1.4 Ejercicios sobre aproximación por polinomios

Ejercicio 1.30. Considérese la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(t) := e^{-1/t^2} [\![t > 0]\!].$$

Verificar directamente que esta función es de clase C^3 sobre $\mathbb{R}$, con las siguientes derivadas:

$$g'(t) = \frac{2}{t^3}\, e^{-1/t^2}, \qquad g''(t) = \frac{-6t^2 + 4}{t^6}\, e^{-1/t^2}, \qquad g'''(t) = \frac{24t^4 - 36t^2 + 8}{t^9}\, e^{-1/t^2}.$$

[\![Se debe tener especial cuidado con las derivadas en $t = 0$.]\!]

En seguida, demostrar por inducción sobre k que existen polinomios p_k de grado k tales que, para cada $k \geqslant 1$:

$$g^{(k)}(t) = p_{k-1}(t^2)\, t^{-3k} e^{-1/t^2} \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Concluir que g es una función suave (es decir, de clase C^∞) sobre $\mathbb{R}$.

Solución: Luego de verificar las derivadas para $g(t)$ en $t > 0$, se concluye su continuidad en dicho intervalo ya que son cocientes de funciones continuas cuyo denominador no se anula. Además, si $t \leqslant 0$ todas las derivadas son 0.
Haciendo uso del límite

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-n} e^{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^n e^{1/t^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^n}{e^{u^2}} \overset{L'H}{=} 0$$

tenemos que $\lim_{t\to 0^+} g^{(i)}(t) = 0,\ i = 1, 2, 3$, y por lo tanto como $g^{(i)}(0) = 0,\ i = 1, 2, 3$, se concluye $g \in C^3(\mathbb{R})$.

Ahora, suponga por inducción que

$$g^{(k)}(t) = p_{k-1}(t^2)\, t^{-3k} e^{-1/t^2} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Derivando tenemos

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(t) &= (2t)p'_{k-1}(t^2)\, t^{-3k} e^{-1/t^2} + p_{k-1}(t^2)\,(-3k)t^{-3k-1} e^{-1/t^2} + p_{k-1}(t^2)\, t^{-3k} e^{-1/t^2} \left(\frac{2}{t^3}\right) \\ &= \left((2t)p'_{k-1}(t^2) + p_{k-1}(t^2)\,(-3k)t^{-1} + p_{k-1}(t^2) \left(\frac{2}{t^3}\right)\right) t^{-3k} e^{-1/t^2} \\ &= \left((2t^4)p'_{k-1}(t^2) + p_{k-1}(t^2)\,(-3k)t^2 + 2p_{k-1}(t^2)\right) t^{-3(k+1)} e^{-1/t^2} \end{aligned}$$

El primer y segundo término del paréntesis tienen grado $2k$, mientras el tercero tiene grado $2k - 2$, pero los índices principales del primero y el segundo son respectivamente

$2a_{k-1}(k-1)$ y $-3ka_{k-1}$, por lo cual se concluye que el pararéntesis es un polinomio de grado $2k$. Además como todos los términos de cada polinomio son de grado par, se puede ver como un polinomio de la forma $p_k(t^2)$.

$$\therefore \; g^{(k+1)}(t) = p_k(t^2)\, t^{-3(k+1)} e^{-1/t^2} \quad \text{para} \quad t > 0$$

Finalmente, todas las derivadas de g de orden superior en $t \leqslant 0$ son nulas y para $t > 0$ son continuas por ser cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula. Así al tener

$$\lim_{t\to 0^+} g^{(k+1)}(t) = \lim_{t\to 0^+} p_k(t^2)\, t^{-3(k+1)} e^{-1/t^2} = \left(\lim_{t\to 0^+} p_k(t^2)\right)\left(\lim_{t\to 0^+} t^{-3(k+1)} e^{-1/t^2}\right) = 0$$

se demuestra que todas las derivadas son continuas en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. ⊚

Ejercicio 1.31. (a) Si g es la función definida en el Ejercicio 1.30 y si $\delta > 0$, defínase $g_\delta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g_\delta(s) := \frac{g(s)}{g(\delta - s) + g(s)} \quad \text{para} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Comprobar que g_δ es suave sobre $\mathbb{R}$, que $g_\delta(s) \equiv 0$ si $s \leqslant 0$, $g_\delta(s) \equiv 1$ si $s \geqslant \delta$, y que $0 \leqslant g_\delta(s) \leqslant 1$ para $0 < s \leqslant \delta$.

Solución:

Tenemos que $g(\delta - s) + g(s) > 0$ ya que son funciones no negativas que no se pueden anular simultaneamente. Anteriormente se demostró que $g(s)$ es una funcion suave en $\mathbb{R}$, entonces $g_\delta(s)$ es una función suave en $\mathbb{R}$ por ser el cociente de funciones suaves cuyo denominador no se anula.

