpunan dinyatakan oleh notasi '$\in$'.

Contoh 1 :

$A = \{x, y, z\}$

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A.

$w \notin A$: w bukan merupakan anggota himpunan A.

Ada beberapa cara dalam menyatakan himpunan, yaitu :

a. Mencacahkan anggotanya (enumerasi)

Dengan cara ini, himpunan tersebut dinyatakan dengan menyebutkan semua anggota himpunannya di dalam suatu kurung kurawal.

Contoh 2 :

- Himpunan empat bilangan ganjil pertama: $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
- Himpunan lima bilangan prima pertama: $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.
- Himpunan bilangan asli yang kurang dari 50 : $C = \{1, 2, ..., 50\}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

b. Menggunakan simbol standar (baku)

Suatu himpunan dapat dinyatakan dalam suatu simbol standar (baku) yang telah diketahui secara umum oleh masyarakat (ilmiah).

Contoh 3 :

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{ 1, 2, ... \}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal (semesta pembicaraan) dinotasikan dengan U.

Contoh 4 :

Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $A = \{1, 3, 5\}$ merupakan himpunan bagian dari U.

3. Menuliskan kriteria (syarat) keanggotaan himpunan

   Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan kriteria (syarat) keanggotaan himpunan tersebut. Himpunan ini dinotasinya sebagai berikut :

   $$\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$$

   Contoh 5 :

   (i) A adalah himpunan bilangan asli yang kecil dari 10

   $A = \{ x \mid x \le 10 \text{ dan } x \in N \}$

   atau

   $A = \{ x \in N \mid x \le 10 \}$

   yang ekivalen dengan :

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   (ii) M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil kuliah matematika diskrit}

   atau

   M = { x adalah mahasiswa | ia mengambil kuliah matematika diskrit}

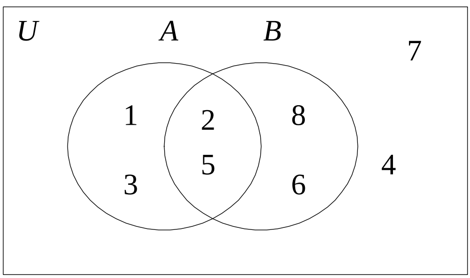
4. Menggunakan Diagram Venn

   Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan anggotanya dalam suatu gambar (diagram) yang dinamakan diagram venn.

   Contoh 6 :

   Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

   Diagram Venn:



Terkait dengan masalah keanggotaan, suatu himpunan dapat dinyatakan sebagai anggota himpunan lain.

Contoh 7 :

a. Misalkan, M = { mahasiswa Politeknik Telkom }
M1 = { mahasiswa prodi komputer akuntansi}
M2 = { mahasiswa prodi Sistem Informasi}
Dengan demikian, M = { M1, M2 }

b. Bila P1 = {x, y}, P2 = { {x, y} } atau P2={P1},
Sementara itu, P3 = {{{x, y}}}, maka $x \in$ P1 dan $y \notin$ P2,
sehingga P1 $\in$ P2 , sedangkan P1 $\notin$ P3, tetapi P2 $\in$ P3

Jumlah unsur dalam suatu himpunan dinamakan kardinalitas dari himpunan tersebut. Misalkan, untuk menyatakan kardinalitas himpunan A ditulis dengan notasi:

n(A) atau $|A|$

Contoh 8 :

(i) B = { x | x merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 10 },
atau B = {2, 3, 5, 7 } maka $|B| = 4$

(ii) A = {a, {a}, {{a}} }, maka $|A| = 3$

Jika suatu himpunan tidak mempunyai anggota, dengan kata lain dengan kardinalitas himpunan tersebut sama dengan nol maka himpunan tersebut dinamakan himpunan kosong (null set). Notasi dari suatu himpunan kosong adalah : $\varnothing$ atau {}

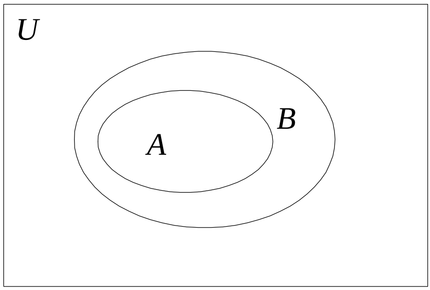
Contoh 9 :

(i) P = {Mahasiswa Teknik Industri STT Telkom yang pernah ke Mars},
maka n(P) = 0
Jadi P = $\varnothing$

(ii) A = {x | akar persamaan kuadrat x2 + 1 = 0 dan $x \in$ R}, maka
n(A) = 0
Jadi A = {}

(iii) B = {{ }} dapat juga ditulis sebagai B = {$\varnothing$}.
Jadi B bukan himpunan kosong karena ia memuat satu unsur yaitu himpunan kosong.

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap unsur A merupakan unsur dari B. Dalam hal ini, B dikatakan superset dari A.
Notasi himpunan bagian : $A \subseteq B$ atau $A \subset B$
Jika digambarkan dalam bentuk diagram Venn himpunan bagian tersebut menjadi :



Contoh 10 :
(i) $N \subseteq Z \subseteq R \subseteq C$
(ii) $\{2, 3, 5\} \subseteq \{2, 3, 5\}$

Untuk setiap himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).
(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

$\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (improper subset) dari himpunan A. Pernyataan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$:
$A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
Yang demikian, A merupakan himpunan bagian sebenarnya (proper subset) dari B.

Contoh 11 :
Misalkan A = {1, 2, 3}.
{1} dan {2, 3} merupakan proper subset dari A.

Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A merupakan suatu himpunan yang unsur-unsurnya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri. Himpunan kuasa dinotasikan oleh P(A). Jumlah anggota (kardinal) dari suatu himpunan kuasa bergantung pada kardinal himpunan asal. Misalkan, kardinalitas himpunan A adalah m, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12 :

Jika A = { x, y }, maka P(A) = { ∅, { x }, { y }, { x, y }}

Contoh 13 :

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah P(∅) = {∅}, sementara itu himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah P({∅}) = {∅, {∅}}.

Pernyataan $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (subset) dari B yang memungkinkan A = B.

Dua buah himpunan dikatakan sama jika memenuhi kondisi berikut :

A = B jika dan hanya jika setiap unsur A merupakan unsur B dan sebaliknya setiap unsur B merupakan unsur A.

Untuk menyatakan A = B, yang perlu dibuktikan adalah A adalah himpunan bagian dari B dan B merupakan himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

atau

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Contoh 14 :

(i) Jika A = { 0, 1 } dan B = { x | x (x – 1) = 0 }, maka A = B
(ii) Jika A = { 3, 5, 8, 5 } dan B = {5, 3, 8 }, maka A = B
(iii) Jika A = { 3, 5, 8, 5 } dan B = {3, 8}, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) A = A, B = B, dan C = C
(b) Jika A = B, maka B = A
(c) Jika A = B dan B = C, maka A = C

Dua buah himpunan dikatakan **ekivalen** jika masing-masing mempunyai kardinalitas yang sama. Misalkan, himpunan A adalah ekivalen dengan himpunan B berarti kardinal dari

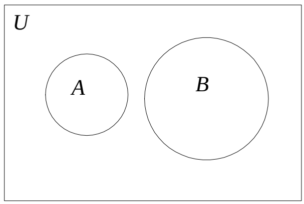
himpunan A dan himpunan B adalah sama, notasi yang digunakan adalah : A~B

Contoh 15 :

Misalkan A = { 2, 3, 5, 7 } dan B = { a, b, c, d },

maka A ~ B sebab $|A| = |B| = 4$

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki unsur yang sama. Notasi yang digunakan adalah A // B . Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah sebagai berikut :



Contoh 16 :

Jika A = { x | x $\in$ N, x < 10 } dan B = { 11, 12, 13, 14, 15 }, maka A // B.

1.2 *Operasi Himpunan*

Ada beberapa operasi himpunan yang perlu diketahui, yaitu : irisan, gabungan, komplemen, selisih dan beda setangkup.

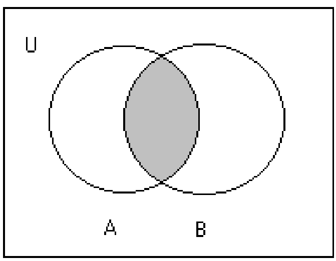
a. Irisan (*intersection*)

Irisan antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ‘$\cap$ ‘.

Misalkan A dan B adalah himpunan yang tidak saling lepas, maka

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah :



Contoh 17 :

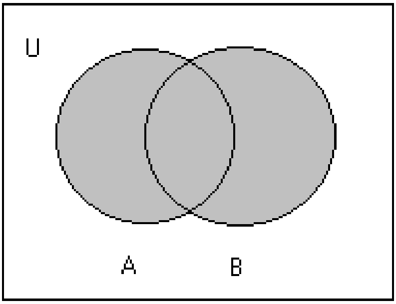
1. Misalkan $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ dan $B = \{3, 6, 9, 12\}$, maka $A \cap B = \{3\}$
2. Misalkan A adalah himpunan mahasiswi TI STT Telkom dan B merupakan himpunan wanita lanjut usia (50 tahun ke atas) maka $A \cap B = \varnothing$.
   Hal ini berarti A dan B adalah saling lepas atau A // B.

b. Gabungan (*union*)

Gabungan antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda '$\cup$'.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah :



Contoh 18 :

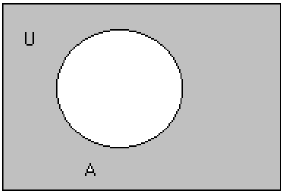
(i) Jika $A = \{ 2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, maka $A \cup B = \{1,2,3, 4, 5, 7\}$
(ii) $A \cup \varnothing = A$

c. Komplemen (*complement*)

Komplemen dari suatu himpunan merupakan unsur -unsur yang ada pada himpunan universal (semesta pembicaraan) kecuali anggota himpunan tersebut. Misalkan A merupakan himpunan yang berada pada semesta pembicaraan U, maka komplemen dari himpunan A dinotasikan oleh:

$$\overline{A} = A^c = \{ x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A \}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah :



Contoh 19 :

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

jika A = {1, 3, 7, 9}, maka $\overline{A}$ = {2, 4, 5, 6, 8}

jika A = { x $\in$ U | x habis dibagi dua }, maka $\overline{A}$= { 1, 3, 5, 7, 9 }

Contoh 20 :

A = himpunan mahasiswa PoliteknikTelkom
B = himpunan mahasiswa yang tinggal di Asrama
C = himpunan mahasiswa Sistem Informasi
D = himpunan mahasiswa yang mengambil matematika diskrit
E = himpunan mahasiswa yang membawa motor untuk pergi ke kampus

a. Pernyataan

"Semua mahasiswa Politeknik Telkom Jurusan Sistem Informasi yang membawa motor untuk pergi ke kampus"

dapat dinyatakan dalam notasi operasi himpunan sebagai berikut:

$$(A \cap C) \cap E$$

b. Pernyataan

"Semua mahasiswa Politeknik Telkom yang tinggal di asrama dan tidak mengambil matematika diskrit"

dapat dinyatakan dalam notasi operasi himpunan sebagai berikut:

$$A \cap B \cap \overline{D}$$

c. Pernyataan

"semua mahasiswa Jurusan Sistem informasi yang tidak tinggal di asrama atau tidak membawa motor untuk pergi ke kampus"

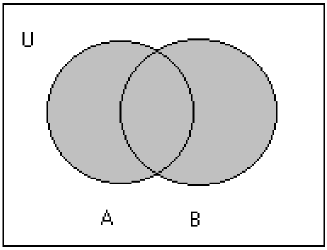
dapat dinyatakan dalam notasi operasi himpunan sebagai berikut:

$$C \cap \overline{B} \cup \overline{E}$$

d. Selisih (*difference*)

Selisih antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda '– '.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka selisih A dan B dinotasikan oleh

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$$



Contoh 21 :

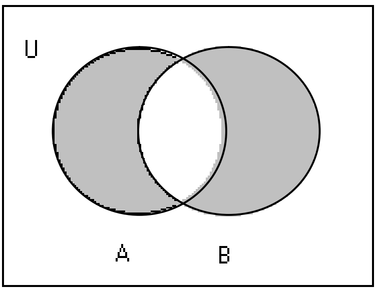
Jika A = { 1, 2, 3, ..., 10 } dan B = { 2, 3, 5, 7}, maka A – B = { 1, 4, 6, 8, 9 } dan B – A = ∅

e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Beda setangkup antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ' ⊕ '.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup antara A dan B dinotasikan oleh :

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah :



Contoh 22 :

Jika $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
maka

$$A \oplus B = \{1, 4, 7\}$$

Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

f. Perkalian Kartesian (cartesian product)

Perkalian kartesian antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda '$\times$'.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka perkalian kartesian antara A dan B
dinotasikan oleh :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh 23 :

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka
$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

(ii) Misalkan A = B = himpunan semua bilangan riil, maka
$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Misalkan ada dua himpunan dengan kardinalitas berhingga, maka kardinalitas himpunan hasil dari suatu perkalian kartesian antara dua himpunan tersebut adalah perkalian antara kardinalitas masing-masing himpunan. Dengan demikian, jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Pasangan terurut (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$. Dengan argumen ini berarti perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu

$$A \times B \neq B \times A$$

dimana A atau B bukan himpunan kosong.

Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka

$$A \times B = B \times A = \varnothing$$

Hukum-hukum yang berlaku untuk operasi himpunan adalah sebagai berikut :

1. Hukum identitas:
   - $A \cup \varnothing = A$
   - $A \cap U = A$
2. Hukum null/dominasi:
   - $A \cap \varnothing = \varnothing$
   - $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen:
   - $A \cup \overline{A} = U$
   - $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten:
   - $A \cup A = A$
   - $A \cap A = A$
5. Hukum involusi:

   $\overline{(\overline{A})} = A$
6. Hukum penyerapan (absorpsi):
   - $A \cup (A \cap B) = A$
   - $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif:
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cap B = B \cap A$
8. Hukum asosiatif:
   - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif:
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
10. Hukum De Morgan:
    - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
    - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum komplemen
    - $\overline{\varnothing} = U$
    - $\overline{U} = \varnothing$

Misalkan A dan B adalah himpunan berhingga, maka

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$

Ini merupakan **prinsip inklusi-eksklusi** yang berguna dalam penyelesaian himpunan maupun kombinatorial.

Ini berlaku juga untuk tiga himpunan berhingga dan seterusnya. Misalkan A, B, dan C merupakan himpunan berhingga maka berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi, hubungan antar kardinalitas dari partisi himpunan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

Prinsip inklusi-eksklusi akan dibahas lagi pada bab kombinatorik.

1.3 *Prinsip Dualitas*

Prinsip dualitas mengemukakan bahwa dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh 24 :

AS → kemudi mobil di kiri depan

Indonesia → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

mobil harus berjalan di bagian kanan jalan,

pada jalan yang berlajur banyak, lajur kiri untuk mendahului,

bila lampu merah menyala, mobil belok kanan boleh langsung

(b) di Indonesia,

mobil harus berjalan di bagian kiri jalan,

pada jalur yang berlajur banyak, lajur kanan untuk mendahului,

bila lampu merah menyala, mobil belok kiri boleh langsung

Prinsip dualitas pada kasus diatas adalah:

Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan S adalah suatu kesamaan (identity) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S* merupakan kesamaan yang berupa dual dari S maka dengan mengganti $\cup \rightarrow \cap$, $\cap \rightarrow \cup$, $\varnothing \rightarrow U$, $U \rightarrow \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka operasi-operasi tersebut pada kesamaan S* juga benar.

Tabel 1.1 Dualitas dari Hukum Aljabar Himpunan

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum null/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen : $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten : $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan : $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif : $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Contoh 25 :

Misalkan $A \in U$ dimana A = $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

maka pada dualnya, misalkan U*, berlaku :

$$A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$$

Dalam membuktikan kebenaran suatu pernyataan atau merepresentasikan suatu pernyataan dengan cara lain dengan menggunakan bantuan himpunan ada beberapa cara, antara lain :

a. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26 :

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan.

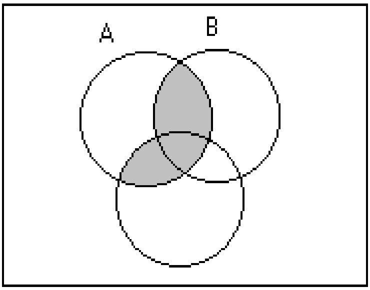
Tunjukan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

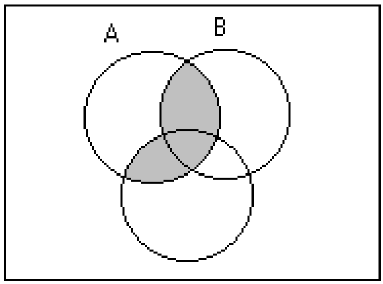
dengan diagram Venn.

Jawab :

Cara ini dilakukan bukan dalam pembuktian formal, dengan menggambarkan sejumlah himpunan yang diketahui dan mengarsir setiap operasi yang diinginkan secara bertahap, sehingga diperoleh himpunan hasil operasi secara keseluruhan.

$A \cap (B \cup C)$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$





Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b. Beberapa contoh dalam membuktikan pernyataan dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 27 :

Misalkan A dan B himpunan.

Tunjukan bahwa :

$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

Jawab :

$A \cup (B - A)$	$= A \cup (B \cap \overline{A})$	(Definisi operasi selisih)
	$= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$	(Hukum distributif)
	$= (A \cup B) \cap U$	(Hukum komplemen)
	$= A \cup B$	(Hukum identitas)

Contoh 28 :

Tunjukan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, berlaku

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B)$ = A ∪ B dan

(ii) A ∩ ($\overline{A}$ ∪ B) = A ∩ B

Jawab :

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$ (H. distributif)

= U ∩ (A ∪ B) (H. komplemen)

= A ∪ B (H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (H. distributif)

= ∅ ∪ (A ∩ B) (H. komplemen)

= A ∩ B (H. identitas)

1.4 *Multi Set*

Himpunan yang unsurnya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut multi set (himpunan ganda).

Contoh 29 :

A = {1, 1, 1, 2, 2, 3},
B = {2, 2, 2},
C = {2, 3, 4},
D = { }.

Multiplisitas suatu unsur pada multi set adalah jumlah kemunculan unsur tersebut pada multi set.

Contoh 30 :

M = { 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1 },
multiplisitas 1 adalah 4 dan multiplisitas 2 adalah 3, sementara itu multiplisitas 3 adalah 2.

Himpunan (set) merupakan contoh khusus dari suatu multiset, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap unsurnya adalah 0 atau 1. Himpunan yang multiplisitas dari unsurnya 0 adalah himpunan kosong.

Misalkan P dan Q adalah multiset, operasi yang berlaku pada dua buah multi set tersebut adalah sebagai berikut :

a. $P \cup Q$ merupakan suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas maksimum unsur tersebut pada himpunan P dan Q.

Contoh 31 :

P = { a, a, a, c, d, d } dan Q ={ a, a, b, c, c }, maka
$P \cup Q$ = { a, a, a, b, c, c, d, d }

b . $P \cap Q$ adalah suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas minimum unsur tersebut pada himpunan P dan Q.

Contoh 32 :

P = { a, a, a, c, d, d } dan Q = { a, a, b, c, c } maka
$P \cap Q$ = { a, a, c }

c. P – Q adalah suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas unsur tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, ini berlaku jika jika selisih multiplisitas tersebut adalah positif. Jika selisihnya nol atau negatif maka multiplisitas unsur tersebut adalah nol.

Contoh 33 :

P = { a, a, a, b, b, c, d, d, e } dan
Q = { a, a, b, b, b, c, c, d, d, f } maka
P – Q = { a, e }

d. P + Q, yang didefinisikan sebagai jumlah (sum) dua buah himpunan ganda, adalah suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas unsur tersebut pada P dan Q.

Contoh 34 :

P = { a, a, b, c, c } dan Q = { a, b, b, d }, maka
P + Q = { a, a, a, b, b, b, c, c, d }

Rangkuman

1. Himpunan (set) merupakan sekumpulan objek-objek yang berbeda yang dapat didefinisikan dengan jelas.
2. Himpunan dapat dinyatakan dengan mencacah anggotanya, menggunakan simbol, syarat keanggotaan, atau menggunakan diagram venn.
3. Jumlah unsur dalam suatu himpunan A dinamakan kardinalitas himpunan A, notasi: $n(A)$ atau $|A|$
4. Jika suatu himpunan tidak mempunyai anggota, dengan kata lain dengan kardinalitas himpunan tersebut sama dengan nol maka himpunan tersebut dinamakan himpunan kosong (null set), Notasi : $\varnothing$ atau { }.
5. Beberapa operasi pada himpunan yang perlu diketahui a.l : irisan, gabungan, komplemen, selisih, dan beda setangkup.
6. Misalkan A dan B adalah himpunan berhingga, maka Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk dua himpunan ditulis :

   $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
7. Himpunan yang unsurnya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut multi set (himpunan ganda).
8. Multiplisitas suatu unsur pada multi set adalah jumlah kemunculan unsur tersebut pada multi set tersebut.

