1.3 Ejercicios sobre convergencia uniforme

Ejercicio 1.21. Una sucesión de funciones $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy sobre el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geqslant M \implies \|f_m - f_n\|_I < \varepsilon.$$

Demostrar que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy sobre I si y solo si $\{f_n\}$ es uniformemente convergente sobre I.

Solución: $(\Rightarrow)$ Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy sobre I, para $\varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geqslant M$ se cumple $\|f_m - f_m\|_I < \varepsilon$. En particular para cada $x \in I$ se va a tener

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Así $\{f_n(x)\}$ es una suceción de Cauchy, y por lo tanto convergente digamos a $f(x) \in \mathbb{R}$. De esta manera construimos la función límite $f(x)$. Tomando $m \to \infty$ en $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ por continuidad del valor absoluto se tiene $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant M\ \forall x \in I$ y tomando el supremo $\|f - f_n\|_I \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant M$
$\therefore f_n \to f$ uniformemente en I.

$(\Leftarrow)$ Ahora, si $\{f_n\}$ es uniformemente convergente en I, para $\varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f_n - f\|_I < \varepsilon,\ \forall n \geqslant M$$

Si $n, m \geqslant M$, para cada $x \in I$ se tiene

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_m - f\|_I + \|f_n - f\|_I \leqslant 2\varepsilon$$

y tomando supremos se tiene

$$\|f_m - f_n\|_I \leqslant 2\varepsilon$$

$\therefore$ $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy. ◎

Ejercicio 1.22. Demostrar que una sucesión de funciones $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no converge uniformemente* sobre I a una función límite $f : I \to \mathbb{R}$ si y solo si para algún $\varepsilon_1 > 0$ existen una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ y una sucesión $\{t_k\}$ en I tales que $|f_{n_k}(t_k) - f(t_k)| \geqslant \varepsilon_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solución: $(\Rightarrow)$ Si f_n no coverge uniformemente sobre sobre I, negando la definición tenemos

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_N > N\ \exists t_N \in I : |f_{n_N}(t_N) - f(t_N)| \geqslant \varepsilon$$

Entonces haciendo N recorrer los naturales se construye la suceción $\{t_k\}$ y subsuceción $\{f_{n_k}\}$ las culaes satisfacen lo requerido.

($\Leftarrow$) Suponga por contradicción que f_n converge uniformemente. Entonces para $\varepsilon = \varepsilon_1$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$ se tiene $\|f_n - f\|_I < \varepsilon_1$ lo cual es contradictorio ya que existen $n_N > N$ y $t_N \in I$ tales que $|f_{n_N}(t_N) - f(t_N)| \geqslant \varepsilon_1$. ◎

Ejercicio 1.23. Considérese las siguientes funciones definidas sobre el intervalo $[0, \infty)$:

$$\text{(a)} \quad f_n(t) := \frac{t^2 + nt}{n}, \qquad \text{(b)} \quad g_n(t) := \frac{t^n}{1 + t^n}, \qquad \text{(c)} \quad h_n(t) := \frac{t^n}{1 + t^{2n}}.$$

Hallar las funciones $f, g, h \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tales que $f_n \to f$, $g_n \to g$, $h_n \to h$ puntualmente sobre $[0, \infty)$. Determinar, en cada caso, si la convergencia es uniforme sobre $[0, \infty)$.

En los casos en que esta convergencia no es uniforme, comprobar que sí hay convergencia uniforme sobre un intervalo finito $[0, b]$.

Solución:

(a) Para $t \in [0, \infty)$,

$$f_n(t) = \frac{t^2 + nt}{n} = \frac{n\left(\frac{t^2}{n} + t\right)}{n} = \frac{t^2}{n} + t \to t, \ n \to \infty$$

por lo que f_n converge puntualmente a $f(t) := t$ en $[0, \infty)$. Sin embargo,

$$\left\| \frac{t^2 + nt}{n} - t \right\|_{[0,\infty)} = \left\| \frac{t^2}{n} \right\|_{[0,\infty)}$$

y se concluye que no hay convergencia uniforme ya que esta expresión no es acotada. Si $t \in [0, b]$,

$$\left\| \frac{t^2 + nt}{n} - t \right\|_{[0,b]} = \left\| \frac{t^2}{n} \right\|_{[0,b]} \leqslant \frac{b^2}{n} \to 0, \ n \to \infty$$

por lo que en un intervalo finito si hay convergencia uniforme.