Ahora consideremos casos:

- Si $s \leqslant 0$, se cumple $\delta - s > 0$ y por lo tanto $g(\delta - s) \neq 0$.

$$g_\delta(s) = \frac{g(s)}{g(\delta - s) + g(s)} = \frac{0}{g(\delta - s) + 0} = 0$$

- Si $s \geqslant \delta$, entonces $g(\delta - s) = 0$. Además $g(s) \neq 0$.

$$g_\delta(s) = \frac{g(s)}{g(\delta - s) + g(s)} = \frac{g(s)}{0 + g(s)} = 1$$

- Considere $0 < s \leqslant \delta$. En este caso $g(s), g(\delta - s) > 0$.

$$0 \leqslant g_\delta(s) = \frac{g(s)}{g(\delta - s) + g(s)} \leqslant \frac{g(s)}{g(s)} = 1$$

◎

(b) Si $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado finito, con $b - a > 2\delta$, defínase

$$h(t) := g_\delta(t-a)\, g_\delta(b-t) \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que h es suave sobre $\mathbb{R}$, que $h(t) \equiv 1$ para $t \in [a+\delta, b-\delta]$, $h(t) \equiv 0$ para $t \notin (a,b)$, y que $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución: Por lo anterior, $h(t)$ es una función suave en $\mathbb{R}$ por ser el producto de funciones suaves.

- Cuando $t \in [a+\delta, b+\delta]$, entonces $g(t-a) > 0$ y $g(\delta-t+a) = 0$ por lo cual $g_\delta(t-a) = 1$. Análogamente, $g(b-t) > 0$ y $g(\delta+t+a) = 0$ de modo que $g_\delta(t-a) = 1$. Se concluye $h(t) \equiv 1$ en dicho intervalo.
- Anterior,emte se demostró que $g(\delta-s)$ y $g(s)$ no se pueden anular simultaneamente. Si $t \notin (a,b)$, se va a tener $g(t-a) = 0 = g(b-t)$, lo que implica $h(t) \equiv 0$ en dicha región.
- Se cumple $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ ya que $g_\delta(\mathbb{R}) = [0,1]$

◎

Ejercicio 1.32. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} sobre un intervalo abierto $I = (t_0 - R, t_0 + R)$. Verificar la fórmula integral del resto del polinomio de Taylor de grado n para $f(t)$ alrededor de $t = t_0$:

$$R_{f,n}(t) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^n f^{(n+1)}(s)\, ds.$$

⟦ Indicación: Aplicar integración por partes al lado derecho. ⟧

Solución: Por inducción: si $n = 1$,

$$\begin{aligned}
R_{f,1}(t) &= \int_{t_0}^{t} (t-s) f''(s)\, ds \\
&= \big[(t-s)f'(s)\big]\Big|_{s=t_0}^{s=t} + \int_{t_0}^{t} f'(s)\, ds \\
&= -(t-t_o)f'(t_o) + f(t) - f(t_0) \\
&= f(t) - T_{f,1}(t)
\end{aligned}$$

Suponiendo la fórmula válida para $n-1$,

$$\begin{aligned}
R_{f,n}(t) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds &= \frac{1}{n!}\left[(t-s)^n f^{(n)}(s)\Big|_{t_0}^{t} + n\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}f^{(n)}(s)\,ds\right]\\
&= \frac{1}{n!}\left[-(t-t_0)f^{(n)}(t_0) + n\int_{t_0}^{t} -(t-s)^{n-1}f^{(n)}(s)\,ds\right]\\
&= -\frac{(t-t_0)^n f^{(n)}(t_0)}{n!} + R_{f,n-1}(t)\\
&= -\frac{(t-t_0)^n f^{(n)}(t_0)}{n!} + f(t) - T_{n-1}(t)\\
&= f(t) - T_{f,n}(t)
\end{aligned}$$

$\therefore\ T_{f,n}(t) - R_{f,n}(t) = f(t),\ \forall n \in \mathbb{N}$ ⊚

Ejercicio 1.33. (a) Sea $f_3(t) := t^3$ para $t \in \mathbb{R}$. Calcular los polinomios de Bernstein $B(f_3;t)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
B(f_3;t) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\\
&= \frac{\mathbb{E}(\mathcal{X}^3)}{n^3}, \qquad \mathcal{X} \text{ variable aleatoria } Bin(n,t).
\end{aligned}$$

La función generadora de momentos para $\mathcal{X}$ viene dada por

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{X}}(s) &= \sum_{k=0}^{n} e^{sk}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(te^s)^k(1-t)^{n-k}\\
&= (te^s + 1 - t)^n
\end{aligned}$$

Su derivada tercera derivada es

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{X}}'''(s) =& nte^s(te^s+1-t)^{n-1} + n(n-1)t^2e^{2s}(te^s+1-t)^{n-2} + \\ & 2n(n-1)t^2e^{2s}(te^s+1-t)^{n-2} + n(n-1)(n-2)t^3e^{3s}(te^s+1-t)^{n-3} \end{aligned}$$

y por teorema se concluye

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{X}}'''(0) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^3) &= nt + n(n-1)t^2 + 2n(n-1)t^2 + n(n-1)(n-2)t^3 \\ &= nt + 3n(n-1)t^2 + n(n-1)(n-2)t^3 \end{aligned}$$

$$\therefore\ B(f_3;t) = \frac{M_{X}'''(0)}{n^3} = \frac{t}{n^2} + \frac{3(n-1)t^2}{n^2} + \frac{(n-1)(n-2)t^3}{n^2}$$

⊚

(b) Demostrar directamente (sin invocar el teorema de Weierstrass) que $B(f_3;t) \to t^3$ uniformemente sobre $[0,1]$ cuando $n \to \infty$.

