Tarea 1
MA0918 : Procesos Estocásticos
Prof: Jose A. Ramírez

Michael Abarca Jiménez

28 de Abril del 2020

Ejercicio 1.15 Sea $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un proceso Gaussiano centrado. Asumimos que el mapeo $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ de $[0,1]\times\Omega$ a $\mathbb{R}$ es medible. Denotamos la función de covarianza de X por K.

1. Mostrar que el mapeo $t \to X_t$ de $[0,1]$ a $L^2(\Omega)$ es continuo si y solamente si K es continua en $[0,1]^2$. En lo que sigue, asumimos que esta condición se cumple.

Demostración. Primeramente, si asumimos que $K(s,t) := K(X_t, X_s)$ es continua

$$\begin{aligned}
||X_{t+h} - X_t||^2_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{E}\left(|X_{t+h} - X_t|^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2_{t+h} - 2X_{t+h}X_t + X^2_t\right) \\
&= K(t+h, t+h) - 2K(t+h, t) + K(t,t)
\end{aligned}$$

Al hacer $h \to 0$ se concluye $t \to X_t$ continuo en $L^2(\Omega)$.

Ahora bien, si asumimos que $t \to X_t$ continuo en $L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|K(u+t, v+s) - K(u,v)| &\leqslant |K(u+t, v+s) - K(u, v+s)| + |K(u, v+s) - K(u,v)| \\
&= |\mathbb{E}(X_{u+t}X_{v+s}) - \mathbb{E}(X_u X_{v+s})| + |\mathbb{E}(X_u X_{v+s}) - \mathbb{E}(X_u X_v)| \\
&\leqslant \mathbb{E}(|X_{v+s}||X_{u+t} - X_u|) + \mathbb{E}(|X_u||X_{v+s} - X_v|) \\
&\leqslant ||X_{v+s}||_{L^2(\Omega)}||X_{u+t} - X_u||_{L^2(\Omega)} + ||X_u||_{L^2(\Omega)}||X_{v+s} - X_v||_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Fijando un punto (u,v), $||X_{v+s}||_{L^2(\Omega)}$ es acotado para s pequeño por continuidad de $t \to X_t$, y se puede concluir continuidad de K. $\square$

2. Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\int_0^1 |h(t)|\sqrt{K(t,t)}\, dt < \infty$. Muestre que para casi todo ω, la integral $\int_0^1 h(t)X_t(\omega)\, dt$ es absolutamente convergente. Definimos $Z = \int_0^1 h(t)X_t\, dt$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^1 |X_t(w)||h(t)|\, dt\, dw &= \int_0^1 \int_\Omega |X_t(w)||h(t)|\, dw\, dt \\
&= \int_0^1 ||X_t||_{L^1(\Omega)}|h(t)|\, dt \\
&\leqslant \int_0^1 ||X_t||_{L^2(\Omega)}|h(t)|\, dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{K(t,t)}|h(t)|\, dt < \infty
\end{aligned}$$

lo cual muestra convergencia absoluta. □

3. Ahora suponemos algo más fuerte, $\int_0^1 |h(t)|\, dt < \infty$. Muestre que Z es el límite en $L^2(\Omega)$ de las variables

$$Z_n = \sum_{i=0}^n X_{\frac{i}{n}} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} h(t)\, dt$$

e infiera que Z es una variable aleatoria Gaussiana.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|Z_n - Z|^2 &= \int_\Omega \left| \int_0^1 h(t)[X_t(w) - \sum_{i=0}^n X_{\frac{i}{n}} \mathbb{I}_{I_n}(t)]\, dt \right|^2 dw \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^1 h(t)[X_t(w) - \sum_{i=0}^n X_{\frac{i}{n}} \mathbb{I}_{I_n}(t)]\, dt \right) \left(\int_0^1 h(s)[X_s(w) - \sum_{i=0}^n X_{\frac{i}{n}} \mathbb{I}_{I_n}(s)]\, ds \right) dw \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^1 \int_0^1 h(t)h(s)[X_t(w) - \sum_{i=0}^n X_{\frac{i}{n}} \mathbb{I}_{I_n}(t)][X_s(w) - \sum_{i=0}^n X_{\frac{i}{n}} \mathbb{I}_{I_n}(s)]\, dt \right)
\end{aligned}$$

□

4. Asumimos que K es dos veces continuamente diferenciable. Muestre que para cada $t \in [0,1]$ el siguiente límite existe en $L^2(\Omega)$

$$\hat{X}_t := \lim_{s \to t} \frac{X_s - X_t}{s - t}$$

Verificar que $(\hat{X}_t)_{t \in [0,1]}$ es un proceso Gaussiano y calcule su función de covarianza.

