I Examen Parcial
SP1306 : Análisis Numérico
Prof: Juan Gabriel Calvo

Michael Abarca Jiménez

12 de Mayo del 2019

Problema 1-) Considere el problema

$$-u'' = f,\ x \in (0,1)$$

con condiciones frontera $u'(0) = u'(1) = 0$.

Vamos a analizar cada condición inicial separadamente. Cuando resolvemos con $u'(0) = 0$, usando el TFC y asumiendo que y_1 es solución se llega a

$$y_1(x) = -\int_0^x \int_0^t f(u)\,du + y_1(0)$$

mientras que la considerar $u'(1) = 0$, si y_2 es solución se tiene

$$y_2(x) = -\int_x^1 \int_t^1 f(u)\,du + y_2(1)$$

Se observa que $y(x) = \frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}$ es solución a la PDE, y además cumple ambas condiciones frontera. Ahora, note que si u es solución se da lo siguiente

$$-u'' = f \Longrightarrow \int_0^1 -u'' = \int_0^1 f \Longrightarrow -u'(1) + u'(0) = 0 = \int_0^1 f$$

Afirmación: $y(x)$, dada por la fórmula anterior, es solución a la PDE si y solo si $\int_0^1 f = 0$. Primero si $y(x)$ es solución, derivando (usando el TFC) se tiene

$$y'(x) = \frac{-1}{2}\int_0^x f(u)\,du + \frac{1}{2}\int_x^1 f(u)\,du$$

y por condiciones frontera se llega a

$$0 = y'(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,du$$

concluyendo lo afirmado. En este caso, se está usando $f \in L^1([0,1])$.
Por otro lado, suponga $\int_0^1 f = 0$. Al derivar (de nuevo con el TFC) $y(x)$ tenemos

$$y'(x) = \frac{-1}{2}\int_0^x f(u)\,du + \frac{1}{2}\int_x^1 f(u)\,du \Longrightarrow y''(x) = -f(x)$$

Y así se verfican las dos direcciones.
Por lo cuál, en este caso se dio una condición para tener solución. Sin embargo, en el análisis expuesto se depende fuertemente de las condiciones frontera del problema. Por lo cuál, no se puede garantizar que en general al cambiar las mismas se siga teniendo solución aún bajo la condición dada de $\int_0^1 f = 0$, y esto es precisamente no poder garantizar estabilidad de la ecuación.

Problema 2-) Considere la ecuación diferencial

$$-u'' + u' + u = f,\ x \in (0,1),\ u(0) = u(1) = 0$$

la forma bilineal

$$a(v,v) = \int_0^1 v'u + u'v + uv$$

y el funcional $F(u) = \int_0^1 fu$.

a-) Si $u \in C^2(0,1) \cap C[0,1]$ es una solución clásica de la PDE, demuestre que $a(u,v) = F(v)$, $\forall v \in C^2(0,1) \cap C[0,1]$ con $v(0) = 0 = v(1)$.
Si u es solución clásica, entonces

$$-u'' + u' + u = f$$

Tomando $v \in C^2(0,1) \cap C[0,1]$ con $v(0) = 0 = v(1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
&-u''v + u'v + uv = fv \\
&\Longrightarrow u'v + uv = fv + u''v \\
&\Longrightarrow u'v' + u'v + uv = fv + u''v + u'v'
\end{aligned}$$

Sin emabargo, por condiciones frontera de u, v se tiene que

$$\int_0^1 u''v + u'v' = \int_0^1 (u'v)' = (u'v)'|_{t=0}^{t=1} = 0$$

por lo cuál al inetgrar a ambos lados se concluye $a(u, v) = F(v)$.

b-) Demuestre que $a(\cdot, \cdot) : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \to \mathbb{R}$ es continua y coerciva en $H^1(0, 1)$.

Primero vamos a demostrar que la forma bilineal es continua, para esto vea que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leqslant ||u'v' + u'v + uv||_1 \\ &\leqslant ||u'v'||_1 + ||u'v||_1 + ||uv||_1 \\ \text{(Holder)} &\leqslant ||u'||_2^2||v'||_2^2 + ||u'||_2^2||v||_2^2 + ||u||_2^2||v||_2^2 \\ &\leqslant \left(||u'||_2^2 + ||u||_2^2\right)\left(||v'||_2^2 + ||v||_2^2\right) \\ &= ||u||_{H^1}||v||_{H^1} \end{aligned}$$

por lo cual la forma bilineal es continua. Para verificar que es coarciva note que

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^1 ((v')^2 + v^2 + v'v) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (2(v')^2 + 2v^2 + 2v'v) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (v' + v)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 ((v')^2 + v^2) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 ((v')^2 + v^2) \\ &= \frac{1}{2}||v||_{H^1}^2 \end{aligned}$$

y así la forma bilineal es continua y coarciva.

c-) Demuestre que el problema: Encuentre $u \in H_0^1(0, 1)$ tal que

$$a(u, v) = F(v),\ \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

tiene solución única. Qué se puede decir de la estabilidad de la solución?