Kuis Benar Salah

(Untuk soal no 1 – 5) Diketahui A = {2, 3, 5, 7}, B = {2, 4, 6, 8, 10}, dan C = {1, 3, 5, 7}

1. $A \cap B = A - C$
2. $A \subseteq B$
3. $B \cup B$ merupakan himpunan bilangan asli
4. $A \subseteq A \cap B \cap C$
5. $A \cap B \cup C = A \cup B \cap C$
6. Himpunan kosong adalah himpunan yang hanya terdiri dari satu anggota yaitu nol.
7. Jika (A – B) = {1, 2, 3} dan (B – A) = {4, 5} maka $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5}
8. Jika $P \cup Q = R$ maka $(R - Q) = P$
9. Komplemen dari himpunan bilangan asli adalah bilangan negatif.
10. Jika $a \in A$ dan $b \in B$ maka $A \cap B = \emptyset$

Pilihan Ganda

1. Himpunan yang unsurnya boleh berulang dinamakan

A. Himpunan berganda
B. Multi set
C. Frekuensi set
D. Fuzzy set
E. Data set

2. Jika C = { x | x $\in$ A atau x $\in$ B } maka C = ...

A. A $\cap$ B
B. A – B
C. A $\cup$ B
D. A $\oplus$ B
E. A $\cap$ (B $\cup$ A)

3. Operasi himpunan A $\oplus$ B, setara dengan ....

A. A – B
B. (A – B) $\cap$ B
C. (A – B) $\cap$ (B – A)
D. (A $\cap$ B) – (A $\cup$ B)
E. (A – B) $\cup$ (B – A)

4. Hukum D'Morgan pada himpunan dinyatakan oleh :

A. A $\cup$ B = B $\cup$ A
B. A $\cup$ (B $\cup$ C) = (A $\cup$ B) $\cup$ C
C. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
D. A $\cup$ U = U
E. $\varnothing$ $\cup$ (A $\cap$ B)

5. Frekuensi kemunculan suatu unsur pada multi set disebut ....

A. Kardinalitas
B. Multiplikasi
C. Frekuensi
D. Mutiplisitas
E. Aditivitas

6 P = { x | x $\in$ A dan x $\notin$ B } maka P = ...

A. A $\cap$ B
B. A – B
C. A $\cup$ B
D. A $\oplus$ B
E. A $\cap$ (B $\cup$ A)

7 Operasi himpunan $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ menghasilkan

A Himpunan A
B Himpunan B
C Himpunan A – B
D Himpunan B – A
E Himpunan $A \cup B$

8 Jika U adalah universal set dari A dan B, maka $(A \cup U)$ = ...

A $(B - A)^c$
B $(A - B)^c$
C $(A \cup B)^c$
D $(A \cap B)^c$
E B^c

9 Ada 10 mahasiswa yang ambil matdis, 15 mahasiswa ambil manajemen dan 6 mahasiswa ambil kedua mata kuliah itu. Jika total mahasiswa adalah 30 orang, maka jumlah mahasiswa yang tidak ambil kedua mata kuliah itu ada...

A 9 mahasiswa
B 10 mahasiswa
C 11 mahasiswa
D 12 mahasiswa
E 13 mahasiswa

10 Misalkan P = {1, 2, 3, 4, 5} dan Q = {a, b, c} maka n (A X B) = ...

A 5
B 3
C 2
D 15
E 8

Latihan

(Untuk soal no. 1 – 5)

Diketahui $A = \{1,2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 12\}$, dan
$C = \{2, 4, 8, 12, 20\}$

Tentukan hasil dari opreasi himpunan berikut :

1. $(A \cap B) - C$
2. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
3. $(A - B) \cap (B - C)$
4. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. $(A \cup B) - C \;\; \cap (A \cup C) - B$
6. Tentukan Jumlah (banyaknya) bilangan pada himpunan A yang tidak habis dibagi 3 atau 5 !
7. Tentukan Jumlah (banyaknya) bilangan pada himpunan A yang habis dibagi 3, tetapi tidak habis dibagi 5 !
8. Tentukan Jumlah (banyaknya) bilangan pada himpunan A yang habis dibagi 3, tetapi tidak habis dibagi 5 maupun 7 !
9. Misalkan, jumlah mahasiswa pada suatu kelas adalah 60 orang. 20 orang mahasiswa menyukai kalkulus, 30 menyukai matematika diskrit, dan 10 orang menyukai aljabar linear. 7 orang menyukai kalkulus dan matematika diskrit, 5 orang menyukai matematika diskrit dan aljabar linear, dan 10 orang tidak menyukai ketiga mata kuliah itu.
   a. Tentukan jumlah mahasiswa yang menyukai ketiga mata kuliah tersebut !
   b. Tentukan jumlah mahasiswa yang hanya menyukai satu mata kuliah !

(Untuk soal no 10 – 15)

Dari hasil survey pada 60 orang mahasiswa, diperoleh data sebagai berikut :

25 mahasiswa suka membaca kompas
26 mahasiswa suka membaca Republika
27 mahasiswa suka membaca Pikiran Rakyat
9 mahasiswa suka membaca kompas dan Republika
11 mahasiswa suka membaca kompas dan Pikiran Rakyat
8 mahasiswa suka membaca Republika dan Pikiran Rakyat
3 mahasiwa suka membaca ketiga koran tersebut

10. Gambarkan diagram ven untuk masalah tersebut !
11. Tentukan jumlah mahasiswa yang tidak pernah baca satupun ketiga koran tersebut !
12. Tentukan jumlah mahasiswa yang hanya baca Pikiran Rayat saja !
13. Tentukan jumlah orang yang tepat hanya membaca satu jenis koran saja !

2 RELASI DAN FUNGSI

Overview

Hubungan antar elemen/unsur dalam himpunan terjadi dalam berbagai masalah. Hubungan ini direpresentasikan menggunakan struktur yang dinamakan relasi. Relasi dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah seperti optimasi jaringan komunikasi, penjadwalan, permasalahan dalam database.

Tujuan

1. Mahasiswa memahami konsep relasi dan fungsi.
2. Mahasiswa memahami berbagai macam operasi dan sifat relasi.
3. Mahasiswa dapat meyelesaikan berbagai persoalan dan fenomena yang terkait denganrelasi dan fungsi.

2.1 *Definisi Relasi dan Cara Penyajian*

Pada bab sebelumnya, telah dibahas tentang Cartesian product, yaitu berupa pasangan terurut yang menyatakan hubungan dari dua himpunan. Semua pasangan terurut merupakan anggota dari himpunan bagian dari hasil Cartesian product dua buah himpunan . Sebagian dari anggota himpunan bagian tersebut mempunyai hubungan yang khusus (tertentu) antar dua unsur pada pasangan urut tersebut, menurut aturan tertentu. Aturan yang menghubungkan antara dua himpunan dinamakan relasi biner. Relasi antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu. Jadi, relasi biner R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari cartesian product $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$.

Notasi dari suatu relasi biner adalah a R b atau $(a, b) \in R$. Ini berarti bahwa a dihubungankan dengan b oleh R. Suatu unsur dalam cartesian product yang bukan merupakan unsur relasi dapata dinyatakan dengan a R b atau $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R. Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (range) dari R.

Contoh 2.1 :

Misalkan A = {2, 3, 4} dan B = {2, 4, 8, 9, 15}.

Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

$(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b

Tentukan unsur-unsur R!

Jawab :

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, cartesian product $A \times B$ adalah :

$A \times B$ = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 9), (2, 15), (3, 2), (3, 4), (3, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 2), (4, 4), (4, 8), (4, 9), (4, 15)}

Dengan menggunakan definisi relasi diatas, relasi R dari A ke B yang mengikuti aturan tersebut adalah :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15) }

Relasi dapat pula terjadi hanya pada sebuah himpunan, yaitu relasi pada A. Relasi pada himpunan A merupakan himpunan bagian dari cartesian product $A \times A$.

Contoh 2.2 :

Misalkan R adalah relasi pada A = {2, 3, 4, 8, 9} yang didefinisikan oleh (x, y) $\in$ R jika dan hanya jika x habis dibagi oleh y.

Jawab :

Relasi R pada A yang mengikuti aturan tersebut adalah :

R = {(2, 2), (4, 4), (4, 2), (8, 8), (8, 2), (8, 4), (3, 3), (9, 9), (9, 3)}

Cara menyatakan suatu relasi bisa bermacam-macam, antara lain : dengan diagram panah, tabel, matriks, bahkan dengan graph berarah. Berikut ini, akan dibahas satu-persatu cara menyajikankan suatu relasi dengan cara-cara tersebut.

Cara menyajikan suatu relasi :

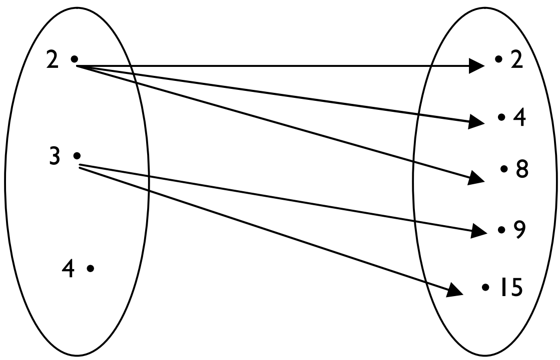
a. Penyajian Relasi dengan Diagram Panah

Misalkan A = {2, 3, 4} dan B = {2, 4, 8, 9, 15}.

Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

(a, b) $\in$ R jika a faktor prima dari b

maka relasi tersebut dapat digambarkan dengan diagram panah berikut ini :



b. Penyajian Relasi berupa Pasangan Terurut

Contoh relasi pada (a) dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut, yaitu :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)}

c. Penyajian Relasi dengan Tabel

Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil. Relasi yang telah dijelaskan pada bagian (a) dapat direpresentasikan sebagai berikut:

Tabel 2.1 Relasi 'Faktor Prima Dari'

A	*B*
2	2
2	4
2	8
3	9
3	15

d. Penyajian Relasi dengan Matriks

Misalkan R merupakan relasi yang menghubungkan himpunan A = {a_1, a_2, …, a_m} dan himpunan B = {b_1, b_2, …, b_n}. Relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu :

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Unsur-unsur m_{ij} pada matriks itu bernilai satu atau nol, tergantung apakah unsur a_i pada himpunan A mempunyai relasi dengan unsur b_j pada himpunan B. Pernyataan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 2.3 :

Misalkan A = {2, 3, 4} dan B = {2, 4, 8, 9, 15}.

Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan aturan :

(a, b) $\in$ R jika a faktor prima dari b

maka relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

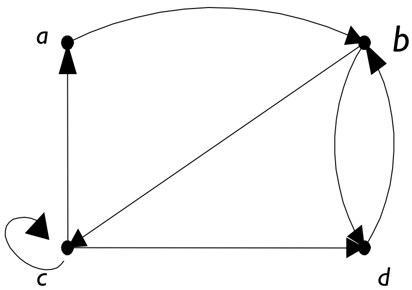
e. Penyajian Relasi dengan Graf Berarah

Relasi pada sebuah himpunan dapat disajikankan secara grafis dengan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Graf berarah didefinisikan hanya untuk merepresentasikan relasi pada suatu himpunan (bukan antara dua himpunan). Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau vertex), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (arc). Jika (a, b) ∈ R, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut simpul asal (initial vertex) dan simpul b disebut simpul tujuan (terminal vertex). Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut loop.

Contoh 2.4 :

Misalkan R = {(a, b), (b, c), (b, d), (c, c) (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}.

Relasi R dapat di sajikan dalam bentuk graf berarah yaitu :



2.2 *Beberapa Sifat Relasi*

Relasi yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat tersebut antara lain :

1. Refleksif (*reflexive*)

   Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **refleksif** jika (a, a) ∈ R untuk setiap a ∈ A. Dengan kata lain, suatu relasi R pada himpunan A dikatakan tidak refleksif jika ada a ∈ A sedemikian sehingga (a, a) ∉ R.

   Contoh 2.5 :

   Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R adalah relasi '≤' yang didefinisikan pada himpunan A, maka

   R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3),(1, 4), (2, 2), (2, 3), (2,4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

   Terlihat bahwa (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) merupakan unsur dari R. Dengan demikian R dinamakan bersifat refleksif.

Contoh 2.6 :

Misalkan A = {2, 3, 4, 8, 9, 15}.

Jika kita definisikan relasi R pada himpunan A dengan aturan :

(a, b) $\in$ R jika a faktor prima dari b

Perhatikan bahwa (4, 4) $\notin$ R .

Jadi, jelas bahwa R tidak bersifat refleksif.

Sifat refleksif memberi beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu :

Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang unsur diagonal utamanya semua bernilai 1, atau mii = 1, untuk i = 1, 2, …, n,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Relasi yang bersifat refleksif jika disajikan dalam bentuk graf berarah maka pada graf tersebut senantiasa ditemukan loop setiap simpulnya.

2. Transitif (*transitive*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **transitif** jika (*a*, b)$\in$R dan (b, c) $\in$ R, maka (*a*, c) $\in$ R, untuk *a*, b, c $\in$ A.

Contoh 2.7 :

Misalkan A = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, dan relasi R didefinisikan oleh :

a R b jika dan hanya jika *a* membagi b, dimana *a*, b $\in$ A,

Jawab :

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8)}

Ketika (2, 4) $\in$ R dan (4, 8) $\in$ R terlihat bahwa (2, 8) $\in$ R.

Dengan demikian R bersifat transitif.

Contoh 2.8 :

R merupakan relasi pada himpunan bilangan asli N yang didefinisikan oleh:

$R \; : \; a + b = 5, \qquad a, b \in A,$

Periksa, apakah relasi R bersifat transitif!

Jawab :

Dengan memperhatikan definisi relasi R pada himpunan A, maka :

$R = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) \}$

Perhatika bawa $(1, 4) \in R$ dan $(4, 1) \in R$, tetapi $(1, 1) \notin R$.

Dengan demikian R tidak bersifat transitif.

Sifat transitif memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu :

- sifat transitif pada graf berarah ditunjukkan oleh kondisi: jika ada busur dari a ke b dan busur dari b ke c, maka juga terdapat busur berarah dari a ke c.
- Pada saat menyajikan suatu relasi transitif dalam bentuk matriks, relasi transitif tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya

3. Simetri (*symmetric*) dan Anti Simetri (*antisymmetric*)

Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat **simetri** jika $(a, b) \in R$, untuk setiap $a, b \in A$, maka $(b, a) \in R$. Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan tidak simetri jika $(a, b) \in R$, sementara itu $(b, a) \notin R$. Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan **anti simetri** jika untuk setiap $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ berlaku hanya jika $a = b$. Perhatikanlah bahwa istilah simetri dan anti simetri tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) dimana $a \neq b$.

Contoh 2.9 :

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh :

a R b jika dan hanya jika $a - b \in Z$.

Periksa apakah relasi R bersifat simetri !

Jawab :

Misalkan a R b maka $(a - b) \in Z$, Sementara itu jelas bahwa $(b - a) \in Z$. Dengan demikian R bersifat simetri.

Contoh 2.10 :

Tunjukan bahwa relasi '$\leq$' pada himpunan Z bersifat anti simetri

Jawab :

Jelas bahwa jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = b$.

Jadi relasi '$\leq$' bersifat anti simetri.

Contoh 2.11 :

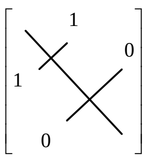
Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan asli N merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika a = b. Sementara itu, relasi "habis membagi" merupakan relasi yang anti simetri karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka a = b.

Contoh 2.12 :

Misalkan relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3) } maka relasi R merupakan relasi yang simetri sekaligus relasi yang anti simetri.

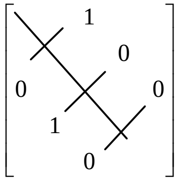
Sifat simetri dan anti simetri memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian berbentuk matriks maupun graf, yaitu :

Relasi yang bersifat simetri mempunyai matriks yang unsur-unsur di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari unsur-unsur di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk i = 1, 2, …, n dan j = 1, 2, …, n adalah :



Relasi yang bersifat simetri, jika disajikan dalam bentuk graf berarah mempunyai ciri bahwa jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

Relasi yang bersifat anti simetri mempunyai matriks dimana unsurnya mempunyai sifat: jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi anti simetri memenuhi kondisi: jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat anti simetri mempunyai ciri bahwa tidak akan pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

Misalkan, R merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, yang dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari himpunan B ke himpunan A yang didefinisikan oleh :

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 2.13 :

Misalkan P = {2, 3, 4} dan Q = {2, 4, 8, 9, 15}.

Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q yaitu :

$(p, q) \in R$ jika dan hanya jika p habis membagi q

maka kita peroleh :

R = {(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)

R^{-1} merupakan invers dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P yang berbentuk :

$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p

sehingga diperoleh :

R^{-1} = {(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3) }

Jika M adalah matriks yang menyajikan suatu relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan transpose terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 *Operasi pada Relasi*

Relasi merupakan himpunan pasangan terurut maka beberapa operasi aljabar yang berlaku pada himpunan, juga beraku pada relasi. Operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup juga berlaku atara dua relasi. Jika R_1 dan R_2 masing-masing merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga merupakan relasi dari A ke B.

Contoh 2.14 :

Misalkan A = {*a*, b, c} dan B = {*a*, b, c, d}.
Relasi R_1 = {(*a*, *a*), (b, b), (c, c)}
Relasi R_2 = {(*a*, *a*), (*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}
Maka :
$R_1 \cap R_2$ = {(*a*, *a*)}
$R_1 \cup R_2$ = {(*a*, *a*), (b, b), (c, c), (*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}
$R_1 - R_2$ = {(b, b), (c, c)}
$R_2 - R_1$ = {(*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}
$R_1 \oplus R_2$ = {(b, b), (c, c), (*a*, b), (*a*, c), (*a*, d)}

Misalkan, relasi R_1 dan R_2 masing-masing disajikan dalam bentuk matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \quad \text{dan} \quad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

Contoh 2.15 :

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan T adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan T o R, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C,$ untuk suatu $b \in B$
sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S \}$

Contoh 2.16 :

Misalkan, A = {*a*, b, c}, B = {2, 4, 6, 8} dan C = {s, t, u}

Sementara itu, relasi dari A ke B didefinisikan oleh :

R = {(*a*, 2), (*a*, 6), (*b*, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)}

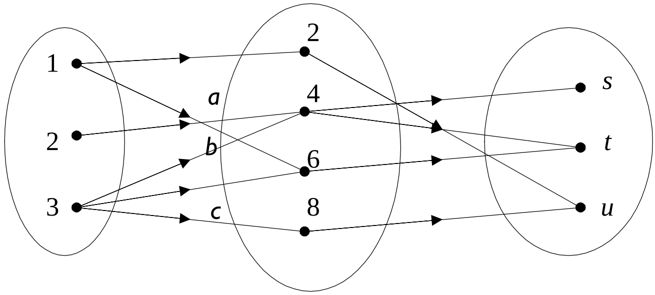
Sedangkan relasi dari himpunan B ke himpunan C didefisikan oleh :

T = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}

Maka komposisi relasi R dan T adalah

$T \circ R$ = {(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u) }

Jika disajikan dengan diagram panah, komposisi relasi R dan T adalah :



Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah :

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

dimana $M_{R1} \cdot M_{R2}$ merupakan perkalian antara dua buah matriks, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan logika "$\wedge$" (dan), sedangakan tanda tambah diganti dengan logika "$\vee$" (atau).

Contoh 2.17 :

Misalkan relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A disajikan dalam bentuk matriks berikut :

$$M_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \,.\, M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 *Relasi Ekivalen dan Relasi Terurut*

Sebuah relasi pada himpunan A dinamakan **relasi ekivalen** jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif. Dua unsur yang berelasi ekivalen disebut equivalent.

Contoh 2.18 :

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah Z,
yang dinyatakan oleh :

a R b jika dan hanya jika a = b atau a = – b .

Periksa, apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen !

