Teorema de Tychonoff

Michael Abarca Jiménez

14 de Junio del 2018

Abstract

En este trabajo bibliográfico se da una introducción a conceptos y nociones básicas de redes en espacios topológicos, que serán la herramienta fundamental para la presentación de una prueba del teorema de Tychonoff. Este enfoque permite extender las demostraciones más usuales encontradas en cursos de análisis introductorio, cuando por ejemplo se prueba que el producto cartesiano finito de intervalos compactos es compacto. Dicho teorema demostrado por el matemático ruso Andrey Nikolayevich Tikhonov (1906 - 1993) se presenta en la bibliografía como uno de los teoremas más importantes de la topología general, y su demostración (original en 1935) depende crucialmente de la formulación precisa de conjuntos compactos, y de la topología producto, que el mismo autor define por primera vez. La demostración de este teorema además tiene gran importancia histórica, dada su equivalencia al axioma de elección.

Palabras Clave: Topología, Conjuntos COmpactos, Redes, Ultra - Redes, Ultra - Filtros, Teorema de Tychonoff.

Abstract

In this bibliographical work the basic definitions and notions of nets are given, in order to construct the theory necesary to give a complete proof of Tychonoff's theorem. This approach allows us to generalize the proofs usually studied in a basic analysis course, where it is commonplace to prove that the finite cartesian product of compact intervals is compact. The theorem in question was proved by the Russian mathematician Andrey Nikolayevich Tikhonov (1906 - 1993), and is presented in the bibliography as one of the most important theorems in general topology, furthermore, its formal statement relies on the precise definition of compact sets and product topology, firstly enunciated by Tychonoff. The proof of this theorem has a great historical importance, due to its equivalence to the Axiom of Choice.

Key Words: Topology, Compact Sets, Nets, Ultranets, Ultrafilters, Tychonoff's Theorem. [1]

[1] AMS MSC Class. Primary: 54A20. Secondary: 54A05

1.1 Redes y Compacidad

Definición 1.1 (11.1 Definition, [willard1970general])**.** Un conjunto no vacío Λ se dice conjunto dirigido si existe una relación $\leqslant$ en Λ tal que

(a) $\lambda \leqslant \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

(b) Si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$.

(c) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_i \leqslant \lambda_3$, para $i = 1, 2$.

◊

Observación. Las propiedades (a), (b) son familiares a la definición de una relación de orden, sin embargo, no se está definiendo condición de antisimetría ($\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ implican $\lambda_1 = \lambda_2$). La condición (c) da origen al nombre de la definición, pues esta le da sentido de dirección a la relación.

Ejemplo 1.2. (a) Si A es un conjunto no vacío. Se puede tomar en $\mathbb{P}(A)$ la relación de inclusión inversa – $U_1 \leqslant U_2$ si $U_1 \subset U_2$ –, para definir en este un conjunto dirigido.

(b) Relación de orden usual en $\mathbb{N}$.

(c) Si $(D_1, \leqslant_1)$ y $(D_2, \leqslant_2)$ son dos conjuntos dirigidos, entonces $(D_1 \times D_2, \leqslant)$ es un conjunto dirigido con:

$$(a, b) \leqslant (c, d) \Leftrightarrow a \leqslant_1 c \wedge b \leqslant_2 d$$

◊

Definición 1.3 (11.2 Definition, [willard1970general])**.** Una red en un conjunto X es una función $P : \Lambda \to X$, donde Λ es un conjunto dirigido. El punto $P(\lambda)$ se denota usualmemte x_λ, y frecuentemente referenciamos – la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – o – la red $\{x_\lambda\}$ – si no hay confusión del contexto. ◊

