Los Teoremas de Picard: Estudio del rango de Funciones Holomorfas

Michael Abarca Jiménez

July 22, 2018

Abstract

Este trabajo bibliográfico pretende exponer dos teoremas de variable compleja, asociados al rango de una función holomorfa. Estos teoremas son conocidos como los teoremas de Picard, en honor al matemático francés Émile Picard (1856 - 1941). Suponga que se quiere resolver la ecuación $f(z) = \beta$ donde f es una función entera no constante y $\beta \in \mathbb{C}$. Sabemos que si f es un polinomio, esta ecuación tiene solución para todo $\beta \in \mathbb{C}$. Por otro lado, la ecuación $\exp(z) = \beta$ no tiene solución si $\beta = 0$. Resulta, que en cierto sentido, este es el peor escenario que se puede presentar, ya que $f(z) = \beta$ tiene solución para todo β en $\mathbb{C}$ excepto posiblemente de un único valor. Adicionalemente, se demostrará que toda función compleja en un vecindario pinchado de una singularidad escencial toma todos los valores complejos, con posiblemente una excepción, una cantidad infinita de veces.

1.1 Preliminares

Definición 1.1. Un conjunto conexo se dice holomorficamente simple conexo si, para cada función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$, existe una antiderivada holomorfa F, esto es, una función que satisface $F'(z) = f(z)$. ◊

Ejemplo 1.2. Discos abiertos, rectángulos y todo el plano complejo $\mathbb{C}$ son holomorficamente simple conexos. ◊

Lema 1.3 (Logarítmo Holomorfo). *Sea U un conjunto holomorficamente simple conexo. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa y no se anula en U, entonces existe una función holomorfa h en U tal que*

$$e^h = f \text{ en } U$$

Demostración. La función $z \to \frac{f'(z)}{f(z)}$ es holomorfa en U, pues f no se anula en dicho conjunto. Como U holomorficamente simple conexo, existe una función h tal que $h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ en U. Fije un punto $z_0 \in U$. Añadiendo una constante a h si fuera necesario, podemos asumir que

$$e^{h(z_0)} = f(z_0)$$

Ahora, bastaría mostrar que $g(z) = f(z)e^{-h(z)}$ satistace $g' = 0$ en U, ya que esto implicaría $Ce^{h(z)} = f(z)$ en U, y como elegimos z_0 tal que $g(z_0) = 1$, entonces por esta condición inicial se tendriá $g(z) = 1$ en U.

Derivando tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial z}(z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(f(z)e^{-h(z)}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(z)e^{-h(z)} + f(z)\left(-\frac{\partial h}{\partial z}(z)e^{-h(z)}\right) \\
&= e^{-h(z)}f(z)\left(\frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} - \frac{\partial h}{\partial z}(z)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

por construcción de h, y con esto se concluye la prueba. □

Lema 1.4. *Si U es un conjunto holomorficamente simple conexo y $f : U \to \mathbb{C} - \{0\}$ es holomorfa, entonces existe una función $g : U \to \mathbb{C} - \{0\}$ holomorfa tal que*

$$f(z) = [g(z)]^2$$

para todo $z \in U$.

Demostración. Basta tomar h tal como el lema anterior, y definir $g(z) = e^{h(z)/2}$. □

Observación. Para mayor detalle sobre esta teoría véase [greene2006function] y [john1973functions].

1.2 Pequeño Teorema de Picard

El objetivo de esta sección es estudiar el rango de funciones holomorfas a traves de varios lemas que serán necesarios en la demostración del siguiente teorema:

Teorema 1.5 (Pequeño Teorema de Picard)**.** *Si f es una función entera y su imagen omite dos valores del plano complejo, entonces es constante.*

Lema 1.6. *Sea U un dominio holomorficamente simple conexo. Sea f una función holomorfa en U tal que su imagen omite el valor de 0 y 1. Entonces, existe una función holomorfa g en U tal que*

$$f(z) = -\exp(i\pi \cosh[2g(z)]) \tag{1.1}$$

y $g(U)$ no contiene discos de radio 1.

Demostración. Como f nunca se anula y U es holomorficamente simple conexo, existe una función h en U tal que $f = e^h$, por lema 1.3. Sea $F := \frac{1}{2\pi i}h$, y como f omite el valor de 1, entonces F no toma valores enteros. Así, existen funciones holomorfas H_1, H_2 en U tales que $H_1^2 = F, H_2^2 = 1 - F$, aplicando el lema 1.4.