Solución: Para $t \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} B(f_3;t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n^2} + \frac{3(n-1)t^2}{n^2} + \frac{(n-1)(n-2)t^3}{n^2} = t^3$$

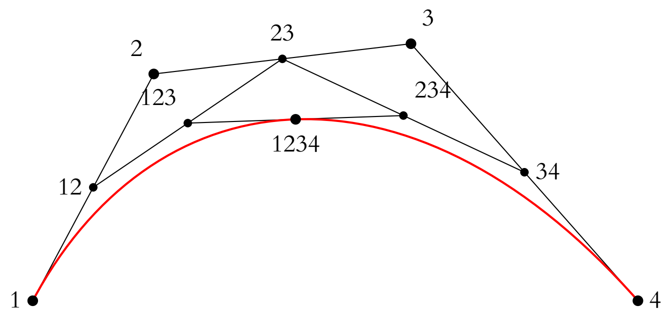
$\therefore\ B(f_3;t) \to t^3$ puntualmente en $[0,1]$.

Para analizar la convergencia uniforme vea que

$$\begin{aligned} \left\|B(f_3;t) - t^3\right\|_{[0,1]} &= \left\|\frac{t}{n^2} + \frac{3(n-1)t^2}{n^2} + \frac{(n^2-3n+2)t^3}{n^2} - t^3\right\|_{[0,1]} \\ &= \left\|\frac{t}{n^2} + \frac{3(n-1)t^2}{n^2} + \frac{(-3n+2)t^3}{n^2}\right\|_{[0,1]} \\ &\leqslant \left\|\frac{t}{n^2}\right\|_{[0,1]} + \left\|\frac{3(n-1)t^2}{n^2}\right\|_{[0,1]} + \left\|\frac{(-3n+2)t^3}{n^2}\right\|_{[0,1]} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{3(n-1)}{n^2} + \frac{|-3n+2|}{n^2} \to 0,\ n \to \infty \end{aligned}$$

$\therefore\ B(f_3;t) \to t^3$ uniformemente en $[0,1]$.

⊚



Ejercicio 1.34. Muchos programas informáticos de dibujo usan curvas de Bézier para conectar dos pixeles $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_4 = (x_4, y_4)$ en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ con una curva cúbica, con direcciones tangentes preasignadas en los puntos inicial y final. Para tal efecto, se establecen dos *puntos de control* z_2 y z_3, las direcciones $z_1 \to z_2$ y $z_3 \to z_4$ dan vectores tangentes en z_1 y z_4 respectivamente.

El algoritmo siguiente localiza un pixel intermedio z_{1234} en la curva deseada:[1]

$$\begin{aligned} z_{12} &:= \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2); & z_{23} &:= \tfrac{1}{2}(z_2 + z_3); & z_{34} &:= \tfrac{1}{2}(z_3 + z_4); \\ z_{123} &:= \tfrac{1}{2}(z_{12} + z_{23}); & z_{234} &:= \tfrac{1}{2}(z_{23} + z_{34}); & z_{1234} &:= \tfrac{1}{2}(z_{123} + z_{234}). \end{aligned}$$

En seguida, se repita el proceso, con las sustituciones

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1, z_{12}, z_{123}, z_{1234}) \quad \text{y} \quad (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_{1234}, z_{234}, z_{34}, z_4)$$

respectivamente. Esto produce dos pixeles más en la curva deseada. Al continuar la iteración k veces, se obtienen $2^k + 1$ pixeles (contando los dos originales), suficientes para pintar la curva con unas cuantas iteraciones.

Ahora bien: sea $t \mapsto z(t)$ la función continua que parametriza la curva así obtenida para $0 \leqslant t \leqslant 1$, con $z(0) := z_1$, $z(1) := z_4$, $z(\frac{1}{2}) := z_{1234}$, etcétera, donde los pixeles obtenidos en el paso #k designan $z(m/2^k)$ con m impar. Comprobar que $z(t)$ *es un polinomio de Bernstein*, al obtener una fórmula explícita para $z(t)$ en términos de z_1, z_2, z_3 y z_4.

⟦ Como consecuencia, la curva de Bézier queda dentro de la envoltura convexa de los cuatro puntos originales. ⟧

[1] Tomado del libro: Donald E. Knuth, *The METAFONTbook*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1986. El algoritmo fue propuesto en 1959 por Paul de Casteljau, pero luego fue atribuido erróneamente al ingeniero Pierre Bézier.