Ejemplo 1.4. [Motivación de redes] La colección $\mathbb{P}$ de todas las particiones finitas de un invervalo cerrado $[a, b]$ ordenadas bajo la relación $A_1 \leqslant A_2$ si y solo si A_2 es más fina que A_1 definen un conjunto dirigido. Entonces, si f es una función en $[a, b]$, podemos definir la red $P_L : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ tomando $P_L(A)$ la suma de Riemann inferior de f bajo A. La “convergencia” de esta red, que definiremos formalmente más adelante, a un número $c \in \mathbb{R}$ simplemente significa

$$\int_a^b f\, dx = c$$

Este ejemplo es históricamente importante, ya que fue la motivación inicial para definir el concepto de red. Vease [willard1970general], para más información. ◊

Definición 1.5 (11.2 Definition, [willard1970general])**.** Una subred de una red $P : \Lambda \to X$ es una composición $P \circ \phi$, donde $\phi : M \to \Lambda$ es una función creciente de un conjunto dirigido M en Λ y además es cofinal en Λ. Esto es,

(a) $\phi(\mu_1) \leqslant \phi(\mu_2)$ cuando $\mu_1 \leqslant \mu_2$.

(b) Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \leqslant \phi(\mu)$. Esto se llama ser cofinal en Λ.

Para $\mu \in M$, al punto $P \circ \phi(\mu)$ usualmente se le denota x_{λ_μ}, y hablamos de la subred $\{x_{\lambda_\mu}\}$. ◊

Definición 1.6 (Proposition 3.5, [clark2018tconvergence])**.** Decimos que una red $\{x_\lambda\}$ tiene a $x \in X$ como punto de acumulación si y solo si para todo vecindario U de x y para cada $\lambda_0 \in \lambda$, existe $\lambda \geqslant \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$. En este caso, decimos que $\{x_\lambda\}$ es frecuente en cada vecindario de x. ◊

Definición 1.7 (11.3 Definition, [willard1970general])**.** Una red $\{x_\lambda\}$ converge a $x \in X$, denotado $x_\lambda \to x$, si para cada vecindario U de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ si $\lambda \geqslant \lambda_0$. ◊

Teorema 1.8 ([11.5 Theorem, [willard1970general])**.** *Una red $\{x_\lambda\}$ tiene a $x \in X$ como punto de acumulación si y solo si tiene una subred que converge a x.*

Demostración. Sea x un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}$. Defina

$$M := \{(\lambda, U) : \lambda \in \Lambda, U \text{ vecindario de x tal que } x_\lambda \in U\}$$

Considere a M como conjunto dirigido mediante la siguiente relación:

$$(\lambda_1, U_1) \leqslant (\lambda_2, U_2) \text{ si y solo si } \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \wedge U_2 \subseteq U_1$$

Defina $\Phi : M \to \Lambda$ mediante $\Phi(\lambda, U) = \lambda$. Entonces Φ es creciente, por lo cual define una subred en $\{x_\lambda\}$. Sea U_0 cualquier vecindario de x, y tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_0} \in U_0$. Entonces $(\lambda_0, U_0) \in M$, y además $(\lambda, U) \geqslant (\lambda_0, U_0) \Rightarrow U \subset U_0$, por lo cual $x_\lambda \in U \subset U_0$. Por esto, la subred definida por Φ converge a x.

Suponga $\Phi : M \to \Lambda$ define una subred $\{x_\lambda\}$ que converge a x. Entonces, para cada vecindario U de x, existe un u_U en M tal que $u \geqslant u_M$ implica $x_{\Phi(u)} \in U$. Suponga un vecindario U de x y un punto $\lambda_0 \in \Lambda$ son dados. Como $\Phi(M)$ es cofinal en Λ, existe $u_0 \in M$ tal que $\Phi(u_0) \geqslant \lambda_0$. Tambié existe $u_M \in M$ tal que $u \geqslant u_M$ implica $x_{\Phi(u)} \in U$.