(b)
- Para $t < 1$, $t^n \to 0$ y por lo tanto $g_n(t) \to 0$
- Si $t = 1$, $g_n(t) = \frac{1}{2}$
- Si $t > 1$, $g_n(t) \to 1$

Entonces g_n converge puntualmente a la función

$$g(t) := \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{2}, & t = 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

y como la función límite no es continua y cada g_n lo es se concluye que la convergencia no puede ser uniforme en $[0,\infty)$.

Si $0<b<1$,

$$\left\| \frac{t^n}{1+t^n} - 0 \right\|_{[0,b]} = \left\| \frac{t^n}{1+t^n} \right\|_{[0,b]} \leqslant \frac{b^n}{1+b^n} \to 0,\ n\to\infty$$

donde última desigualdad se da por monotonía. Y de aquí se concluye $h_n(t)\to 0$ uniformemente en $[0,b]$.

(c)
- Para $t<1,\ h_n(t)\leqslant t^n \to 0$ y por lo tanto $g_n(t)\to 0$
- Si $t=1,\ h_n(t)=\frac{1}{2}$
- Si $t>1,\ h_n(t)\to 0$

Entonces $h_n(t)$ converge puntualmente a la función

$$h(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & t=1 \\ 0, & t\in[0,1)\cup(1,\infty) \end{cases}$$

y como la función límite no es continua y cada h_n lo es se concluye que la convergencia no puede ser uniforme en $[0,\infty)$.

Si $0<b<1$,

$$\left\| \frac{t^n}{1+t^{2n}} - 0 \right\|_{[0,b]} = \left\| \frac{t^n}{1+t^{2n}} \right\|_{[0,b]} \leqslant \frac{b^n}{1+b^{2n}} \to 0,\ n\to\infty$$

donde última desigualdad se da por monotonía. Y de aquí se concluye $g_n(t)\to 0$ uniformemente en $[0,b]$.

◎

Ejercicio 1.24. (a) Defínase una sucesión de funciones $\{f_n\colon[0,2]\to\mathbb{R}\}_{n\geqslant 1}$ por

$$f_n(t) := \left(n - n^2|t-\tfrac{1}{n}|\right) [\![|t-\tfrac{1}{n}|\leqslant\tfrac{1}{n}]\!].$$

Graficar las funciones f_1, f_2, f_3. Demostrar que $f_n\to 0$ puntualmente sobre $[0,2]$, y comprobar que esta convergencia no es uniforme, al verificar que $\int_0^2 f_n(t)\,dt \nrightarrow 0$.

Solución:

$$[\![|t-\tfrac{1}{n}|\leqslant\tfrac{1}{n}]\!] \Leftrightarrow [\![0\leqslant t\leqslant\tfrac{2}{n}]\!]$$

Tome $t \in [0,2]$. Por arquimedianidad $\exists N \in \mathbb{N}$ para el cual $\frac{2}{n} < t$, $\forall n \geqslant N$ y así $f_n \to 0$ puntualmente en $[0,2]$.

Además,

$$\begin{aligned}\int_0^2 f_n(t)\,dt &= \int_0^{\frac{2}{n}} f_n(t)\,dt, \quad \text{función es nula en} \quad (\tfrac{2}{n}, 2] \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} n - n^2(t - \tfrac{1}{n})\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n + n^2(t - \tfrac{1}{n})\,dt \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore$ la convergencia no puede ser uniforme ya que $\int_0^2 f_n(t)\,dt$ cuando $n \to \infty$ debería coincidir con $\int_0^2 f(t)\,dt = 0$. ⊚

(b) Defínase una sucesión de funciones $\{g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n\geqslant 1}$ por

$$g_n(t) := n^2 t(1-t^2)^n.$$

Demostrar que $g_n \to 0$ puntualmente sobre $[0,1]$. Calcular $\int_0^1 g_n(t)\,dt$ y luego comprobar que la convergencia de la sucesión $\{g_n\}$ no es uniforme sobre $[0,1]$.