Jawab :

Jelas bahwa a = a, dengan kata lain jika a R a untuk setiap $a \in Z$.
Jadi R merupakan relasi refleksif.
Jika $a = \pm b$ dan $b = \pm c$, ini mengakibatkan $a = \pm c$. Dengan kata lain jika

a R b maka b R c maka a R c.

Dengan demikian R merupakan relasi transitif.
Jika a = b atau a = – b maka b = a atau b = – a, dengan kata lain jika

a R b maka b R a.

Jadi R merupakan relasi simetri.

Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen.

Contoh 2.19 :

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh :

a R b jika dan hanya jika $a - b \in Z$.

Periksa, apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen !

Jawab :

Untuk setiap $a \in$ Rill maka $a - a = 0 \in$ bilangan bulat, oleh karena itu R bersifat refleksif.
Misalkan a R b maka $(a - b) \in Z$, jelas bahwa $(b - a) \in Z$. Dengan demikian R bersifat simetri.
Jika a R b dan b R c artinya $(a - b), (b - c) \in Z$ maka
$(a - c) = (a - b) + (b - c)$ juga merupakan bilangan bulat.
Oleh karena itu a R c. Jadi R bersifat transitif.
Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen.

Contoh 2.20 :

(Modul Kongruen)

Misalkan m adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1.

Tunjukan bahwa Relasi

$R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$ merupakan relasi ekivalen

pada himpunan bilangan bulat.

Jawab :

Ingat bahwa $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika m membagi a – b .

Karena a – a = 0 dapat dibagi oleh m, yaitu 0 = 0 m.

Oleh karena itu, $a \equiv a \pmod{m}$, sehingga R bersifat refleksif.

a – b dapat dibagi oleh m sehingga a – b = km, untuk suatu $k \in Z$ Ini mengakibatkan b – a = –km. Jadi relasi tersebut simetri

Misalkan $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$,

sehingga a – b dan b – c dapat dibagi oleh m, atau

a – b = km dan b – c = lm untuk suatu $k, l \in Z$

Dengan menjumlahkan keduanya :

$a - c = (a - b) + (b - c) = (k + l)\, m$, maka $a \equiv c \pmod{m}$,

Ini menunjukan bahwa relasi tersebut transitif.

Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen.

Misalkan R adalah relasi ekivalen pada himpunan A. Semua unsur himpunan yang relasi dengan suatu unsure a di A dinamakan kelas ekivalen dari a.
Kelas ekivalen dari a terhadap relasi R dinotasikan oleh $[a]_R$. Jika hanya ada satu relasi pada himpuanan tersebut, notainya adalah [a].

Contoh 2.21 :

Tentukan kelas ekivalen 0, 1, –2, dan –3 pada relasi modul kongruen 4!

Jawab :

$[0] = \{ \ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \}$

$[1] = \{ \ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots \}$

$[-2] = \{ \ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots \}$

$[-3] = \{ \ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots \}$

Sebuah relasi R pada himpunan S dikatakan **relasi terurut parsial** jika relasi tersebut bersifat refleksif, antisimetri dan transitif. Sebuah himpunan S yang dilengkapi dengan sebuah relasi R yang terurut parsial, himpunan tersebut dinamakan himpunan terurut parsial (partially ordering set – poset), Notasi : (S, R).

Contoh 2.22 :

Tunjukan bahwa relasi '$\leq$' merupakan relasi terurut pada Z.

Jawab :

Karena a $\leq$ a untuk setiap a $\in$ Z, maka relasi '$\leq$' bersifat refleksi.

Jika a $\leq$ b dan b $\leq$ a berarti a = a. Jadi relasi '$\leq$' bersifat antisimetri.

Jika a $\leq$ b dan b $\leq$ c berarti a $\leq$ c. Jadi relasi '$\leq$' bersifat transitif.

Dengan demikian relasi '$\leq$' merupakan relasi terurut pada Z.

Setiap unsur dalam poset (S, ρ) dikatakan comparable (dapat dibandingkan) jika a ρ b atau b ρ a untuk setiap a, b $\in$ S. Selanjutnya, Jika (S, ρ) merupakan sebuah poset dan setiap dua unsur dalam S adalah comparable, maka S dinamakan Himpunan terurut total (*Totally Ordered Set* -Toset) atau *Chain*, sedangkan ρ dinamakan urutan total.

Contoh 2.23 :

1. (N, $\leq$) merupakan toset.
2. (N, |) bukan toset karena tak comparable.

Jika (S, ρ) adalah sebuah toset dan setiap subset tak kosong dari S paling sedikit memiliki satu unsur, maka (S, ρ) dinamakan Well-ordered Set (himpunan terurut dengan baik).

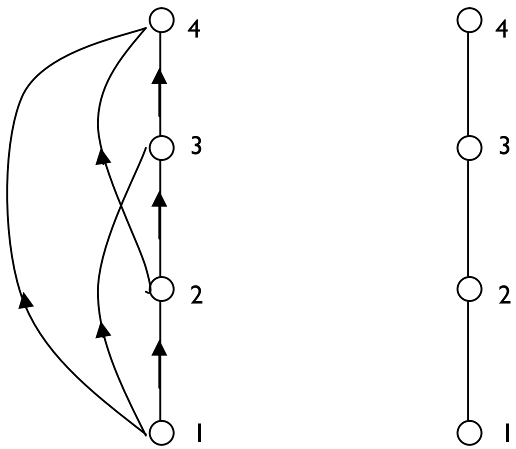
Setiap himpunan terurut parsial dapat disajikan dalam bentuk diagram Hasse. Langkah-langkah dalam menggambar digram Hasse dari suatu poset adalah :

- Gambarkan relasi urutan dalam bentuk directed graph.
- Hapus semua loop (karena refleksif)
- Hapus semua lintasan transitif

Contoh 2.24 :

Gambarkan diagram Hasse dari poset ({1,2,3,4}, ρ = {(a, b) | a < b}}

Jawab :



2.5 *Fungsi*

Misalkan A dan B merupakan himpunan. Suatu fungsi f dari A ke B merupakan sebuah aturan yang mengkaitkan satu (tepat satu) unsur di B untuk setiap unsur di A. Kita dapat menuliskan f(a) = b, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A. Ini berarti bahwa jika f(a) = b dan f(a) = c maka b = c.

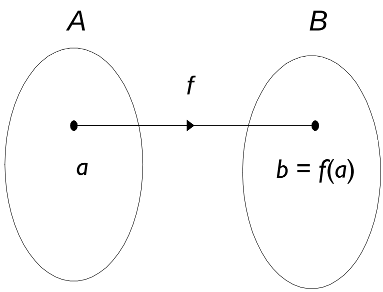
Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, kita dapat menuliskan dalam bentuk :

$$f : A \rightarrow B$$

artinya f memetakan himpunan A ke himpunan B.

A dinamakan daerah asal (domain) dari f dan B dinamakan daerah hasil (codomain) dari f. Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi.

Misalkan f(a) = b, maka b dinamakan bayangan (image) dari a dan a dinamakan pra-bayangan (pre-image) dari b. Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f dinamakan jelajah (range) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin proper subset) dari B.

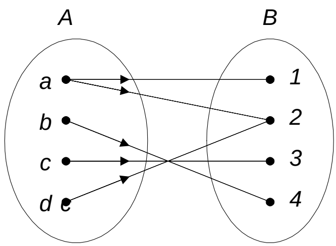


Contoh 2.25 :

Misalkan f : R $\rightarrow$ R didefinisikan oleh f(x) = x^2.
Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan Riil, sedangkan jelajah dari f merupakan himpunan bilangan Riil tidak-negatif.

Contoh 2.26 :

Dibawah ini contoh suatu relasi yang bukan merupakan fungsi :



Berikut ini adalah beberapa contoh fungsi dalam berbagai cara penyajiannya, yaitu :

1. Himpunan pasangan terurut.
   Misalkan f adalah fungsi kuadrat pada {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :
   f = {(2, 4), (3, 9)}

2. Formula pengisian nilai (assignment).
   Contoh 2.27 :
   $f(x) = x^2 + 10$,
   $f(x) = 5x$,

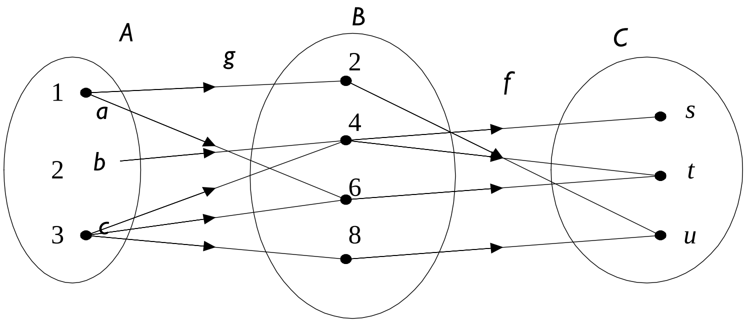
3. Kata-kata
   Contoh 2.28 :
   "f adalah fungsi yang memetakan jumlah bilangan bulat menjadi kuadratnya".
4. Kode program (source code)
   Contoh 2.29 :
   Fungsi menghitung |x| (harga mutlak dari).

```
function abs(x:integer):integer;
        begin
          if x  > 0 then
            abs := x
        else
            abs := –x;
        end;
```

Misalkan g merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f merupakan fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Fungsi komposisi f dan g, dinotasikan dengan f o g, merupakan fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)), \quad \text{untuk suatu } a \text{ di A.}$$

Perhatikan ilustrasi fungsi komposisi dibawah ini :



Contoh 2.30 :

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : Z \rightarrow Z$, diberikan fungsi $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x2$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Jawab :

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan satu-ke-satu (one-to-one) atau injektif (injective) jika tidak ada dua unsur himpunan A yang memiliki bayangan sama pada himpunan B.

Contoh 2.31 :

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : R \rightarrow R$.

Tentukan apakah $f(x)=x^2$ dan $g(x)=x+1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Jawab :

a. $f(x) = x^2$ bukan fungsi satu-ke-satu,
   karena $f(2) = f(-2) = 4$ padahal $-2 \neq 2$.
b. $g(x)=x+1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a + 1 \neq b+1$.
   Misalnya untuk $x = 1$, $g(1)=2$. Sementara itu, untuk $x=2$, $g(2) = 3$.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan pada (onto) atau surjektif (surjective) jika setiap unsur pada himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih unsur himpunan A. Dengan kata lain seluruh unsur B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.

Contoh 2.32:

Misalkan $f : Z \rightarrow Z$ dan $g : R \rightarrow R$.

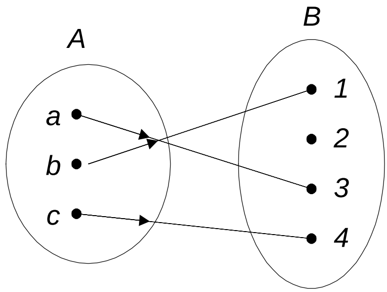
Tentukan apakah $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 1$ merupakan fungsi pada !

Jawab :

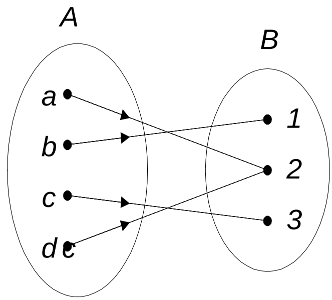
a. $f(x) = x^2$ bukan fungsi pada,
   karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f, yaitu bilangan bulat negatif.
b. $g(x) = x + 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan Riil y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x + 1$.

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan berkoresponden satu-ke-satu atau bijeksi (bijection) jika fungsi tersebut satu-ke-satu dan juga pada.

Agar mendapatkan pengertian yang lebih baik, perhatikan ilustrasi berikut :



Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu

Jika f merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B yang berkoresponden satu-ke-satu maka kita senantiasa dapat menemukan balikan (invers) dari fungsi f. Balikan fungsi dinotasikan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$. Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu disebut juga fungsi yang invertible (dapat dibalik), sehingga kita dapat mendefinisikan suatu fungsi balikannya. Jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu maka fungsi tersebut dikatakan tidak invertible, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 2.33 :

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x + 1$.

Jawab :

Fungsi $f(x) = x + 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi invers fungsi tersebut ada.

Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x + 1$, maka $x = y - 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f\text{-}1(y) = y - 1$.

Contoh 2.34 :

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2$.

Jawab :

Dari contoh sebelumnya, $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2$ adalah fungsi yang tidak invertible.

Fungsi Rekursif

Fungsi merupakan bentuk khusu dari suatu relasi. Sebuah fungsi dinamakan fungsi rekursif, jika fungsi tersebut mengacu pada fungsi itu sendiri. Komponen penyusun fungsi rekursif, meliputi :

1. Nilai Basis
   Komponen ini merupakan nilai awal dari fungsi tersebut.
2. Rekurens
   Komponen ini mendefinisikan argumen fungsi terkait dengan dirinya sendiri.

Contoh fungsi rekursif yang sederhana adalah fungsi faktorial. Perhatikan kembali rumus faktorial :

a. Nilai basis
   $n! = 1$, untuk $n = 0$
b. Rekurens
   $n! = n \times (n-1)!$, untuk $n \geq 1$.

Dengan demikian, saat kita akan mentukan nilai fungsi 4!, maka :

$4! = 4 . 3! = 4 . 3 . 2! = 4 . 3 . 2 . 1! = 4 . 3 . 2. 1 . 0! = 24$

Dalam suatu algoritma, biasanya kemunculan fungsi rekursif terjadi pada suatu looping. Misalkan diketahui nilai fungsi saat $t = 0$ adalah a, selanjutnya fungsi $f(k) = 2 . f(k-1) + 3$. Jadi secara sederhana, yang menjadi peubah pada fungsi rekursif adalah fungsi pada iterasi sebelumnya. Inilah yang menyebabkan kita harus mempunyai suatu nilai awal fungsi tersebut.

Rangkuman

1. Aturan yang menghubungkan antara dua himpunan dinamakan relasi biner.
2. relasi biner R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari cartesian product $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$.
3. Notasi dari suatu relasi biner adalah a R b atau $(a, b) \in R$.
4. Cara menyajikan suatu relasi dapat berupa diagram panah, pasangan terurut, tabel, matriks, dan graf berarah.
5. Jika R_1 dan R_2 masing-masing merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga merupakan relasi dari A ke B.
6. Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat refleksif jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.
7. Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat transitif jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.
8. Suatu relasi R pada himpunan A dinamakan bersifat simetri jika $(a, b) \in R$, untuk setiap $a, b \in A$, maka $(b, a) \in R$.
9. Sebuah relasi pada himpunan A dinamakan relasi ekivalen jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif.
10. Suatu fungsi f dari A ke B merupakan sebuah aturan yang mengkaitkan unsur di A dengan satu (tepat satu) unsur di B.
11. Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan satu-ke-satu (one-to-one) atau injektif (injective) jika tidak ada dua unsur himpunan A yang memiliki bayangan sama pada himpunan B.
12. Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan pada (onto) atau surjektif (surjective) jika setiap unsur pada himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih unsur himpunan A.

13. Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan berkoresponden satu-ke-satu atau bijeksi (bijection) jika fungsi tersebut satu-ke-satu dan juga pada.

Kuis Benar Salah

(Untuk soal no 1 – 5) Diketahui A = {2, 3, 5, 7}, Relasi pada A didefinisikan dalam himpunan :

R = {(2, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (7, 3), (7, 7)}

11. R bersifat refleksif
12. R tidak bersifat simetri
13. R bersifat transitif
14. R tidak bersifat antisimetri
15. $R \subset R^2$
16. Relasi 'faktor dari' pada himpunan A = {1, 2, 4, 8} merupakan relasi transitif.
17. Suatu relasi yang bersifat tidak simetri dinamakan relasi antisimetri.
18. Relasi ekivalen adalah relasi yang bersifat simetri dan transitif
19. Jika setiap unsur pada himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih unsur himpunan A, maka fungsi dari A ke B bersifat injektif.
20. Misalkan R dan S adalah relasi pada A = {a, b, c}, Jika R dan S adalah simetri maka $R \cap S$ adalah simetri.

Pilihan Ganda

1. Relasi ekivalen harus memenuhi sifat :

A. Refleksif dan simetri
B. Refleksif, simetri, transitif
C. Simetri dan transitif
D. Refleksif, antisimetri, transitif
E. Refleksif, simetri , antisimetri

2. Fungsi $f(x) = x^3$ merupakan

A. Fungsi injektif
B. Fungsi Surjektif
C. Fungsi bijektif
D. Fungsi Rekursif
E. Fungsi antisimetri

3. Relasi yang didefinisikan oleh “a R b jika dan hanya jika $a + b \in Z$”, memenuhi sifat dibawah ini, kecuali :

A. Refleksif
B. Rekursif
C. Simetri
D. Anti Simetri
E. Transitif

4. Jika relasi $R = \{(1,2)\}$ maka $R \cup R^{-1}$ bersifat :

A. Tidak transitif
B. Refleksif
C. Tidak antisimetri
D. Tidak simetri
E. Rekursif

5. Diketahui $U_1 = 5$ dan $U_n = 2U_{n-1} + 3$, maka $U_4 = ...$

A. 29
B. 58
C. 61
D. 73
E. 0

6 Suatu relasi dikatakan terurut parsial jika memenuhi sifat :

A. Refleksif dan simetri

B. Refleksif, simetri, transitif

C. Simetri dan transitif

D. Refleksif, antisimetri, transitif

E. Refleksif, simetri , antisimetri

7 Misalkan R adalah relasi pada suatu himpunan berhingga. Jika matriks dari relasi tersebut berbentuk matriks identitas, maka relasi tersebut bersifat :

A Refleksif, tidak transitiff

B Rekursif dan transitif

C Reflesif, tidak simetri

D Simetri, transitif

E Refleksif, terurut total

(untuk soal no 8 – 10) Misalkan R dan S adlah relasi pada A = {1, 2, 3},
R = {(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,3)} dan S = {(1,2), (1,3), (2,1), (3,3)}

8 Himpunan Relasi R^c = ...

A {(1,3), (2,1)}

B {(1,3), (2,1), (2,2), (3,2)}

C {(1,2), (3,3)}

D {(1,3), (2,2), (3,2)}

E {(1,1), (2,2), (3,3)}

9 Himpunan Relasi komposisi R o S = ...

A {(1,3), (2,1), (2,2), (3,2)}

B {(1,3), (2,2), (3,2)}

C {(1,2), (1,3), (2,3), (3,2)}

D {(1,1), (1,3), (2,2), (3,2)}

E {(1,1),(1,2),(1,3) (2,3), (3,2), (3,3)}

10 Himpunan Relasi S^2 = ...

A {(1,3), (2,1), (2,2), (3,2)}

B {(1,3), (2,2), (3,2)}

C {(1,2), (1,3), (2,3), (3,2)}

D {(1,1), (1,3), (2,2), (3,2)}

E {(1,1),(1,2),(1,3) (2,3), (3,2), (3,3)}

Latihan

(Untuk soal no 1 – 3) Diketahui A = {a, b, c, d, e} dan B = {x, y, z}. Misalkan R adalah relasi A ke B yang tertuang dalam himpunan :

R = {(a, y), (a, z), (c, y), (d, x), (d, z)}

1. Tentukan matriks untuk relasi R
2. Gambar graf berarah untuk relasi R
3. Tentukan relasi invers dari relasi R
4. Periksa apakah relasi (dalam bentuk pasangan terurut) berikut merupakan relasi ekivalen :
   a. {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3) }
   b. {(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) }
5. Misalkan matriks dari suatu relasi direpresentasikan dalam bentuk :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Periksa apakah relasi tersebut bersifat refleksif, simetri, antisimetri, dan transitif

6. Periksa apakah relasi yang direpresentasikan dalam bentuk matriks dibawah ini merupakan relasi ekivalen :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Jika suatu relasi R disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Periksa apakah relasi tersebut merupakan relasi terurut !

8. Misalkan A merupakan himpunan bilangan bulat taknol dan R merupakan relasi pada himpunan A X A, yang didefinisikan oleh :

(a, b) R (c, d) jika ad = bc

Tunjukan bahwa R merupakan relasi ekivalen !

9. Jika suatu relasi R disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan dua matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1} (relasi invers) dan komposisi $R \circ R^{-1}$!

10. Gambarkan diagram Hasse dari poset {B , ρ }
dimana B = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12} dan ρ = {(*a*,b) | *a* membagi *b*}}

3 KOMBINATORIK

Overview

Kombinatorik merupakan bagian penting dari matematika diskrit. Dalam bab ini akan di bahas teknik penghitung, permutasi dan kombinasi. Salah satu manfaat teknik penghitung adalah untuk menentukan kompleksitas dalam algoritma. Dengan pengetahuan dasar kombinatorik, diharapkan akan memberikan bekal dalam pemahaman lebih lanjut dalam optimasi maupun pengembangan atau penggunaan dalam aplikasi yang terkait dengan komputerisasi.

