Ecuación de Poisson vía Lax - Milgram y espacios de Sobolev

Michael Abarca Jiménez
Trabajo para el curso SP-1320: Análisis Real

20 de Julio del 2018

Abstract

Se da un breve resumen de resultados de espacios de Hilbert con la mira en probar el teorema de Lax - Milgram, que es una especie de representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert. Luego, se usa este teorema para demostrar la existencia de soluciones débiles a problemas de Poisson con ciertas condiciones en espacios de Sovolev.

1.1 Introducción

En el trabajo se va a discutir el siguiente problema: Sea Ω un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^d$ y sea $f \in L^2$ una función en Ω. ¿Existe una solución a la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f? \tag{1.1}$$

Según [evans2010pdes], se sabe que si $\Omega = \mathbb{R}^d$ la ecuación de Poisson se puede resolver usando la solución fundamental a la ecuación del Laplaciano. Sin embargo, si tomamos Ω como simplemente un conjunto abierto y conexo, el método anteriormente mencionado no resulta útil al exigir condiciones de frontera para u en $\partial\Omega$ o si f no se puede extender. De hecho, para un Ω y f arbitrarios, una solución en C^2 no siempre existe. Por lo tanto, en vez de buscar soluciones fuertes, es decir, una solución de (*I.I*), se busca integrar (*I.I*) contra una función de prueba Φ (se definirán más adelante sus características), integrar por partes, y llegar a la ecuación

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Phi = \int_\Omega f\Phi \tag{1.2}$$

Intuitiuvamente, queremos encontrar una función que cumpla (*I.2*) para todas las funciones de prueba, y es aquí donde los espacios de Hilbert entran en juego.

1.2 Espacios de Hilbert

Definición 1.1. Sea H un espacio vectorial. Un producto escalar, (u, v), es una forma bilineal en $H \times H$ con valores en $\mathbb{R}$ tal que

(a) $(u, v) = (v, u), \quad \forall u, v \in H$

(b) $(u, u) \geqslant 0, \quad \forall u \in H$

(c) $(u, u) \neq 0, \quad \forall u \neq 0$

Se puede mostrar que $||u|| := \sqrt{(u, u)}$ es una norma. ◊

Definición 1.2. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H equipado con un producto escalar tal que H es completo con respecto a la norma inducida $|| \cdot ||$. ◊

Ejemplo 1.3. $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con producto escalar definido como

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} fg, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

◊

Observación. Todos los espacios de Hilbert son Banach. Adicional a las propiedades de un espacio de Bananch, los espacios de Hilbert también tienen "ángulos". Por ejemplo, si $(f, g) = 0$, decimos que f, g son ortogonales. La siguiente propiedad muestra que la proyección que usamos en $\mathbb{R}^n$ también existe en espacios de Hilbert.

Teorema 1.4. *Sea $K \subset H$ un conjunto cerrado y convexo no vacío. Entonces, para cada $f \in H$ existe un único elemento $u \in K$ tal que*

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|$$

Adicionalmente, u es caracterizado por la siguientes propiedades

- ⋆ $u \in K$
- ⋆ $(f - u, v - u) \leqslant 0, \quad \forall v \in K$

Se denota $u = P_K f$.

Observación. El siguiente lema prueba que el mapeo proyección no incrementa la distancia.

Lema 1.5. *Sea $K \subset H$ un conjunto cerrado y convexo no vacío. Entonces*

$$|P_K f_1 - P_K f_2| \leqslant |f_1 - f_2|, \quad \forall f_1, f_2 \in H$$

Corolario 1.6. *Asuma que $M \subset H$ es un subespacio lineal cerrado. Sea $f \in H$. Entonces $u = P_M f$ es caracterizado por*

(a) $u \in M$

(b) $(f - u, v) = 0, \quad \forall v \in M$

Teorema 1.7. *Dado $\Phi \in H^*$, existe un único $f \in H$ tal que*

$$\Phi(u) = (f, u), \quad \forall u \in H$$

Adicionalmente,

$$|f| = ||\Phi||_{H^*}$$

Observación. Podemos identificar H con H^* por el teorema anterior.

Definición 1.8. Una forma bilineal $\alpha : H \times H \to R$ se dice continua si existe una constante C tal que

$$|\alpha(u, v)| \leqslant C|u||v|, \quad \forall u, v \in H$$

además decimos que α es coactiva si hay una constante $a > 0$ tal que

$$|\alpha(v, v)| \geqslant a|v|^2, \quad \forall v \in H$$

◊

Observación. Es evidente que para cualquier espacio de Hilbert, su producto escalar $(\cdot, \cdot)$ en H es una forma bilineal continua y coactiva.

Teorema 1.9. *(Teorema de contracción) Sea X un espacio métrico completo no vacío y sea $f : X \to X$ un mapeo estricto. Esto es, existe $k \in (0, 1)$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Entonces, hay un único $x \in X$ tal que $x = f(x)$.

