Fórmula de Feynman - Kac

Michael Abarca Jiménez

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

1 Julio 2019

Contenidos

- Introducción al Movimiento Browniano
- Teorema de Kakutani e implementación en Matlab
- Teorema de Feynman - Kac en 2d
- Generalizaciones

Datos Históricos

- En 1828 el botánico R. Brown describió el movimiento de una partícula de polen suspendida una gota de agua seguía trayectoria irregular, aparentemente aleatoria. Otros científicos de la época verificaron el fenómeno.
- La explicación de este fenómeno se dio hasta 1905 por Albert Einstein.
- En 1900 L. Bachelier propuso lo que ahora conocemos como movimiento browniano. Lo usó como modelo para para el movimiento de precios de acciones en su teoría matemática sobre especulación para valorar precios de acciones.
- En 1931 N. Wiener formuló el movimiento Browniano como un proceso estocástico.

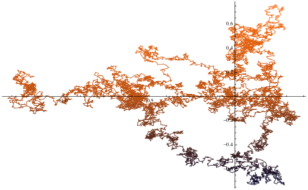
Conceptos de Probabilidad

- Un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para usar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo.
- Los procesos estocásticos permiten tratar procesos dinámicos en los que hay cierta aleatoriedad.
- Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabildiad. Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria si es $\mathcal{F}-$ medible.
- Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias $\{B_t\}_{t\in T}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tomando valores en $\mathbb{R}^n$.

Movimiento Browniano

Se debe pensar como una **curva aleatoria** $t \to B_t$ y es el prototipo básico de un proceso estocástico. Es posible caracterizarlo por las siguientes propiedades:

- $B_0 = 0$.
- Si $s < t$, entonces $B_t - B_s$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, t-s)$.
- (Incrementos independientes) $B_t - B_s$ independiente de $B_v - B_u$ para todos intervalos $[s,t], [u,v]$ disjuntos.
- (Incrementos estacionarios) $B_{t+h} - B_t \overset{d}{=} B_{s+h} - B_s, \ \forall h$
- $t \to B_t$ continua a.s

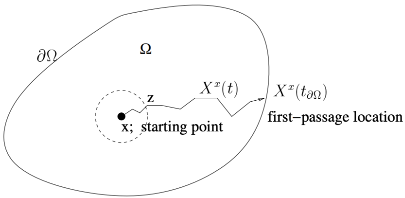


Conceptos sobre Movimiento Browniano

Definición: El tiempo en el cual una realización de Movimiento Browniando B_t, inicializado en algún punto $x \in D$, toca la frontera ∂D por primera vez se llama primer tiempo de salida

$$\tau = \text{ínf}\{t > 0 : B_t \in \partial D\}$$

Definición: Análogamente se define primer punto de salida.



Ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet

Considere el problema

$$
\begin{aligned}
&u : D \to \mathbb{R},\ D \text{ dominio acotado en } \mathbb{R}^d \\
&\Delta u = 0,\ x \in D \\
&u = g,\ x \in \partial D
\end{aligned}
$$

donde g es una función dada continua sobre la frontera de D.

Ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet

Considere el problema

$$u : D \to \mathbb{R},\ D \text{ dominio acotado en } \mathbb{R}^d$$
$$\Delta u = 0,\ x \in D$$
$$u = g,\ x \in \partial D$$

donde g es una función dada continua sobre la frontera de D.
Teorema:(Kakutani) Si $u \in C^2(\overline{D})$ es una solución de la ecuación, esta tiene representación

$$u(x) = \mathbb{E}^x(g\,(B_\tau)),\ x \in D$$

Cálculo de solución

El lado derecho de la representación

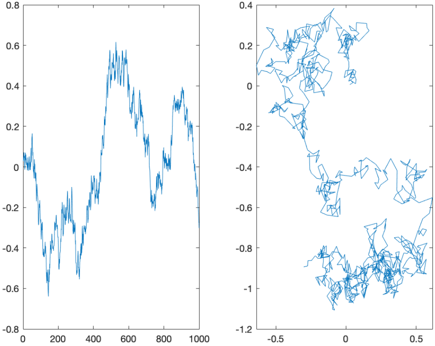
$$\mathbb{E}^{x}(g\left(B_{\tau}\right))$$

se puede calcular numéricamente mediante simular trayectorias del movimiento browniano empezando en x hasta el primer punto de salida, ya que por ley fuerte de los grandes números

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}g(B_{\tau_i}) = u(x), \text{ a.s}$$

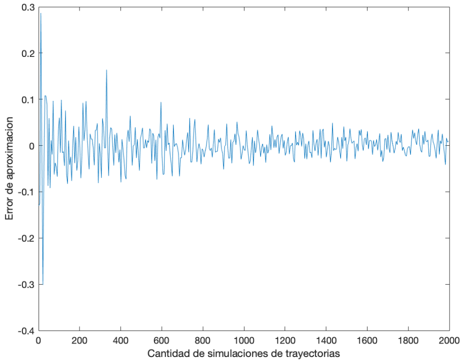
Implementación Matlab

Primeramente se procede a simular movimiento browniano en una y dos dimensiones para conseguir primer punto de salida de una realización.