Defina $H = H_1 - H_2$, entonces H no se anula en U, por lo cual existe una función holomorfa g tal que $e^g = H$. Se tiene,

$$\cosh(2g) + 1 = \frac{1}{2}(e^g + e^{-2g})^2 = \frac{1}{2}(H + H^{-1})^2 = 2F - 2$$

Esto tomando en el cálculo $H = \sqrt{F} - \sqrt{1-F}$. De acá se usando la definición de F en términos de f, $F = \frac{1}{2i\pi}\log(f)$, para obtener

$$f(z) = \exp(i\pi \cosh(2g(z)) + 3i\pi) = -\exp(i\pi \cosh(2g(z)))$$

Ahora, veamos que g no toma en U los valores $\log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2}mi\pi$ para todo entero positivo n y todo entero m. Suponga que existe $z_0 \in U$ tal que

$$\begin{aligned}
g(z_0) =& \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2}mi\pi \\
\Rightarrow 2g(x_0) =& 2\log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + mi\pi \\
\Rightarrow \cosh[2g(x_0)] =& \cosh[2\log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + mi\pi] \\
\Rightarrow 2\cosh[2g(x_0)] =& e^{im\pi}[(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})]^2 + e^{-im\pi}[(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})]^{-2} \\
\Rightarrow 2\cosh[2g(x_0)] =& (-1)^m[(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 + -(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{-2}] \\
\Rightarrow 2\cosh[2g(x_0)] =& (-1)^m[4n-2] \\
\Rightarrow \cosh[2g(x_0)] =& (-1)^m[2n-1]
\end{aligned}$$

Esto a su vez implica

$$f(z_0) = -\exp(i\pi(-1)^m[2n-1]) = 1$$

contradiciendo que f no toma el valor de 1.

Entonces, en general, g no puede tomar los valores del conjunto

$$\{\pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2}mi\pi : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$$

Esos puntos, forman una partición del plano complejo en rectángulos. La altura, controlada por m, de uno de estos rectángulos está acotada por

$$\left|\frac{1}{2}im\pi - \frac{1}{2}i(m+1)\pi\right| = \frac{\pi}{2} < \sqrt{3}$$

Mientras que su base está dada por,

$$\Phi(n) = \log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) > 0$$

Como Φ es decreciente, para cualquier rectángulo se tiene

$$\Phi(n) \leqslant \Phi(1) = \log(1 + \sqrt{2}) < \log(e) = 1$$

Por lo cual, la diagonal de estos rectángulos está acotada por 2. Y así, cualquier disco de radio 1 en el plano va a contener elementos de este conjunto de vértices, demostrando que $g(U)$ no puede contener un disco de radio 1. □

Teorema 1.7 (Teorema de Bloch)**.** *Sea f una región que contiene $\overline{D(0,1)}$ y $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Entonces, $f(D(0,1))$ contiene un disco de radio $\frac{1}{72}$.*

Demostración. Véase [john1973functions] para una demostarción de este resultado. □

Observación. La cota inferior $\frac{1}{72}$ en el Teorema de Bloch no es la mejor posible, el número B definido como el supremo de los b para los cuales $\frac{1}{72} \to b$ se cumple teorema se llama la constante de Bloch. Sin embargo, se han demostrado las siguientes desigualdades

$$0.4332 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times 10^{-4} \leqslant B \leqslant \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/12)}{\Gamma(1/4)}} \approx 0.47$$

Véase [weisstein2018] para mayor detalle.

Demostración. (del pequeño Teorema de Picard) Asumiendo el Teorema de Bloch. Si $\overline{f}$ es función entera que no toma dos valores $a, b \in \mathbb{C}$ y se asume no constante, entonces

$$f(z) = \frac{\overline{f}(z) - a}{b - a}$$

no toma los valores de 0 y 1. Por el lema 1.6, como $\mathbb{C}$ es holomorficamente simple conexo, existe una función entera g tal que

$$f(z) = -\exp(i\pi \cosh[2g(z)])$$

Como $\overline{f}$ es no constante, entonces g no es constante, por lo cual existe z_0 con $g'(z_0) \neq 0$. Podemos asumir que $g(0) = 0$ y $g(0) \neq 0$, al considerar $g(z) \rightarrow g(z + z_0) - g(z_0)$ si fuera necesario.

Defina

$$h(z) = \frac{g(Rz)}{Rg'(0)}, \ R > 0$$

Entonces h satisface las hipótesis del teorema de Bloch. Esto nos da que $h(D(0, 1))$ contiene un disco de radio $\frac{1}{72}$, lo que es equivalente a decir que $g(D(0, 1))$ contiene un disco de radio $\gamma = \frac{1}{72}R|g'(0)|$. Para R suficientemente grande, este disco de radio γ contiene un disco de radio 1, contradiciendo el hecho que $g(\mathbb{C})$ no contiene discos de radio 1 por demostrado en el lema 1.6. Por lo cual, el teorema de Bloch nos da la la última herramienta necesaria para demostrar el pequenõ Teorema de Picard. □

1.3 Gran Teorema de Picard

Para la demostración del teorema principal de esta sección necesitaremos introducir el concepto de familia normal de funciones. Este concepto nos permitirá enunciar el teorema de Montel - Carathedory, indispensable en la demostración del gran teorema de Picard que presentaremos.