Solución: Si $t = 0$ ó $t = 1$, $g_n(t) = 0$. Cuando $t \in (0,1)$ se tiene

$$\lim_{x\to\infty} x^2 t(1-t^2)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 t}{1}}{\frac{1}{(1-t^2)^x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2xt}{1}}{\frac{-x}{(1-t^2)^{x+1}}} \lim_{x\to\infty} -2t(1-t^2)^{x+1} = 0$$

lo que implica $g_n(t) \to 0$, $\forall t \in (0,1)$. Y se concluye $g_n \to 0$ puntualmente en $[0,1]$. Sin embargo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(t)\,dt &= \int_0^1 n^2 t(1-t^2)^n\,dt \\ &= n^2 \left[\frac{-(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right]\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{n^2}{2n+2} \nrightarrow 0,\ n \to \infty\end{aligned}$$

$\therefore$ la convergencia no puede ser uniforme ya que en caso de serlo $\int_0^1 g_n(t)\,dt$ cuando $n \to \infty$ debería coincidir $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$ por ser cada g_n continua. ⊚

Ejercicio 1.25. Para $t \in [-1, 1]$, evaluar la suma de la serie:

$$s(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^k}.$$

Determinar si esta serie converge uniformemente o no sobre $[-1, 1]$.

Solución: Se tiene $s(0) = 0$. Note que si $t \in [-1, 1]$, entonces $\frac{1}{(1+t^2)} < 1$ y por consiguiente

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^i} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} = \frac{1+t^2}{t^2}$$

Así la serie converge puntualmente a la función límite definida por

$$s(t) := \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1+t^2, & t \in [-1, 0) \cup (0, 1] \end{cases}$$

$\therefore$ la convergencia no puede ser uniforme ya que cada término de la serie es continuo y la función limite no lo es. ◎

Ejercicio 1.26. Mostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} t^k(1-t)$ converge puntualmente para $t \in [0, 1]$, pero no uniformemente.

Solución: Si $t = 0$ ó $t = 1$ la serie vale 0. Si $t \in (0, 1)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k(1-t) = (1-t)\sum_{k=0}^{\infty} t^k = 1$$

Entonces la serie converge puntualmente a la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, 1 \\ 1, & t \in (0, 1) \end{cases}$$

$\therefore$ la convergencia no puede ser uniforme ya que todas las $f_n(t) = t^k(1-t)$ son continuas, y la función límite no lo es. ◎

Ejercicio 1.27. (a) Comprobar que las funciones $f_n(t) := |t|^{(n+1)/n} \equiv (t^2)^{(n+1)/2n}$, para $n \geqslant 1$, son diferenciables en el intervalo $(-1, 1)$.

Solución:

$$f_n'(t) = \left(\frac{n+1}{2n}\right)(t^2)^{(1-n)/2n}(2t) = \frac{t(n+1)}{n}(t^2)^{(1-n)/2n}$$

◎

(b) Demostrar que $f_n(t) \to |t|$ uniformemente sobre $(-1,1)$, pero que las derivadas $f_n'(t)$ no convergen uniformemente sobre $(-1,1)$.

Ejercicio 1.28. Si $f_k(t) := \dfrac{\operatorname{sen}(k^2 t)}{k^2}$ para $t \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ converge uniformemente sobre $[0,\infty)$, pero que la serie de derivadas $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(t)$ diverge para todo $t \geqslant 0$.

Solución: Dado que $f_k(t)$ es una suceción de funciones que satisface $|f_k(t)| \leqslant \frac{1}{k^2}$ para todo $t \in [0,\infty)$ y además $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, entonces por criterio $M-$test de Weistrass $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ converge uniformemente en $[0,\infty)$.

La serie de las derivadas esta dada por $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(k^2 t)$ y es divergente para $t \geqslant 0$. En efecto, fijando t, si esta serie converge tenemos $\lim_{k\to\infty} \cos(k^2 t) = 0$. Sabemos que $\cos(k^2 t)$ es pequeño cuando $k^2 t \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$ lo cual implicaría $(2k)^2 t \approx 2(2n+1)\pi$ y este sería un número cercano a 1, por lo cual el límite no puede ser 0. ⊚

Ejercicio 1.29. Demostrar que la función definido por la serie

$$h(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k^4}$$

es dos veces diferenciable sobre $\mathbb{R}$.

⟦ Indicación: calcular $h'(t)$ y $h''(t)$ formalmente, al derivar la serie término por término. Demostrar que la serie para $h''(t)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$; y luego retroceder. ⟧

Solución: Derivando formalmente la serie término a término,

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k^3}$$
$$h''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\sin(kt)}{k^2}$$

Tenemos $h'(t), h''(t)$ y $h'''(t)$ uniformemente convergentes en $\mathbb{R}$ por criterio $M-$test de Weierstrass. Por lo anterior se cumplen las hipótesis para asegurar por teorema de diferenciación término a término que $h'(t)$ es diferenciable con derivada $h''(t)$ y además $h(t)$ es diferenciable con derivada $h'(t)$.

$\therefore$ $h(t)$ es dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$. ⊚