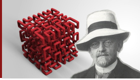
La curva de Hilbert

Michael Abarca
michaelaba.10@gmail.com

SP1312: Sistemas Dinámicos
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Junio 29, 2023

Contenidos



Introducción histórica

Construcción de la curva

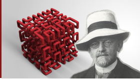
Propiedades

Aplicaciones

Referencias

Implementación en Python

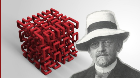
Antecedentes



- A finales de 1800, el trabajo Georg Cantor sobre cardinalidades llevó a un gran número de generalizaciones en teoría de conjuntos. Entre ellas que existe una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.
- En particular, surgió la pregunta de si existe una biyección continua. Sin embargo, usando ideas básicas de topología se puede demostrar que no es posible.
- **Resultado:** No existe biyección continua entre $[0,1]$ y $[0,1]^2$.

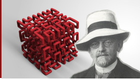
  Suponga que existe una biyección continua y sea $p \in [0,1]^2$. Note que $[0,1]^2 - \{p\}$ es conexo, sin embargo $[0,1] - \{f(p)\}$ no es conexo. Lo cual contradice que la imagen continua de un conjunto conexo es conexo.

Antecedentes



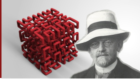
- Existe entonces una función continua sobreyectiva?
- **Definición:** Una curva que llena el espacio es un mapeo sobreyectivo en su codominio. Asumamos que el dominio es $[0,1]$ y el codominio $[0,1]^2$.
- Estas construcciones fueron muy buscadas ya que son contra intuitivas, ya que implican que una curva de no grosor puede llegar a llenar el el cuadrado unitario.

Curva de Peano

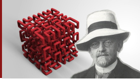


- En 1890, Giuseppe Peano definió por primera vez de forma explícita una curva continua que llena el espacio usando representación en base 3.
- A pesar que esta construcción presenta forma cerrada, fue Hilbert quien un año después dio por primera una curva que llena el espacio con mayor interpretación geométrica. En su construcción se basó fuertemente en cómo la curva maneja los subintervalos de $[0,1]$.
- Es decir, si la imagen de $[0,1]$ llena $[0,1]^2$, al particionarlo en subintervalos, cada subintervalo debería mapearse a un subcuadrado.

Curva de Hilbert - Construcción



- Consideremos la partición de $[0,1]$ en los subintervalos $[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, y $[\frac{3}{4},1]$.
- Razonablemente, esperamos que cada uno de estos subintervalos se mapeé a subcuadrados de $[0,1]^2$, donde las intersecciones de de los subintervalos se mapeen a frontera intersección de subcuadrados.
- Como la función no es necesariamente continua, se busca que subintervalos cercanos se mapeen a subcuadrados cercanos.
- El procedimiento que se va a describir se aplica de manera equivalente a cada uno de los subintervalos, dividiéndolos en 4 nuevamente teniendo un total de 16 subintervalos en segunda iteración, y en general 2^{2n} subintervalos a la iteración n-ésima, cada uno de tamaño 2^{-2n} y 2^{2n} subcuadrados con lado $\frac{1}{2^n}$



- Definiendo el mapeo, primero considere

$$\mathbb{R} \supset \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right]^2 \subset \mathbb{R}^2$$

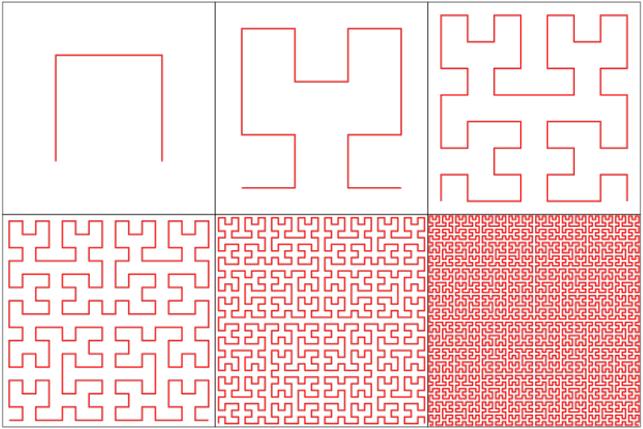
- Existen 2 posibilidades para el mapeo del siguiente subintervalo, ya sea al subcuadrado $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$ por debajo de $[0, \frac{1}{2}]^2$, o al subcuadrado $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ directamente a la derecha.
- Hilbert consideró

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

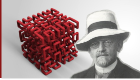
- Con estas consideraciones, se debe tener

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$$

Curva de Hilbert - Construcción gráfica



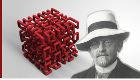
Curva de Hilbert - Definición



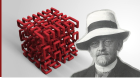
En **[Space Filling Curves, Hans]** se da la siguiente definición formal de la curva de Hilbert.

Definición: Cada $t \in [0,1]$ es determinado de manera única por una sucesión de intervalos cerrados anidados [generados por las particiones anteriores], cuyos diámetro tienden a 0. Con esta sucesión de subintervalos existe una única sucesión de subcuadrados anidados, cuyas diagonales convergen a 0. Estas subsucesiones de subcuadrados definen un único punto en $[0,1]^2$.

Propiedades

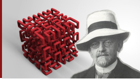


- La curva de Hilbert es el límite de la 'curva límite' construcción dada.
- Es continua.
- Curva no se interseca.
- Es una curva que llena el espacio.
- Es un fractal. Cumple propiedad de autosimilitud.
- No es diferenciable en ningún punto. (Ninguna curva que llene el espacio lo puede ser).
- Conserva bastante bien la localidad.
- Se extiende a más dimensiones, y se usa para explorar espacios de forma lineal.
- El largo de la n-ésima iteración es $2^n - \frac{1}{2^n}$.
- Tiene dimensión 2.



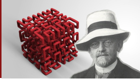
- **Comprimir Imagenes:** Se utilizan para compresión de imágenes para reducir el espacio de almacenamiento necesario. Al transformar una imagen en una secuencia unidimensional siguiendo la curva de Hilbert, se preserva la proximidad espacial entre los píxeles.
- **Indexación y búsqueda de datos:** En bases de datos espaciales, las curvas de Hilbert se utilizan para indexar y buscar datos en múltiples dimensiones. La transformación de los puntos en una curva de Hilbert permite organizarlos en una secuencia lineal. Esta propiedad de preservar la localidad es especialmente útil en aplicaciones de búsqueda geoespacial.

Bibliografía



- Cavender, Hans. Space-Filling Curves Generalizing the Peano Curve. Senior Honors Thesis, Department of Mathematics, University of North Carolina at Chapel Hill, 2019
- Sagan, Hans. Space Filling Curves. Springer-Verlag, 1994

Implementación en Python



jupyter