Teorema de Tychonoff

Michael Abarca Jiménez

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-0704 Topología

Contenidos

- Definición de conjuntos dirigidos y redes. Ejemplos.
- Definición de subredes y nociones de convergencia.
- Caracterizaciones de conjuntos compactos mediante redes.
- Ultra - Redes y Ultra Filtros
- Teorema de Tychonoff.

Definición

Un conjunto no vacío Λ se dice conjunto dirigido si existe una relación $\leq$ en Λ tal que

1. $\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.
2. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
3. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_i \leq \lambda_3$, para $i = 1, 2$.

Ejemplo

1. Si A es un conjunto no vacío. Se puede tomar en $\mathbb{P}(A)$ la relación de inclusión inversa - $U_1 \leq U_2$ si $U_1 \subset U_2$ -, para definir en este un conjunto dirigido.
2. Relación de orden usual en $\mathbb{N}$.
3. Si $(D_1, \leq_1)$ y $(D_2, \leq_2)$ son dos conjuntos dirigidos, entonces $(D_1 \times D_2, \leq)$ es un conjunto dirigido con:

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq_1 c \wedge b \leq_2 d$$

Definición

Una red en un conjunto X es una función $P : \Lambda \to X$, donde Λ es un conjunto dirigido. El punto $P(\lambda)$ se denota usualmemte x_λ, y frecuentemente referenciamos - la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ - o - la red $\{x_\lambda\}$ - si no hay confusión del contexto.

Ejemplo

Sea $\mathbb{P}$ de todas las particiones finitas de un invervalo cerrado $[a, b]$ ordenadas bajo la relación $A_1 \leq A_2$ si y solo si A_2 es más fina que A_1 definen un conjunto dirigido.
Entonces, si f es una función en $[a, b]$, podemos definir la red $P_L : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ tomando $P_L(A)$ la suma de Riemann inferior de f bajo A. La "convergencia" de esta red, que definiremos formalmente más adelante, a un número $c \in \mathbb{R}$ simplemente significa

$$\int_a^b f \, dx = c$$

Definición

Una subred de una red $P : \Lambda \to X$ es una composición $P \circ \phi$, donde $\phi : M \to \Lambda$ es una función creciente de un conjunto dirigido M en Λ y además es cofinal en Λ. Esto es,

1. $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$ cuando $\mu_1 \leq \mu_2$.
2. Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \leq \phi(\mu)$. Esto se llama ser cofinal en Λ.

Para $\mu \in M$, al punto $P \circ \phi(\mu)$ usualmente se le denota x_{λ_μ}, y hablamos de la subred $\{x_{\lambda_\mu}\}$.

Definición

Decimos que una red $\{x_\lambda\}$ tiene a $x \in X$ como punto de acumulación si y solo si para todo vecindario U de x y para cada $\lambda_0 \in \lambda$, existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$.

Definición

Una red $\{x_\lambda\}$ converge a $x \in X$, denotado $x_\lambda \to x$, si para cada vecindario U de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ si $\lambda \geq \lambda_0$.

Teorema

Una red $\{x_\lambda\}$ tiene a $x \in X$ como punto de acumulación si y solo si tiene una subred que converge a x.

Prueba

Sea x un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}$.

- *$M := \{(\lambda, U) : \lambda \in \Lambda, U$ vecindario de x tal que $x_\lambda \in U\}$ Considere a M como conjunto dirigido mediante la siguiente relación:*

$$(\lambda_1, U_1) \leq (\lambda_2, U_2) \text{ si y solo si } \lambda_1 \leq \lambda_2 \wedge U_2 \subseteq U_1$$

Prueba

- *Defina* $\Phi : M \to \Lambda$ *mediante* $\Phi(\lambda, U) = \lambda$. *Se obtiene una subred definida por* Φ.
- *Sea* U_0 *cualquier vecindario de* x, *y tome* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tal que* $x_{\lambda_0} \in U_0$.
- *Entonces* $(\lambda_0, U_0) \in M$, *y además* $(\lambda, U) \geq (\lambda_0, U_0) \Rightarrow U \subset U_0$, *por lo cual* $x_\lambda \in U \subset U_0$. *Por esto, la subred definida por* Φ *converge a* x.

Teorema

Un espacio topológico X es compacto si y solo si cada red en X tiene una subred convergente en X.

Observación

Es conocido que un conjunto X es compacto si y solo si cada colección de conjuntos cerrados en X que satisface la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Asuma que X es Compacto.

Prueba

- *Suponga $\{x_\lambda\}$ red que no posee ninguna subred convergente.*
- *$\{x_\lambda\}$ no tiene puntos de acumulación. Así para cualquier $x \in X$ podemos encontrar U_x vecindario de x y un λ_x tal que $x_\lambda \notin U$ para cada $\lambda \geq \lambda_x$.*
- *Como X es compacto, y $\{U_x\}_{x \in X}$ es cubrimiento por abiertos para X, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$.*
- *$X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Tome $\lambda \geq \lambda_{x_i}$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces $x_\lambda \notin X$, lo cual es contradictorio.*

Asuma que toda red en X tiene una subred convergente.