Implementación Matlab

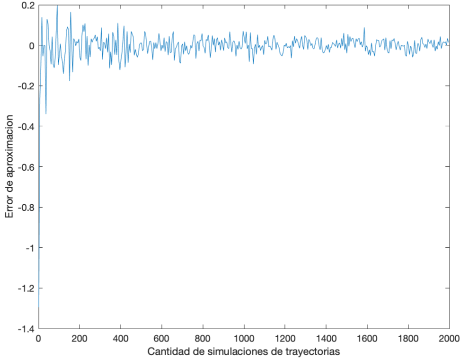
Se analizan los resultados en un punto $(0{,}3, -0{,}5)$ de forma $1:5:2000$ y se obtienen los siguientes errores



con un tiempo total de 266,12 segundos de corrida.

Implementación Matlab

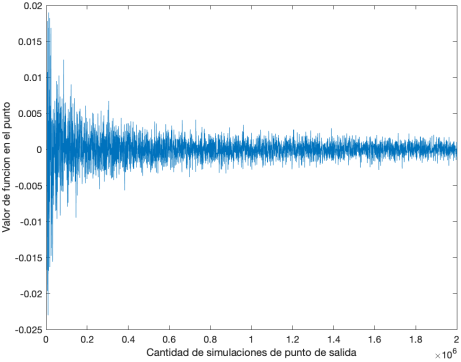
Se analizan los resultados en un punto $(0{,}0, -0{,}0)$ de forma $1 : 5 : 2000$ y se obtienen los siguientes errores



con un tiempo total de 306,15 segundos de corrida.

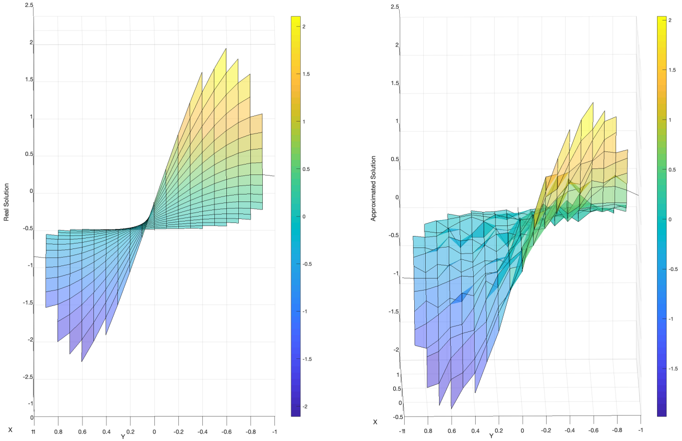
Implementación Matlab

Ahora se simulan puntos de salida como puntos distribuidos de manera uniforme en círculo unitario, semenjando los puntos de salida dep punto $(0, 0)$.



Simulaciones 5000 : 500 : 2000000 con un tiempo total de 328,13

Implementación Matlab



Teorema de Feynman - Kac

- En la década de los 40 Richard Feynman descubrió que la ecuación de Schrondinger podía ser resuelta por una especie de promedios de trayectorias, observación que lo llevó a reformular la teoría cuántica con las *path integrals*.
- Aprendiendo de las ideas de Feynman, Marc Kac se dió cuenta que representaciones similares podían ser dadas para las solución a la ecuación del calor con términos adicionales de enfriamiento.
- Esta representación es lo que hoy en día se conoce como la fórmula de Feyman - Kac.

Teorema de Feynman - Kac

La ecuación del calor más sencilla con término de enfriamiento es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K(x)u$$

donde $K(x)$ es una función no negativa representando la cantidad de enfriamiento externo en el punto x.

Teorema de Feynman - Kac

Teorema (Feynman- Kac) Sea $K(x)$ no negativa, continua, y sea f acotada y continua. Suponga que $u(t,x)$ es una función acotada que satisface la PDE $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K(x)u$ y la condición inicial

$$u(0,x) = \lim_{(t,y)\to(0,x)} u(t,y) = f(x)$$

Entonces

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x \exp\left(-\int_0^t K(B_s)\,ds\right) f(B_t)$$

bajo la medida P^x, y $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es movimiento browniano que inicia en x.

Prueba

Fije $t > 0$, y considere el proceso estocástico

$$Y_s = \exp(-R(s))u(t-s, B_s)$$

donde $R(s) = \exp\left(-\int_0^s K(B_r)\,dr\right)$, usando s como parámetro temporal. Como $u(t, x)$ es por hipótesis , una solución de la ecuación de calor anterior, es continuamente diferenciable una vez en t y dos en x.

