1.2 Ejercicios sobre funciones continuas

En estos ejercicios, I denota un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I.

Ejercicio 1.8. Si $g\colon I \to \mathbb{R}$ es otra función continua en $t_0 \in I$, demostrar que la suma $\underline{f+g} : t \mapsto f(t)+g(t)$ es también continua en t_0.

Solución: Sea $\epsilon > 0$, $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$|t-t_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(t)-f(t_o)| < \varepsilon$$
$$|t-t_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(t)-g(t_o)| < \varepsilon$$

Para $|t-t_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple

$$|(f(t)-g(t))-(f(t_o)-g(t_o))| \leqslant |f(t)-f(t_o)| + |g(t)-g(t_o)| < 2\varepsilon$$

$\therefore$ $f+g$ continua en t_o. ⊚

Ejercicio 1.9. Si $f(I) = J$ y si $h\colon J \to \mathbb{R}$ es continua en J, demostrar que la composición $\underline{h\circ f} : t \mapsto h(f(t))$ es continua en I.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ y $t_o \in I$. Por continuidad de h en $f(t_o) \in J$, $\exists\delta > 0$ tal que

$$|w-f(t_o)| < \delta \Rightarrow |h(w)-h(f(t_o))| < \varepsilon$$

Por continuidad de f en t_o, $\exists \delta' > 0$ tal que

$$|t-t_o| < \delta' \Rightarrow |f(t)-f(t_o)| < \delta$$

Entonces

$$|t-t_o| < \delta' \Rightarrow |f(t)-f(t_o)| < \delta \Rightarrow |h(f(t))-h(f(t_o))| < \varepsilon$$

$\therefore$ $h(f(t))$ continua en t_o, $\forall t_o \in I$. ⊚

Ejercicio 1.10. (a) Defínase $|f|\colon I \to [0,\infty)$ por $|f|(t) := |f(t)|$. Comprobar que la función $|f|$ es también continua en I.

Solución: Sea $\varepsilon >$ y $t_o \in I$. Por continuidad de f en t_o, $\exists\delta > 0$ tal que

$$|t-t_o| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(t_o)| < \varepsilon$$

Como $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$, $\forall a.b \in \mathbb{R}$, entonces para $|t-t_o| < \delta$

$$||f(t)|-|f(t_o)|| \leqslant |f(t)-f(t_o)| < \varepsilon$$

$\therefore$ $|f|$ continua en t_o, $\forall t_o \in I$ ⊚

(b) Si $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas con un dominio común I, defínase

$$\underline{f \vee g}(t) := \max\{f(t), g(t)\}, \quad \underline{f \wedge g}(t) := \min\{f(t), g(t)\} \quad \text{para} \quad t \in I.$$

Comprobar que las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ son también continuas en I.

Solución: Para $a, b \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes identidades

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$
$$\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

$\therefore$ $f \vee g$ y $f \wedge g$ son continuas por ser composición de funciones continuas. ⊚

Ejercicio 1.11. (a) Usar la desigualdad $|\operatorname{sen} t| \leqslant |t|$ para comprobar que la función $\underline{\operatorname{sen}}$ es continua en $t_0 = 0$. Deducir que $\underline{\operatorname{sen}}$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ y tome $\delta = \varepsilon$. Entonces para $|t - 0| < \delta$

$$|\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(0)| = |\operatorname{sen}(t)| \leqslant |t| < \delta = \varepsilon$$

y así sen es continua en $t_0 = 0$. Además si $|t - t_o| < \delta$

$$\begin{aligned} |\sin(t) - \sin(t_o)| &= \left|2 \operatorname{sen}\left(\frac{t - t_o}{2}\right) \cos\left(\frac{t + t_o}{2}\right)\right| \\ &\leqslant \left|2 \operatorname{sen}\left(\frac{t - t_o}{2}\right)\right| \\ &\leqslant 2\frac{|t - t_o|}{2} \\ &< \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore$ sin es continua en todo $\mathbb{R}$. ⊚

(b) Demostrar que la función $h(t) := t \operatorname{sen}(1/t) \, [\![t \neq 0]\!]$ es continua en $t_0 = 0$. ¿Es h una función continua en todo $\mathbb{R}$?

