Tarea 2
SP1306 : Análisis Numérico
Prof: Juan Gabriel Calvo

Michael Abarca Jiménez

2 de Junio del 2019

Problema 2 Considere la ecuación de *Helmholtz*, $-\Delta u + u = f$, en $(0,1)^2$ con condiciones de Dirichlet homogeneas en la frontera, tal que la solución exacta es

$$u(x,y) = xyz(1-x)(1-y)(1-z)$$

Primeramente, vamos a formular el problmea en su forma débil, y verificar que tiene solución única.

El lado derecho de la ecuación debe cumplir $f = x(1-x)y(1-y) - 2\left(x(1-x) + y(1-y)\right)$ en $(0,1)^2$. Utilizando integración por partes, multiplicando la ecuación por una función de prueba v se tiene $-\Delta uv + uv = fv$, e integrando por partes en el cuadrado en consideración se llega(usando condiciones de frontera) a

$$\int_{(0,1)^2} < \nabla u, \nabla v > + \int_{(0,1)^2} uv = \int_{(0,1)^2} fv$$

De aquí la formulación débil $a(u,v) = F(v)$, con $a(u,v) = \int_{(0,1)^2} < \nabla u, \nabla v > + \int_{(0,1)^2} uv$. Esta forma bilineal a es trivialmente lineal, por lo cuál probamos continuidad y coarcividad.

Para linealidad, note que

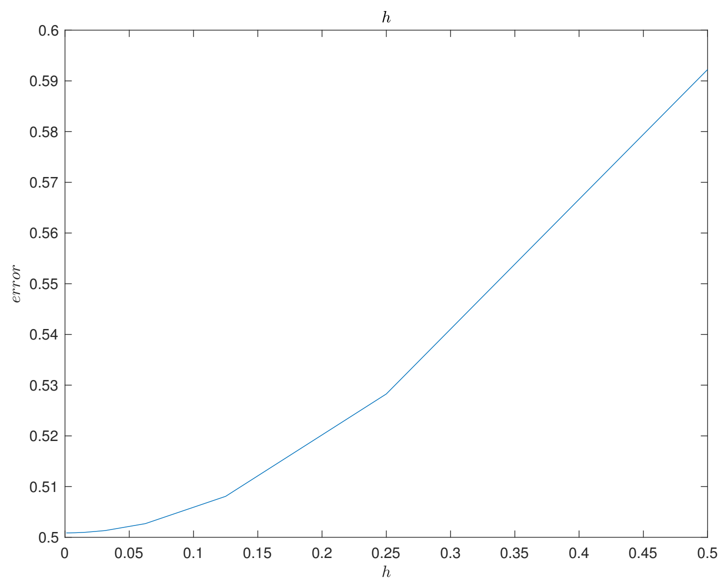
$$|a(u,v)| \leqslant \int_{(0,1)^2} | < \nabla u, \nabla v > | + \int_{(0,1)^2} |uv| \leqslant 2||u||_{H_1}||v||_{H_1}$$

Mientras que para coarcividad

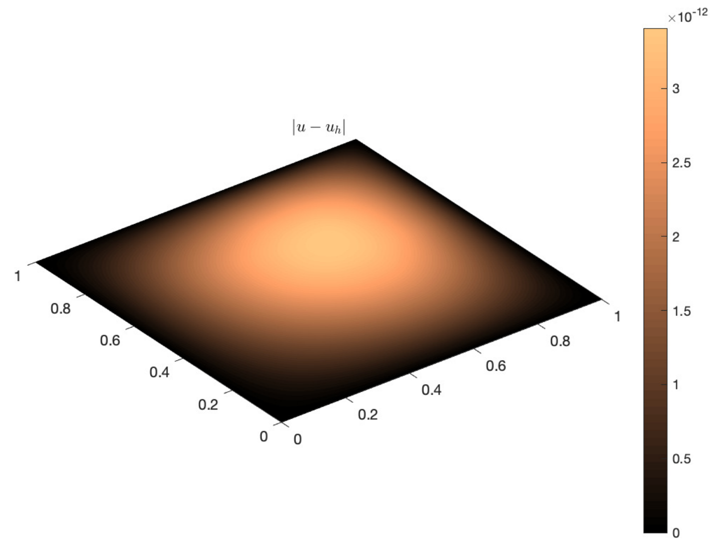
$$a(v,v) = \int_{(0,1)^2} (|\nabla v|^2 + v^2) \geqslant \frac{1}{2}||v||_{H_1}$$

Y por Lax- Milgram, el problema tiene solución única.

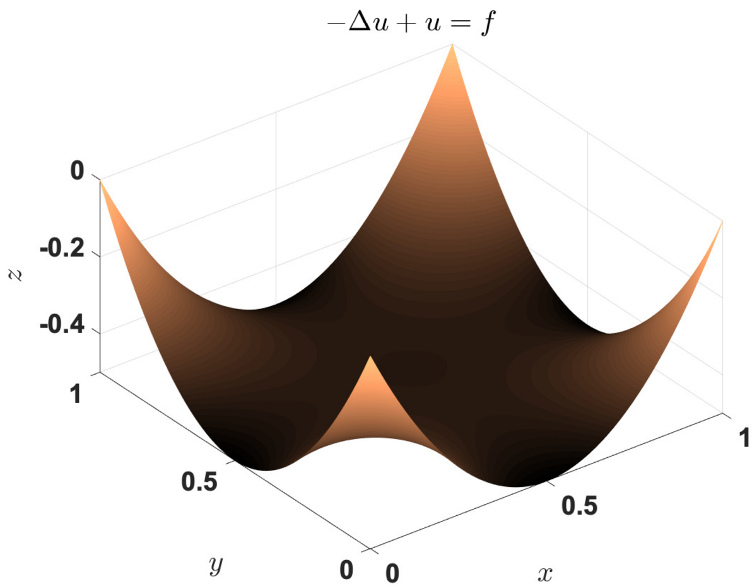
Se procedió a construir una solución a esta ecuación en Matlab mediante métodos finitos. Primero, se observa el decrecimiento del error con forme el diametro máximo asociado a la triangularización converge a 0.