Tujuan

1. Mahasiswa memahami konsep dasar kombinatorik.
2. Mahasiswa membedakan permutasi dan kombinasi.
3. Mahasiswa dapat meyelesaikan berbagai persoalan yang terkait dengan kombinatorik.

Prinsip Dasar Menghitung

Dua prinsip dasar yang digunakan dalam menghitung (counting) yaitu aturan pejumlahan dan aturan perkalian.

Prinsip Penjumlahan

Jika suatu himpunan A terbagi kedalam himpunan bagian A_1, A_2, …, A_n, maka jumlah unsur pada himpunan A akan sama dengan jumlah semua unsur yang ada pada setiap himpunan bagian A_1, A_2, …, A_n.

Secara tidak langsung, pada prinsip penjumlahan, setiap himpunan bagian A_1, A_2, …, A_n tidak saling tumpang tindih (saling lepas). Untuk himpunan yang saling tumpang tindih tidak berlaku lagi prinsip penjumlahan, dan ini harus diselesaikan dengan prinsip inklusi-eksklusi yang akan dibahas kemudian.

Contoh 1 :

Seorang guru SD di daerah, mengajar murid kelas 4, kelas 5 dan kelas 6. Jika jumlah murid kelas 4 adalah 25 orang dan jumlah murid kelas 5 adalah 27 orang serta jumlah murid kelas 6 adalah 20 orang, maka jumlah murid yang diajar guru tersebut adalah 25 + 27 + 20 = 72 murid.

Contoh 2 :

Seorang mahasiswa ingin membeli sebuah motor. Ia dihadapkan untuk memilih pada satu jenis dari tiga merk motor, Honda 3 pilihan, Suzuki 2 pilihan, dan Yamaha 2 pilihan. Dengan demikian, mahasiswa tersebut mempunyai mempunyai pilihan sebanyak 3 + 2 + 2 = 7 pilihan.

Prinsip Perkalian

Misalkan sebuah prosedur dapat dipecah dalam dua penugasan. Penugasan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan tugas kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara setelah tugas pertama dilakukan. Dengan demikian, dalam mengerjakan prosedur tersebut ada (n_1 x n_2) cara.

Secara tidak langsung, pada prinsip perkalian, himpunan yang dioperasikan tak perlu saling lepas.

Contoh 1 :

Berapa banyak string dengan panjang tujuh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1)

Jawab :

Setiap suku pada string tersebut mempunyai dua kemungkinan, yaitu 0 atau 1.
Dengan demikian, pada pemilihan string dengan panjang tujuh dapat dilakukan dengan :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 27$$
$$= 128 \text{ string.}$$

Contoh 2 :

Seorang guru SD di daerah, mengajar murid kelas 4, kelas 5 dan kelas 6. Misalkan, jumlah murid kelas 4 adalah 25 orang dan jumlah murid kelas 5 adalah 27 orang serta jumlah murid kelas 6 adalah 20 orang. Jika guru tersebut ingin memilih tiga orang murid dari anak didiknya, dimana seorang murid dari setiap kelas, maka guru tersebut mempunyai 25 x 27 x 20 = 13.500 cara dalam memilih susunan tiga murid tersebut.

Contoh 3 :

Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) dimana

(a) semua angkanya berbeda
(b) boleh ada angka yang berulang.

Jawab :

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
posisi ribuan: 8 kemungkinan angka (1 sampai 9 kecuali angka yang telah dipilih)
posisi ratusan: 8 kemungkinan angka
posisi puluhan: 7 kemungkinan angka
maka banyak bilangan ganjil seluruhnya adalah (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

(b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)
posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
maka banyak bilangan ganjil seluruhnya adalah (5)(9)(10)(10) = 4500

Contoh 5 :

Password suatu login pada sistem komputer panjangnya lima sampai tujuh karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf (huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan) atau angka. Berapa banyak password yang dapat dibuat untuk suatu login ?

Jawab :

Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A – Z) dan banyak angka adalah 10 (0 – 9), jadi seluruhnya 36 karakter.
Untuk password dengan panjang 5 karakter, jumlah kemungkinan password adalah

(36)(36)(36)(36)(36) = 365 = 60.466.176

untuk password dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan password adalah

(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 366 = 2.176.782.336

dan untuk password dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan password adalah

(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 367 = 78.364.164.096

Jumlah seluruh password yang mungkin adalah

60.466.176 + 2.176.782.336 + 78.364.164.096 =

80.601.412.608 buah.

Jadi, untuk suatu login akan mempunyai 80.601.412.608 buah kemungkinan password.

Ketika dua proses dikerjakan dalam waktu yang sama, kita tidak bisa menggunakan prinsip penjumlahan untuk menghitung jumlah cara untuk memilih salah satu dari dua proses tersebut. Untuk menghitung proses tersebut, kita harus mengenal prinsip inklusi-eksklusi.

Contoh :

Berapa banyak byte yang dapat disusun oleh 8-bit, yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '00'?

Jawab :

Misalkan,
A adalah himpunan byte yang dimulai dengan '11',
B adalah himpunan byte yang diakhiri dengan '00',
$A \cap B$ adalah himpunan byte yang berawal dengan '11' dan berakhir dengan '00',
dan
$A \cup B$ adalah himpunan byte yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '00'

Maka jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan A adalah

$(1)(1)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^6$

Tulis, $|A| = 2^6$
$= 64$

Sementara itu, jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan B adalah $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(1)(1) = 2^6$

Jadi, $|B| = 2^6 = 64$,

Dengan cara yang sama, jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan $A \cap B$ adalah $(1)(1)(2)(2)(2)(2)(1)(1) = 2^4$

Sehingga $|A \cap B| = 2^4 = 16$.

maka

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 64 + 64 - 16 \\ &= 112.\end{aligned}$$

Dengan demikian, jumlah byte yang dapat disusun oleh 8-bit, yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '00' adalah 112 buah.

Permutasi dan Kombinasi

Permutasi

Suatu permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan. Dengan kata lain, permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi prinsip perkalian. Misalkan diberikan suatu himpunan A dengan jumlah anggota adalah n, maka susunan terurut yang terdiri dari r buah anggota dinamakan permutasi-r dari A, ditulis P(n, r). Agar lebih jelas dalam perhitungannya, perhatikan penjelasan berikut ini :

Jika r > n, jelas bahwa P(n, r) = 0, karena tak mungkin menyusun r anggota dari A yang hanya terdiri dari n buah anggota dimana n < r.

Jika $r \leq n$,

Unsur pertama permutasi dapat dipilih dengan n cara karena terdapat n objek dalam himpunan. Unsur permutaso kedua dipilih dari n – 1 objek, adalah dengan n – 1 cara, karena satu anggota telah terpilih. Demikian pula usur ketiga permutasi dipilih dari n – 2 objek, adalah dengan n – 2 cara, karena dua anggota telah terpilih. Hal ini dilakukan terus menerus sehingga urutan terakhir dipilih dari n – r + 1 objek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, pemilihan objek dalam susunan r buah objek dari n buah objek dapat dilakukan dengan :

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \text{ cara}$$

Dengan demikian, permutasi r objek dari n buah objek adalah jumlah kemungkinan urutan r buah objek yang dipilih dari n buah objek, dengan $r \leq n$, pada setiap kemungkinan penyusunan r buah objek tidak ada urutan objek yang sama, yaitu :

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 1 :

Misalkan S = {p, q, r}. Berapa cara yang mungkin dalam penyusunan dua huruf pada S sehingga tidak ada urutan yang sama ?

Jawab :

Susunan dua huruf yang mungkin adalah :

pq, pr, qr, qp, rp, rq

Jadi penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara.

Dalam penyusunan ini, dapat menggunakan definisi permutasi, yaitu :

$$P(3,\ 2) = \frac{3\,!}{(3-2)!}$$
$$= \frac{3\,.2.1}{1}$$
$$= 6$$

Dengan menggunakan definisi permutasi, penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara.

Contoh 2 :

Misalkan kita mempunyai lima buah bola dengan warna yang berbeda satu sama lain dan 3 buah kotak. Kita akan memasukan bola tersebut kedalam kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan bola dengan warna berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Jawab :

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);
kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan);
kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 3 bola (ada 3 pilihan).
Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (5)(4)(3)
= 60

Jika menggunakan definisi permutasi maka :

$$P(5,\ 3) = \frac{5\,!}{(5-3)!}$$
$$= \frac{5.4.3\,.2.1}{2.1}$$
$$= 60$$

Kombinasi

Misalkan r merupakan unsur bilangan bulat tak negatif. Yang dimaksud dengan kombinasi r dari suatu himpunan B yang terdiri dari n anggota (objek) yang berbeda adalah jumlah himpunan bagian dari B yang memiliki anggota r buah objek. Interpretasi yang lain tentang kombinasi adalah menyusun (memilih) objek sejumlah r dari n buah objek yang ada.

Contoh 1 :

Misalkan A = {p, q, r }, tentukan semua himpunan bagian dari A yang memiliki kardinalitas dua.

Jawab :

Himpunan bagian tersebut antara lain : {p, q}, {p, r}, dan {q, r}.
Jadi kita mempunyai kombinasi :

pq, pr, dan qr

Pada himpunan, urutan unsur pada himpunan tidak diperhatikan. Dengan demikian, kombinasi 2 dari himpunan A (penyusunan dua huruf tanpa memperhatikan urutan) adalah 3, yaitu pq, pr, dan qr. Ini berbeda, pada saat kita mendefinisikan permutasi (urutan diperhatikan), penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara, yaitu pq, pr, qr, qp, rp, dan rq.

Contoh 2 :

Misalkan ada 2 buah bola yang berwarna sama dan 3 buah kotak. Bola akan dimasukan ke dalam kotak sehingga setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola. Berapa jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak tersebut ?

Jawab :

Misalkan ketiga kotak tersebut ditaruh memanjang, maka ada 3 cara memasukan dua bola tersebut kedalam kotak, yaitu :

Cara I : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak pertama (kotak I dan kotak II).

Cara II : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak yang paling ujung (kotak I dan kotak III) .

Cara III : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak terakhir (kotak II dan Kotak III) .

Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang berwarna sama ke dalam n buah kotak adalah :

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ini merupakan rumus umum kombinasi yang dinotasikan oleh C(n,r) atau $\binom{n}{r}$

Diketahui ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama) akan dimasukan kedalam n buah kotak.

Misalnya komposisi bola tersebut adalah :

n_1 bola berwarna 1,

n_2 bola berwarna 2,

$\vdots$

n_k bola berwarna k,

jadi $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maksimum satu buah bola) ?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah

$P(n, n) = n!$.

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

$\vdots$

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!n_2!...n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Cara lain:

Ada $C(n, n_1)$ cara untuk menempatkan n_1 buah bola yang berwarna 1.

Ada $C(n - n_1, n_2)$ cara untuk menempatkan n_2 buah bola berwarna 2.

Ada $C(n - n_1 - n_3, n_3)$ cara untuk menempatkan n_3 buah bola berwarna 3.

$\vdots$

Ada $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$ cara untuk menempatkan n_k buah bola berwarna k.

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2, n_3) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!} \ldots \frac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-...-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = C(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak.

Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola. Jumlah cara memasukkan bola C(n, r).

Jika masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola), maka Jumlah cara memasukkan bola, yaitu :

C(n + r – 1, r) = C(n + r –1, n – 1).

Contoh :

20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Jawab :

n = 5, r_1 = 20 (apel) dan r_2 = 15 (jeruk)
Membagi 20 apel kepada 5 anak: C(5 + 20 – 1, 20) cara,
Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: C(5 + 15 – 1, 15) cara.
Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah
C(5 + 20 – 1, 20) × C(5 + 15 – 1, 15) = C(24, 20) × C(19, 15)

Koefisien Binomial

Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, dengan teorema binomial, perpangkatan berbentuk $(x + y)^n$ dapat dijabarkan dalam bentuk segitiga Pascal berikut ini :

$(x + y)^0 = 1$
$(x + y)^1 = x + y$
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Secara umum, diperoleh rumus sebagai berikut :

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1} y + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k} y^k + \ldots + C(n, n) y^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\; x^{n-k} y^k$$

Bilangan C(n, k) merupakan koefisien untuk $x^{(n-k)}y^k$ dinamakan koefisien binomial.

Contoh :

Jabarkan $(2x + y)^3$.

Jawab :

Misalkan a = 2x dan b = y,

$(a + b)^3 = C(3, 0)\ a^3 + C(3, 1)\ a^2b^1 + C(3, 2)\ a^1b^2 + C(3, 3)\ b^3$

$= 1\ (2x)^3 + 3\ (2x)^2\ (y) + 3\ (2x)\ (y)^2 + 1\ (y)^3$

$= 8\ x^3 + 12x^2\ y + 6x\ y^2 – y^3$

Contoh :

Jabarkan $(2x – 3)^3$.

Jawab :

Misalkan a = 2x dan b = –3,

$(a + b)^3 = C(3, 0)\ a^3 + C(3, 1)\ a^2b^1 + C(3, 2)\ a^1b^2 + C(3, 3)\ b^3$

$= 1\ (2x)^3 + 3\ (2x)^2\ (–3) + 3\ (2x)\ (–3)^2 + 1\ (–3)^3$

$= 8x^3 – 36x^2 + 54x – 27$

Contoh :

Tentukan suku kelima dari penjabaran perpangkatan (x – y)5.

Jawab :

$(x – y)^5 = (x + (–y))^5$.

Suku kelima dari hasil penjabaran adalah:

$C(5, 4)\ x^{5-4}\ (–y)^4 = –10\ x\ y^4$.

Rangkuman

1. Dua prinsip dasar yang digunakan dalam menghitung (counting) yaitu aturan pejumlahan dan aturan perkalian.
2. Suatu permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan.
3. Misalkan B terdiri dari n anggota (objek) yang berbeda. kombinasi r dari suatu himpunan B adalah jumlah himpunan bagian dari B yang memiliki anggota r buah objek.
4. Rumus permutasi r objek dari n buah objek adalah :

   $$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

5. Rumus kombinasi r dari n anggota himpunan dinotasikan oleh C(n,r) = $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
6. Pada polinom $(x - y)^n$ maka bilangan C(n, k) merupakan koefisien untuk $x^{(n-k)}y^k$ dan dinamakan koefisien binomial.

Kuis Benar Salah

1. Cara menghitung dengan prinsip penjumlahan sama dengan prinsip perkalian
2. Nilai dari 5! = 120
3. Suatu permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan tidak memperhatikan urutan.
4. Memilih kemungkinan formasi 3 tim futsal dari 15 orang adalah menggunakan prinsip kombinasi.
5. Nilai P(5, 3) = 15
6. Nilai C(5, 2) = 10
7. $(2x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
8. P (10, 5) = C (10, 2)
9. Cara menghitung permutasi menggunakan prinsip perkalian
10. C(n + r – 1, r) = C(n + r –1, n – 1)

Pilihan Ganda

1. Jika ada 3 dosen laki-laki dan 2 dosen perempuan, maka mahasiswa dapat memilih salah satu dari dosen tersebut dalam ….

A. 1 cara
B. 2 cara
C. 3 cara
D. 5 cara
E. 6 cara

2. Dalam berapa cara sebuah himpunan mahasiswa yang terdiri dari 50 orang memilih seorang ketua, sekertaris dan bendahara, dimana tidak ada mahasiswa yang mendapat jabatan lebih dari satu.

A. 25 ! cara
B. 25 cara
C. 25x3 cara
D. 3 cara
E. 25 x 24 x23 cara

3. $\binom{8}{2} = ...$

A. 2
B. 8
C. 28
D. 56
E. 128

4. Seorang peternak membeli 3 sapi, 4 kambing dan 5 ayam dari seorang penjual yang memiliki 4 sapi, 5 kambing dan 7 ayam. Dalam berapa cara peternak tersebut dapat memilih ketiga hewan itu ?

A. 420 cara
B. 140 cara
C. 35 cara
D. 7 cara
E. 1 cara

5. Ada 9 jenis mainan yang akan dibagikan buat 4 orang anak. Setiap anak diberi 2 jenis mainan, kecuali yang termuda diberi 3 jenis mainan. Ada berapa kemungkinan cara pembagian mainan tersebut ?

A. $9!$ cara
B. $9!/2!$ cara
C. $9!/(2!.3!)$ cara
D. $9!/(3!.2!.2!)$ cara
E. $9!/(3!.2!.2!.2!)$ cara

Latihan

1. Tentukan nilai :

   a. $\binom{15}{13}$ b. $\binom{11}{9}$

2. Tentukan nilai :

   a. P(6, 3) b. C(5, 1)

3. Tunjukan bahwa : $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

4. Tentukan *n* jika :

   a. P(n,2) = 72 b. P(n,4) = 42 P(n,2)

5. 20 mahasiswa akan dibagi dalam tiga tim. Dalam berapa kemungkinan formasi tim yang dapat dibentuk.

6. Lima orang akan duduk menghadiri seminar. Dalam berapa cara mereka dapat menempati tempat duduk, jika
   a. 5 tempat duduk diletakan dalam satu baris
   b. 5 tempat duduk dibuat melingkar mengelilingi meja bundar

7. Pada toko 'duny donut' menyediakan empat jenis donat dengan rasa yang berbeda (stok masing-masing rasa 10 buah). Berapa jumlah cara pengambilan, jika seseorang membeli donat tersebut enam buah.

8. Berapa banyak string dengan panjang sepuluh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1), yang memuat bit satu tepat tujuh buah.

9. Dalam suatu pacuan kuda dengan 12 peserta (diasumsikan semuanya dapat mencapai finish), Berapa jumlah kemungkinan susunan pemenang (pertama, kedua, dan ketiga) dalam pacuan tersebut.

10. Dengan menggunakan teorema binomial, tentukan :
    a. koefisien x^5y^8 dalam $(x + y)^{13}$
    b. koefisien x^7 dalam $(1 + x)^{11}$
    c. koefisien x^9 dalam $(1 – x)^{19}$

4 TEORI GRAF

Overview

Graf digunakan untuk menyelesaikan dalam berbagai masalah, antara lain : penentuan lintasan terpendek baik untuk maslaah komunikasi maupun transportasi, frekuensi assignment dalam telekomunikasi, optimasi penjadwalan, dan lain lain. Pembahasan graf pada bab ini meliputi definisi dan terminologi graf, masalah lintasan terpendek serta beberapa sifat penting yang biasa digunakan dalam aplikasi.

Tujuan

1. Mahasiswa memahami konsep dan terminologi graf.
2. Mahasiswa memodelkan masalah dalam bentuk graf.
3. Mahasiswa dapat meyelesaikan berbagai persoalan yang terkait dengan teori graf.

4.1 *Definisi Graf*

Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan sejumlah berhingga obyek yang disebut simpul (vertices, vertex) dan himpunan sisi (edges) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. terdiri dari dari Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.

Notasi sebuah graf adalah G = (V, E), dimana :

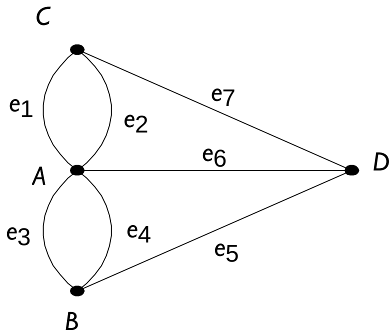
V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul (vertices), misalkan $V = \{ v_1 , v_2 , ... , v_n \}$

E merupakan himpunan sisi – sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul,

misalkan $E = \{e_1 , e_2 , ... , e_n \}$

Contoh :

Graf dari masalah jembatan KÖnigsberg dapat disajikan sebagai berikut :



Misalkan graf tersebut adalah G(V, E) dengan

V = { A, B, C, D }

E = { (A, C), (A, C), (A, B), (A, B), (B, D), (A, D), (C, D)}

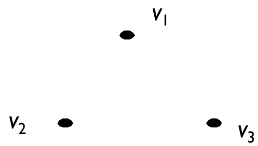
= $\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Pada graf tersebut sisi e_1 = (A, C) dan sisi e_2 = (A, C) dinamakan sisi-ganda (multiple edges atau paralel edges) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul A dan simpul C. Begitu pun dengan sisi e_3 dan sisi e_4. Sementara itu, pada graf diatas, tidak terdapat gelang (loop), yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Dari definisi graf, himpunan sisi (E) memungkinkan berupa himpunan kosong. Jika graf tersebut mempunyai himpunan sisi yang merupakan himpunan kosong maka graf tersebut dinamakan graf kosong (null graph atau empty graph).