Solución: Para $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$. Si $|x - 0| < \delta$ se tiene

$$|h(x) - h(0)| = |h(x)| = |x \operatorname{sen}(1/x)| \leqslant |x| < \delta = \varepsilon$$

por lo cual h es continua en $t_0 = 0$. Y para $t_0 \neq 0$, la función h es continua por ser producto de funciones continuas. ⊚

Ejercicio 1.12. Demostrar una función continua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tiene un *punto fijo*, es decir, que existe $c \in [0,1]$ con $f(c) = c$. ⟦ Indicación: considerar $g(t) := f(t) - t$. ⟧

Solución: Tome $g(t)$ como la función sugerida, la cual es continua por ser suma de funciones continuas. Se tiene que $g(0) \geqslant 0$, $g(1) \leqslant 0$, entonces por teorema de valores intermedios existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0$, equivalentemente, $f(c) = c$. Por lo tanto f tiene un punto fijo. ⊚

Ejercicio 1.13. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, con $f(a) < f(b)$, demostrar que f es estrictamente creciente en $[a,b]$.

Solución: Suponga que f no es estrictamente creciente, entonces existen x, y con $f(x) = f(y)$ o existen tres puntos $x < y < z$ tales que $f(x) < f(y)$ y $f(z) < f(y)$. La primera no se puede dar ya que contradice la inyectividad. Suponga la segunda. Si $f(x) < f(z) < f(y)$, por teorema de valores intermedios existe $k \in (x,y)$ con $f(k) = f(z)$, lo cual tambén es contradictorio ya que por inyectividad $z = k$ y entonces $z \in (x,y)$. Análogamente si se considera la posibilidad $f(z) < f(x) < f(y)$.
$\therefore$ f es estrictamente creciente. ⊚

Ejercicio 1.14. Comprobar que la función $f(t) := 1/(1+t^2)$ es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. ⟦ Indicación: comparar $|f(s) - f(t)|$ con $|s - t|$. ⟧

Solución: Vea que

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t_0)| = \left|\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t_0^2}\right| = \left|\frac{(t+t_0)(t-t_0)}{(1+t^2)(1+t_0^2)}\right| &\leqslant \frac{|t-t_0|}{2(1+t^2)(1+t_0^2)}(2|t| + 2|t_0|) \\
&\leqslant \frac{|t-t_0|}{2(1+t^2)(1+t_0^2)}((t^2+1) + (t_0^2+1)) \\
&= \frac{|t-t_0|}{2(1+t^2)(1+t_0^2)}(t^2+1) + \frac{|t-t_0|}{2(1+t^2)(1+t_0^2)}(t_0^2+1) \\
&= \frac{|t-t_0|}{2(1+t_0^2)} + \frac{|t-t_0|}{2(1+t^2)} \\
&\leqslant \frac{|t-t_0|}{2} + \frac{|t-t_0|}{2} \\
&= |t-t_0|
\end{aligned}$$

Entonces para $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \varepsilon$ para demostrar la continuidad uniforme. ⊚

Ejercicio 1.15. (a) Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es lipschitziana en I si hay una constante $L \geqslant 0$ tal que

$$|f(s) - f(t)| \leqslant L\,|s - t| \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

Comprobar que f es uniformemente continua en I.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$. Tomando $|s - t| < \frac{\varepsilon}{L}$ se tiene

$$|f(s) - f(t)| \leqslant L\,|s - t| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

$\therefore$ f es uniformemente continua. ◎

(b) Demostrar que la función $g(t) := \sqrt{t}$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$ pero que no es lipschitziana en $[0, \infty)$.

