Michael Koller

Markov Model

March 7, 2012

PUBLIC

Contents

Chapter 1
Application of the Markov model to Life Insurance

1.1 Traditional Rating of Life Contracts

Before starting with the Markov model, I would like to summarise how traditional calculations using commutation functions are performed. Usually one starts with the probabilities of death and then calculates a decrement table starting with, say, 100000 persons at age 20.

After that one, has to calculate the different commutation functions, which I assume everybody knows by heart. These numbers depend on the persons alive and on the technical interest rate i. Only when you have done this it is (in the classical framework) possible to calculate the necessary premiums. In the following we will look a little bit closer at the calculation of a single premium for an annuity. To do this we need the following commutation functions:

$$\begin{aligned} D_x &= v \times l_x \text{where } l_x \text{ denotes the number of persons alive at age } x. \\ C_x &= v \times (l_{x+1} - l_x) \end{aligned}$$

Having this formalism it is well known that

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

From this example is easily seen that almost all premiums can be calculated by summation and multiplication of commutation functions. Such an approach has its advantages in an environment where calculations have to be performed by hand, or where computers are expensive. Calculation becomes messy if benefits are considered with guarantees or with refunds.

The Markov model here presented offers rating of life contracts without using commutation functions. It starts with calculation of the reserves and uses the involved probabilities directly. In order to see such a calculation let's review the above-mentioned example: We will use ${}_np_x$ to denote the probability of a person aged exactly x surviving for n years.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{j=0}^{\infty} {}_jp_x \times v^j \\ &= 1 + p_x \times \ddot{a}_{x+1} \end{aligned}$$

The above formula gives us a recursion for the mathematical reserves of the contract. Hence one can calculate the necessary single premiums just by recursion. In order to do this, we need an initial condition, which is in our case $V_\omega = 0$.

The interpretation of the formula is easy: The necessary reserve at age x consists of two parts:

1. The annuity payment, and
2. The necessary reserve at age x+1. (These reserves must naturally be discounted.)

It should be pointed out that the calculation does not need any of the commutation functions; only p_x and the discount factor v are used. As a consequence this method does not produce the overheads of traditional methods.

In the following paragraphs the discrete time, discrete state Markov model is introduced and solutions of some concrete problems are offered.

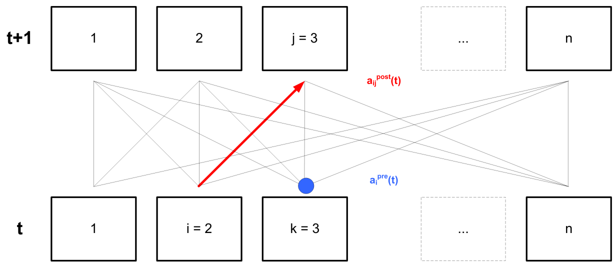
At this point, it is necessary to stress the fact that the following frame work can be used, with some modifications, in an environment with stochastic interest. But as we are limited in space and time we have to restrict ourselves to deterministic constant discount rates.

1.2 Life Insurance considered as Random Cash flows

The starting point of the Markov model is a set of states, which correspond to the different possible conditions of the insured persons. In life insurance the set of states usually consists of alive, dead. The set of states will be denoted by S.

The second point which originates from the life contract has to do with the so-called contractual functions which depend on the states and the time. Hence the structure of a generalised life contract can be thought of:

Contractual situation between time t and time $t + 1$



From the above diagram it can be seen that a finite number of states is considered, and that for

each transition $i \to j$ two different sums are paid, namely $a_{ij}^{\text{Post}}(t)$ at the end of the considered time interval and $a_i^{\text{Pre}}(t)$ at the beginning of it. It is clear that the value of the payment stream $a_{ij}^{\text{Post}}(t)$ has to be discounted by v in order to be compatible with $a_i^{\text{Pre}}(t)$. Probably it is worth remarking that the use of the two payment streams $a_i^{\text{Pre}}(t)$ and $a_{ij}^{\text{Post}}(t)$ eases the solution of things like payments during the year and the distinction between lump sums (generally payable at the end of the period) and annuities (at the beginning). Finally it must be said that premiums payable to the insurer can (not must (!)) be considered as benefits with the opposite sign.

Until now we have defined the sums which are payable if a certain insured event occurs. Now there has to be a probability law in order to rate the different transitions. In the following we denote by $p_{ij}(t, t+1)$ the probability of transition at time t from state $i \to j$. Hence in the language of the above diagram there is one transition probability assigned to each line between two states.