Contoh :

Graf kosong dengan 3 simpul (graf N3)



Dengan memperhatikan kondisi sisinya, suatu graf dapat dikategorikan sebagai graf tidak berarah dan graf berarah. Graf tidak berarah, seperti telah dijelaskan pada contoh graf untuk jembatan Königsberg. Sementara itu, graf berarah (directed graph, digraph) merupakan graf yang mempunyai sisi yang berarah, artinya satu buah simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut merupakan simpul awal (initial vertex) dan simpul yang lain dikatakan sebagai simpul akhir (terminal vertex).

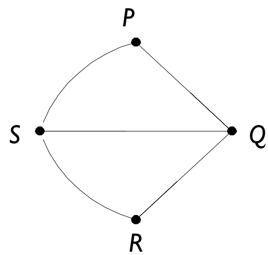
Beberapa jenis graf yang perlu diketahui adalah :

1. Graf sederhana (*simple graph*).

   Graf sederhana merupakan graf tak berarah yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda.

   Contoh :

   Graf sederhana



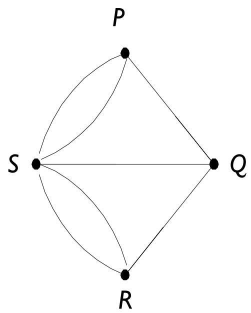
Selanjutnya, pernyataan suatu graf pada buku ini merepresentasikan bahwa graf tersebut adalah graf sederhana. Kecuali apabila ada penambahan lain, misalkan graf semu atau graf berarah, dan lain-lain.

2. Graf Ganda (*multigraph*).

   Graf ganda merupakan graf tak berarah yang tidak mengandung gelang (*loop*).

   Contoh :

   Graf ganda



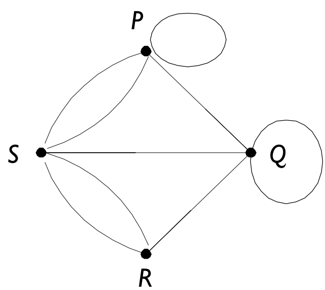
Dengan demikian, graf sederhana pun merupakan graf ganda (multi graph).

3. Graf semu (*Pseudo graph*)

   Graf semu merupakan graf yang boleh mengandung gelang (loop).

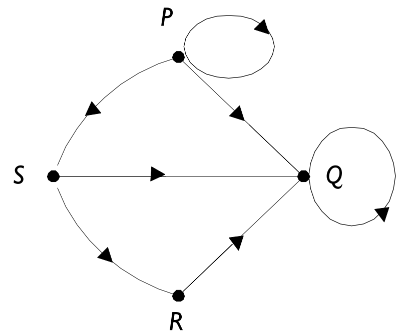
   Contoh :

   Graf semu :

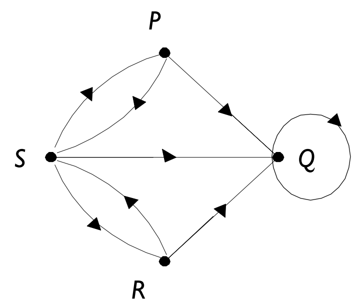


4. Graf berarah (directed graph atau digraph).
   Graf berarah merupakan graf yang setiap sisinya mempunyai arah dan tidak mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul (tak mempunyai sisi ganda)

   Contoh :
   a. Graf berarah :



   b. Graf ganda berarah (directed multigraph).
      Graf ganda berarah merupakan graf berarah yang membolehkan adanya sisi ganda pada graf tersebut (boleh mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul).



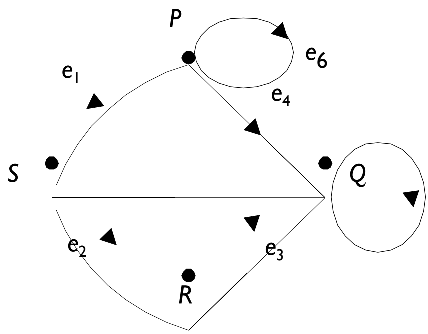
Dari jenis-jenis graf yang telah dijelaskan di atas, kita dapat membuat ringkasan (sebagai bahan perbandingan) [3], seperti tertulis pada tabel 4.1.

Tabel 4.1 Jenis-jenis graf

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Gelang (loop) dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

Contoh :

Graf berikut merupakan graf berarah :



Terlihat bahwa e_1 = (P, S), e_3 = (R, Q), dan e_5 = (Q, Q)
Simpul P merupakan simpul awal bagi sisi e_1 dan simpul S merupakan simpul akhir bagi sisi e_1.

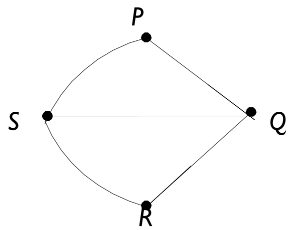
4.2 *Terminologi Graf*

Ada beberapa terminologi graf yang perlu diketahui, antara lain : ketetanggaan antara dua simpul, bersisian , derajat suatu simpul, dan lain-lain. Berikut ini adalah beberapa terminoogi yang penting, yaitu :

1. Bertetangga (*Adjacent*)
   Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi.

Contoh :

Perhatikan graf berikut :



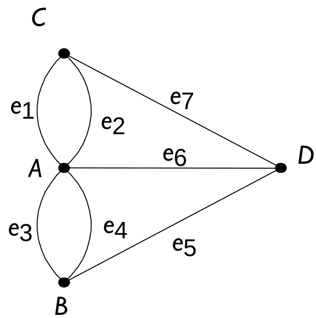
Pada graf diatas : simpul P bertetangga dengan simpul Q dan S, tetapi simpul P tidak bertetangga dengan simpul R.

2. Bersisian (*Incidency*)

Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$.

Contoh :

Perhatikan graf dari masalah jembatan Königsberg berikut ini :



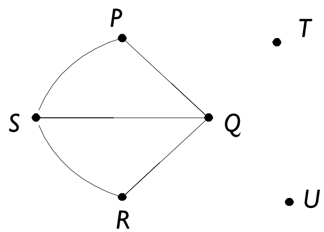
maka e_1 bersisian dengan simpul A dan simpul C, tetapi sisi tersebut tidak berisian dengan simpul B.

3. Simpul Terpencil (Isolated Vertex)

Jika suatu simpul tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya maka simpul tersebut dinamakan simpul terpencil.

Contoh :

Perhatikan graf berikut :



Simpul T dan simpul U merupakan simpul terpencil.

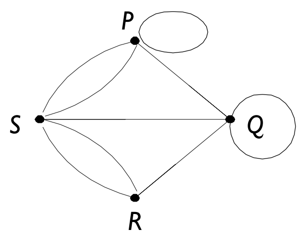
5. Derajat (Degree)

Derajat suatu simpul merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Misalkan, suatu simpul v mempunyai 3 buah sisi yang bersisian dengannya maka dapat dikatakan simpul tersebut berderajat 3, atau dinotasikan oleh d(v) = 3.

Contoh 1:

Perhatikan graf berikut :



Pada graf diatas :

d(P) = d(Q) = d (S)= 5, sedangkan d(R) = 3.

Derajat sebuah simpul pada suatu graf berarah dijelaskan sebagai berikut :

$d_{in}(v)$ merupakan jumlah busur yang masuk ke simpul v

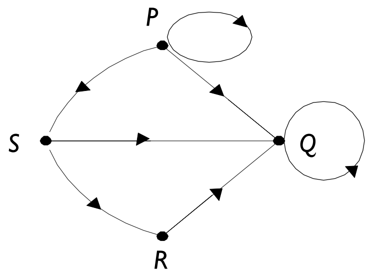
$d_{out}(v)$ merupakan jumlah busur yang keluar dari simpul v

Dengan demikian derajat pada simpul tersebut, diperoleh :

$$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$$

Contoh 2 :

Perhatikan graf berarah berikut ini :



Pada graf diatas :

d_{in} (P) = 1 dan d_{out} (P) = 3 maka d (P) = 4
d_{in} (Q) = 4 dan d_{out} (Q) = 1 maka d (Q) = 5
d_{in} (R) = 1 dan d_{out} (R) = 1 maka d (R) = 2
d_{in} (S) = 1 dan d_{out} (S) = 2 maka d (S) = 3

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Jika G = (V, E) merupakan suatu graf, maka dapat ditulis :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Contoh 3 :

Perhatikan graf pada contoh 1. Jumlah sisi pada graf tersebut adalah 9, sehingga Jumlah derajat pada graf tersebut adalah :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2.\ |E|$$
$$= 2.9$$
$$= 18$$

atau

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(P) + d(Q) + d(R) + d(S)$$
$$= 5 + 5 + 5 + 3$$
$$= 18$$

Perhatikan graf pada contoh 2.

Jumlah sisi pada graf tersebut adalah 7, sehingga Jumlah derajat pada graf tersebut adalah :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2.\ |E| = 2.7\ = 14$$

atau

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(P) + d(Q) + d(R) + d(S)$$

$$= 4 + 5 + 2 + 3 = 14$$

Dengan demikian, jika kita ingin menggambar sebuah graf dengan derajat masing-masing simpul diketahui, dan ternyata jumlah derajat seluruh simpul tersebut adalah ganjil maka hal ini tak mungkin terjadi.

6. Lintasan (*Path*)

Jalur dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G merupakan barisan sebuah sisi atau lebih (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), …, (x_{n-1}, x_n) pada G, dimana $x_0 = v_0$ dan $x_n = v_T$.

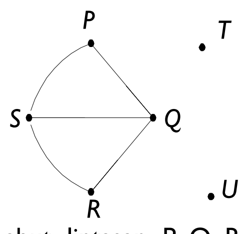
Pada suatu jalur tidak mengalami pengulangan sisi. Jalur dapat juga dinotasikan oleh simpul-simpul yang dilewati, yaitu :

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

Jika jalur yang digunakan tidak melakukan pengulangan simpul maka jalur ini dinamakan **lintasan (*path*)**. Suatu lintasan dikatakan memiliki panjang n, jika lintasan ini memuat n buah sisi, yang dilewati dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G. Suatu jalur yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan **Sirkuit (Circuit)**. Sementara itu, lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan **silkus (*cycle*)**.

Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



Pada graf tersebut lintasan P, Q, R memiliki panjang 2. Sementara itu lintasan P, Q, S, R memiliki panjang 3. Lintasan P, Q, R, S, P dinamakan siklus dengan panjang 4. Antara simpul P dan U maupun T tidak dapat ditemukan lintasan.

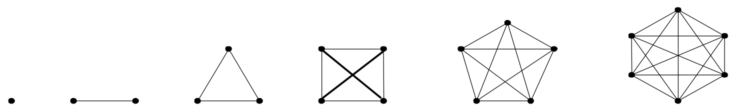
Panjang suatu siklus terpendek pada graf sederhana adalah tiga, artinya siklus tersebut harus melewati tiga sisi. Sedangkan, Panjang suatu siklus terpendek pada graf semu adalah satu, artinya siklus tersebutdapat berupa loop. Diameter suatu graf merupakan panjang lintasan terpanjang pada graf tersebut.

Berikut ini adalah beberapa graf yang sering digunakan :

a. Graf Lengkap (Complete Graph)

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung (oleh satu sisi) ke semua simpul lainnya. Dengan kata lain, setiap simpulnya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan Kn. Jumlah sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah n(n – 1)/2 sisi.

Contoh :

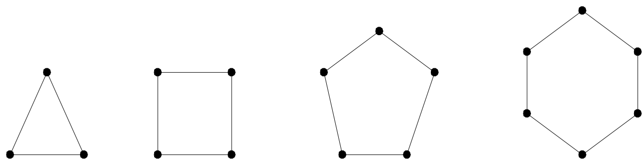


K1 K2 K3 K4 K5 K6

Gambar 4.3 Grap lengkap Kn, 1 ≤ n ≤ 6

b. Graf Lingkaran (Cycle Graph)

Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran n simpul dilambangkan dengan C_n.

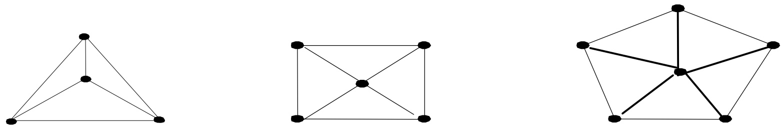


C3 C4 C5 C6

Gambar 4.4 Grap Lingkaran Cn, 3 ≤ n ≤ 6

c. Graf Roda (Wheels Graph)

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran Cn, dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut.

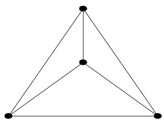


W3 W4 W5

Gambar 4.5 Grap Roda Wn, 3 ≤ n ≤ 5

d. Graf Teratur (Regular Graphs)

Graf teratur merupakan graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul pada grap teratur adalah r, maka graf tersebut dinamakan graf teratur berderajat r. Jumlah sisi pada graf teratur dengan n simpul adalah $\frac{nr}{2}$ sisi.



Gambar 4.5 Graf Reguler Berderajat 3

e. Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)

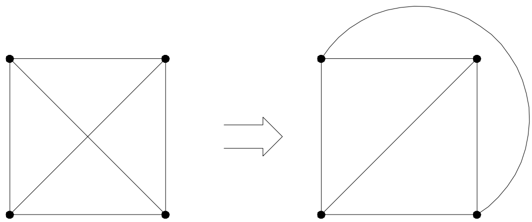
Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf planar. Jika tidak, maka graf tersebut dinamakan graf tak-planar.

Beberapa contoh dari graf planar adalah

- Semua graf lingkaran merupakan graf planar
- Graf lengkap K1, K2, K3, K4 merupakan graf planar

Tetapi graf lengkap Kn untuk n ≥ 5 merupakan graf tak-planar.

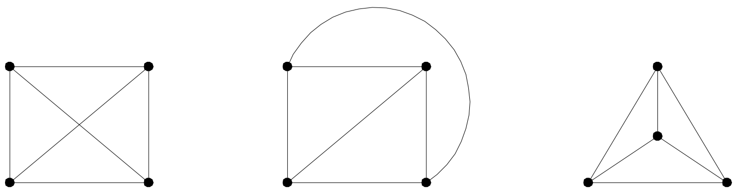
Ilustrasi untuk graf planar K4.



Gambar 4.6 K_4 adalah graf planar

Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf bidang (plane graph).

Sementara itu, untuk membedakan antara graf planar dan graf bidang, perhatikan ilustrasi pada graf K_4 berikut ini :



(a) (b) (c)

Gambar 4.7 Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

Beberapa hal tentang graf planar G(V, E), antara lain :

(Formula Euler) Misalkan G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul, dan r merupakan jumlah daerah pada graf planar tersebut maka $r = e - v + 2$.

Jika G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul ($v \geq 3$) maka $e \leq 3v - 6$ (ketaksamaan Euler).

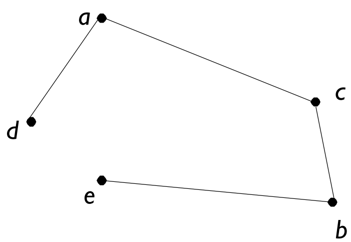
Jika G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul ($v \geq 3$) dan tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 maka $e \leq 2v - 4$.

f. Graf bipartit (Bipartite Graph)

Sebuah graf sederhana G dikatakan graf bipartit jika himpunan simpul pada graf tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang disjoint, misalkan V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 dan sebuah simpul pada V_2. Dengan demikian, pada grap bipartit tidak ada sisi yang menghubungkan dua simpul pada V_1 atau V_2. Graf bipartit tersebut dinotasikan oleh $G(V_1, V_2)$.

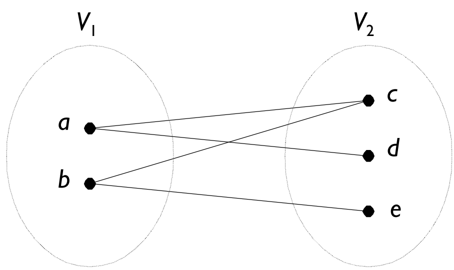
Contoh :

Graf G berikut merupakan graf bipartit :



Graf diatas dapatdirepresentasikan menjadi graf bipartit $G(V_1, V_2)$, dimana $V_1 = \{a, b\}$ dan $V_2 = \{c, d, e\}$

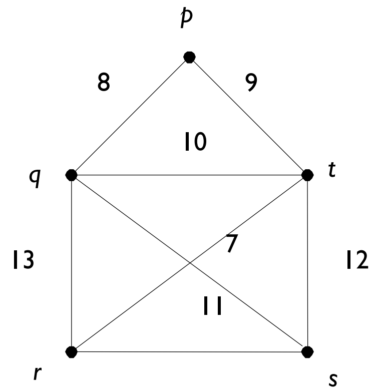
Representasi graf bipartit, dari graf pada contoh diatas adalah :



Gambar 4.7 Graf bipartit

g. Graf Berlabel

Graf berlabel adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah label (bobot).



Gambar 4.8 Graf K5 yang sisinya dilabeli

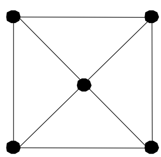
Graf dapat juga diberi label pada simpulnya, tergatung representasi label yang diberikan.

4.3 *Keterhubungan dan Sub Graf*

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 pada suatu graf dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2. Jika setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V pada suatu graf G terdapat lintasan dari v_i dan v_j maka graf tersebut dinamakan graf terhubung (connected graph). Jika tidak, maka G dinamakan graf tak-terhubung (disconnected graph).

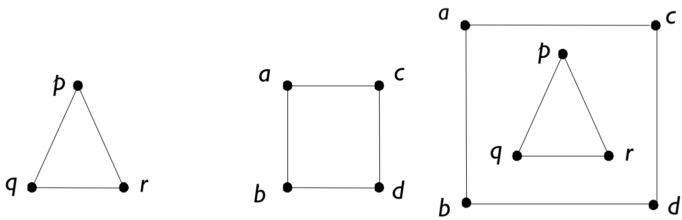
Contoh 1 :

Graf roda merupakan salah satu contoh graf terhubung:



Contoh 2 :

Perhatikan graf lingkaran berikut ini :

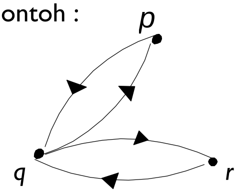


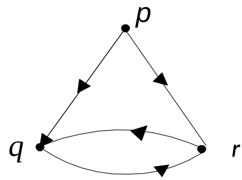
(i) (ii) (iii)

Jelas bahwa (i) C_3 dan (ii) C_4 merupakan graf terhubung. Sementara itu, graf (iii) merupakan graf tak-terhubung, karena tak ada lintasan yang menghubungkan simpul salah satu simpul pada {p, q, r} dengan salah satu simpul pada {a, b, c, d}.

Selanjutnya, kita akan meninjau tentang keterhubungan pada suatu graf berarah. Suatu graf berarah G dikatakan terhubung jika kita menghilangkan arah pada graf tersebut (graf tak berarah) maka graf tersebut merupakan graf terhubung. Dua simpul, u dan v, pada graf berarah G disebut terhubung kuat (strongly connected) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u. Jika u dan v tidak terhubung kuat, dengan kata lain graf tersebut hanya terhubung pada graf tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan terhubung lemah (weakly connected). Jika setiap pasangan simpul pada suatu graf berarah graf berarah G terhubung kuat maka graf G tersebut dinamakan graf terhubung kuat (strongly connected graph). Jika tidak, graf tersebut dinamakan graf terhubung lemah.

Contoh :

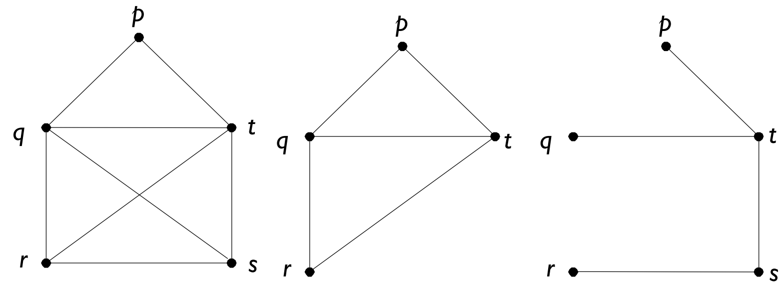




Graf berarah terhubung kuat Graf berarah terhubung lemah

Misalkan G = (V, E) merupakan suatu graf, maka G_1 = (V_1, E_1) dinamakan sub graf (subgraph) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Komplemen dari sub graf G1 terhadap graf G adalah graf G2 = (V2, E2) sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya. Misalkan, G_1 = (V_1, E_1) merupakan sub graf dari graf G = (V, E). Jika V_1 =V (yaitu G_1 memuat semua simpul dari G) maka G_1 dinamakan *Spanning Subgraph* (subraf merentang).

