Métodos Monte Carlo para valoración de Opciones Americanas

Michael Abarca

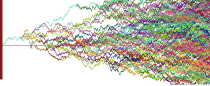
michaelaba.10@gmail.com

MA0918: Procesos Estocásticos
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Junio 15, 2020

Contenidos

Opciones

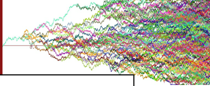


- Una opción financiera es un instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar (Call option) o vender (Put option) bienes o valores a un precio determinado (*Strike Price*).
- Por la prima pagada para adquirir este derecho, el vendedor de la opción se compromete a vender/comprar según elección de dueño de la opción.
- A la parte que posee el derecho se le llama comprador o posición larga (Long), mientras al que está a la espera de decisión de ejericio luego de vender el derecho se conoce como vendedor o posición corta (Short).

Opciones Europeas

- Una **Opción Europea** es un contrato financiero, que da derecho a dueño de opción de comprar o vender al momento de madurez del contrato exclusivamente.
- Vemos como la decisión de ejercer el derecho o no depende únicamente del valor del bien en el tiempo de madurez. (No depende del camino seguido por el valor del bien)
- La fórmula de **Black-Scholes-Merton** (1973) nos da el valor de la opción europea al momento de madurez, en el siguiente contexto:
  - Si S_t es el valor del bien al precio t, este sigue una dinámica de tipo GBM, $dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dW_t$.
  - Distribución *Log-Normal* de precios. no se pagan dividendos durante tiempo de la opción, mercado libre de fricción, retornos normalmente distribuidos.

Opciones Europeas



Teorema:

Para una opción Americana de tipo Europea - call, con tiempo de madurez T, precio de strike K y de valor x al momento t se tiene que el valor de la opción a ese momento es:

$$c(t,x) = x\mathcal{N}(d_+(\tau,x)) - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}(d_-(\tau,x))$$

donde

$$\begin{aligned}
d_+(\tau,x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right] \\
d_-(\tau,x) &= d_+(\tau,x) - \sigma\sqrt{\tau} \\
\tau &= T - t \\
N(\cdot) &: \text{Distribución cumulativa normal} \\
r &: \text{Tasa de interés constante}
\end{aligned}$$

Nota: Hay fórmula en mismos términos para opción de tipo Europea - pull.

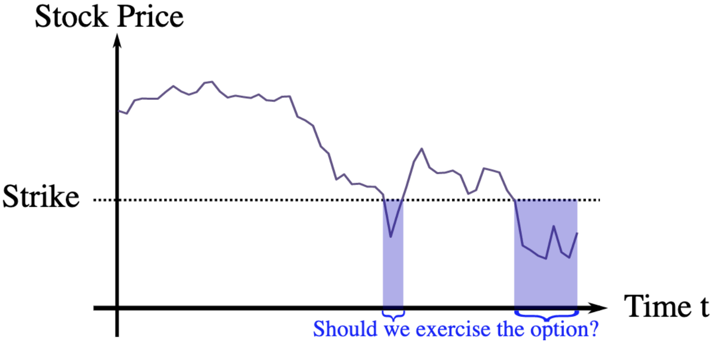
Notas sobre B-S-M

- Fórmula es bastante sencilla.
- $c(t,x)$ cumple la PDE de $B-S-M$, y condiciones frontera apropiadas:

$$c_t + rxc_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 c_{xx} = rc$$

- Se puede derivar $c(t,x)$ a partir de supuestos mencionados y argumento de arbitraje en tiempo continuo.
- No aparece μ en fórmula final.
- Autores ganaron premio Nobel de economía en 1997 por este trabajo.

- Una **Opción Americana** es un contrato financiero, que permite ser ejercido en cualquier momento durante su vigencia.
- Cuándo ejercer la opción?



- Valoración de opción depende del camino!!

Tiempos óptimos de parada

- El tiempo en que se ejerce la opción τ se puede representar como un tiempo de parada, ya que decisión de ejecutar o no la opción en un momento dado depende de información hasta tiempo t.
- Como punto de partida, se podría pensar en ejercer la opción Americana - put en

$$\tau_\varepsilon = \inf\{0 < t \leq T : K - S_t > \varepsilon\}, \varepsilon > 0$$

  Claramente es un tiempo de parada con valores en $[0, T] \cup \{\infty\}$, interpretando $\tau = \infty$ cuando no se ejerce contrato antes de tiempo T.
- En teoría, las Opciones Americanas son al menos más valiosa que las Europeas.
- En la práctica se aproximan Opciones Americanas mediante **Opciones Bermuna**, que discretizan el intervalo $[t, T]$ para ejercer la opción en esos puntos.

Definición: Tome $t \in [0, T]$ y $x > 0$. Asuma $S_t = x$. Defina $\mathcal{F}_u^t$, $u \in [t, T]$, la σ - álgebra generada por el proceso S_u, $u \in [t, T]$. Denote $\mathcal{T}_{t,T}$ el conjunto d tiempos de parada para la filtración $\mathcal{F}_u^t$, tomando valores en $[t, T] \cup \{\infty\}$.
El precio de la opción a tiempo t y con tiempo de madurez T se define como

$$v(t, x) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left[e^{-r(\tau - t)}(K - S_\tau) \,|S_t = x\right]$$

En el evento $\{\tau = \infty\}$ interpretamos $e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau) = 0$.