Prueba

Además, como u es acotada, entonces también el proceso Y_t. Por el lema de Ito

$$
\begin{aligned}
dY_s =& -K(B_s)e^{-R(s)}u(t-s)ds \\
& - u_t(t-s, B_s)e^{-R(s)}ds \\
& + u_x(t-s, B_s)e^{-R(s)}dWB_s \\
& + \left(\frac{1}{2}\right) u_{xx}(t-s, B_s)e^{-R(s)}ds
\end{aligned}
$$

Pero los términos con ds se cancelan pues $u(t,x)$ es solución, quedando

$$
dY_s = u_x(t-s, B_s)e^{-R(s)}dWB_s
$$

Prueba

Y se demuestra en la literatura que Y_s es una martingala hasta tiempo t a partir de esta representación.

Como $Y_s = \exp(-R(s))u(t-s, B_s)$ donde $R(s) = \exp\left(-\int_0^s K(B_r)\,dr\right)$, por ley de conservación de la esperanza para martingalas $\mathbb{E}(Y_0) = \mathbb{E}(Y_t)$, y así

$$Y_0 = \mathbb{E}(Y_0) = u(t,x) = \mathbb{E}^x Y_t = \mathbb{E}^x e^{-R(t)}u(0, B_t) = \mathbb{E}^x e^{-R(t)}f(B_t)$$

Comentarios

- Se comenta en literatura que generalizarlo es demandante.
- Cuando f es no acotada, esta fórmula podría no estar bien definida.
- Existen resultados relacionados a este...

Proposición

Proposición Sean f y K continuas a trozos tales que $K \geq 0$ y f es de orden de crecimiento subexponencial.

Entonces la función $u(t,x)$ definida por la fórmula de FK es solución a la PDE en estudio.

Adicionalmente, esta función es la única solución que es de orden de crecimiento subexponencial, especificamente , que para todo $T < \infty$ y $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x \to \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{|y| \leq x} \frac{|u(t,y)|}{\exp(\varepsilon x)} = 0$$

Generalización a más dimensiones

Teorema Sean $K : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continuas, con f acotada. Suponga que $u(t, x)$ es solución acotada de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - Ku$$

bajo la condición inicial $u(0, x) = f(x)$. Entonces

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x \exp\left(-\int_0^t K(B_s)\, ds\right) f(B_t)$$

Adicionalmente esta solución es la única que satisface condición inicial y es de orden de crecimiento subexponencial.

Feynman - Kac para otros procesos de difusión

Decimos que un proceso estocástico X_t es un proceso de difusión que inicia en x con *local drift* $\mu(x)$ y volatilidad $\sigma(x)$ si cumple las siguientes condiciones

- $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(B_t)dW_t$
- $X_0 = 0$

Se define el operador infinitesimal del proceso X_t como

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2}{dx^2} + \mu\frac{d}{dx}$$

Feynman - Kac para otros procesos de difusión

Asuma que μ, σ son globalmente Lipschitz y cumplen las siguientes condiciones de crecimiento

$$\begin{aligned} |\mu(x) - \mu(y)| &\leq C|x - y| \\ |\sigma(x) - \sigma(y)| &\leq C|x - y| \\ |\mu(x)| &\leq C|x| \\ |\sigma(x)| &\leq C|x| \end{aligned}$$

Feynman - Kac para otros procesos de difusión

Si $f(x)$ y $K(x)$ son continuas con $K \geq 0$ y $f(x) = O(|x|)$ cuando $|x| \to \infty$, entonces la función definida por

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x \exp\left(-\int_0^t K(X_s)ds\right) f(X_t)$$

es solución de la PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{G}u - Ku$$

y satisface la condición inicial $u(0,x) = f(x)$.

Comentarios

- Así como la fórmula de Movimiento Browniano se extiende naturalmente a más dimensiones, también para procesos de difusión de más dimensiones.
- Hay fórmulas de este tipo para PDEs elípticas con ciertas condiciones en coeficientes.

Bibliografía

- On some connections between probability and differential equations, Master Thesis, UNAM - DAUPHINE, Rafael Granero.
- Unbiased "walk-on-spheres" Monte Carlo methods for the fractional Laplacian, IMA Journal of Numerical Analysis (2017), Andreas E. Kyprianou - Ana Osojnik - Tony Shardlow
- Multilevel Monte Carlo for the Feynman-Kac Formula for the Laplace Equation, ETH Zurich, Stefan Pauli - Robert Gantner - Peter Arbenz - Andreas Adelmann
- Solving Elliptic PDEs with Feyman-Kac-Formula, Berlin Mathematical School, Giovanni Conforti
- Brownian Motion Simulation Project in R, Zhijun Yang, Faculty Adivisor: David Aldou

Bibliografía

- https://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/313/BrownianMotionCurrent.pdf, Notas sobre movimiento browniano, Universidad de Chicago.
- http://www.stat.uchicago.edu/~lalley/Courses/391/Lecture12.pdf, Notas sobre procesos de difusión, y la fórmula de Feynman - Kac.