Contoh :



(a) Graf G1 (b) subgraf (c) Spanning subgraf

Gambar 4.9 Subgraf dan Spanning Subgraf dari Suatu Graf

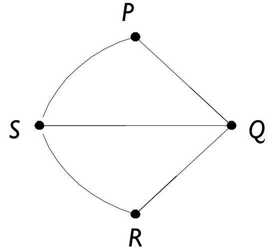
4.4 *Matriks Ketetanggaan* (adjacency matrix) *dan Matriks Bersisian* (incidency matrix) *dari Suatu Graf*

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah memperkenalkan bahwa dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi. Matriks ketetanggaan untuk graf sederhana merupakan matriks bukur sangkar yang unsur-unsurnya hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu). Baris dan kolom pada matriks ini, masing-masing merupakan representasi dari setiap simpul pada graf tersebut. Misalkan aij merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

Jika a_{ij} = 1 maka hal ini berarti simpul i dan simpul j bertetangga.
Jika a_{ij} = 0 maka hal ini berarti simpul i dan simpul j tidak bertetangga.

Contoh :

Perhatikan graf sederhana berikut ini :



Matriks ketetanggaan dari graf tersebut adalah sebagai berikut :

$$\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Terlihat bahwa matriks tersebut simetris dan setiap unsur diagonalnya adalah nol (0).

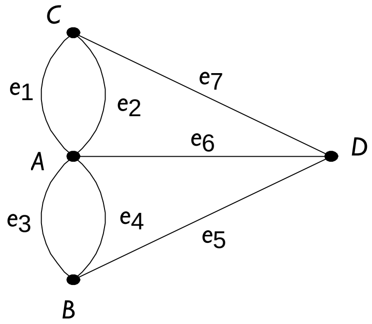
Sementara itu, suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain e = (v_1, v_2). Seperti halnya matriks ketetanggaan, unsur-unsur matriks bersisian pun hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu), tapi tidak harus bujur sangkar. Hal ini disebabkan, baris dan kolom pada matriks bersisian, masing-masing merepresentasikan simpul dan sisi pada graf yang dimaksud. Misalkan aij merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

Jika a_{ij} = 1 maka hal ini berarti simpul ke-i dan sisi ke-j adalah bersisian.

Jika a_{ij} = 0 maka hal ini berarti simpul ke-i dan sisi ke-j tidak bersisian.

Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



Bentuk matriks bersisian dari graf tersebut adalah :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

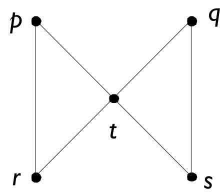
4.5 *Eulerian dan Hamiltonian*

4.5.1 Sirkuit Euler

Sirkuit Euler merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Euler dinamakan graf Euler (*Eulerian graph*), sedangkan graf yang memuat suatu jalur Euler dinamakan graf semi Euler (*semi-Eulerian graph*).

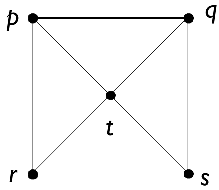
Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



G_1

Graf G_1 merupakan graf Euler. karena memiliki jalur yang membentuk sirkuit, yaitu : pr–rt– ts – sq – qt – tp .
Sementara itu,



G_2

Sementara itu, terlihat bahwa graf G_2 merupakan graf semi Euler karena graf tersebut memiliki jalur yang melalui masing-masing sisi didalam graf tersebut tepat satu kali. Jalur tersebut adalah : pq – qs – st – tp – pr – rt – tq.

Beberapa sifat tentang Graf Eulerian dan Garf Semi Euler :

Suatu graf G merupakan graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut berderajat genap.

Graf terhubung G merupakan graf Semi Euler (memiliki jalur Euler) jika dan hanya jika di dalam graf tersebut terdapat dua simpul berderajat ganjil.

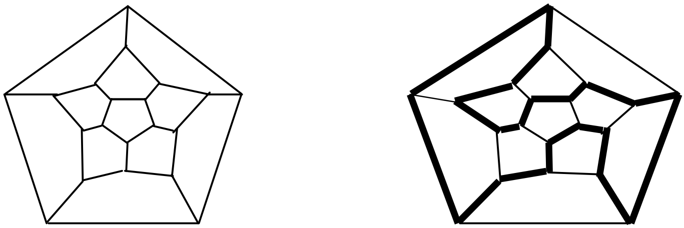
Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf Euler jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama.

Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf semi Euler jika dan hanya jika G terhubung setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama, kecuali dua simpul yaitu simpul petama (simpul awal jalur) memiliki derajat keluar satu lebih besar dari pada derajat masuk dan simpul yang kedua (simpul akhir) memiliki derajat masuk satu lebih besar dari pada derajat keluar.

4.5.2 Sirkuit Hamilton

Sir Wiliam Hamilton pada tahun 1859 membuat permainan dodecahedron yang ditawarkan pada pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terdiri dari 12 buah pentagonal dan ada 20 titik sudut (setiap sudut diberi nama ibu kota setiap negara) . Permainan ini membentuk perjalanan

keliling dunia yang mengunjungi setiap ibu kota Negara tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal. Ini tak lain adalah mencari sirkuit Hamilton.
Masalah tersebut dapat diilustrasikan dalam gambar berikut ini :



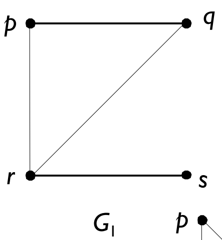
Gambar 4.10 Sirkuit Hamilton dari Suatu Graf

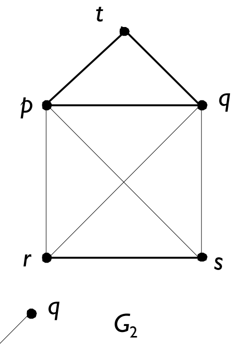
Pada ilustrasi diatas, sirkuit hamilton adalah lintasan yang dicetak tebal. Lintasan Hamilton suatu graf merupakan lintasan yang melalui setiap simpul dalam graf tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Hamilton.

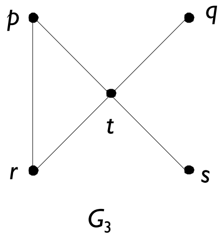
Dengan demikian, sirkuit Hamilton merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Hamilton dinamakan graf Hamilton (Hamiltonian graph), sedangkan graf yang memuat lintasan Hamilton dinamakan graf semi Hamilton (semi- Hamiltonian graph).

Contoh :

Perhatikan tiga graf di bawah ini :







Graf G_1 merupakan graf semi Hamilton, lintasan hamiltonnya adalah :

s – r – p – q – r.

Sedangkan graf G2 merupakan graf hamilton, sirkuit hamiltonya adalah t – p – r – q – p – s – q – t .

Sementara itu pada graf G3 tidak terdapat lintasan maupun sirkuit hamilton.

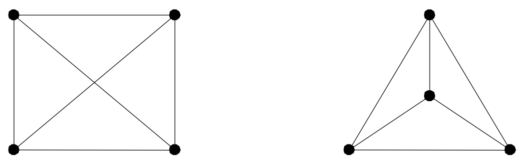
Misalkan G merupakan graf sederhana dengan jumlah simpulnya adalah n buah (dimana n paling sedikit tiga buah). Jika derajat setiap simpulnya paling sedikit n/2 simpul maka graf G tersebut merupakan graf Hamilton.

Beberapa hal tentang graf hamilton :

- Setiap graf lengkap merupakan graf Hamilton.
- Pada suatu graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ buah sirkuit Hamilton.
- Pada suatu graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

4.6 *Graf Isomorfik*

Perhatikan dua graf berikut ini :



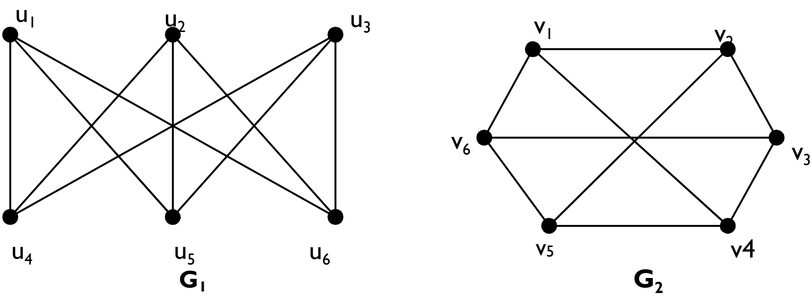
Gambar 4.10 Sirkuit Hamilton dari Suatu Graf

Dua buah graf diatas, terdiri dari empat buah simpul dimana setiap simpul adalah berderajat tiga. Walaupun secara geometri kedua tersebut berbeda tetapi pada prinsipnya kedua graf tersebut adalah sama. Ini dapat diperlihatkan saat simpul pada graf kedua yang berada di tengah ditarik keluar maka graf yang baru ini akan sama dengan graf pertama. Kedua graf ini dinamakan isomorfik. Dua graf yang isomorfik tak hanya kedua graf tersebut, masih banyak graf-graf yang lain yang isomorfik.

Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan **isomorfik** jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul pada kedua graf tersebut dan antara sisi-sisi keduanya sehingga jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v pada G_1 maka sisi e' pada G_2 juga bersisian dengan simpul u' dan v'.
Dua buah graf dikatakan isomorfik jika memenuhi ketiga syarat berikut :
1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Agar lebih mudah memahami apakah dua graf isomorfik atau tidak, berikut adalah cara menunjukan dua graf yang isomorfik.

Contoh :



Periksa apakah kedua graf tersebut isomorfik? Jika ya, tentukan simpul-simpul yang saling berkorespondensi antara G_1 dan G_2

Jawab :

Ya, kedua graf tersebut adalah isomorfik. Terlihat graf tersebut memuat simpul dimana setiap simpulnya masing-masing berderajat tiga. Simpul yang saling berkorespondensi dari kedua graf tersebut adalah :

- simpul u1 dengan simpul v1
- simpul u2 dengan simpul v3
- simpul u3 dengan simpul v5
- simpul u4 dengan simpul v6
- simpul u5 dengan simpul v4
- simpul u6 dengan simpul v2

Pada dua graf yang isomorfik, kedua graf tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama, tentunya setelah matriks yang berkorespondensi diurutakan dalam urutan yang sama. Perhatikan matriks ketetanggaan dari kedua graf tersebut. Dibawah ini adalah matriks ketetanggaan dari graf G_1 :

$$M_{G1} = \begin{array}{c} \\ u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u1 & u2 & u3 & u4 & u5 & u6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sementara itu, berikut ini adalah matriks ketetanggaan dari graf G_2 :

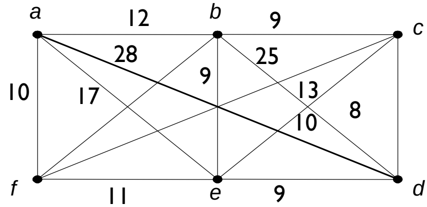
$$M_{G2} = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v3 \\ v5 \\ v6 \\ v4 \\ v2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v1 & v3 & v5 & v6 & v4 & v2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Terlihat bahwa kedua graf tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama, yaitu $M_{G1} = M_{G2}$.

4.7 *Beberapa Aplikasi Graf*

a. Lintasan dan Jalur Terpendek

Misalkan G merupakan graf berbobot (weighted graph), yaitu setiap sisi dari graf G memiliki bobot tertentu, seperti pada ilustrasi dibawah ini :



Gambar 4.11 Ilustrasi Lintasan Terpendek pada Graf

Lintasan terpendek dari a ke d adalah 22, dengan lintasan a – b – d. Karena jika kita m enggunakan lintasan a – d, a – e – d, dan a – b – c – d maka lintasan itu memiliki bobot masing masing 28, 26, dan 29.
Hal yang biasanya dilakukan adalah menentukan lintasan terpendekpada graf tersebut. Dengan kata lain, menentukan lintasan yang memiliki total bobot minimum. Beberapa hal tersebut, contohnya :

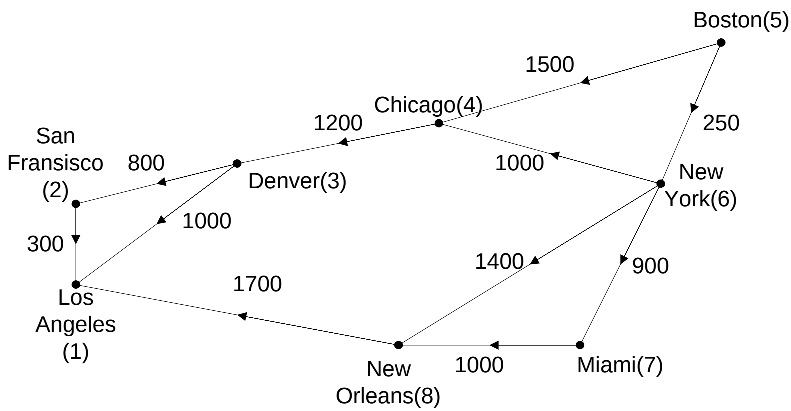
- Menentukan jarak terpendek/waktu tempuh tersingkat/ongkos termurah antara dua buah kota
- Menentukan waktu tersingkat pengiriman pesan (message) antara dua buah terminal pada jaringan komputer.

Beberapa jenis persoalan lintasan terpendek, antara lain:

- Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu.
- Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul.
- Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain.
- Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

Algoritma Lintasan Terpendek Dijkstra

Algoritma Dijkstra merupakan suatu algoritma yang digunakan untuk menentukan lintasan terpendek dari suatu simpul ke semua simpul lain. Untuk mempermudah dalam pemahaman Algoritma Dijkstra, berikut ini [2] adalah graf dimana simpul-simpulnya merepresentasikan kota-kota di Amerika Serikat dan sisi dari graf tersebut merepresentasikan jarak antar dua kota (dalam kilometer).
Contoh :



Dengan menggunakan Algoritma Dijkstra akan ditentukan jarak terpendek dari kota Boston ke kota-kota yang lainnya.

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	*S*								*D*							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
Inisial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	∞	∞	∞	1500	0	250	∞	∞
1	5	5	0	0	0	0	1	0	0	0	∞	∞	∞	1500	∞	250	∞	∞
2	6	5, 6	0	0	0	0	1	1	0	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
3	7	5, 6, 7	0	0	0	0	1	1	1	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
4	4	5, 6, 4	0	0	0	1	1	1	1	0	∞	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
5	8	5, 6, 8	0	0	0	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
6	3	5, 6, 4, 3	0	0	1	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
7	2	5, 6, 4, 3, 2	0	1	1	1	1	1	1	1	3350	3250	2450	1250	∞	250	1150	1650

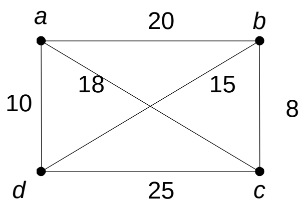
Jadi, lintasan terpendek dari:

5 ke 6 adalah 5, 6 dengan jarak = 250 km
5 ke 7 adalah 5, 6, 7 dengan jarak = 1150 km
5 ke 4 adalah 5, 6, 4 dengan jarak = 1250 km
5 ke 8 adalah 5, 6, 8 dengan jarak = 1650 km
5 ke 3 adalah 5, 6, 4, 3 dengan jarak = 2450 km
5 ke 2 adalah 5, 6, 4, 3, 2 dengan jarak = 3250 km
5 ke 1 adalah 5, 6, 8, 1 dengan jarak = 3350 km

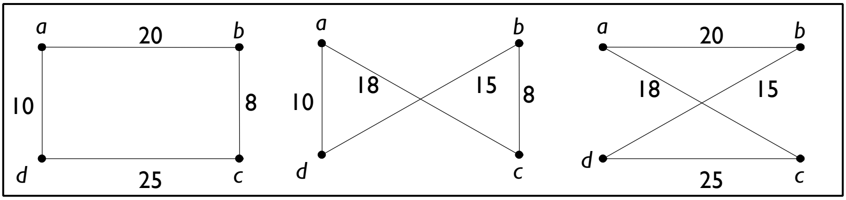
b. Persoalan Perjalanan Pedagang (Travelling Salesperson Problem - TSP)
Seperti halnya contoh pada (a), misalkan diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan ia harus menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan. Ini merupakan masalah menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.

Contoh :

Tentukan sirkuit dengan lintasan terpendek yang berasal dari garf lengkap K_4 berikut ini.



Jumlah sirkuit Hamilton di dalam graf lengkap dengan n simpul: (n - 1)!/2. Graf di atas memiliki (4 – 1)!/2 = 3 sirkuit Hamilton, yaitu:



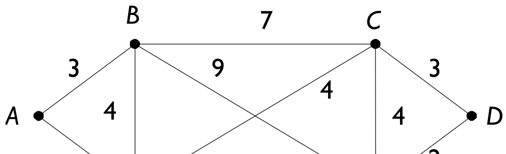
Sirkuit 1 = (a, b, c, d, a) memiliki panjang = 20 + 8 + 25 + 10 = 53
Sirkuit 2 = (a, c, d, b, a) memiliki panjang = 18 + 8 + 15 + 10 = 51
Sirkuit 3 = (a, c, b, d, a) memiliki panjang = 20 + 15 + 25 + 18 = 73
Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah sirkuit 2 = (a, c, d, b, a) atau (a, d, b, c, a) dengan panjang sirkuit adalah 51.

c. Persoalan Tukang Pos Cina (Chinese Postman Problem)

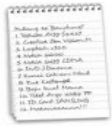
Permasalahan ini, pertama kali dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962, yaitu : Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan. Permasalahan tersebut merupakan masalah menentukan sirkuit Euler di dalam suatu graf.

Contoh :

Tentukan jalur yang dilalui oleh tukang pos, sehingga setiap jalan dilewati



Jalur yang dilalui tukang pos adalah A, B, C, D, E, F, C, E, B, F, A.



Rangkuman

1. Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan sejumlah berhingga obyek yang disebut simpul (vertices, vertex) dan himpunan sisi (edges) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut.
2. Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi.
3. Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$.
4. Derajat suatu simpul merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
5. **Jalur** dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G merupakan barisan sebuah sisi atau lebih (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), …, (x_{n-1}, x_n) pada G, dimana $x_0 = v_0$ dan $x_n = v_T$. Pada suatu jalur tidak mengalami pengulangan sisi.
6. Jika jalur yang digunakan tidak melakukan pengulangan simpul maka jalur ini dinamakan **lintasan (*path*)**. Suatu lintasan dikatakan memiliki panjang n, jika lintasan ini memuat n buah sisi, yang dilewati dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G.
7. Suatu jalur yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan **Sirkuit (Circuit)**. Sementara itu, lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan **silkus (*cycle*)**.
8. **Sirkuit Euler** merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Euler dinamakan graf Euler (*Eulerian graph*), sedangkan graf yang memuat suatu jalur Euler dinamakan graf semi Euler (*semi-Eulerian graph*).
9. Lintasan Hamilton suatu graf merupakan lintasan yang melalui setiap simpul dalam graf tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Hamilton.
10. Dua buah graf dikatakan isomorfik jika memenuhi ketiga syarat berikut :
    a. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
    b. Mempunyai jumlah sisi yang sama
    c. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu.

Kuis Benar Salah

1. Kita tidak bisa menggambar graf sederhana dengan 5 simpul dimana masing-masing simpulnya berderajat 4, 3, 3, 2, 1
2. Kita dapat menggambar graf sederhana dengan 5 simpul dimana masing-masing simpulnya berderajat 6, 4, 4, 2, 2
3. Setiap graf eulerian maka ia merupakan graf semi euler
4. Graf K_5 merupakan graf hamilton
5. Graf C_4 merupakan graf bipartit.
6. Suatu Graf reguler berderajat tiga dengan empat simpul merupakan graf lengkap.
7. Pada graf semi euler, setiap simpul berderajat genap.
8. W_3 merupakan graf teratur dengan derajat setiap simpulnya adalah tiga.
9. Lintasan terpendek dalam suatu graf adalah diameter graf tersebut.
10. Dua graf yang isomorfik senantiasa mempunyai matriks ketetanggan yang sama.