Solución: En $[1, \infty)$ se cumple

$$|\sqrt{t} - \sqrt{t_0}| = \left|\frac{t - t_0}{\sqrt{t} + \sqrt{t_0}}\right| \leqslant |t - t_0|$$

por lo que f es lipschitz en dicho intervalo, entonces uniformemente continua. Además como g es continua en $[0, 1]$ y este es un compacto se tiene que g es uniformemente continua. Veamos que esto implica continuidad uniforme en todo $[0, \infty)$.

Tome ε>0 y defina δ como el mínimo de los deltas que existen por continuidad uniforme en $[0, 1]$ y $[1, \infty)$. Si $|s - t| < \delta$ y s, t estan ambos en $[0, 1]$ ó $[1, \infty)$

$$|g(s) - g(t)| < \varepsilon$$

si este no es el caso, entonces $|s - 1| < \delta$ y $|t - 1| < \delta$ por lo cual

$$|g(s) - g(t)| \leqslant |g(s) - g(1)| + |g(t) - g(1)| \leqslant 2\varepsilon$$

De este modo g uniformemente continua aún cuando no es lipschitz en todo el dominio ya que

$$\frac{|g(s) - g(0)|}{|s - 0|} = \frac{1}{\sqrt{s}} \to \infty$$

cuando $s \to 0$. ◎

Ejercicio 1.16. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y si $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión convergente, con $x_{n_k} \to \ell$ cuando $k \to \infty$, demostrar que $x_n \to \ell$ cuando $n \to \infty$.

Solución: Para $\varepsilon > 0$

$$\exists N_1 > 0 : \; n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_{n_k} - \ell| < \varepsilon$$
$$\exists N_2 > 0 : \; n, m \geqslant N_2 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

así para $n \geqslant N \geqslant \max\{N_1, N_2\}$

$$|x_n - \ell| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \ell| < 2\varepsilon$$

$\therefore x_n \to \ell$.

⊚

Ejercicio 1.17. (a) Dados dos números reales a, b con $0 < a < b$, defínase dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ inductivamente, por $a_0 := a$, $b_0 := b$, y

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}\,, \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}\,.$$

Comprobar que $a_n < b_n$ por inducción; y que las dos sucesiones convergen a un mismo límite: existe $m \in (a, b)$ tal que $a_n \to m$ y $b_n \to m$ cuando $n \to \infty$.

Solución: Primero vamos a demostrar que $a_n < b_n$

$$\begin{aligned} a_n < b_n &\Leftrightarrow \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} < \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \\ &\Leftrightarrow 4a_{n-1}b_{n-1} < (a_{n-1} + b_{n-1})^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < (a_{n-1} - b_{n-1})^2 \end{aligned}$$

Ahora, por inducción se tiene que

- $b_n > b_{n+1} \Leftrightarrow b_n > \frac{a_n + b_n}{2} \Leftrightarrow b_n > a_n$
- $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \sqrt{a_n b_n} > a_n \Leftrightarrow a_n b_n > a_n^2 \Leftrightarrow b_n > a_n$

Entonces por convergencia monótona a_n y b_n son convergentes, y tomando $n \to \infty$ en $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ se concluye que los límites coinciden. Además

$$a = a_0 < a_n < b_n < b_0 = b, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo que el límite está en (a, b). ⊚

(b) Este límite común se llama la media aritmética-geométrica de a y b, a veces denotado $AGM(a, b) := m$. Calcular $AGM(1, 2)$ con una exactitud de 10 cifras decimales.

Solución: Como b_n es decreciente y a_n es creciente, una aproximación con 10 decimales exactos va a cumplir la relación $b_n - a_n \leqslant 10^{-11}$. ⊚

Ejercicio 1.18. Considérese la sucesión

$$a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Demostrar que este sucesión converge[1] a un límite ℓ tal que $\ell \leqslant 1$.

Solución:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

Además,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

Entonces por convergencia monótona a_n es convergente.