So summarising a Markov life insurance model consists of the following:

S	A finite state space (set).
$((p_{ij}(t))_{(i,j)\in S^2})_{t\in(1,2,\dots\omega)}$	The transition probabilities describing the Markov chain X_t on S.
$((a_i^{\text{Pre}}(t))_{i\in S})_{t\in(1,2,\dots\omega)}$	The prenumerando benefits relating, paying at the beginning of the corresponding period.
$((a_{ij}^{\text{Post}}(t))_{(i,j)\in S^2})_{t\in(1,2,\dots\omega)}$	The postnumerando benefits relating, paying at the end of the corresponding period, if a transition $i \to j$ happens.
$((v_i(t))_{i\in S})_{t\in(1,2,\dots\omega)}$	The yearly discount rate from $[t, t+1[$. We have $v_t = \sum_{j\in S} I_j(t)\, v_i(t)$.

1.3 Reserves, Recursion and Premiums

One of the most important quantities in actuarial science is the prospective reserve, as the insurer must have this amount of money for each policy. Therefore the concept of the prospective reserve is known to all actuaries. It is defined to be the present value of the future cash flow A given the information at present. Formally we write

$$V_j^+(t, A) := E[V(t, A \times \chi_{]t,\infty]}) \,|\, X_t = j],$$

(where j denotes the state at time t). This notation tells us, that the reserve depends heavily on the state of the policy.

In the context of the above we have

$$\begin{aligned}
\Delta A(t) &= \sum_{j\in S} I_j(t) \times a_i^{\text{Pre}}(t) + \sum_{(i,j)\in S\times S} \Delta N_{ij}(t) \times a_{ij}^{\text{Pre}}(t),\\
A(t) &= \sum_{k\le t} \Delta A(k),\\
\Delta V(t, A) &= v(t)\Delta A(t),\\
&= v(t)\left[\sum_{j\in S} I_j(t) \times a_i^{\text{Pre}}(t) + \sum_{(i,j)\in S\times S} \Delta N_{ij}(t) \times a_{ij}^{\text{Pre}}(t)\right],\\
v(t) &= \prod_{\tau\le t}\left[\sum_{j\in S} I_j(\tau) \times v_j(\tau)\right].
\end{aligned}$$

The direct calculation of the necessary reserves for the different states is not too easy if you consider a general time continuous Markov model. An advantage of this model is the existence of a powerful backwards recursion. The following formula (Thiele difference equation) allows the recursive calculation of the necessary reserves and hence of the necessary single premiums:

$$V_i^+(t) = a_i^{Pre}(t) + \sum_{j\in S} v_i(t)\, p_{ij}(t)\big\{a_{ij}^{Post}(t) + V_j^+(t+1)\big\}. \tag{1.1}$$

The interpretation of the formula is almost the same as in the trivial example at the beginning. In principle the present reserve consists of payments due to the different possible transitions and the discounted values of the future necessary reserves. It can be seen that the above recursion uses only the different benefits, the probabilities and the discount factor. In order to calculate the reserve for a certain age one has to do a backwards recursion starting at the expiration date of the policy. For annuities this is usually the age ω when everybody has died. Starting the recursion it is necessary to have boundary conditions, which depend on the payment stream at the expiration date. Usually the boundary conditions are taken to be zero for all reserves. It should be pointed out that one has to do this recursion for the reserves of all states simultaneously.

After the calculation of the different reserves one can naturally determine the corresponding necessary single premiums by the principle of equivalence.

We want to end this section with a short proof of the above mentioned Thiele recursion:

We know that $A(t) = \sum_{k \leq t} \Delta A(k)$ and also that

$$\Delta V(t, A) = v(t) \left[\sum_{j \in S} I_j(t) \times a_i^{\text{Pre}}(t) + \sum_{(i,j) \in S \times S} \Delta N_{ij}(t) \times a_{ij}^{\text{Pre}}(t) \right].$$

Hence we have

$$\begin{aligned} V_i^+(t) &= \frac{1}{v(t)} \mathbb{E} \left[\sum_{\tau=t}^{\infty} v(\tau) \times \Delta A(\tau) \,|\, X_t = i \right] \\ &= \frac{1}{v(t)} \mathbb{E} \left[\sum_{j \in S} I_j(t+1) \times \sum_{\tau=t}^{\infty} v(\tau) \times \Delta A(\tau) \,|\, X_t = i \right], \end{aligned}$$

remarking that $\sum_{j \in S} I_j(t+1) = 1$. If we now consider all the terms in $\Delta A(t)$ for a given $I_j(t+1)$ for $j \in S$, it becomes obvious that the Markov chain changes from $i \to j$ and in consequence only $N_{ik}(t)$ increases by one for $k = j$. If we furthermore use the projection property and the linearity of the conditional expected value and the fact that $\mathbb{E}\left[I_j(t+1) \,|\, X_t = i\right] = p_{ij}(t, t+1)$, together with the Markov property, we get the formula if we split $V_i^+(t)$ as follows:

$$\begin{aligned} V_i^+(t) &= \frac{1}{v(t)} \mathbb{E} \left[\sum_{\tau=t}^{\infty} v(\tau) \times \Delta A(\tau) \,|\, X_t = i \right] \\ &= \frac{1}{v(t)} \mathbb{E} \left[\left\{ \sum_{\tau=t}^{t} + \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \right\} v(\tau) \times \Delta A(\tau) \,|\, X_t = i \right]. \end{aligned}$$