Pilihan Ganda

1. Graf C_4 isomorfik dengan graf….

A. K_4
B. W_3
C. $K_{2,2}$
D. $K_{3,3}$
E. P_4

2. Pada graf lengkap dengan lima simpul terdapat sirkuit Hamilton sebanyak ..

A. 1 buah
B. 2 buah
C. 3 buah
D. 4 buah
E. 5 buah

3. Yang bukan merupakan graf planar adalah….

A. Graf C_4
B. Graf K_4
C. Graf W_4
D. $K_{2,2}$
E. K_5

4. Jumlah sisi pada suatu graf lengkap K_7 adalah ….

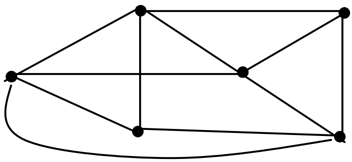
A. 21
B. 20
C. 18
D. 15
E. 12

5. Diameter suatu graf roda W_{10} adalah ….

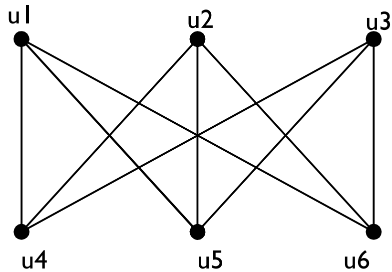
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

Latihan

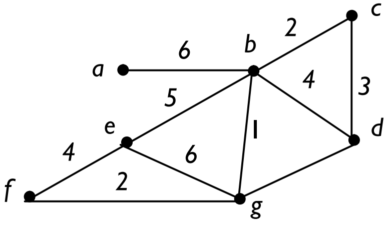
1. Gambarkan graf dengan lima buah simpul, dimana masing-masing simpul berderajat 2, 3, 4, 1, dan 3 !
2. Periksa apakah graf berikut merupakan graf Euler atau graf semi Euler atau bukan keduanya ! (jelaskan)



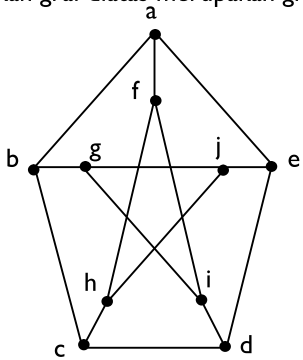
(untuk soal no. 3 – 7) Perhatikan graf berikut :



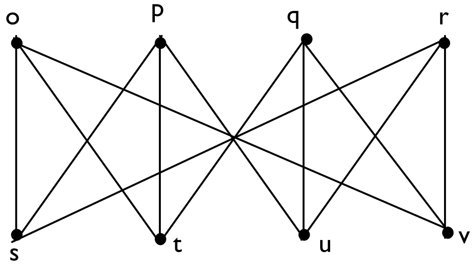
3. Tentukan matriks ketetanggaan graf tersebut
4. Berikan contoh spanning subgraf dari graf tersebut
5. Sebutkan graf lengkap yang merupakan subgraf dari graf tersebut
6. Tentukan jalur terpendek dari graf berlabel berikut :



7. Periksa apakah graf diatas merupakan graf Hamiltonian?

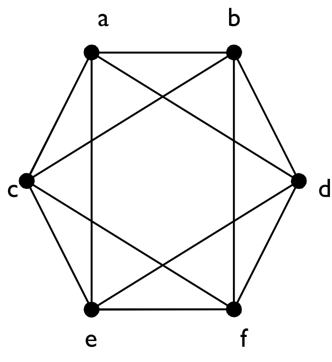


8. Diketahui graf berikut :

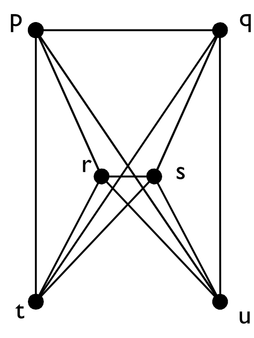


Periksa apakah graf diatas merupakan graf planar?
Jika ya, tuliskan graf bidangnya. Jika tidak, jelaskan alasannya

(**Untuk Soal no. 9 – 13**) Perhatikan dua graf berikut



G_1



G_2

9. Apakah graf G_1 atau G_2 merupakan Graf Euler, Graf Semi Euler atau bukan keduanya? Jelaskan!
10. Periksa apakah graf G_1 atau G_2 merupakan Graf Hamilton, Graf Semi Hamilton atau bukan keduanya? Jelaskan! Tuliskan salah satu sirkuit atau lintasan Hamilton jika ada.
11. Periksa apakah graf G_1 atau G_2merupakan graf lengkap atau graf teratur atau bukan keduannya. Jelaskan!
12. Periksa Apakah graf G_1 atau G_2 merupakan graph Bipartite? Jelaskan
13. Apakah graf G_1 isomorfik dengan graf G_2?
    Jika tidak jelaskan alasannya.Jika ya jelaskan dan buktikan dengan matriks ketetanggaan.

5 POHON DAN PEWARNAAN GRAF

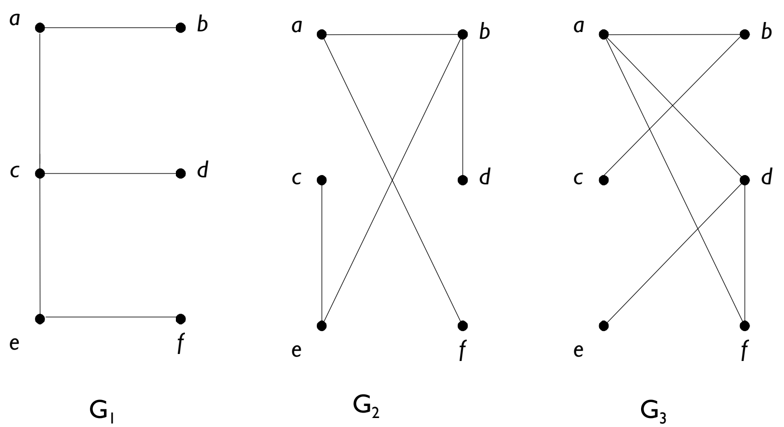
Overview

Pohon merupakan bagian penting dalam teori graf, yaitu graf yang tidak memiliki cycle. Ini biasa digunakan dalam teori biner, dari mulai ekspresi pohon biner maupun penelusuran pohon biner. Aplikasi pohon yang dibahas pada bab ini, dari mulai pohon ekspresi sampai penggunaanya pada *decision tree* dan pengkodean hufman. Sementara itu, pewarnaan merupakan salah satu aplikasidalam bidang optimasi. Pembahasan pewarnaan graf meliputi pewarnaan simpul dan pewarnaan area. Pewarnaan graf bayak digunakan dalam optimasi masalah penjadwalan, yaitu menentukan warna minimum dalam graf yang merupakan representasi dari masalah penjadwalan.

Tujuan

1. Mahasiswa memahami konsep pohon dan pewarnaan graf.
2. Mahasiswa memahami aplikasi minimum spanning tree maupun pewarnaan graf.
3. Mahasiswa mampu memahami dan meyelesaikan berbagai persoalan dan fenomena yang terkait dengan pohon dan pewarnaan graf.

Pohon (tree) merupakan salah satu bentuk khusus dari struktur suatu graf. Misalkan A merupakan sebuah himpunan berhingga simpul (vertex) pada suatu graf G yang terhubung. Untuk setiap pasangan simpul di A dapat ditentukan suatu lintasan yang menghubungkan pasangan simpul tersebut. Suatu graf terhubung yang setiap pasangan simpulnya hanya dapat dihubungkan oleh satu lintasan tertentu, maka graf tersebut dinamakan **pohon (tree)**. Dengan kata lain, pohon merupakan graf tak-berarah yang terhubung dan tidak memiliki siklus maupun sirkuit.



Gambar 5.1 G1 dan G2 adalah pohon, G3 bukan pohon

Hutan (forest) merupakan kumpulan pohon yang saling lepas. Dengan kata lain, hutan merupakan graf tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graf terhubung tersebut adalah pohon. Pada gambar 6. 1 G4 merupakan salah satu contoh hutan, yaitu hutan yang terdiri dari dua pohon.

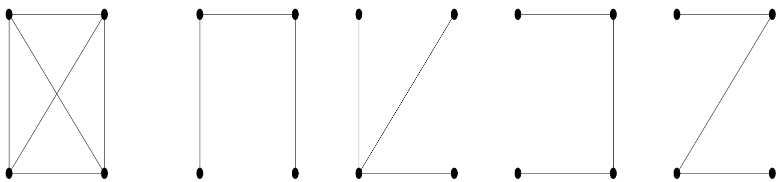
Berikut adalah beberapa sifat pohon :

- Misalkan G merupakan suatu graf dengan n buah simpul dan tepat n – 1 buah sisi. Jika G tidak mempunyai sirkuit maka G merupakan pohon.
- Suatu pohon dengan n buah simpul mempunyai n – 1 buah sisi.

- Setiap pasang simpul di dalam suatu pohon terhubung dengan lintasan tunggal.
- Misalkan G adalah graf sederhana dengan jumlah simpul n, jika G tidak mengandung sirkuit maka penambahan satu sisi pada graf hanya akan membuat satu sirkuit.

5.1 *Pohon Merentang Minimum* (Minimun Spanning Tree)

Spanning Tree dari suatu graf terhubung merupakan subgraf merentang (*spanning subgraph*) yang berupa pohon. Pohon merentang diperoleh dengan cara menghilangkan sirkuit di dalam graf tersebut.



G T1 T2 T3 T4

Gambar 5.2 Graf dan Spanning Tree

Terlihat bahwa T1, T2, T3, T4 merupakan spanning tree dari graf G. Perlu diperhatikan bahwa setiap graf terhubung berbobot paling sedikit mempunyai satu buah spanning tree. Pohon rentang yang memiliki bobot minimum dinamakan pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*). Salah satu contoh aplikasi spanning tree adalah menentukan rangkaian jalan dengan jarak total seminimum mungkin yang menghubungkan semua kota sehingga setiap kota tetap terhubung satu sama lain.

Dalam menentukan suatu minimum spanning tree dari suatu graf terhubung, kita dapat menentukannya dengan mengunakan dua cara yaitu algoritma Prim dan algoritma Kruskal.

Algoritma Prim memiliki langkah-langkah sebagai berikut :

Pilih sisi dari graf G yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T.

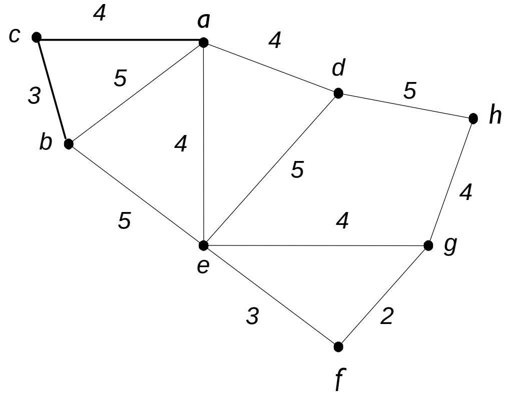
Pilih sisi (u, v) dalam G yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di T, dengan syarat sisi tersebut tidak membentuk sirkuit di T. Masukkan (u, v) ke dalam T.

ulangi langkah 2 sebanyak n – 2 kali.

Jumlah langkah seluruhnya dalam algoritma Prim adalah sebanyak jumlah sisi di dalam spanning tree dengan n buah simpul, yaitu (n – 1) buah.

Contoh 5.1 :

Tentukan minimum spanning tree dari graf dibawah ini :



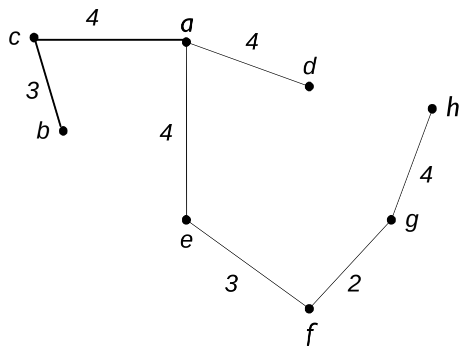
Jawab :

Pilih sisi fg sehingga kita mempunyai T ({f, g}, fg)

Langkah selanjutnya dapat dipilih sisi ef karena sisi tersebut berbobot minimum yang bersisian dengan simpul f .

Selanjutnya pilih sisi ae atau gh karena sisi tersebut berbobot minimum yang bersisian dengan simpul pada T, yaitu e dan g.

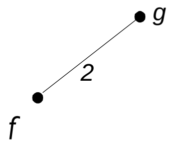
Jika proses ini dilanjutkan terus maka akan diperoleh minimum spanning tree seperti dibawah ini :



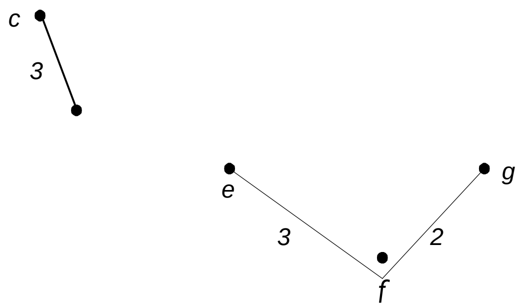
Terlihat bahwa spanning tree tersebut mempunyai total bobot 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 = 24.

Langkah-langkah dalam algoritma Kruskal agak berbeda dengan algoritma Prim. Pada algoritma Kruskal, semua sisi dengan bobot yang minimal dimasukan kedalam T secara berurutan.

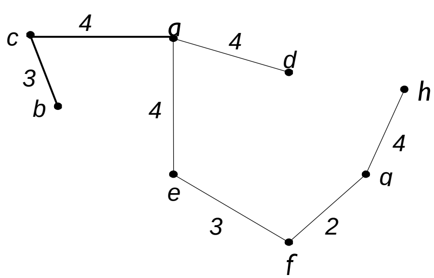
Langkah-langkah dalam menentukan minimum spanning tree dengan algoritma Kruskal adalah sebagai berikut :
Langkah I : T berbentuk seperti pohon berikut



Langkah II : memasukan sisi-sisi yang berbobot 3 kedalam sehingga T berbentuk

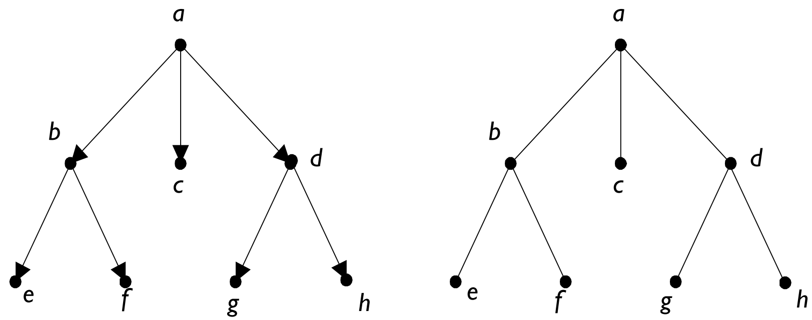


Langkah III : memasukan sisi-sisi yang berbobot 4 kedalam sehingga akhirnya diperoleh minimum spanning tree berikut :



5.2 *Pohon Berakar*

Pada suatu pohon, yang sisi-sisinya diberi arah sehingga menyerupai graf berarah, maka simpul yang terhubung dengan semua simpul pada pohon tersebut dinamakan akar. Suatu pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar maka pohon tersebut dinamakan pohon berakar (rooted tree), lihat gambar 5.3 (a). Simpul yang berlaku sebagai akar mempunyai derajat masuk sama dengan nol. Sementara itu, simpul yang lain pada pohon itu memiliki derajat masuk sama dengan satu. Pada suatu pohon berakar, Simpul yang memiliki derajat keluar sama dengan nol dinamakan daun. Selanjutnya, komponen arah biasanya diabaikan sehingga pohon berakar digambarkan seperti graf tak berarah pada gambar 5.3 (b)



(a) (b)

Gambar 5.3 Pohon berakar

Beberapa terminologi pada pohon berakar yang perlu diketahui adalah sebagai berikut :

a. Anak (*child atau children*) dan Orangtua (*parent*)

Jika ada satu sisi antara dua simpul maka simpul yang lebih dekat dengan akar dinamakan orang tua sedangkan sisi yang lain dinamakan anak. Pada gambar 5.3 terlihat bahwa b, c, dan d adalah anak-anak simpul a, dan a merupakan orangtua dari anak-anak itu. Sementara itu, g dan h merupakan anak dari d, sedangkan d merupakan orang tua dari g dan h.

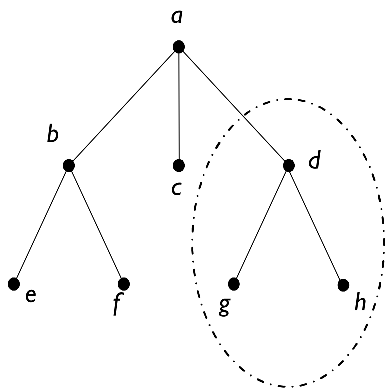
Selanjutnya, a dinamakan leluhur (*ancestor*) dari e, f, g dan h. sedangkan e, f, g dan h dinamakan keturunan (*descendant*) dari a. Sementara itu, f adalah saudara kandung (sibling) e, tetapi, g bukan saudara kandung e, karena orangtua mereka berbeda.

b. Lintasan (*path*)

Lintasan dari a ke h adalah a, d, h. dengan panjang lintasannya adalah 2. Pada suatu pohon, lintasan antara dua simpul sembarang adalah unik, yaitu hanya ada satu lintasan.

c. *Subtree* (Upapohon)

Misalkan d adalah suatu simpul pada pohon, maka subgraf (pohon) yang terdiri dari d bersama dengan seluruh keturunannya dinamakan *subtree*. Pada contoh dibawah ini, yang di dalam lingkaran merupakan *subtree* dari pohon utamanya.



c. Derajat (degree)

Derajat sebuah simpul adalah jumlah anak pada simpul tersebut.
Pada gambar 5.3 :

- Simpul yang berderajat 0 adalah simpul c, e, f, g, dan h
- Tak ada simpul yang berderajat 1.
- Simpul yang berderajat 2 adalah simpul b dan d.
- Simpul yang berderajat 3 adalah simpul a.

Jadi, derajat yang dimaksudkan di sini adalah derajat-keluar. Derajat maksimum dari semua simpul merupakan derajat pohon itu sendiri. Jadi, pohon pada gambar 5.3 berderajat 3

d. Daun (leaf)

Simpul yang berderajat nol (atau tidak mempunyai anak) disebut daun. Simpul c, e, f, g dan h adalah daun.

e. Simpul Dalam (internal vertex)

Simpul (selain akar) yang mempunyai anak disebut simpul dalam. Simpul b dan d dinamakan simpul dalam.

f. Tingkat (level)

Akar mempunyai level sama dengan 0, sedangkan simpul yang lain bergantung pada posisi masing-masing. Misalkan, pada gambar 5.3, terlihat bahwa b, c dan d berada pada tingkat 2. Sedangkan e, f, g dan h berada pada tingkat 3.

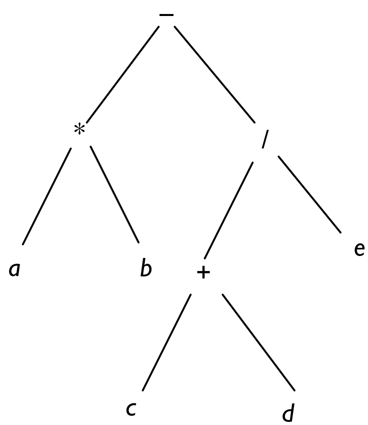
Pohon berakar yang urutan anak-anaknya penting (diperhatikan) maka pohon yang demikian dinamakan pohon terurut (ordered tree). Sedangkan, pohon berakar yang setiap simpul cabangnya mempunyai paling banyak n buah anak disebut pohon n-ary. Jika n = 2, pohonnnya disebut pohon biner (binary tree).

Contoh 5.2 :

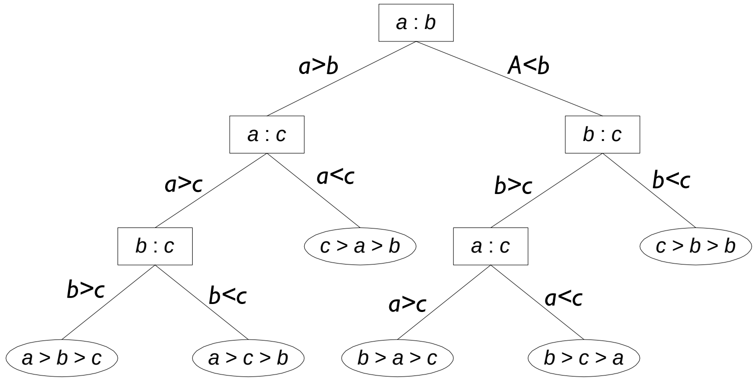
Berikut adalah beberapa contoh pohon biner :

1. Pohon Ekspresi

   Ekspresi aritmetika (a * b) – ((c + d) / e) dapat dinyatakan dalam suatu pohon biner, dimana peubah sebagai daun dan operator aritmetika sebagai simpul dalam dan akar.