Prueba

- *$\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos cerrados de X con FIP.*
- *Sea*
$$\Lambda = \{\{i_1, \ldots, i_n\} : i_1, \ldots, i_n \in I \wedge n \in \mathbb{N}\}$$
y un orden en Λ como $\lambda_1 = \{i_1, \ldots, i_n\} \leq \lambda_2 = \{j_1, \ldots, j_n\}$ si y solo si $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_n\}$.

Prueba

- *Como la familia* $\mathcal{F}$ *tiene propiedad de intersección finita, para cada* $\lambda = \{i_1, \ldots, i_n\} \in \Lambda$ *podemos encontrar* $x_\lambda \in F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$.
- *Usando la hipótesis, la red* $\{x_\lambda\}$ *tiene una subred convergente, digamos* $\{x_{\lambda_m}\} \to x$.
- *Se prueba* $x \in F_i$, *para todo* $i \in I$.

Definición

Una red $\{x_\lambda\}$ se dice residualmente en $E \subset X$ si existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene $x_\lambda \in E$.

Definición

Una red $\{x_\lambda\}$ en X es una ultra - red si y solo si para cada subconjunto $E \subset X$, $\{x_\lambda\}$ está residualmente en E o residualmente en E^c.

Observación

Una ultra - red debe converger a sus puntos de acumulación.

Teorema

Toda red $\{x_\lambda\}$ tiene una subred que es una ultra - red.

Observación

Para la demostración de este teorema, primero necesitaremos la definición de un ultra - filtro en un espacio topológico.

Definición

Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos no vacíos de X es un ultra - filtro en X si es cerrada bajo intersecciones finitas, y además para $A \subseteq X$ tenemos que $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$

Observación

Si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una ultra - red, considere la colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos A de X tales que $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq A$ para algún λ_0, que depende de A. Esto define un ultra filtro.
Además, si tenemos un ultra - filtro $\mathcal{U}$, condérelo como un conjunto dirigido mediante la inclusión inversa. Para cada $A \in \mathcal{U}$ tome $x_A \in A$. Así. $\{x_A\}_{A \in \mathcal{U}}$ define una ultra - red.

Teorema

Toda colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X con propiedad de intersección finita está contenida en un ultra - filtro $\mathcal{U}$ de X.

Observación

En la demostración de este teorema se usa el Lema de Zorn.

Teorema

Toda red $\{x_\lambda\}$ tiene una subred que es una ultra - red.

Prueba

- *Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red. Considere la colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Λ de la forma $\{\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$ para $\lambda_0 \in \Lambda$. Esta colección tiene FIP, ya que está contenida en un ultra - filtro $\mathcal{U}$ de Λ.*
- *Ordene $\mathcal{U}$ mediante inclusión inversa, viendolo así como un conjunto dirigido.*

Prueba

- *Considere* $\Phi : \mathcal{U} \to \Lambda$ *tal que* $\Phi(A) \in A$, *para todo* $A \in \mathcal{U}$. *Este mapeo define una subred.*
- *Como* $\mathcal{U}$ *es un ultra - filtro en* Λ, *la red* $\{\Phi(A)\}_{A\in\mathcal{U}}$ *es una ultra - red. Por lema* 1.15, *la red* $\{x_{\Phi(A)}\}_{A\in\mathcal{U}}$ *es una ultra - red, por ser la imagen de* $\{\Phi(A)\}_{A\in\mathcal{U}}$ *bajo la función* $f : \Lambda \to X.\ f(i) = x_i$.

Lema

Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. Si $\{x_\lambda\}$ es una ultra - red en X y $f : X \to Y$ es una función, entonces $\{f(x_\lambda)\}$ es una ultra - red.

Prueba

Si $B \subset Y$, entonces $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B^c))^c$, entonces $\{x_\lambda\}$ está residualmente en $f^{-1}(B)$ o en $f^{-1}(B^c)$, de lo cual $\{f(x_\lambda)\}$ está residualmente en B o en B^c, por lo cual es una ultra - red.

Teorema

Un producto no vacío $X = \prod_{i \in I} X_i$ es compacto si y solo si cada factor X_i es compacto.

- Willard, S, *General Topology.* Dover, New York, 2004, (1970).
- Várilly, J.C, *Notas para el curso MA-0704: Topología.* I-Ciclo 2011, Universidad de Costa Rica.
- Munkres, James R, *Topology.* Prentice Hall, (2000)
- Norwood, Zach, *TYCHONOFF'S THEOREM IMPLIES AC.* http://www.math.ucla.edu/~znorwood/files/tychonoffimpliesac.pdf
- Manoussos, Antonios, *A prf OF TYCHONOFF'S THEOREM.* https://www.math.uni-bielefeld.de/~amanouss/Tychonoff_theorem.pdf
- Clarke, Pete L, *CONVERGENCE.* http://math.uga.edu/~pete/convergence.pdf
- Kruckman, Alex, *Notes on Ultrafilters.* https://math.berkeley.edu/~kruckman/ultrafilters.pdf