Monte Carlo

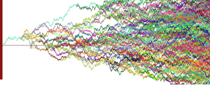
Cómo calcular el valor de una opción Americana - put mediante técnica Monte Carlo?

1. Se definen tiempos de parada $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$, todos constantes, generando partición de $[0, T]$.
2. Se simulan N caminos, al tomar una simulación específica del la dinámica de S_t en los elementos de $\mathcal{T}$.
   - Ejemplos pueden ser el Movimiento Browniando Geométrico o Procesos de Difusión con Saltos.
3. Se define manera de valorar opciones, mediante una regla de parada óptima para cada uno de los caminos simulados.
4. Se promedian resultados, incovando Ley Fuerte de los Grandes Números.

Ventajas de usar simulación Monte Carlo

- No se asume dinámica específica de los precios S_t.
- Altamente paralelizable.

1. Suponiendo que en un tiempo de parada $\tau_i \in \mathcal{T}$, $\tau_i \neq T$, el *pay - off* es positivo, se calcula un valor de continuación.
2. Este valor de continuación es un aproximado del valor presente del *pay - off* de la opción al siguiente punto de parada inmediato, asumiendo que se decide no ejecutar en τ_i.
3. En base a este valor se toma la decisión de ejecutar opción en τ_i o no.



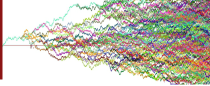
1. **Referencia principal:** *Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach*

2. **Idea princial:** Usar método de Mínimos Cuadrados para estimar la esperanza condicional del valor presente del *pay-off* en τ_{i+1}, dado que no se ejecuta opción en τ_i:

$$\mathbb{E}\left[e^{r(\tau_{i+1}-\tau_i)}\left(K - S_{\tau_{i+1}}\right)|\text{No se ejecuta opción en } \tau_i\right] \approx \sum_{j=0}^{M} a_j \phi_j(\tau_{i+1})$$

Para $\{\phi_j\}_{j=1,\dots,M}$ primeros M elementos de una base ortonormal de $L^2(\Omega)$, y $\{a_j\}$ coeficientes que se ajustan usando valores de S_t en los tiempos de parada menores a τ_{i+1} mediante Mínimos Cuadrados.

Monte Carlo - LSE



- Esto define un estimador insesgado de la esperanza condicional, y se puede justificar cuando $\mathbb{E}$ es elemento de L^2, ya que este es Hilbert y por lo tanto tiene una base contable ortonormal.
- Se ejecuta si valor de continuación es menor a S_{τ_i}.
- Al realizar este procedimiento para cada τ_i, donde haya que tomar decisión, se obtiene descripción de lo que esta estrategia nos hubiera sugerido y del valor real de la opción al momento $t = 0$

$$v(0,x) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_{\mathbf{0},T}} \mathbb{E}\left[e^{-r(\tau - t)} \left(K - S_\tau \right) | S_t = x \right]$$

Monte Carlo - LSE

ANIMACION DE LO DICHO EN DIAPOSITIVA PASADA, para explicar con lo que se cuenta.

Convergencia Monte Carlo - LSE

- El Método anteriomente descrito provee una manera simple y elegante de aproximar la estrategia óptima de ejercicio pre maturo de una opción Americana - put.

Teorema:
Si $V(X)$ representa valor real de la opción Americana, para una elección finita de M y K se tiene que

$$V(X) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i, M, K)$$

Donde $LSM(\omega_i, M, K)$ representa los *pay - off* descontados del resultado de ejecutar la estrategia descrita anteriormente en caminos simulados.

Convergencia Monte Carlo - LSE

- Este resultado nos da una herramienta para elegir cantidad de elementos base, al ver cuando se dejan de percibir incrementos en resultados.
- **Idea Prueba:** Primero se prueba que regla de parada definida es tiempo de parada para el proceso S_t. Se denota $\mathbb{E}_\theta$ valor presente del *pay-off* de esta estrategia. Como $v(0,x)$ es supremo del valor presente esta estrategia sobre conjunto de todos los tiempos de parada, entonces $v(0,x) \geq \mathbb{E}_\theta$. Como todos los valores descontados provienen de funciones de la misma forma los flujos descontados son $i.i.d$, y por la ley fuerte de los grandes números

$$\mathbb{P}\left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i, M, K) = \mathbb{E}_\theta\right] = 1$$

Lo cual implica el resultado.

Bibliografía

- Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. The review of financial studies, 14(1), 113-147. - https://escholarship.org/content/qt43n1k4jb/qt43n1k4jb.pdf
- Shreve, SE. (2004). Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models. Springer Science Business Media
- Steele, JM. (2012). Stochastic calculus and financial applications. Springer Science Business Media
- Lewinson, E. (2020). Python for Finance Cookbook: Over 50 recipes for applying modern Python libraries to financial data analysis . Packt Publishing Ltd
- Glasserman, P. (2004) Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer Science Business Media

Implementación en Python