Definición 1.8. Si G es un abierto en $\mathbb{C}$ y (Ω, d) es un espacio métrico completo, definimos $C(G, \Omega)$ como el conjunto de funciones continuas de G en Ω. ◊

Definición 1.9. Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es normal si cada sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge a una función en $C(G, \Omega)$. ◊

Definición 1.10. Se define $M(G)$ como el conjunto de las funciones meromorfas en G. Si $f(z) = \infty$ cuando z es un polo de f, entonces $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es continua. De esto se obtiene $M(G) \subset C(G, \mathbb{C}_\infty)$. ◊

Teorema 1.11. *Sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones en $M(G)$ y suponga $f_n \rightarrow f$ en $C(G, \mathbb{C}_\infty)$. Entonces f es meromorfa o $f = \infty$. Si cada f_n es analítica, entonces f es analítica o $f = \infty$.*

Demostración. Véase [john1973functions]. □

Teorema 1.12 (Montel - Carathedory). *Si $\mathcal{F}$ es la familia de todas las funciones analíticas en una región G que no toman el valor de 0 o 1, entonces $\mathcal{F}$ es normal en $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.*

Demostración. Véase [john1973functions]. □

Teorema 1.13 (Gran Teorema de Picard). *Suponga que f es una función analítica con singularidad escencial en $z = a$. Entonces, en cada vecindario pinchado de a, la función f alcanza todo valor complejo, con una posible excepción, una cantidad infinita de veces.*

Demostración. Por simplicidad, asuma que f tiene una singularidad escencial en $z = 0$. Suponga que existe un $R > 0$ tal que existen dos valores b, c complejos que no están en $\{f(z) : 0 < |f(z)| < R\}$. Reemplazando f por $(f - b)(c - b)^{-1}$ se puede asumir adicionalmente que $f(z) \neq 0$ y $f(z) \neq 1$ para $0 < |f(z)| < R$. Sea $G = B(0, R) - \{0\}$ y defina $f_n : G \to \mathbb{C}$ como $f_n(z) = f(\frac{z}{n})$. Entonces, cada f_n es analítica y ninguna toma el valor de 0 o 1. De acuerdo al teorema de Montel - Carathedory, $\{f_n\}$ es una familia normal en $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.

Sea $\{f_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_k} \to \phi$ uniformemente en $\{z : |z| = \frac{R}{2}\}$, donde por teorema 1.11 se tiene que ϕ es analítica en G o $\phi = \infty$. Primero, si ϕ fuera analítica, sea $M = \max\{|\phi(z)| : |z| = \frac{R}{2}\}$. Entonces

$$\left| f\left(\frac{z}{n_k}\right) \right| = |f_{n_k}(z)| \leqslant |f_{n_k}(z) - \phi(z)| + |\phi(z)| \leqslant 2M$$

para n_k suficientemente grande. Por esto, $|f(z)| \leqslant 2M$ para $|z| = \frac{R}{2n_k}$ y para n_k suficientemente grande. Por principio de módulo máximo, f sería acotada en el anillo alrededor de cero. Esto da f acotada por $2M$ en un vecindario pinchado de 0, y por lo tanto $z = 0$ sería discontinuidad removible por teorema de Riemann sobre disocntinuidades removibles. Por esto, se concluye que ϕ no puede ser analítica, y se concluye que es indenticamente ∞. Sin embargo, este caso lleva a que f deba tener un polo en cero.

Por lo tanto, a lo sumo un valor complejo no se asume. Si se supone que existe un número complejo que se asume solo una cantidad finita de veces, entonces tomando un vecindario suficientemente pequeño llegamos a un vecindario donde f falla en tomar dos valores, y se repite el razonamiento. □

Bibliografía

[greene2006function] Greene, Robert Everist and Krantz, Steven George, *Function theory of one complex variable.* American Mathematical Soc.(2006), vol 40.

[john1973functions] John B. Conway, *Functions of one complex variable.* Springer-Verlag New York, Graduate texts in mathematics (1973)

[ahlfors1966complex] Ahlfors, L.V., *COMPLEX ANALYSIS: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable.* McGraw- Hill, International Series in Pure and Applied Mathematics (1966)

[weisstein2018] Weisstein, Eric W. , *Bloch Constant.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. ⟨`http://mathworld.wolfram.com/BlochConstant.html`⟩