MA918: Procesos Estocásticos

Prof: Jose A. Ramírez

I semestre 2020

Michael Abarca J.
B30014

1) Pruebe que, si X_t es una martingala acotada entonces $X_t^2 - \langle X, X \rangle_t$ es una martingala uniformemente integrable.

Como X_t martingala acotada, $\exists\, C > 0 : |X_t| \leq C$,

así $\|X_t\|_{L^2(\Omega)} = \left(\mathbb{E}(X_t^2)\right)^{1/2} \leq C$

$\therefore$ X_t es acotada en $L^2(\Omega)$.

Siguiendo el teorema 4.13, podemos asumir primeramente que $X_0 = 0$, de lo contrario tome $\tilde{X}_t = X_t - X_0$

Por prop 3.15 [Doob], para $T > 0$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2\right) \leq 4\, \mathbb{E}(X_T^2)$$

Si $T \to \infty$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\geq 0} X_t^2\right) \leq 4 \sup_{t\geq 0} E(X_t^2)$$

$$:= C < \infty$$

pues martingala acotada por hipótesis.

Defina $S_n = \inf\{t\geq 0 : \langle X,X\rangle_t \geq n\}$.

Estos son tiempos de parada para X_t, pues la variación es un proceso no decreciente en el tiempo.

Considere $\tilde{X}_t = X^2_{t\wedge S_n} - \langle X,X\rangle_{t\wedge S_n}$

que es martingala local continua dominada por

$$\sup_{s\geq 0} X_s^2 + n < \infty$$

Así $\tilde{X}_t$ uniformemente integrable, pues se puede dominar por variable en L^1, Así obtenemos,

$$\mathbb{E}(\langle X, X\rangle_{t\wedge S_n}) = \mathbb{E}\left(X^2_{t\wedge S_n}\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\geq 0} X_t^2\right)$$

$< C$, definido previamente

Haciendo $n\to\infty$, por convergencia monótona

$$\mathbb{E}(\langle X, X\rangle_\infty) < \infty.$$

Repitiendo el argumento, la martingala local continua $X_t^2 - \langle X, X\rangle_t$ está dominada por la variable $\sup_{t\geq 0} X_t^2 + \langle X, X\rangle_\infty \in L^1$ por lo cual es uniformemente integrable, usando prop 4.7. (ii) //

2) Sea X una martingala local continua. Suponga $S \leq T$ son tiempos de parada. Muestre que

$\langle X,X\rangle_S = \langle X,X\rangle_T$ si y solo si X es constante en el intervalo (aleatorio) $[S,T]$.

Se va a demostrar la siguiente afirmación que va a implicar lo requerido en el enunciado.

<u>Afirmación</u> Tenemos a.s que para todo $0 \leq a < b$

$$X_t = X_a, \forall t \in [a,b] \iff \langle X,X\rangle_a = \langle X,X\rangle_b$$

<u>Prueba</u> Sean $0 \leq a < b$

Primero, si $X_t = X_a$, $\forall t \in [a,b]$, de la fórmula de aproximación

$$\langle X,X\rangle_b = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \quad a.s$$

Pero para cada mallado, los términos en la suma que consideran diferencias de nodos mayores a $x=a$ no aportan en el resultado por ser X_t constante en $[a,b]$.

$$\therefore \langle X,X\rangle_b = \langle X,X\rangle_a \quad //$$

Considere la martingala

$$Y_t = X_t - X_{t\wedge a}, \text{ constante hasta } t=a$$

Se tiene

$$\langle Y,Y\rangle_t = \langle X,X\rangle_t - \langle X,X\rangle_{t\wedge a}$$

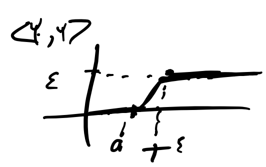
Para $\varepsilon>0$, defina

$$T_\varepsilon = \inf\{t\geq 0 : \langle Y,Y\rangle_t \geq \varepsilon\}, \text{ tiempo de parada.}$$

Es claro que el evento $A = \{\langle X,X\rangle_a = \langle X,X\rangle_b\}$ está contenido en el evento $\{T_\varepsilon \geq b\}$

Adicionalmente,

$$\langle Y^{T_\varepsilon}, Y^{T_\varepsilon}\rangle_\infty \leq \varepsilon$$



Por lo tanto por prop 4.13.(i), $Y_t^{T_\varepsilon}$ es martingala acotada en $L^2(\Omega)$