Elija $u^* \geqslant u_0$ y $u^* \geqslant u_U$. Entonces, $\Phi(u^*) = \lambda^* \geqslant \lambda_0$, dado que $\Phi(u^*) \geqslant \Phi(u_0)$, y $x_{\lambda^*} = x_{\Phi(u^*)} \in U$, dado que $u^* \geqslant u_U$. Así, para cualquier vecindario U de x y cualquier $\lambda_0 \in \Lambda$, existe un $\lambda^* \geqslant \lambda$ con $x_{\lambda^*} \in U$. Se sigue que x es punto de acumulación de $\{x_\lambda\}$. □

Teorema 1.9 (Theorem 1.3, [manoussos2018tychonoff]). *Un espacio topológico X es compacto si y solo si cada red en X tiene una subred convergente en X.*

Observación. Es conocido que un conjunto X es compacto si y solo si cada colección de conjuntos cerrados en X que satisface la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía. Véase [munkres2000topology] para más información.

Demostración. Asuma que X es compacto, y que tiene una red $\{x_\lambda\}$ que no posee ninguna subred convergente. Entonces, por teorema anterior $\{x_\lambda\}$ no tiene puntos de acumulación. Así para cualquier $x \in X$ podemos encontrar U_x vecindario de x y un λ_x tal que $x_\lambda \notin U$ para cada $\lambda \geqslant \lambda_x$. Como X es compacto, y $\{U_x\}_{x\in X}$ es cubrimiento por abiertos para X, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Tome $\lambda \geqslant \lambda_{x_i}$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces $x_\lambda \notin X$, lo cual es contradictorio.

Ahora, asuma que toda red en X tiene una subred convergente, y vamos a mostrar que X es compacto. Para esto, tome $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos cerrados de X con la propiedad de intersecciones finitas no vacías. Defina una red de la siguiente manera: Sea

$$\Lambda = \{\{i_1, \ldots, i_n\} : i_1, \ldots, i_n \in I \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

y un orden en Λ como $\lambda_1 = \{i_1, \ldots, i_n\} \leqslant \lambda_2 = \{j_1, \ldots, j_n\}$ si y solo si $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_n\}$. Es fácil verificar que Λ con esta relación es un conjunto dirigido. Como la familia $\mathcal{F}$ tiene propiedad de intersección finita, para cada $\lambda = \{i_1, \ldots, i_n\} \in \Lambda$ podemos encontrar $x_\lambda \in F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$. Usando la hipótesis, la red $\{x_\lambda\}$ tiene una subred convergente, digamos $\{x_{\lambda_m}\}$. Esto es, existe $x \in X$ tal que $x_{\lambda_m} \to x$. Vamos a mostrar que $x \in F_i$ para todo $i \in I$. Fije un F_i. Entonces, existe m_0 tal que $\lambda_{m_0} \geqslant \{i\}$. Por lo tanto, para cada $\lambda_m = \{i_1, \ldots, i_n, i\} \geqslant \lambda_{m_0} \geqslant \{i\}$ tenemos que $x_{\lambda_m} \in F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} \cap F_i \in F_i$. Como $x_{\lambda_m} \to x$ y F_i es cerrado, entonces $x \in F_i$. Esto concluye la prueba del teorema. □

1.2 Ultra - Redes

Definición 1.10. Una red $\{x_\lambda\}$ se dice residualmente en $E \subset X$ si existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$ se tiene $x_\lambda \in E$. ◊

Definición 1.11 ([11.10 Definition, [willard1970general]). Una red $\{x_\lambda\}$ en X es una ultra - red si y solo si para cada subconjunto $E \subset X$, $\{x_\lambda\}$ está residualmente en E o residualmente en E^c. ◊

Observación. De esta definición, una ultra - red debe converger a sus puntos de acumulación, ya que si una ultra - red está frecuentemente en un conjunto E, entonces está residualmente en E.

Teorema 1.12 (Theorem 2.3, [manoussos2018tychonoff]). *Toda red $\{x_\lambda\}$ tiene una subred que es una ultra - red.*

Observación. Para la demostración de este teorema, primero necesitaremos la definición de un ultra - filtro en un espacio topológico.