Demostración. Para demostrar que dicho límite existe, veamos que para $h_1 \to 0, h_2 \to 0$ independientemente se tiene

$$\left\| \frac{X_{t+h_1} - X_t}{h_1} - \frac{X_{t+h_2} - X_t}{h_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

Note que

$$\left\| \frac{X_{t+h_1} - X_t}{h_1} - \frac{X_{t+h_2} - X_t}{h_2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = A - 2B + C$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{|h_1|^2} \mathbb{E}(X_{t+h_1} - X_t)^2 = \frac{\mathbb{E}(X_{t+h_1})^2 + \mathbb{E}(X_t)^2 - 2\mathbb{E}(X_{t+h_1} X_t)}{|h_1|^2} \\
B &= \frac{1}{|h_1 h_2|} \mathbb{E}(X_{t+h_1} - X_t)(X_{t+h_2} - X_t) = \frac{\mathbb{E}(X_{t+h_1} X_{t+h_2}) + \mathbb{E}(X_t)^2 - \mathbb{E}(X_{t+h_1} X_t) - \mathbb{E}(X_{t+h_2} X_t)}{|h_1 h_2|} \\
C &= \frac{1}{|h_2|^2} \mathbb{E}(X_{t+h_2} - X_t)^2 = \frac{\mathbb{E}(X_{t+h_2})^2 + \mathbb{E}(X_t)^2 - 2\mathbb{E}(X_{t+h_2} X_t)}{|h_2|^2}
\end{aligned}$$

Note que si se toma $g(x) = K(x, t + h_1) - K(x, t)$ a su vez se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \frac{K(t + h_1, t + h_1) + K(t, t) - 2K(t + h_1, t)}{|h_1|^2} \\
&= \frac{g(t + h_1) - g(t)}{|h_1|^2}
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generaldiad, suponiendo $h_1 > 0$, como g es dos veces continuamente diferenciable, $\exists t^* \in (t, t + h_1)$ tal que

$$A = \frac{g'(t^*)}{h_1} = \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial K(t^*, t + h_1)}{\partial u} - \frac{\partial K(t^*, t)}{\partial u} \right]$$

De nuevo, por diferenciablilidad de las derivadas parciales de K, $\exists t^{**} \in (t, t+h_1)$ tal que

$$A = \frac{\partial K(t^*, t^{**})}{\partial v \partial u}$$

tomando $h_1 \to 0$, por continuidad $A \to \dfrac{\partial K(t,t)}{\partial v \partial u}$, y lo mismo aplica para C. Y así para probar que $\hat{X}_t$ existe quedaría verificar que

$$B \to \frac{\partial K(t,t)}{\partial v \partial u}$$

Usando $g(x) = K(t+h_1, x) - K(t, x)$ se tiene

$$g(t+h_2) - g(t) = K(t+h_1, t+h_2) - K(t, t+h_2) - K(t+h_1, t) + K(t,t) = |h_1 h_2| B$$

y bajo mismo razonamiento se llega a $B \to \dfrac{\partial K(t,t)}{\partial v \partial u}$. Por lo tanto $\hat{X}_t$ existe, ya que se comprobó que es de Cauchy, y $L^2(\Omega)$ es de Cauchy.

Ahora, note que $\frac{X_s - X_t}{s-t}$ es una variable Gaussiana centrada, ya que X_t es un proceso Gaussiano. Como $\hat{X}_t$ es límite en L^2 de variables Gaussianas, se concluye que es Gaussiana. Y como combinaciones lineales de variables de la forma $\frac{X_s - X_t}{s-t}$ son Gaussianas centradas, se tiene $\hat{X}_t$ proceso Gaussiano.

Calculemos la función de covarianza $\hat{K}(t,s)$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_{t+h} - X_t}{h} \frac{X_{s+h} - X_s}{h}\right] = \frac{K(t+h, s+h) - K(t+h, s) - K(t, s+h) + K(t,s)}{h}$$

Definitiendo $g(x) = K(x, s+h) - K(x, s)$ como se hizo anteriormente $\exists s_h \to s, t_h \to t$ tales que

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_{t+h} - X_t}{h} \frac{X_{s+h} - X_s}{h}\right] = \frac{\partial^2 K(t_h, s_h)}{\partial u \partial v}$$

Como K es dos veces continuamente diferenciables en $[0,1]^2$, $\exists C > 0$ tal que

$$\left|\mathbb{E}\left[\frac{X_{t+h} - X_t}{h} \frac{X_{s+h} - X_s}{h}\right]\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 K(t_h, s_h)}{\partial u \partial v}\right| \leqslant C$$

y así al invocar el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}
\hat{K}(t,s) &= \mathbb{E}\left[\hat{X}_t \hat{X}_s\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{X_{t+h} - X_t}{h}\,\frac{X_{s+h} - X_s}{h}\right] \\
&= \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial u \partial v}
\end{aligned}$$

□