La existencia y unicidad viene dada por Lax - Milgram, ya que anteriormente se demostraron las hipótesis para que el mismo aplique (forma bilineal continua y coarciva). Con respecto a la estabilidad, note que la solución en norma siempre está acotada pues

$$||u||_{H_1}^2 = a(u,u) = F(u) \leqslant ||f||_2||u||_2 \leqslant ||f||_2||u||_{H_1}$$

de donde se infiere $||u||_{H_1} \leqslant ||f||_2$, y de acá la estabilidad.

d-) Demuestre que el problema: Encuentre $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

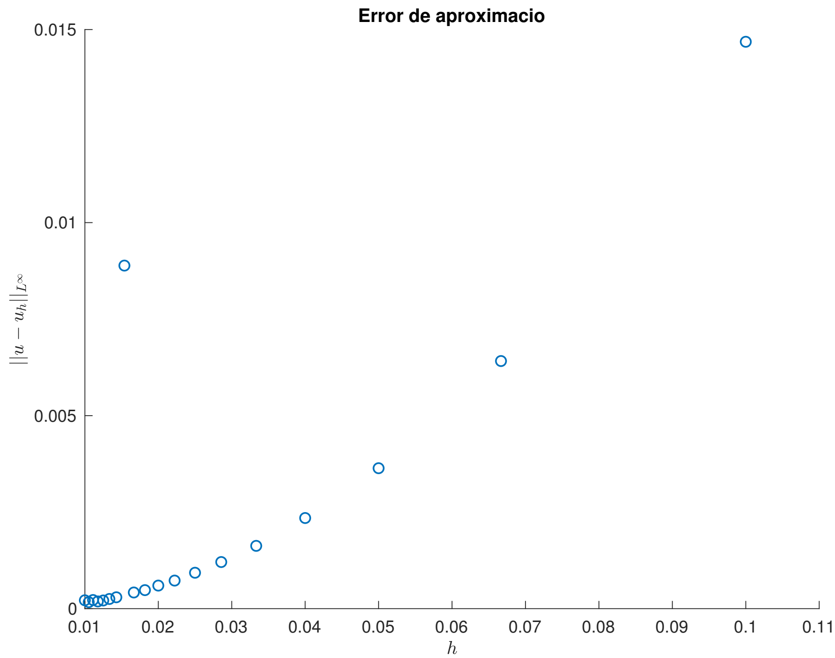
$$a(u,v) = F(v), \ \forall v \in H_0^1(0,1)$$

tiene solución única. Qué se puede decir de la estabilidad de la solución?

e-) Considere una partición uniforme con $N+1$ puntos del intervalo $[0,1]$ dada por $\{x_k\}_{k=0}^N$ donde $h = 1/N$, $x_k = kh$. Para cada nodo x_k considere la función $\phi_k(x) = \delta_{ij}$ y es continua, lineal a trozos. Para u suficientemente suave, es posible definir el interpolador lineal a trozos $I^h u = \sum_k u(x_k)\phi_k(x)$. Demuestre que $||u - I^h u||_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{h^2}{8}||u''||_{L^\infty(0,1)}$.

g-) Se implementa el método de elementos finitos en pregunta2.m, y se obtiene para iteraciones de $N = 10:5:101$ el siguiente comportamiento del error de la aproximación en los nodos contra el valor real de la solución exacta en los mismos bajo norma infinito.

Lo cual nos da un buen comportamiento del error para h pequeño, y nos genera una aproximación satisfactoria a la solución real de la PDE.



Problema 3-) Se pide demostrar que para la forma bilineal del **Problema 2-)** se cumple

$$a(v,v)=\int_0^1 \left((v'(t))^2+v^2(t)\right)\,dt$$

para $v\in\{v\in H_0^1(0,1):\ v(0)=0=v(1)\}$.
Para esto, primero hay que notar que

$$\begin{aligned}a(v,v)&=\int_0^1 (v')^2+v'v+v^2\\&=\int_0^1\left((v')^2+v^2\right)+\int_0^1 v'v\end{aligned}$$

por lo cual bastaría probar que $\int_0^1 v'v=0$. Sin embargo, usando integración por partes se tiene

$$\int_0^1 v'v=\frac{1}{2}\int_0^1 (v^2)'=v^2(t)\Big|_{t=0}^{t=1}=0$$

demostrando lo afirmado, por las condiciones de frontera dadas.

Problema 4-) Modifique el **Problema 2-)** a la ecuación diferencial $-u'' + ku' + u = f$, $k \in \mathbb{R}$. Determine el valor de k para el cual existe $v \in \{v \in H_0^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$ con $a(v,v) = 0$ pero $v \neq 0$. Qué indica esto sobre la existencia y unicidad de la formulación débil de la PDE?

En este caso la forma bilineal asociada está dada por $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + ku'v + uv$, y vea que

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 u'v' + ku'v + uv \\ &= \int_0^1 u'v' + uv + k\int_0^1 ku'v \end{aligned}$$

Y usando Cauchy - Schwartz,

$$|a(u,v)| \leqslant ||u||_{H^1}||v||_{H^1} + |k|||u||_{L^2}||u||_{L^2} \leqslant C(k)||u||_{H^1}||v||_{H^1}$$

pues la norma en H^1 domina la norma usual, dándonos continuidad de la forma bilineal. Analizando si la forma es coarciva, dividiendo $ku'v = (k-1)u'v + u'v$ y repitiendo lo anterior se llega a

$$a(v,v) = (1-k)\int_0^1 u'v + F(v)$$

Anteriormente, se demostró que $\int_0^1 u'v = 0$, por lo cual $a(v,v) = 0$ solo si $\int_0^1 fv = 0$. Adicionalmente apra que el problema variacional tenga solución se debe dar $a(u,v) = F(v)$, y esto solo si $k = 1$. En este caso, caemos en lo analizado en el **Problema 1-)**.