Doing this decomposition we get for the first part:

$$\text{Part}_1 = a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in S} v_i(t)\, p_{ij}(t) a_{ij}^{Post}(t),$$

and for the second:

$$\text{Part}_2 = \sum_{j \in S} v_i(t)\, p_{ij}(t) V_j^+(t+1).$$

Adding the two parts together we get the desired result:

$$V_i^+(t) = a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in S} v_i(t)\, p_{ij}(t) \big\{ a_{ij}^{Post}(t) + V_j^+(t+1) \big\}.$$

More concretely we have

$$\begin{aligned}
V_i^+(t) &= \frac{1}{v(t)} \mathbb{E}\left[\sum_{j \in S} I_j(t+1) \times \sum_{\tau=t}^{\infty} v(\tau) \times \Delta A(\tau) \,|\, X_t = i \right] \\
&= a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in S} \mathbb{E}\left[I_j(t+1) \times \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{v(\tau)}{v(t)} \times \Delta A(\tau) \,|\, X_t = i \right] \\
&= a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in S} \mathbb{E}\Bigg[I_j(t+1) v_i(t) \Bigg\{ a_{ij}^{Post} + \\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg[\sum_{\tau=t+1}^{\infty} \frac{v(\tau)}{v(t+1)} \times \Delta A(\tau) \Bigg| X_t = i, X_{t+1} = j \Bigg] \Bigg\} \Bigg| X_t = i \Bigg] \\
&= a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in S} v_i(t)\, p_{ij}(t) \big\{ a_{ij}^{Post}(t) + V_j^+(t+1) \big\}.
\end{aligned}$$

We remark that this section can only be a short introduction to this topic and we refer to [**?**] for a more extensive discussion.

Chapter 2
Beispiele und Probleme aus der Praxis

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel wollen wir einige Probleme aus der Praxis genauer untersuchen. Zudem dienen die Beispiele dazu, die Möglichkeiten des Markovmodells zu illustrieren und ein paar Tricks für die Modellierung aufzuzeigen. Angesichts der Tatsache, dass in der Praxis hauptsächlich das diskrete Modell verwendet wird, wollen wir die Beispiele auf diesem Modell aufbauen.

Neben den Gegebenheiten, welche durch das Modell induziert werden, müssen auch die Usanzen, welche aus der Praxis resultieren, beachtet werden. Dies hängt einerseits damit zusammen, dass man ein Modell anstrebt, welches auch die Vergangenheit abbilden kann. Andererseits ist es oft so, dass bestimmte Formeln aufgrund von Abmachungen fixiert sind. So kommt es nicht von ungefähr, dass wir in diesem Kapitel auch gegebene Formeln mittels der Vertragsfunktionen nachvollziehen wollen.

2.2 Unterjährige Zahlungen

Als Erstes wollen wir uns dem Problem der unterjährigen Renten zuwenden. Um dieses Problem zu verstehen, muss man wissen, dass die in der Praxis betrachtete Zeitdifferenz normalerweise 1 Jahr beträgt. Andererseits werden Altersrenten oft unterjährig ausbezahlt. Wir wollen im Folgenden eine $4/4$ vorschüssige Altersrente betrachten. Dies bedeutet, dass der Versicherungsnehmer alle 3 Monate eine Rente der Höhe $\frac{1}{4}$ erhält. Wir nehmen für den Moment an, dass die Sterbewahrscheinlichkeit für dieses Jahr q_x beträgt, und dass die Sterbewahrscheinlichkeit $q_x^{[4]}$ für das Vierteljahr dem folgenden Gesetz folgt:

$$(1 - q_x^{[4]})^4 = 1 - q_x.$$

Dies bedeutet, dass die Sterbeintensität während des ganzen Jahres konstant ist. Im zeitdiskreten Modell, bei welchem wir einen Zeitschritt von 3 Monaten voraussetzen, ist die laufende, vorschüssige Rente durch die folgende Vertragsfunktion gegeben:

$$a_*(t) = \frac{1}{4}.$$

Andererseits gilt die Rekursion:

$$V_*(t) = a_*(t) + (1 - q_x^{[4]})v^{\frac{1}{4}}\, V_*(t + \frac{1}{4}).$$

Wir leiten jetzt die Rekursion für ein ganzes Jahr her. Es gelten die folgenden Gleichungen:

$$V_*(t) = a_*(t) + (1 - q_x^{[4]})v^{\frac{1}{4}}\, V_*(t + \frac{1}{4})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_*(t) \times \sum_{k=0}^{3} \left((1 - q_x^{[4]}) v^{\frac{1}{4}} \right)^k + (1 - q_x) v \, V_*(t+1) \\
&= a_*(t) \times \frac{1 - (1 - q_x) v}{1 - \left((1 - q_x^{[4]}) v^{\frac{1}{4}} \right)} + (1 - q_x) v \, V_*(t+1) \\
&\approx \frac{5}{8} + (1 - q_x) v \left(\frac{3}{8} + V_*(t+1) \right),
\end{aligned}
$$

wobei wir bei dem letzten Schritt die Taylorentwicklung von f um $z = 1$ benutzt haben:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{4} \left(1 + z^{0.25} + z^{0.50} + z^{0.75} \right), \\
f(1) &= 1, \\
\frac{d}{dz} f(z)|_{z=1} &= \frac{3}{8}, \\
f(z) &\approx 1 + \frac{3}{8} (z - 1) \\
&= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} z.
\end{aligned}
$$

Aus dem obigen Beispiel haben wir gesehen, wie unterjährige Zahlungen in einem Modell mit Zeitschrittweite 1 Jahr behandelt werden können. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die oben hergeleitete Approximation genau derjenigen entspricht, welche normalerweise in einem Modell mit Kommutationszahlen benutzt wird. Weiterhin soll angemerkt werden, dass sich die obigen Überlegungen vollständig auf Versicherungen auf zwei Leben usw. übertragen lassen.

Exercise 1 *1. Wie kann das obige Verfahren bei einem Zeitintervall von 1 Jahr auf eine anwartschaftliche Invalidenrente mit 3 Monaten Wartefrist übertragen werden?*

2. Berechnen Sie die entsprechenden Approximationen für eine sofort beginnende, vierteljährlich vorschüssige Altersrente auf zwei Leben (für den Zustand $**$).

3. Das obige Beispiel kann auch gelöst werden, indem man versucht, die exakte Lösung in zwei Terme der Form $(1 - q_x)$ bzw. v zu entwickeln. Wie lautet die Lösung in diesem Fall?

Beachten Sie, dass es bei dem obigen Vorgehen nicht unbedingt erforderlich ist, dass alle unterjährigen Zahlungen dieselbe Höhe haben.

Example 2 *Im folgenden Beispiel berechnen wir den Fehler des Deckungskapitals, welcher durch die Approximation für eine vierteljährlich vorschüssige Rente entsteht. Die Sterbewahrscheinlichkeiten entsprechen (**??**). Die Resultate der Berechnung finden sich in Tabelle 2.1. Hieraus ist ersichtlich, dass der Fehler für den normalen Altersbereich unter 85 Jahren sehr klein bleibt.*

2.3 Garantierte Renten

Als Nächstes wollen wir uns kurz dem Problem der garantierten Renten zuwenden. Dieser Typ der Altersrente erfüllt das Bedürfnis, bei einem vorzeitigen Tod nicht alles zu verlieren. Dies bedeutet, dass der Versicherungsnehmer mit dem Eintritt in den Rentenbezug die garantierte Anwartschaft auf eine bestimmte Anzahl von Renten erhält. Technisch entspricht dieses Versprechen der Anpassung der Sterbewahrscheinlichkeiten für die versicherte Person während der Garantiezeit.

Dieses Problem kann jedoch auch wie folgt gelöst werden. Wir gehen hierzu von einer garantierten Altersrente (Garantiedauer ab 65 für 10 Jahre) aus, welche ab dem 65. Lebensjahr gezahlt wird. Für die normale Altersrente

Table 2.1 Fehler bei Renten durch Approximation der unterjährigen Zahlungen

x	Anteil p.a. exakt	Anteil p.a. approx.	Total exakt	Total approx.	Fehler Total
114	0.4436	0.6421	0.4436	0.6421	44.7533%
113	0.5298	0.6681	0.5808	0.7420	27.7533%
112	0.5874	0.6922	0.6915	0.8253	19.3363%
111	0.6323	0.7145	0.7973	0.9115	14.3198%
110	0.6692	0.7351	0.9033	1.0027	11.0058%
105	0.7917	0.8170	1.4893	1.5472	3.8884%
100	0.8614	0.8724	2.2214	2.2597	1.7228%
95	0.9047	0.9098	3.1358	3.1630	0.8654%
90	0.9325	0.9351	4.2484	4.2687	0.4773%
85	0.9508	0.9521	5.5575	5.5733	0.2846%
80	0.9629	0.9636	7.0436	7.0564	0.1817%
75	0.9709	0.9714	8.6713	8.6820	0.1231%
70	0.9763	0.9766	10.3937	10.4028	0.0879%
65	0.9799	0.9801	12.1588	12.1667	0.0656%
60	0.9823	0.9825	13.9156	13.9227	0.0508%
50	0.9850	0.9851	17.2341	17.2399	0.0335%

sind die nichttrivialen Vertragsfunktionen gegeben durch

$$a_*(t) = \begin{cases} 0, \text{ falls } t < 65, \\ 1, \text{ falls } t \geq 65. \end{cases}$$