Definición 1.13 (Definition, [kruckman2018ultrafilters]). Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos no vacíos de X es un ultra - filtro en X si es cerrada bajo intersecciones finitas, y además para $A \subseteq X$ tenemos que $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$ ◊

Observación. Existe una relación estrecha entre las ultra - redes y los ultra - filtros de un espacio X. Si $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una ultra - red, considere la colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos A de X tales que $\{x_\lambda : \lambda \geqslant \lambda_0\} \subseteq A$ para algún λ_0, que depende de A. Esto define un ultra filtro, de hecho si $A, B \in \mathcal{U}$, entonces existen $i_1, i_2 \in I$ tales que $\{x_i : i \geqslant i_1\} \subseteq A$ y $\{x_i : i \geqslant i_2\} \subseteq B$. Podemos tomar un $k \geqslant i_i$ con $i = 1, 2$ tal que $\{x_i : i \geqslant k\} \subseteq A \cap B$. Por eso, $\mathcal{U}$ es cerrada ante intersecciones finitas. Además, si $A \subseteq X$ tenemos que $\{x_i : i \geqslant i_0\} \subseteq A$ o $\{x_i : i \geqslant i_0\} \subseteq A^c$, para algún $i_0 \in I$, ya que la ultra - red es residual en A o A^c. Esto muestra que $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$.

Además, si tenemos un ultra - filtro $\mathcal{U}$, condérelo como un conjunto dirigido mediante la inclusión inversa. Para cada $A \in \mathcal{U}$ tome $x_A \in A$. Así. $\{x_A\}_{A\in\mathcal{U}}$ define una ultra - red, ya que para cada $A \in X$ tenemos $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$, así $x_B \in A$ para cada $B \geqslant A$ o $x_B \in A^c$ para cada $B \geqslant A^c$.

Teorema 1.14 (Ultrafilter Lema, [kruckman2018ultrafilters]). *Toda colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X con propiedad de intersección finita está contenida en un ultra - filtro $\mathcal{U}$ de X.*

Demostración. Considere el conjunto de todas las colecciones $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tales que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita. Ordene este conjunto mediante inclusión. Cada cadena en este conjunto tiene una cota superior, la unión de las colecciones de la cadena. Entonces, por el lema de Zorn, existe una colección maximal $\mathcal{U}$. Vamos a probar que U es un ultra - filtro.

Tomo $A \in X$ y asuma $A \notin \mathcal{U}$. Entonces, por la maximalidad de $\mathcal{U}$, la colección $\mathcal{U} \cap A$ no cumple la propiedad de intersección finita. Así, existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{U}$ tales que

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A = \emptyset$$

De manera similar, si $A^c \notin \mathcal{U}$, existen $B_1, \ldots, B_m$ tales que

$$B_1 \cap \ldots \cap B_m \cap (A^c) = \emptyset$$

Pero así

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap B_1 \cap \ldots \cap B_n = \emptyset$$

contradiciendo la condición de intersección finita de $\mathcal{U}$ Así $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$.

Ahora, si $A, B \in \mathcal{U}$, no podemos tener $(A \cap B)^c \in \mathcal{U}$, ya que $A \cap B \cap (A \cap B)^c = \emptyset$. Se sigue que $A \cap B \in \mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{U}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Por lo que se concluye que $\mathcal{U}$ es un ultra - filtro. □

Lema 1.15 (Theorem 2.4, [manoussos2018tychonoff]). *Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. Si $\{x_\lambda\}$ es una ultra - red en X y $f : X \to Y$ es una función, entonces $\{f(x_\lambda)\}$ es una ultra - red.*

Demostración. Si $B \subset Y$, entonces $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B^c))^c$, entonces $\{x_\lambda\}$ está residualmente en $f^{-1}(B)$ o en $f^{-1}(B^c)$, de lo cual $\{f(x_\lambda)\}$ está residualmente en B o en B^c, por lo cual es una ultra - red. □