Por prop 4.15 $\left(Y_t^{T_\varepsilon}\right)^2 - \langle Y^{T_\varepsilon}, Y^{T_\varepsilon}\rangle_t$ es martingala uniformemente integrable, y además tiene esperanza 0.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\left(Y_t^{T_\varepsilon}\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\langle Y^{T_\varepsilon}, Y^{T_\varepsilon}\rangle_t\right)$$
$$\leq \mathbb{E}\left(\langle Y^{T_\varepsilon}, Y^{T_\varepsilon}\rangle_\infty\right)$$
$$\leq \varepsilon$$

Así,

$$\mathbb{E}\left(Y_t^2 \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(\left(Y_t^{T_\varepsilon}\right)^2 \mathbb{1}_A\right)$$
$$\leq \mathbb{E}\left(\left(Y_t^{T_\varepsilon}\right)^2\right) \leq \varepsilon,$$

por lo anterior.

$\Rightarrow \quad Y_t = 0$ a.s en A al hacer $\varepsilon \to 0$,

que concluye el resultado.

//

3) Sea B un movimiento browniano y $T_x = \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$. Muestre que

$$\mathbb{E}[T_{-b} \wedge T_a] = ab \quad \text{si} \quad -b \leq 0 \leq a.$$

Defina $\tau = T_{-b} \wedge T_a$.

Como $\tau < \infty$ a.s por propiedades del movimiento browniano, entonces $B_\tau \in \{a, -b\}$ a.s.

Considere $B^\tau_t = B_{t \wedge \tau}$.

Por corolario 3.24 este proceso es martingala.

Además como $\tau < \infty$ a.s, B^τ_t es acotada a.s. Esto implica que es uniformemente integrable. Usando teorema de parada opcional para martingalas:

$$0 = \mathbb{E}(B_0) = \mathbb{E}(B_\tau) = -b\,\mathbb{P}(B_\tau = -b) + a\,\mathbb{P}(B_\tau = a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(B_\tau = -b) = \dfrac{a}{a+b} \\ \mathbb{P}(B_\tau = a) = \dfrac{b}{a+b} \end{cases},$$

usando que son eventos complementarios.

Del mismo modo, aplicando el teorema a la martingala $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ se tiene:

$$0 = \mathbb{E}[B_0^2 - 0]$$
$$= \mathbb{E}[B_\tau^2 - \tau]$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau]$$

$\boxed{\text{Teorema aplica de igual manera parando el proceso a } \tau\text{, ya que proceso resultante es martingala por corolario 3.24 y UI por ser acotado.}}$

Usando lo anterior,

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[B_\tau^2]$$
$$= a^2 \mathbb{P}(B_\tau = a) + b^2 \mathbb{P}(B_\tau = -b)$$
$$= a^2\left(\frac{b}{a+b}\right) + b^2\left(\frac{a}{a+b}\right) = ab \;//$$

4) Sean X e Y semimartingalas continuas. Defina la integral de Stratonovich de Y con respecto a X como

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s \, dX_s + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t$$

Sea $0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n$ una partición de $[0,t]$. Muestre que

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} \frac{Y^n_{t_{i+1}} + Y^n_{t_i}}{2}\left(X^n_{t_{i+1}} - X^n_{t_i}\right)$$ converge en probabilidad

a $\int_0^t Y_s \circ dX_s$ cuando la malla de la partición va para 0.

Sea Π malla de $[0,t]$.

Note que

$$Y^n_{t_i}\left(X^n_{t_{i+1}} - X^n_{t}\right) + \frac{\left(Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i}\right)\left(X^n_{t_{i+1}} - X^n_{t_i}\right)}{2}$$

$$= \boxed{Y^n_{t_i} X^n_{t_{i+1}}} - Y^n_{t_i} X^n_{t} + \frac{Y^n_{t_{i+1}} X^n_{t_{i+1}}}{2} - \frac{Y^n_{t_{i+1}} X^n_{t_i}}{2}$$

$$- \boxed{\frac{Y^n_{t_i} X^n_{t_{i+1}}}{2}} + \frac{Y^n_{t_i} X^n_{t_i}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} Y^n_{t_i} X^n_{t_{i+1}} - \frac{1}{2} Y^n_{t_i} X^n_{t} + \frac{1}{2} Y^n_{t_{i+1}} X^n_{t_{i+1}} - \frac{1}{2} Y^n_{t_i} X^n_{t_i}$$

$$= \frac{\left(Y^n_{t_{i+1}} + Y_{t_i}\right)}{2} \left(X^n_{t_{i+1}} - X^n_{t_i} \right)$$

Tenemos que $\sum_{i=0}^{p_n-1} Y_{t_i^n} \left(X_{t^n_{i+1}} - X^n_{t_i} \right)$

$$\xrightarrow{\|\pi\| \to 0} \int_0^t Y_s \, dX_s \quad \text{en probabilidad}$$

por prop 5.9, ya que X_s es semimartingala continua y Y_s es proceso adaptado con caminos continuos por ser semimartingala continua

Y por otro lado $\sum_{i=0}^{p_n-1} \frac{\left(Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i}\right)}{2} \left(X^n_{t_{i+1}} - X^n_{t_i} \right)$

$$\xrightarrow{\|\pi\| \to 0} \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t$$

en probabilidad. Esto último al usar Prop 4.21.