Betrachtet man nun eine garantierte Altersrente, ist es nötig, den Zustand † zu unterteilen in Tod vor 65 (symbolisch: $\dagger_<$) und in Tod nach 65 ($\dagger_\geq$). In diesem Fall lauten die massgebenden Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt:

$$\begin{aligned} p_{**}(x) &= 1 - q_x, \\ p_{*\dagger_<}(x) &= \begin{cases} q_x, \text{ falls } t < 65, \\ \ 0, \text{ falls } t \geq 65, \end{cases} \\ p_{*\dagger_\geq}(x) &= \begin{cases} \ 0, \text{ falls } t < 65, \\ q_x, \text{ falls } t \geq 65, \end{cases} \\ p_{\dagger_<\dagger_<}(x) &= 1, \\ p_{\dagger_\geq\dagger_\geq}(x) &= 1. \end{aligned}$$

Die nichttrivialen Vertragsfunktionen lauten nun wie folgt: (wir gehen von einer $1/1$ vorschüssigen Altersrente aus.)

$$\begin{aligned} a_*(t) &= \begin{cases} 0, \text{ falls } t < 65, \\ 1, \text{ falls } t \geq 65, \end{cases} \\ a_{\dagger_\geq}(t) &= \begin{cases} 1, \text{ falls } t \in [65; 75[, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zur Illustration betrachten wir zwei Beispiele für garantierte Renten.

Example 3 *Das folgende Beispiel soll den Verlauf des Deckungskapitals für einen 65jährigen Mann illustrieren. Wir gehen von einer 15jährigen Garantiezeit aus: (Sterblichkeit nach GRM 1995,* $1/1$*-vorschüssig,* $\omega = 121$*)*

Alter	**Einlagesatz mit Garantie**	**Einlagesatz ohne Garantie**	**Verhältnis in %**
121	*10000*	*10000*	*100 %*
120	*14694*	*14694*	*100 %*
110	*27143*	*27143*	*100 %*
100	*42031*	*42031*	*100 %*
90	*65298*	*65298*	*100 %*
80	*91840*	*91840*	*100 %*
75	*124057*	*107387*	*116 %*
70	*151184*	*124817*	*121 %*
65	*174024*	*142454*	*122 %*

BILD: AGBILD1 *Abbildung* **??** *zeigt das Deckungskapital einer temporären (20 Jahre) für 10 Jahre garantierten, sofort beginnenden Altersrente.*

2.4 Rückgewähr

Die Erlebensfallversicherungen mit Rückgewähr stellen eine besondere Art der Versicherung dar, bei welcher der Versicherungsnehmer bei dem Todesfall einen Teil der einbezahlten Prämien zurückerhält. Die Arten der Rückgewähr umfassen unter anderem folgende Typen:

1. Rückgewähr der bezahlten Prämien vor Fälligkeit der Altersrente,
2. Rückgewähr der bezahlten Prämien abzüglich der ausbezahlten Leistungen, (Vollständige Rückgewähr)
3. Rückgewähr des vorhandenen Deckungskapitals vor oder auch während der Fälligkeit der Altersrente.

Die ersten beiden Arten der Rückgewähr kann man sich als zusätzliche Todesfalldeckung vorstellen. Diese Typen der Rückgewähr werden von der Versicherungsindustrie schon seit langem verkauft. Dies ist auch der Grund, weshalb wir uns auf die dritte Art der Rückgewähr konzentrieren wollen. Auch für diese Art der Rückgewähr sind verschiedene Ausgestaltungen denkbar.

Example 4 (Rückgewähr des Deckungskapitals) *Bevor wir mit der Tarifierung dieser Versicherung beginnen, stellen wir uns die Situation vor, bei welcher im Todesfall das Deckungskapital als Rückgewährsumme versichert ist. In diesem Fall gilt die folgende Rekursion:*

$$V_*(x) = 1 + p_{**}(x)\ v\ V_*(x+1) + p_{*\dagger}(x)\ V_*(x).$$

(Wir nehmen hier an, dass das Deckungskapital für die Rückgewähr zu Beginn der Periode ausbezahlt werde.) Wir erhalten durch eine einfache Umformung die folgende modifizierte Rekursion:

$$V_*(x) = \frac{1 + p_{**}(x)\, v\, V_*(x+1)}{(1 - p_{*\dagger}(x))}.$$

Mit der obigen Formel haben wir das Problem für den Fall der Einmaleinlage gelöst. Für den Fall von periodischen Prämien ist es nötig, eine kompliziertere Gleichung zu lösen. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe numerischer Methoden.

