Solución Débil a Problema de Poisson

Michael Abarca Jiménez

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
SP-1320: Análisis Real

Contenidos

Definición

Sea H un espacio vectorial. Un producto escalar, (u, v), es una forma bilineal en $H \times H$ con valores en $\mathbb{R}$ tal que

1. $(u, v) = (v, u), \quad \forall u, v \in H$
2. $(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in H$
3. $(u, u) \neq 0, \quad \forall u \neq 0$

Se puede mostrar que $||u|| := \sqrt{(u, u)}$ es una norma.

Definición

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H equipado con un producto escalar tal que H es completo con respecto a la norma inducida $|| \cdot ||$.

Ejemplo

$L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con producto escalar definido como

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} fg, \ \ \forall f,g \in L^2(\mathbb{R})$$

Observación

Todos los espacios de Hilbert son Banach. Adicional a las propiedades de un espacio de Bananch, los espacios de Hilbert también tienen "ángulos". Por ejemplo, si $(f,g) = 0$, decimos que f,g son ortogonales.

Observación

La siguiente propiedad muestra que la proyección que usamos en $\mathbb{R}^n$ también existe ene espacios de Hilbert.

Teorema

Sea $K \subset H$ un conjunto cerrado y convexo no vacío. Entonces, para cada $f \in H$ existe un único elemento $u \in K$ tal que

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|$$

Adicionalmente, u es caracterizado por la siguientes propiedades

- $u \in K$
- $(f - u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K$

Se denota $u = P_K f$.

Observación

El siguiente lema prueba que el mapeo proyección no incrementa la distancia.

Lema

Sea $K \subset H$ un conjunto cerrado y convexo no vacío. Entonces

$$|P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2|, \ \ \forall f_1, f_2 \in H$$

Corolario

Asuma que $M \subset H$ *es un subespacio lineal cerrado. Sea* $f \in H$*. Entonces* $u = P_M f$ *es caracterizado por*

1. $u \in M$
2. $(f - u, v) = 0, \;\; \forall v \in M$

Teorema

Dado $\Phi \in H^*$, existe un único $f \in H$ tal que

$$\Phi(u) = (f, u), \quad \forall u \in H$$

Adicionalmente,

$$|f| = ||\Phi||_{H^*}$$

Observación

Podemos identificar H con H^* por el teorema anterior.

Definición

Una forma bilineal $\alpha : H \times H \to R$ se dice continua si existe una constante C tal que

$$|\alpha(u, v)| \leq C|u||v|, \ \ \forall u, v \in H$$

además decimos que α es coactiva si hay una constante $a > 0$ tal que

$$|\alpha(v, v)| \geq a|v|^2, \ \ \forall v \in H$$

Observación

Es evidente que para cualquier espacio de Hilbert, su producto escalar $(\cdot, \cdot)$ en H es una forma bilineal continua y coactiva.

Teorema

(Teorema de contracción) Sea X un espacio métrico completo no vacío y sea $f : X \to X$ un mapeo estricto. Esto es, existe $k \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \ \forall x, y \in X$$

Entonces, hay un único $x \in X$ tal que $x = f(x)$.

Teorema

(Lax - Milgram) Asuma que $\alpha(u,v)$ es una forma bilineal en H que es continua y coactiva. Entonces, para cada $\Phi \in H^*$, existe un único $u \in H$ tal que

$$\alpha(u,v) = \Phi(v), \ \ \forall v \in H$$

Adicionalmente, si α es simétrico u está caracterizado por

1. $u \in K$
2. $\frac{1}{2}\alpha(u,v) - \Phi(u) = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}\alpha(u,v) - \Phi(v)\}$

Definición

Tome $U \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, y sea p en $[1, +\infty)$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | \partial_{x_i} u \in L^p(\Omega), \ \ 1 \leq i \leq d\}$$

Denotamos

$$H^1(I) = W^{1,2}(\Omega),$$

Observación

El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach equipado con la norma

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + ||\nabla u||_{L^p}$$

O si $1 < p < \infty$, con la norma equivalente $(||u||^p_{L^p} + ||\nabla u||^p_{L^2})^{1/p}$.
El espacio H^1 es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

Con norma inducida

$$||u||_{H^1} = (||u||^2_{L^2} + ||\nabla u||^2_{L^2})^{1/2}$$

Observación

1. Para cualquier conjunto abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ se define como la colección de funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ que valen cero en la frontera de Ω.
2. Análogamente, se define $H_0^1(\Omega)$

Definición

Dada una ecuación diferencial de la forma

$$-\Delta u = f, \ \text{ en } \Omega$$
$$u = 0, \ \text{ en } \partial\Omega$$

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado y $f \in L^2(\Omega)$, definimos una solución débil u del sistema como una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Phi \ = \int_\Omega f\Phi, \ \forall \Phi \in H_0^1(\Omega)$$

Teorema

(Desigualdad de Poincaré) Suponga que $1 \leq p < \infty$, y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto acotado. Existe una costante C tal que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \;\; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Proof.

Esta desigualdad es muy importante. La supocisión $u \in W_0^{1,p}$ es crucial, de hecho, en general no es cierta en $W^{1,p}$. □

Teorema

Para cualquier conjunto abierto, acotado y simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y para cualquier $f \in L^2(\Omega)$, existe una solución débil al sistema de Poisson anteriormente planteado.

Proof.

La prueba será una aplicación de Lax - Milgram. Para probar que cierta forma bilineal es coactiva, se usará la desigualdad de Poincaré. $\square$