Corolario 1.10. *(Lax - Milgram) Asuma que $\alpha(u, v)$ es una forma bilineal en H que es continua y coactiva. Entonces, para cada $\Phi \in H^*$, existe un único $u \in H$ tal que*

$$\alpha(u, v) = \Phi(v), \quad \forall v \in H$$

Adicionalmente, si α es simétrico u está caracterizado por

(a) $u \in K$

(b) $\frac{1}{2}\alpha(u, v) - \Phi(u) = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}\alpha(u, v) - \Phi(v)\}$

Demostración. Véase [folland1999] para una prueba completa. □

1.3 Espacios de Sobolev

Definición 1.11. Tome $U \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, y sea p en $[1, +\infty)$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | \partial_{x_i} u \in L^p(\Omega), \quad 1 \leqslant i \leqslant d\}$$

Denotamos

$$H^1(I) = W^{1,2}(\Omega),$$

◊

Observación. El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach equipado con la norma

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + ||\nabla u||_{L^p}$$

O si $1 < p < \infty$, con la norma equivalente $(||u||_{L^p}^p + ||\nabla u||_{L^2}^p)^{1/p}$. El espacio H^1 es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

Con norma inducida

$$||u||_{H^1} = (||u||_{L^2}^2 + ||\nabla u||_{L^2}^2)^{1/2}$$

Definición 1.12. Para cualquier conjunto abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ se define como la colección de funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ que valen cero en la frontera de Ω. ◊

Definición 1.13. Dada una ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado y $f \in L^2(\Omega)$, definimos una solución débil u del sistema como una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Phi = \int_\Omega f \Phi, \quad \forall \Phi \in H_0^1(\Omega)$$

◊

Observación. Esto nos plantea el problema de Poisson comentado en la introducción, definiendo propiamente el concepto de solución débil. Nuestro trabajo ahora es mostrar que este enfoque nos llevará a una respuesta del problema.

Teorema 1.14. *(Desigualdad de Poincaré) Suponga que $1 \leqslant p < \infty$, y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto acotado. Existe una costante C tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leqslant C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demostración. Esta desigualdad es muy importante. La supocisión $u \in W_0^{1,p}$ es crucial, de hecho, en general no es cierta en $W^{1,p}$. □

Observación. Con lo enunciado hasta el momento, ya tenemos las herramientas necesarias para demostrar la existencia de una solución débil al problema de Poisson. Para esto bastará simplemente probar que cierto operador cumple las hipótesis del teorema de Lax – Milgram.

Teorema 1.15. *Para cualquier conjunto abierto, acotado y simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y para cualquier $f \in L^2(\Omega)$, existe una solución débil al sistema de Poisson anteriormente planteado.*

Demostración. Considere la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

Es claro que es una forma bilineal simétrica. Además,

$$|a(u, v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v \right| \leqslant ||\nabla u||_{L^2} ||\nabla v||_{L^2} \leqslant ||u||_{H_0^1} ||v||_{H_0^1}$$

por lo que es continua. Siguientemente, por la desigualdad de Poincaré existe una constante C tal que

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Tome $C_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $C_0 + C_0 C^2 \leqslant 1$. Entonces, para cualquier $v \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned}
C_0(||v||_{H_0^1(\Omega)})^2 &= C_0(||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\leqslant C_0(C^2||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\leqslant (C_0 + C_0 C^2)(||\nabla v||_{L^2(\Omega)})^2 \\
&\leqslant (||\nabla v||_{L^2(\Omega)})^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla v|^2 \\
&= a(v, v)
\end{aligned}$$

Por esto a es coactiva. Ahora, dada una función $f \in L^2(\Omega)$, defina el mapeo lineal $\phi : H_0^1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi : u \to \int_\Omega fu$$

Es fácil ver que ϕ es continuo ya que

$$\left|\int_\Omega fu\right| \leqslant \left(\int_\Omega f^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2} = ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{H_0^1(\Omega)}$$

Y como $f \in L^2(\Omega)$, entonces $||f||_{L^2(\Omega)} < \infty$. Ahora, por teorema de Lax – Milgram, existe un único elemento $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = \phi(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

O equivalentemente,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

y se demuestra el teorema. □

Bibliografía

[notasRealVarilly] Joseph C. Várilly, *Notas Análisis Real II.* Notas II semestre 2012.

[evans2010pdes] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations.* Second Edition (Graduate Studies in Mathematics), AMS,2010

[wang2016poisson] Wang, Yi, *Using Functional Analysis and Sovolev Spaces to solve Poisson's Equation.* REU program, University of Chicago, 2016

[folland1999] Gerald B., Folland, *Real Analysis. Modern Thechniques and Their Applications* Wiley, Second Edition, 1999.

[wolframLaxMilgram] Stover, Christopher and Weisstein, Eric W., *Lax-Milgram Theorem* (última visita 12/7/2018) From MathWorld–A Wolfram Web Resource ⟨http://mathworld.wolfram.com/Lax-MilgramTheorem.html⟩