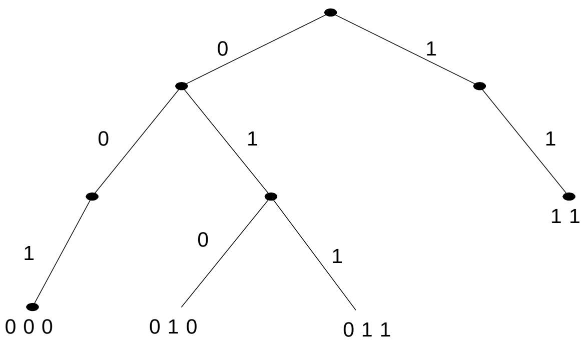


2. Pohon keputusan (*Decision Tree*)
   Suatu pohon dimana internal vertexnya berkorespondensi dengan sebuah keputusan dinamakan pohon keputusan. Salah satu kegunaan pohon keputusan adalah dalam memilah-milah kompleksitas dari berbagai jenis algoritma.



Gambar 5.4 Pohon Keputusan untuk Mengurutkan Tiga UnsurBerbeda [4]

3. Kode awalan (*prefix code*)
   Kode awalan merupakan himpunan kode (salah satunya adalah kode biner) sedemikian sehingga tidak ada anggota himpunan yang merupakan awalan dari kode yang lain.
   Contoh :
   { 001, 010, 011, 11} merupakan kode awalan, jika dinyatakan dalam pohon biner, yaitu :



4. Kode Hufman
Pengkodean Hufman sering sekali digunakan dalam bidang kompresi data. Perhatikan tabel kode ASCII berikut ini :

Simbol	Kode ASCII
A	01000001
B	01000010
C	01000011
D	01000100

Jadi rangkaian bit untuk string 'ADABACA' , dapat direpresentasikan dalam bentuk :
01000001010001000100000101000010010000010100001101000001
Panjang kode dari string tersebut adalah
$7 \times 8 = 56$ bit (7 byte).

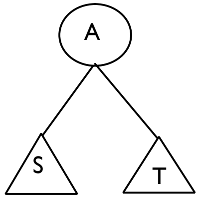
Tabel 5.1 Tabel kode Huffman untuk string 'ADABACA'

Simbol	Kekerapan	Peluang	Kode Huffman
A	4	4/7	0
B	1	1/7	10
C	1	1/7	11
D	1	1/7	110

Sehingga rangkaian bit untuk string ' ADABACA':
01100100110
atau yang semula panjangnya 56 bit cukup dituliskan dalam 11 bit.

5.3 *Penelusuran Pohon Biner*

Misalkan, berikut ini adalah pohon biner dimana A merupakan akar pohon biner tersebut. Sementara itu, S dan T merupakan upapohon (subtree) dari pohon biner.

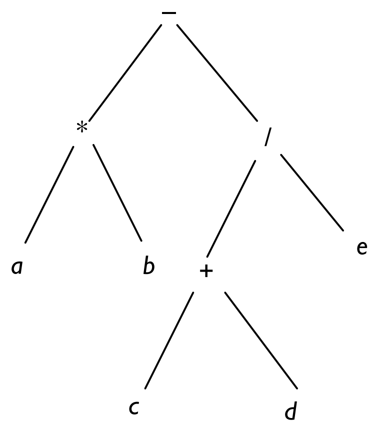


Ada tiga jenis penelusuran pohon biner diatas, antara lain :

1. Preorder : A, S, T
   - kunjungi A
   - kunjungi S secara preorder
   - kunjungi T secara preorder
2. Inorder : S , A, T
   - kunjungi S secara inorder
   - kunjungi A
   - kunjungi T secara inorder
3. Postorder : S, T , A
   - kunjungi S secara postorder
   - kunjungi T secara postorder
   - kunjungi A

Contoh :

Tentukan hasil penelusuran preorder, inorder, dan postorder dar pohon di bawah ini :



Jawab :

preorder : – * a b / + c d e (prefix)
inorder : *a* * b – c + d / e (infix)
postorder : *a* b * c d + e / – (postfix)

5.4 *Pewarnaan Graf*

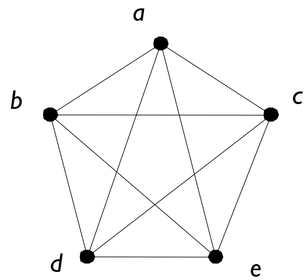
Pewarnaan dari suatu graf G merupakan suatu pemetaan dari sekumpulan warna ke beberapa simpul (vertex) yang ada pada graf G sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Selain pewarnaan simpul, dikenal pula pewarnaan sisi pada suatu graf. Namun dalam bab ini hanya akan difokuskan pada pewarnaan simpul.

Suatu graf G dikatakan berwarna n jika terdapat n warna dalam pewarnaan graf G tersebut. Banyak warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan suatu graf dinamakan bilangan kromatik, yang dinotasikan oleh $\chi(G)$ (χ : dibaca chi).

Contoh :

Bilangan kromatik suatu graf lengkap-n (Kn) adalah n. Hal ini disebabkan karena setiap simpul pada graf lengkap adalah bertetangga. Jadi χ(Kn) = n.

Perhatikan graf lengkap dengan 5 simpul berikut ini :



maka untuk mewarnai graf tersebut diperlukan 5 warna.

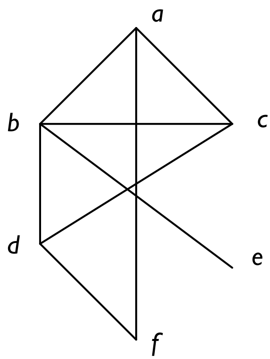
Algoritma Welch-Powell dalam pewarnaan sutau graf G dapat diilustrasikan sebagai berikut :

1. Urutkan semua simpul pada graf G berdasarkan derajat masing-masing simpul, dari besar menjadi kecil. Urutan tersebut tidak unik karena beberapa simpul mungkin mempunyai derajat yang sama.
2. Gunakan warna pertama untuk mewarnai simpul pertama dan simpul lain yang berada pada urutan sepanjang simpul tersebut tidak bertetangga dengan simpul sebelumnya.
3. Berikan warna kedua untuk mewarnai simpul pada urutan tertinggi (yang belum diwarnai), lakukan seperti point sebelumnya.

4. Seperti point ketiga, dilakukan terus menerus sehingga setiap simpul pada graf tersebut menjadi berwarna semua.
5. Algoritma Welch-Powell hanya memberikan batas atas untuk bilangan kromatik. Dengan demikian, algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan graf.

Contoh :

Gunakan algoritma Welch-Powell untuk pewarnaan graf berikut ini :



Terlihat bahwa urutan derajat masing-masing simpul adalah sebagai berikut :

a	b	c	d	e	f
4	3	3	3	2	1

Dengan demikian, dapat dilakukan pewarnaan sebagai berikut :
Warna I untuk simpul : b, f
Warna II untuk simpul : a, d, e
Warna III untuk simpul : c

Misalkan G merupakan suatu graf, pernyataan berikut adalah ekivalen:

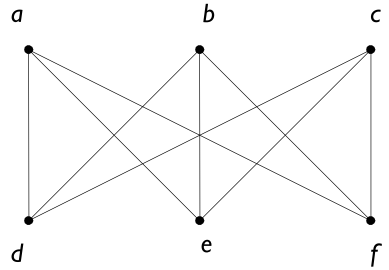
G merupakan graf bipartite

Bilangan kromatik G adalah dua ($\chi(G)$ = 2)

Setiap sirkuit dari G mempunyai panjang yang genap

Contoh :

Perhatikan graf bipartit K3,3 :



Pewarnaan pada graf tersebut dapat dilakuakn dengan menggunakan dua warna, yaitu :

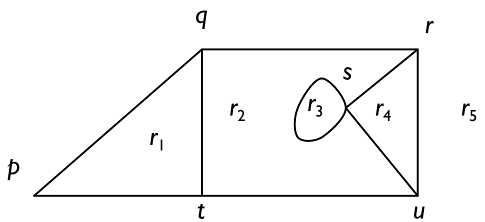
Warna I untuk simpul a, b, c

Warna II untuk simpul d, e, f

Sementara itu, jika kita ingin membuat suatu sirkuit pada graf tersebut, maka sirkuit tersebut akan melewati 3 atau 5 simpul yang lain sebelum kembali ke simpul awal. Sehingga sirkuit tersebut memiliki panjang yang genap

*Pewarnaan Peta (*Map Coloring*)*

Sebelum membahas tentang pewarnaan daera pada suatu graf planar, perhatikan beberapa definisi yang akan disampaikan terkait dengan graf planar berikut ini:



Area r1, r2, r3, r4, dan r5 dinamakan daerah (region) dari graf planar tersebut. Dua buah daerah dalam suatu graf planar dikatakan bertetangga jika mereka paling sedikit mempunyai sebuah sisi bersama.

Contoh daerah yang bertetangga adalah :

r1 dan r2
r2 dan r3
r2 dan r5
r4 dan r5
r1 dan r5
r2 dan r4

Sementara itu, contoh daerah yang tidak bertetangga adalah :

r1 dan r4
r5 dan r3
r3 dan r4

Jumlah daerah yang bertetangga dengan suatu daerah pada suatu graf dieroleh dengan cara menghitung jumlah daerah yang palig sedikit mempunyai satu sisi bersama dengan daerah tersebut.

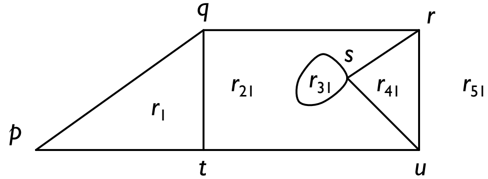
Dengan demikian, masing-masing daerah pada graf tersebut mempunyai daerah tetangga sebagai berikut :

r1 mempunyai 2 daerah tetangga yaitu r2 dan r5
r2 mempunyai 3 daerah tetangga yaitu r1, r3 dan r5
r3 mempunyai 1 daerah tetangga yaitu r2
r4 mempunyai 2 daerah tetangga yaitu r2 dan r5
r5 mempunyai 3 daerah tetangga yaitu r1, r2 dan r4

Pewarnaan daerah (peta) pada suatu graf planar G merupakan pemetaan sekumpulan warna ke beberapa daerah yang berada pada graf planar tersebut sedemikian sehingga daerah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Contoh :

Perhatikan graf planar berikut ini :



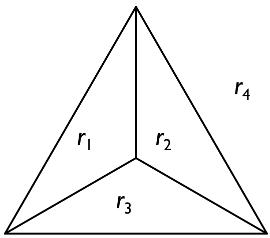
Lakukan pewarnaan daerah dengan menggunakan :

a. 3 warna
b. 2 warna

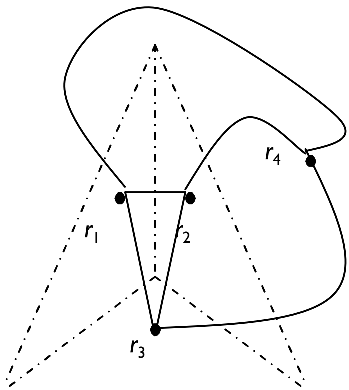
Jawab :

a. Pewarnaan graf dengan 3 warna :
   Warna I untuk daerah r1 dan r4
   Warna II untuk daerah r2
   Warna III untuk daerah r3 dan r5
b. Pewarnaan graf dengan 2 warna, tidak mungkin dapat dilakukan. Hal ini disebabkan karena daerah r2 , r4 dan r5 bertetangga satu sama lain, sehingga harus diberikan warna yang berbeda.

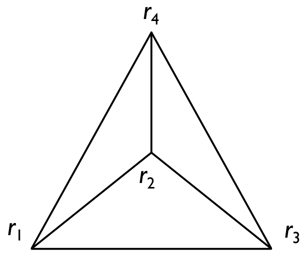
Dual dari pewarnaan peta adalah berupa pewarnaan simpul dari suatu graf planar. Perhatikan bahwa suatu pewarnaan pada graf G akan menghubungkan ke suatu pewarnaan simpul dari dual G*. Dengan kata lain, sebuah peta G adalah berwarna n jika dan hanya jika graf planar dari dual G* dengan warna n. Agar kebih jelas, perhatikan contoh graf berikut :



Pilih sebuah simpul dalam setiap daerah pada graf tersebut, hubungkan dua simpul tersebut dengan suatu sisi jika dua daerah tersebut saling bertetangga.



Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh graf sebagai berikut :



Jadi, pewarnaan peta dapat direpresentasikan dalam pewarnaan simpul. Yang lebih penting dalam pewarnaan ini adalah model graf yang diberikan merupakan representasi dari permasalahan nyata.

Rangkuman

1. Suatu graf terhubung yang setiap pasangan simpulnya hanya dapat dihubungkan oleh satu lintasan tertentu, maka graf tersebut dinamakan **pohon (tree)**. Dengan kata lain, pohon merupakan graf tak-berarah yang terhubung dan tidak memiliki siklus maupun sirkuit.
2. *Spanning Tree* dari suatu graf terhubung merupakan subgraf merentang (*spanning subgraph*) yang berupa pohon.
3. Pohon rentang yang memiliki bobot minimum dinamakan pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*).
4. Ada beberapa terminologi pohon yang perlu diketahui, antara lain : akar, daun, subtree, lintasan terpendek, dan lain lain.
5. Untuk menentukan minimum spanning tree terdapat dua algoritma, yaitu Prim dan Kruskal.
6. Pewarnaan dari suatu graf G merupakan suatu pemetaan dari sekumpulan warna ke beberapa simpul (vertex) yang ada pada graf G sedemikian sehingga simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Selain pewarnaan simpul, dikenal pula pewarnaan sisi pada suatu graf.
7. Banyak warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan suatu graf dinamakan bilangan kromatik, yang dinotasikan oleh $\chi(G)$ (χ : dibaca chi).
8. Pewarnaan peta (map) merupakan dual dari pewarnaan simpul suatu graf.

Kuis Benar Salah

1. Pohon merupakan subgraf dari sebuah graf
2. Dua simpul dalam suatu pohon hanya terhubung oleh satu buah lintasan.
3. Bilangan kromatik suatu pohon adalah 2.
4. Jika antara dua simpul berderajat satu pada suatu pohon dihubungkan satu buah sisi, maka sekarang graf tersebut masih berupa pohon.
5. Minimum spanning tree dari graf K_{10} adalah berupa pohon dengan 10 buah simpul.
6. Misalkan G adalah suatu graf, komplemen dari minimum spanning tree graf G adalah berupa pohon.
7. Banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai graf roda W_7, cukup dengan 3 warna.
8. Kode Hufman biasanya digunakan dalam pewarnaan graf.
9. Suatu ekspresi aritmetik, hanya dapat dinyatakan dalam satu pohon ekspresi.
10. Pewarnaan peta dapat dianalogikan dengan pewarnaan simpul biasa.

Pilihan Ganda

1. Yang tidak mungkin terdapat dan suatu pohon adalah….

A.	Akar	D.	cycle
B.	Daun	E.	anak
C.	Lintasan		

2. Bilangan kromatik graf C_5 adalah ….

A.	2	D.	5
B.	3	E.	6
C.	4		

3. Jumlah warna minimum untuk mewarnai setiap graf bipartite adalah….

A.	1	D.	5
B.	2	E.	4
C.	3		

4. Graf bipartite lengkap $K_{3,3}$ adalah bukan pohon, karena

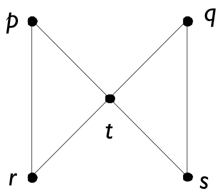
A.	Tidak terhubung	D.	Derajat setiap simpulnya sama
B.	Tak mungkin diwarnai	E.	Pasti memiliki cycle
C.	Terbagi dua		

5. Berkut ini adalah contoh pengguanaan pohon biner, kecuali ….

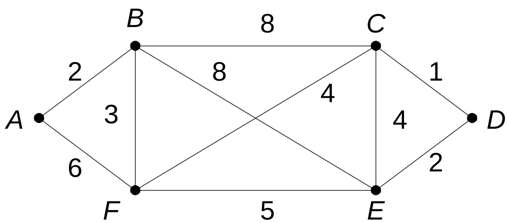
A.	Pohon ekspresi	D.	Decision Tree
B.	Minimum spanning tree	E.	Kode awalan
C.	Kode Hufman		

Latihan

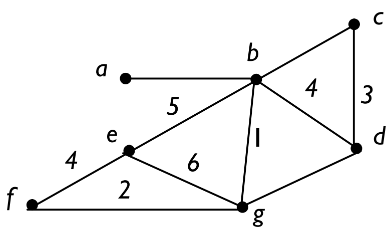
1. Tentukan semua spanning tree dari graf berikut :



2. Diketahui suatu graf seperti dibawah ini :
   a. graf G1



   b. graf G2

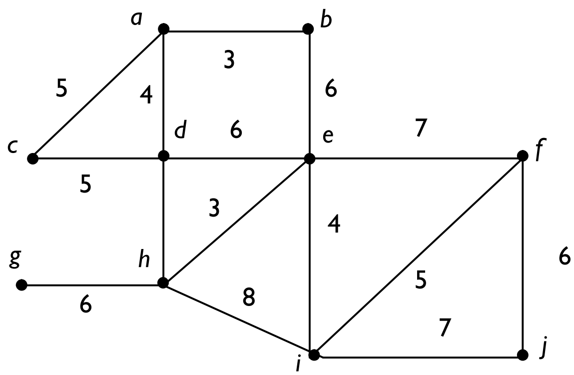


Tentukan *minimum spanning tree* dengan menggunakan Algoritma Prim dan Algoritma Kruskal

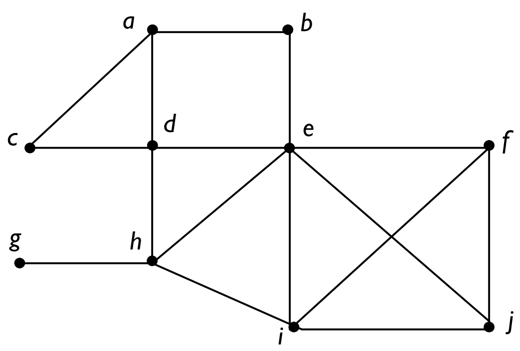
3. Buat sketsa graf biner (pohon ekspresi) yang merepresentasikan ekpresi :
   a. p / (q – r)*(s + t)
   b. (p + q) / r – (s + t * u)

4. Tentukan hasil penelusuran dari pohon ekspresi pada soal no. 3 dalam bentuk preorder, inorder, dan postorder.

5. Pada graf dibawah ini, himpunan simpul mendefinisikan himpunan desa pada suatu kecamatan. Dalam rangka pembuatan jalan antar desa dibuatlah anggaran pembiayaan seperti tertulis sebagai bobot (dalam satuan juta rupiah) setiap sisi. Tentukan biaya minimum yang harus disiapkan dalam pembangunan jalan antar desa tersebut sehingga setiap desa pada kecamatan tersebut terhubung
   (ingat definisi terhubung pada suatu graf).



6. Gunakan algoritma Welch-Powell untuk mewarnai graf dibawah ini :



7. Pada suatu semester, akan disusun suatu jadwal UAS untuk matakuliah Kalkulus, Matematika Diskrit, Fisika, Bahasa Inggris, Bahasa Indonesia, Agama, Pancasila dan Kimia. Diketahui tidak ada mahasiswa yang mengambil pasangan matakuliah berikut ini secara bersamaan (dalam semester yang sama):
   - Kalkulus & Kimia
   - Matematika Diskrit & Kimia
   - Bahasa Inggris & Bahasa Indonesia
   - Bahasa Inggris & Agama
   - Kalkulus & Matematika Diskrit
   - Kalkulus & Fisika
   - Fisika & Bahasa Inggris

   Tetapi ada mahasiswa yang mengambil secara bersamaan untuk kombinasi matakuliah lainnya, dalam semester tersebut.
   Berapa jumlah slot waktu minimum yang diperlukan untuk menyusun jadwal ujian UAS tersebut, sehingga tidak ada mahasiswa yang bentrok jadwal ujiannya

8. Berapa jumlah warna minimal untuk perwarnaan daerah (peta) pada graf dibawah ini !