Ahora, ya se cuenta con las herramientas necesarias para probar el teorema 1.12

Prueba del Teorema 1.12. Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red. Considere la colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Λ de la forma $\{\lambda : \lambda \geqslant \lambda_0\}$ para $\lambda_0 \in \Lambda$. Esta colección tiene propiedad de intersección finita, ya que está contenida en un ultra - filtro $\mathcal{U}$ de Λ. Ordene $\mathcal{U}$ mediante inclusión inversa, viendolo así como un conjunto dirigido. Considere $\Phi : \mathcal{U} \to \Lambda$ tal que $\Phi(A) \in A$, para todo $A \in \mathcal{U}$. Este mapeo define una subred. De hecho, dado $\lambda_0 \in \Lambda$, considere el conjuto $A_0 = \{\lambda : \lambda \geqslant \lambda_0\}$. Así, para cada $A \geqslant A_0$, tenemos $\Phi(A) \in A \subset A_0$, entonces $\Phi(A) \geqslant \lambda_0$. Por lo tanto $\Phi : \mathcal{U} \to \Lambda$ define una subred.

Como $\mathcal{U}$ es un ultra - filtro en Λ, la red $\{\Phi(A)\}_{A \in \mathcal{U}}$ es una ultra - red. Por lema 1.15, la red $\{x_{\Phi(A)}\}_{A \in \mathcal{U}}$ es una ultra - red, por ser la imagen de $\{\Phi(A)\}_{A \in \mathcal{U}}$ bajo la función $f : \Lambda \to X$. $f(i) = x_i$. □

1.3 Teorema Tychonoff

Teorema 1.16 (Theorem 2.5, Tychonoff's Theorem, [manoussos2018tychonoff]). *Un producto no vacío $X = \prod_{i \in I} X_i$ es compacto si y solo si cada factor X_i es compacto.*

Demostración. Si asuminos que X es compacto, entonces como las proyecciones en coordenadas i–ésimas son continuas se concluye que cada X_i es compacto.

Para la otra implicación, suponga que cada X_i es compacto. Sea $\{x_\lambda\}$ una red en X. Por teorema 1.12, $\{x_\lambda\}$ tiene una subred $\{x_{\lambda_m}\}$ la cual es una ultra - red. Por teorema 1.15, la red $\pi_i(x_{\lambda_m})$ es una ultra - red en X_i, por lo cual tiene una subred convergente en X_i. Entonces, por observación posterior a definición 1.10, la red $\pi_i(x_{\lambda_m})$ converge en X_i, y así $\{x_{\lambda_m}\}$ converge en X. Esto implica por teorema 1.9 que X es compacto. □

Observación. Nuestra preuba del Teorema de Tychonoff, hace uso del axioma de elección mediante el Teorema 1.14, que usa el lemma de Zorn. Además en [norwood2018tychonoff] se puede encontrar una demostración de la implicación del axioma de elección a partir del Teorema de Tychonoff.

Bibliografía

[willard1970general] Willard, S, *General Topology.* Dover, New York, 2004, (1970).

[varilly2011topologia] Várilly, J.C, *Notas para el curso MA-0704: Topología.* I-Ciclo 2011, Universidad de Costa Rica.

[munkres2000topology] Munkres, James R, *Topology.* Prentice Hall, (2000)

[norwood2018tychonoff] Norwood, Zach, *TYCHONOFF'S THEOREM IMPLIES AC.* ⟨http://www.math.ucla.edu/ znorwood/files/tychonoffimpliesac.pdf⟩

[manoussos2018tychonoff] Manoussos, Antonios, *A PROOF OF TYCHONOFF'S THEOREM.* ⟨https://www.math.uni-bielefeld.de/ amanouss/Tychonoff_theorem.pdf⟩

[clark2018tconvergence] Clarke, Pete L, *CONVERGENCE.* ⟨http://math.uga.edu/ pete/convergence.pdf⟩

[kruckman2018ultrafilters] Kruckman, Alex, *Notes on Ultrafilters.* ⟨https://math.berkeley.edu/ kruckman/ultrafilters.pdf⟩