Tabelle 2.2 zeigt einen Vergleich der Einmaleinlagen für die verschiedenen Möglichkeiten der Rückgewähr bei Altersrenten. Bei der Rückgewähr des Deckungskapitals endet diese mit der Fälligkeit der Rente. Abbildung 2.2 zeigt denselben Vergleich im Fall von prämienpflichtigen Versicherungen.

BILD: ATWBILD1

Table 2.2 Vergleich verschiedener Arten der Rückgewähr (KT 1995, $s = 65$, Mann)

Alter	Rückgewähr des DK	Rückgewähr der Einlage	Vollständige Rückgewähr
40	5.86921	5.50680	5.58673
45	6.97078	6.64053	6.78605
50	8.27910	8.01191	8.27932
55	9.83297	9.65914	10.15667
60	11.67848	11.61117	12.55151
65	13.87038	13.87038	15.69276

Example 5 *Das nächste Beispiel ist etwas ausgefallener. Versichert ist eine anwartschaftliche Witwenrente gegen Einmaleinlage mit Rückgewähr des Deckungskapitals bevor der Mann ein Alter von 85 Jahren erreicht hat, bei dem Tod der Frau oder dem gleichzeitigen (innerhalb eines Jahres) Tod des Mannes und der Frau. In diesem Fall lautet die Rekursion wie folgt:*

$$V_{(**)}(x) = \frac{v\,(p_{(**)(**)}\,V_{(**)}(x+1) + p_{(**)(\dagger *)}\,V_{(\dagger *)}(x+1))}{(1 - p_{(**)(*\dagger)}(x) - p_{(**)(\dagger\dagger)}(x))}.$$

Abbildung **??** *zeigt die Lösung der obigen Gleichungen in grafischer Form. Hierbei wird deutlich sichtbar, dass die Rückgewähr nur bis zum Alter von 85 Jahren gewährt wird. Danach wird die normale Rekursionsgleichung verwendet.*

BILD: WTWBILD1

2.5 Kapitalversicherungen mit stochastischem Zins

In diesem Abschnitt wollen wir Versicherungen mit stochastischen Zinsen betrachten. Es soll hier darum gehen, die Methoden, welche wir angetroffen haben, ein wenig zu illustrieren. Bei den verwendeten Zinsmodellen geht es in erster Linie darum, Beispiele aufzuzeigen. Sie erheben keinen Anspruch darauf, die Realität widerzuspiegeln. Wir betrachten die Gemischte Versicherung aus Beispiel **??** und gehen von einem 30jährigen Mann aus, welcher eine Todesfallsumme der Höhe 200'000 Fr. versichert hat und im Erlebensfall 100'000 Fr. erhält. Wir wollen sowohl die Versicherung gegen Einmaleinlage als auch gegen Jahresprämie betrachten.

Es sollen die folgenden Zinsmodelle betrachtet werden:

1. Ein konstanter technischer Zins von 5%.
2. Ein Zinsmodell, welches einen zyklischen Wirtschaftsverlauf modelliert.
3. Ein Random-Walk-Modell für die Zinsen.

Example 6 (Zinsmodelle) *Um die obige Aufgabenstellung lösen zu können, müssen in einem ersten Schritt die verschiedenen Zinsmodelle ausgearbeitet werden. Zum konstanten Zinssatz ist nichts zu sagen.*

Zyklischer Wirtschaftsverlauf: *Wir gehen davon aus, dass es einen achtjährigen Wirtschaftszyklus gibt und modellieren das Zinsgeschehen wie folgt:*

Zustand	**Bemerkung**	**Jahreszins**	p_{ii}	p_{ii+1}	p_{ii+2}
0	*Ausgangslage*	*5.0 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*
1	*Steigender Zins*	*5.5 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*
2	*Max. Zins*	*6.0 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*
3	*Fallender Zins*	*5.5 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*
4	*Mittelwert*	*5.0 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*
5	*Fallender Zins*	*4.5 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*
6	*Min. Zins*	*4.0 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*
7	*Steigender Zins*	*4.5 %*	*0.1*	*0.7*	*0.2*

Dem obigen Modell zufolge bewegt sich der Zins in Zyklen, wobei der Zufall für einen beschleunigten oder verlangsamten Zyklus sorgt.