Ahora, se observa el gráfico sobre la diferencia entre la aproximación y la solución real, donde queda en evidencia que el error cometido en la iteración con diametro $2^{(-10)}$ es bastante pequeño.



Y finalmente, vemos el gráfico de la aproximación calculada a la solución.

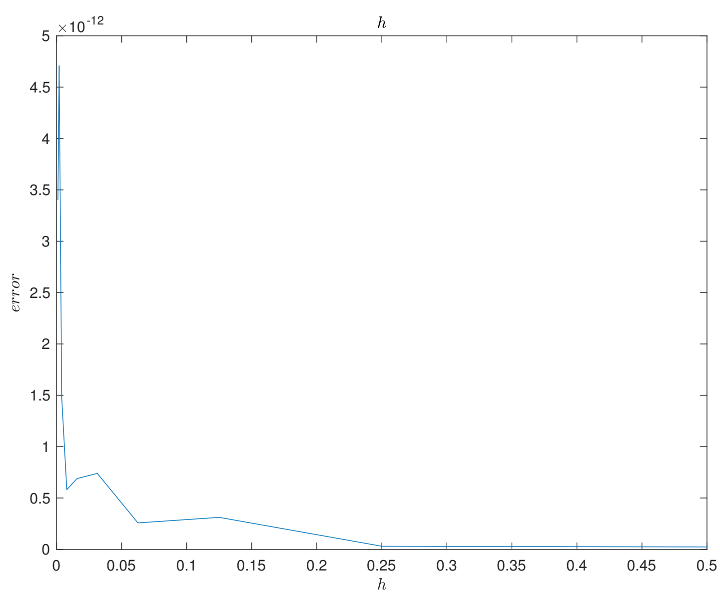


Problema 3 Considere la ecuación de Laplace $-\Delta u = 0$ en $(0,1)^2$, con condiciones de Dirichlet tal que la solución es la función $u(x,y) = xy$.

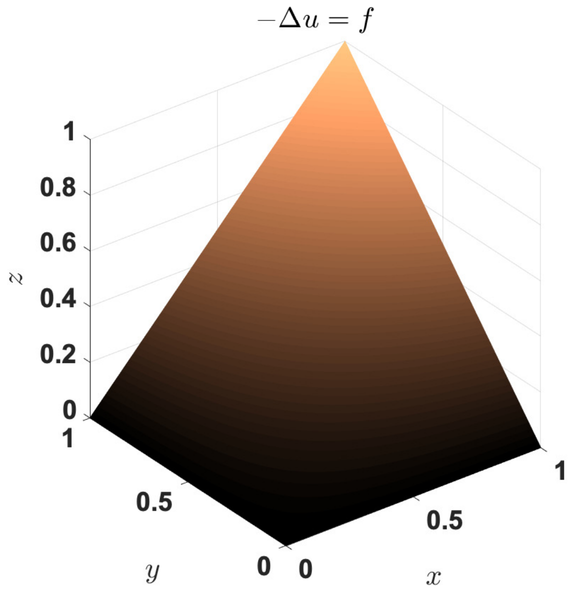
Primeramente, vamos a formular el problmea en su forma débil, y verificar que tiene solución única. Para esto, procediendo de manera similar a la parte anterior multiplicando por función de prueba e integración por partes para llega a que la formulación débil del problema está dada por $a(u,v) = F(v)$, con $a(u,v) = \int_{(0,1)^2} < \nabla u, \nabla v >$ y además se tiene $a(u,v) = 0$.

De está condición es claro que la forma bilineal es continua, pero no hay coarcividad ya que la desigualdad de coarcividad implica que la función v debe ser 0. Por lo tanto, en este problema no se puede garantizar unicidad mediante Lax – Milgram, pero si existencia de solución como la indica el enunciado.

Se procedió a construir una solución a esta ecuación en Matlab mediante métodos finitos. Primero, se observa que aún cuando el comportamiento del error no es el esperado, pues incremente según disminuye el error, este se mantiene muy pequeño. Además, resulta de particular interés quye el error que se acomete inclusive con la primera iteración ya es bastante pequeño.



Y finalmente, vemos el gráfico de la aproximación calculada a la solución, como su forma si se asemeja a xy



Problema 3 Para este problema, en la implementación logré cambiar la función que consigue los nodos frontera con la provista en mediación, también cambié la función assembling con la descrita en el *pdf* de la librería *iFEM*. La diferencia de esta función con las usadas anteriomente, es que no hace el procesamiento del vector b, que para este hay que trabajar con el baricentro y la función del lado defecho de la ecuación. Sin embargo, luego de generalizar lo encontrado en dos variables consigo un programa con buenas aproximaciones, pero que ciertos elementos de u me dan NaN, por lo cual no puedo calcular la norma infinito. Solo la calcula en primera iteración y da pequeña. Eso se puede deber a un problema de manejo de exatitud por parte del computador. Adicionalmente,