2.1 Ejercicios básicos sobre espacios métricos

En los ejercicios que siguen, (X, ρ) y (Y, σ) denotan espacios métricos.

Ejercicio 2.1. (a) Demostrar que la función $f(t) := t/(1+t)$ es una biyección continua entre $(0, \infty)$ y $(0, 1)$, cuya función inversa también es continua.

(b) Si (X, ρ) es un espacio métrico, defínase

$$\tilde{\rho}(x, y) := \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \quad \text{para todo} \quad x, y \in X.$$

Comprobar que $\tilde{\rho}$ es otra métrica sobre X.

(c) Demostrar que los espacios métricos (X, ρ) y $(X, \tilde{\rho})$ son *equivalentes*, esto es, que poseen los mismos conjuntos abiertos.

Ejercicio 2.2. Si $E \subseteq X$, defínase la métrica inducida $\rho|_E$ sobre E por restricción; es decir, $\rho|_E(x, y) := \rho(x, y)$ cuando $x, y \in E$.

Si $B \subseteq E$, demostrar que B es abierto en $(E, \rho|_E)$ si y solo si $B = E \cap A$ para algún $A \subseteq X$ tal que A es abierto en (X, ρ).

Ejercicio 2.3. (a) Los límites de sucesiones son únicos: si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que $x_n \to x$ y también $x_n \to y$ cuando $n \to \infty$, verificar que $x = y$.

(b) Demostrar que una parte $C \subseteq X$ es cerrado en X si y solo si $x \in C$ toda vez que haya una sucesión $\{x_n\}$ <u>en C</u> tal que $x_n \to x$ en X.

Ejercicio 2.4. Se construye el conjunto de Cantor $C \subset [0, 1]$ por el algoritmo siguiente. Sea $C_0 := [0, 1]$; y sea $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \uplus [\frac{2}{3}, 1]$. Por inducción sobre k, si $C_k = \biguplus_{j=1}^{2^k} [a_j, b_j]$ se define

$$C_{k+1} := \biguplus_{j=1}^{2^k} \left[a_j, \frac{2a_j + b_j}{3}\right] \uplus \left[\frac{a_j + 2b_j}{3}, b_j\right].$$

Luego se define $C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$.

Demostrar que el complemento $[0, 1] \setminus C$ es abierto y denso en $[0, 1]$.

Ejercicio 2.5. Demostrar que las siguientes condiciones sobre $f : X \to Y$ son equivalentes:

(a) la función f es continua en X;

(b) $f(x_n) \to f(x)$ en Y toda vez que $x_n \to x$ en X;

(c) $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ para todo $E \subseteq X$.

Ejercicio 2.6. (a) Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son dos funciones continuas, demostrar que el conjunto $\{ x \in X : f(x) = g(x) \}$ es cerrado en X.

(b) Si E es denso en X y si $f(x) = g(x)$ para $x \in E$, concluir que las funciones f y g coinciden sobre todo X.

Ejercicio 2.7. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua y si $x_0 \in X$ es tal que $f(x_0) > 0$, demostrar que $f(x) > 0$ para todo x en un vecindario de x_0 en X.

Ejercicio 2.8. Denótese por $M_2(\mathbb{R})$ en espacio de matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$, con la métrica euclidiana obtenida de la identificación usual de $M_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$.

El grupo de matrices invertibles en $M_2(\mathbb{R})$ se denota por $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Demostrar que $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ es abierto y denso en $M_2(\mathbb{R})$.