Random Walk: *Es wird ein Random-Walk-Modell betrachtet mit Modifikation an den Rändern:*

Zustand	**Bemerkung**	**Jahreszins**	p_{ii-1}	p_{ii}	p_{ii+1}
0	*Min. Zins*	*4.0 %*	*0.0*	*0.5*	*0.5*
1		*4.3 %*	*0.4*	*0.2*	*0.4*
2		*4.7 %*	*0.4*	*0.2*	*0.4*
3	*Ausgangslage*	*5.0 %*	*0.4*	*0.2*	*0.4*
4		*5.3 %*	*0.4*	*0.2*	*0.4*
5		*5.7 %*	*0.4*	*0.2*	*0.4*
6	*Max. Zins*	*6.0 %*	*0.5*	*0.5*	*0.0*

Wir gehen bei beiden Modellen davon aus, dass der aktuelle Zins 5% *beträgt.*

Als Nächstes wollen wir unser Modell dahingehend vereinfachen, dass wir den technischen Zinssatz nur für den Übergang $* \rightsquigarrow *$ stochastisch modellieren. Wir verwenden für den Übergang $* \rightsquigarrow \dagger$ also stets einen technischen Zinssatz von 5%.

Example 7 (Einlagen und Prämien) *Um die Einlagen und Prämien zu berechnen, ist es notwendig, die Rekursion für die verschiedenen Zinsmodelle durchzuführen:*

Konstanter Zins *In diesem Fall beträgt die Prämie* $P = 24755/16.77946 = 1475.30$ *Fr. p.a., und es ergeben sich die folgenden Resultate:*

Alter	**Leistungs-barwert**	**Prämien-barwert**	**DK bei Einlage**	**DK bei Prämie**
65	*100000*	*0.00000*	*100000*	*100000*
64	*96510*	*1.00000*	*96510*	*95035*
60	*83599*	*4.45585*	*83599*	*77026*
55	*69535*	*7.84428*	*69535*	*57963*
50	*57483*	*10.49434*	*57483*	*42000*
45	*47219*	*12.59982*	*47219*	*28631*
40	*38554*	*14.28589*	*38554*	*17478*
35	*31305*	*15.64032*	*31305*	*8231*
31	*25974*	*16.57022*	*25974*	*1528*
30	*24755*	*16.77946*	*24755*	*0*

Zyklischer Zins: *In diesem Fall beträgt die Prämie* $P = 24630/16.65234 = 1479.07$ *Fr. p.a.*

Alter	**Leistungs-barwert** $i_t = 4\%$	**Leistungs-barwert** $i_t = 5\%$	**Leistungs-barwert** $i_t = 6\%$	**DK bei Prämie** $i_t = 5\%$
65	*100000*	*100000*	*100000*	*100000*
64	*97414*	*95624*	*96510*	*95035*
60	*83854*	*83369*	*82536*	*76004*
55	*70204*	*68904*	*68923*	*57431*
50	*57834*	*57170*	*57128*	*41766*
45	*47482*	*46996*	*46812*	*28368*
40	*38832*	*38316*	*38233*	*17323*
35	*31517*	*31130*	*31072*	*8181*
31	*26145*	*25838*	*25761*	*1509*
30	*24914*	*24630*	*24558*	*0*

Random Walk: *In diesem Fall beträgt die Prämie* $P = 24936/16.81204 = 1483.20$ *Fr. p.a.*

Alter	**Leistungs-barwert** $i_t = 4\%$	**Leistungs-barwert** $i_t = 5\%$	**Leistungs-barwert** $i_t = 6\%$	**DK bei Prämie** $i_t = 5\%$
65	*100000*	*100000*	*100000*	*100000*
64	*97414*	*96510*	*95624*	*95027*
60	*86558*	*83611*	*80775*	*77002*
55	*73429*	*69588*	*65924*	*57951*
50	*61470*	*57581*	*53886*	*42008*
45	*50934*	*47356*	*43963*	*28652*
40	*41854*	*38717*	*35746*	*17503*
35	*34154*	*31482*	*28952*	*8247*
31	*28476*	*26155*	*23959*	*1531*
30	*27171*	*24936*	*22822*	*0*

2.6 Invaliditätsversicherungen

Wir wollen die Modellierung einer temporären Invaliditätsversicherung mit dem Markovmodell betrachten. Hier müssen zumindest die Zustände $\{*, \diamond, \dagger\}$ mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

Da die Reaktivierungswahrscheinlichkeit massgebend von der abgelaufenen Dauer seit Invalidierung abhängt, ist es notwendig, den Zustand $\diamond$ weiter aufzuteilen in $\diamond_1, \diamond_2, \ldots, \diamond_n$, wobei wir mit $\diamond_k$ diejenigen Personen bezeichnen, welche zwischen $[k-1, k[$ Jahren invalid sind. Der Zustand $\diamond_n$ spielt eine besondere Rolle. Hier nehmen wir an, dass die Personen nicht mehr reaktivieren können. Die Problematik der unterschiedlichen Reaktivierungswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit zu der abgelaufenen Zeit wird durch Abbildung **??** verdeutlicht. Man kann beobachten, dass die Reaktivierungswahrscheinlichkeit kurz nach der Invalidierung noch hohe Werte annimmt, welche jedoch mit zunehmendem Alter, in welchem die Invalidität eintritt, zurückgehen.