Así, vemos como cada uno de los dos términos en los que se puede descomponer el sumando inicial converge a los términos deseados. Y como suma de v.a que converge en probabilidad converge en prob, se concluye

5) El siguiente ejercicio generaliza parcialmente la desigualdad L^p de Doob para martingalas en tiempo discreto.

a) Sea X_n, $n \in \mathbb{N}$ una martingala. Si ϕ es una función en $\mathbb{R}_+$ creciente, continua por la derecha y tal que $\phi(0)=0$, muestre que

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\sup_{n\leq N}|X_n|\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_N|\int_0^{\sup_{n\leq N}|X_n|}\lambda^{-1}\,d\phi(\lambda)\right]$$

Por desigualdad maximal,

$$P\left(\sup_{n\leq N}|X_n| > a\right) \leq \frac{1}{a}\int_{\{\sup_{n\leq N}|X_n|>a\}} X_N \, dP$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} P\left(\sup_{n\leq N}|X_n| > a,\ X_n > t\right) dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\lambda a} P\left(\sup_{n\leq N}|X_n| > a\right) dt + \frac{1}{a}\int_{\lambda a}^{\infty} P(X_n > t)\,dt$$

$$\leq \lambda\, P\left(\sup_{n\leq N}|X_n| > a\right) + \frac{\lambda}{a}\int_a^{\infty} P(X_n > t\lambda)\,dt$$

$$\Rightarrow P\left(\sup_{n\leq N}|X_n| > a\right) \leq \frac{\lambda}{(1-\lambda)a}\int_a^{\infty} P(X_n > \lambda t)\,dt$$

Usando esto tenemos:

$$\mathbb{E}\left(\Phi\left(\sup_{n\leq N}|X_n|\right)\right) \leq \int_0^{\infty} \Phi'(a)\, P\left(\sup_{n\leq N}|X_n| > a\right) da$$

$$\leq \frac{\lambda}{(1-\lambda)a}\int_0^{\infty} \frac{\Phi'(a)}{a}\int_0^{\infty} P(X_n > \lambda t)\, dt\, da$$

$$= \frac{\lambda}{(1-\lambda)}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{t} \frac{\Phi'(a)}{a}\, da\right) P(X_n > \lambda t)\, dt$$

$$= \frac{\lambda}{(1-\lambda)}\, \mathbb{E}\left(|X_n| \int_0^{t} a^{-1}\, d\,\Phi(a)\right)$$

b) Tenemos $a P\left(\sup_{m\leq n} X_m > a\right) \leq \int_{\{\sup_{m\leq n} X_m > a\}} X_n\, dP$

$\forall n\in\mathbb{N}$ y $\forall a\in\mathbb{R}^+$, integrando a ambos lados en $[1,\infty[$, y dividiendo por a; obtenemos

$$\int_1^\infty P\left(\sup_{m\leq n} |X_m| > a\right) da \leq \int_1^\infty \int_{\{\sup_{m\leq n} |X_m| \geq a\}} |X_n|\, dP \,\frac{da}{a}$$

$$= \mathbb{E}\left(|X_n| \log\left(\sup_{m\leq n} |X_m|\right)\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(|X_n| \log |X_n|\right) + e^{-1}\, \mathbb{E}\left(\sup_{m\leq n} |X_m|\right)$$

Al usar la desigualdad sugerida para números reales.

Además,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{n\leq m} |X_m|\right) = \int_0^\infty P\left(\sup_{m\leq n} |X_m| > a\right) da$$

$$\leq 1 + \int_1^\infty P\left(\sup_{m\leq n} |X_m| > a\right) da$$

Así, desigualdad anterior se puede escribir como

$$(1 - e^{-1})\, \mathbb{E}\left(\sup_{m\leq n} |X_m|\right) \leq 1 + \mathbb{E}\left(|X_n| \log|X_n|\right)$$

Como $\sup_{m \geq n} |X_n|$ integrable, tomando límite

$n \uparrow \infty$ se concluye

$$\mathbb{E}\left(\sup_n |X_n| \right) \leq e \, (e-1)^{-1} \left(1 + \sup_N \mathbb{E}(|X_n| \log |X_n|) \right)$$

$\#$