Adicionalmente,

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

y esta es una suma Riemann derecha de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en el intervalo $[0,1]$ con de partición uniforme. Por lo tanto,

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log(2),\ n \to \infty$$

◎

Ejercicio 1.19. (a) Demostrar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ **no es** uniformemente continua en I si y solo si existen $\varepsilon_1 > 0$ y dos sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ en I con $|s_n - t_n| \leqslant 1/n$ pero $|f(s_n) - f(t_n)| > \varepsilon_1$.

Solución:

($\Rightarrow$) Si f no es uniformemente continua, negando la definición tenemos

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Entonces tome $\varepsilon_1 = \varepsilon$ y $\delta = \frac{1}{n}$, y haciendo n recorrer los naturales definimos t_n y s_n como los x, y que existen para cada $\delta = \frac{1}{n}$.

[1] Aunque el ejercicio no pide calcular el límite, ¿podrá usted obtener el valor de ℓ?

($\Leftarrow$) Suponga por contradicción que f es uniformemente continua. Para el $\varepsilon_1 > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Por arquimedianidad $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - t_n| < \frac{1}{n} < \delta$, entonces por hipótesis $|f(s_n) - f(t_n)| > \varepsilon_1$ lo cual es contradictorio. ◎

(b) Comprobar que la función continua $f(t) := \operatorname{tg} t$ no es uniformemente continua en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Solución: Si I es un intervalo acotado y $f(I)$ es no acotado, entonces f no puede ser uniformemente continua en I. Para demostrar esto procedemos por contradicción.

Definiendo $A_n := \{x \in I : |f(x)| \geqslant n\}$, construya una sucessión donde cada x_n está en A_n. Como x_n es acotada tiene una subsuceción convergente x_{n_k} y por lo tanto de Cauchy. Si f es uniformemente continua, se da $f(x_{n_k})$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto también convergente ($\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo). Lo cual es una contradicción con $f(I)$ no acotado.

Por lo anterior, $f(t) := \operatorname{tg} t$ no puede ser uniformemente continua en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. ◎

(c) La función $t \mapsto \log t$ es continua[2] en el intervalo $(0, \infty)$. ¿Es esta función *uniformemente* continua o no en dicho intervalo?

Solución: En $(0, 1)$ esta función es no acotada, y por lo anterior no puede ser uniformemente convergente. ◎

Ejercicio 1.20. Si $f : [a, b] \to [c, d]$ es una función continua y biyectiva, con *función inversa* $g : [c, d] \to [a, b]$ dada por $g(s) = t \iff f(t) = s$, demostrar que g es también continua sobre $[c, d]$.

⟦ Indicación: supóngase que $s_n \to s$ en $[c, d]$ pero $t_n \nrightarrow t$ en $[a, b]$; luego usar el teorema de Bolzano y Weierstrass. ⟧

Solución: Siguiendo la indicación: Como $\{t_n\}$ es acotada, por teorema tiene una subsuceción convergente $t_{n_k} \to \ell \in [a, b]$ (por ser cerrado). Se tiene $f(t_{n_k}) \to f(l)$ por ser f continua, así $f(\ell) = f(t)$ y por inyectividad $\ell = t$. De igual manera para cualquier otra subsuceción convergente de $\{t_n\}$ se demuestra que su límite debe ser t.

Como estamos suponiendo $t_n \nrightarrow t$, existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsuceción $\{t_{n_m}\}$ para la cual $|t_{n_m} - t| \geqslant \varepsilon_0$, pero al ser $\{t_{n_m}\}$ acotada debe tener una subsuceción convergente, y por lo demostrado anteriormente el límite es t lo cual es contardictorio. Y así se demuestra la caracterización de funciones continuas mediante suceciones para f^{-1}. ◎

[2] Aquí $\underline{\log t} = \log_e t$ denota el logaritmo "natural" o napieriano. La antigua notación $\underline{\ln t}$ es obsoleta.