BILD: Reakt

BILD: Invmodell

Auf der anderen Seite wird deutlich, dass die Reaktivierungswahrscheinlichkeit mit zunehmender Dauer seit der Invalidierung in etwa exponentiell abnimmt. Dieser starke Rückgang der Reaktivierungswahrscheinlichkeit, ausgehend von einem hohen Niveau, ist auch ein Grund, weshalb oft Wartefristen vereinbart werden. Diese führen bezüglich des Modells zu einer leichten Modifikation. Das Zustandsdiagramm für diesen Versicherungstyp wird in Abbildung **??** dargestellt.

Der Grund für die Aufteilung des Zustandes Invalidität ($\diamond$) in eine Menge von Zuständen $\diamond_1, \ldots, \diamond_n$ liegt in der Abhängigkeit der Reaktivierungswahrscheinlichkeit von der abgelaufenen Zeitdauer als Invalider. Hierbei wird angenommen, dass für den Zustand $\diamond_n$ keine Reaktivierung mehr stattfindet. Somit stellt sich für dieses Versicherungsmodell die Frage, wie gross n sein muss, damit der Fehler eine bestimmte Schranke unterschreitet. Um diese Grösse zu bestimmen, benutzen wir die folgenden Grundwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
p_{*\dagger}(x) &= \exp(-7.85785 + 0.01538x + 0.000577355x^2), \\
p_{*\diamond_1}(x) &= 3 \times 10^{-4} \times (8.4764 - 1.0985x + 0.055x^2), \\
p_{\diamond_k *}(x) &= \begin{cases} \exp(-0.94(k-1)) \times \alpha(x,k), & \text{falls} \quad k < n, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \\
\alpha(x,k) &= 0.773763 - 0.01045(x - k + 1), \\
p_{\diamond_k \dagger}(x) &= 0.008 + p_{*\dagger}(x), \\
p_{**}(x) &= 1 - p_{*\diamond_1}(x) - p_{*\dagger}(x), \\
p_{\diamond_k \diamond_{k+1}}(x) &= 1 - p_{\diamond_k *}(x) - p_{\diamond_k \dagger}(x).
\end{aligned}$$

Für die Berechnungen gehen wir von einer $1/1$ vorschüssigen Invalidenrente mit Vertragsfunktionen

$$a_{\diamond_k}^{\text{Pre}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x < 65, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

aus.

Das Deckungskapital für einen Aktiven und die verschiedenen n wird durch Abbildung **??** dargestellt.

BILD: Invmodell

Sucht man nun dasjenige n, für welches der Fehler für alle Altersstufen zwischen 25 und 65 kleiner als 5 % ist, ergibt sich etwa $n = 6$. Abbildung **??** zeigt die Schadenreserve für das Invaliditätsmodell mit $n = 6$ für verschiedene Alter.

BILD: Invmodell

2.7 Long Term Care

In the prior section we had a look at longevity risk and we want to focus now on long term care business. In order to do that, we need in a first instance to understand the corresponding cover and how to value it. Afterwards we want to have a look at the risks of this cover.

Assume you are a healthy person living at home, able to eat yourself, to wash yourself et cetera. Hence you are able to perform the essential daily living activities (DLA) yourself without help. Once you get older this may not be possible anymore and you are threatened to go to a care facility, which may not be so nice from your personal point of view and you would want to rather have a help at home supporting you. The long term care (LTC) cover aims to protect you from this, by paying for long term care support. How does this work in practise?

In a first step the insurer defines the main daily living activities which you should be able to perform yourself and an amount which is paid if the person is not anymore able to perform these. So technically speaking we have for example 8 DLA which are monitored and you can perform between 0 and 8 of them. One could then have a cover where you do not receive anything if your ability is 6 and above and gradually more the fewer DLAs you can perform yourself. In the concrete example the respective states are numbered from 1 to 6, where 1 indicates that everything can be autonomously and 6 represents the fact that we need help for all daily living activities. Formally the states are called $S = \{\dagger, 1, 2, 2a, 3, 3a, 4, 5, 6\}$. Assume that the benefits are given by the following table: